Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

МНОЖЕСТВА. СООТВЕТСТВИЯ. ОТНОШЕНИЯ

Методические указания
по дискретной математике
для студентов технических вузов

Омск - 2001

Составитель: Владимир Николаевич Степанов, к.ф.-м.н., доцент

В методических указаниях рассмотрены основные понятия теории множеств, соответствий, отображений, функций и отношений. Приведены многочисленные примеры, задачи и типовой расчет по рассматриваемым понятиям.

Для студентов специальности « информационные системы в экономике».

1.ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Множества. Подмножества. Операции над множествами

Понятие множества является настолько общим, что затруднительно дать для него формальное определение. Можно говорить о множестве вершин многоугольника, множестве книг и т.п. Множества будем обозначать большими буквами латинского алфавита $A, B, C, ..., X, Y$. Объекты, из которых составлено множество, называются элементами множества. Элементы множества будем обозначать малыми буквами латинского алфавита. Если a есть элемент множества A, то пишут $a \in A$ ("a принадлежит A"), если a не является элементом A, то пишут $a \notin A$ ("a не принадлежит A"). Множество, содержащее конечное число элементов называется конечным, или алфавитом, и бесконечным, если число элементов множества бесконечно. Примеры бесконечных множеств: множество Z целых чисел; множество N натуральных чисел; множество Q рациональных чисел; множество R^1 действительных чисел.

Множество A называется подмножеством множества B, если всякий элемент множества A является элементом множества B. Пишут $A \subset B$ или $A \subseteq B$; $\subset$ - знак строгого включения, $\subseteq$ - знак нестрогого включения. Например, множество A всех квадратов есть подмножество множества B всех прямоугольников. Операция включения $\subset$ обладает свойствами: $A \subset A$ (рефлексивность); если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность).

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B называются равными. Пишут A = B.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\varnothing$. Для любого множества A $\varnothing \subset A$. Например, множество действительных корней уравнения $x^2 + 2x + 7 = 0$ пусто.

Два способа задания множеств: а) перечисление элементов множества, например A={Россия, США, Франция}; б) описание характеристических свойств элементов множества. Этот способ задания множества в общем виде выглядит следующим образом: $Y = \{x \in X : \ P(x)\}$. P(*x*) - означает, что элемент *x* обладает свойством *P*.

Например, $M=\{x : x=2^n, n \in N\}$ - множество целых чисел, являющихся степенью двойки.

1.2. Операции над множествами

Пусть A и B – произвольные множества.

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\}.$$

Аналогично определяется объединение любого (конечного или бесконечного) числа множеств.

Пересечением (произведением) множеств A и *B* называется множество $A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих как *A*, так и B

$$A \cap B = \{x : x \in a \quad \text{и} \quad x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется совокупность $A \setminus B$ тех элементов из A, которые не содержатся в B

$$A \setminus B = \{x : x \in A \quad \text{и} \quad x \notin B\}.$$

Универсальное множество. Если все рассматриваемые в данной задаче множества являются подмножествами некоторого множества E, то такое множество называется универсальным. Пусть E – универсальное множество и $A \subset E$ – подмножество. Разность E\A называется дополнением множества *A* (до E) и обозначается $\overline{A}$.

$$E \setminus A = \overline{A} = \{x : x \in E \quad \text{и} \quad x \notin A\}.$$

Справедливы следующие тождества с множествами.

1. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность).
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность).
3. $(A \cup B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (дистрибутив ность).
4. $\overline{\cup A_\alpha} = \cap \overline{A_\alpha}$; $\overline{\cap A_\alpha} = \cup \overline{A_\alpha}$ (законы де Моргана).

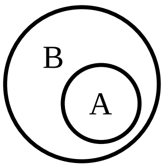
5. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$ (идемпотентность).

6. $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup E = E$; $A \cap E = A$; $A \cup \overline{A} = E$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

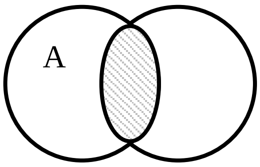
$\overline{\varnothing} = E$; $\overline{E} = \varnothing$ (свойства универсального и пустого множеств).

7. $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$ (законы поглощения).

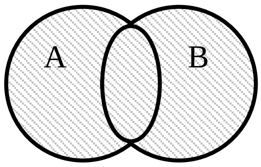
Операции над множествами наглядно иллюстрируются с помощью диаграмм Венна.



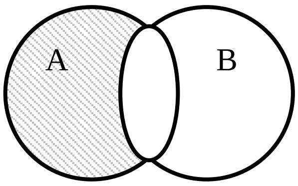
$A \subset B$



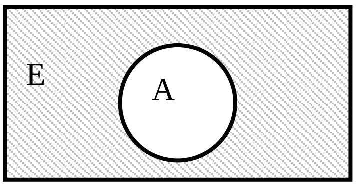
$A \cap B$



$A \cup B$



$A \setminus B$



$\overline{A} = E \setminus A$

1.3. Кортежи. Прямое произведение множеств. Проекции. График

<u>Кортеж</u> (вектор) – упорядоченный набор элементов. Элементы, образующие кортеж, называются его координатами или компонентами и нумеруются слева направо. Число координат называется длиной или размерностью кортежа (бесконечные кортежи не рассматриваем). Обозначение кортежа: $\overline{a} = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$. Кортеж может содержать одинаковые элементы (в отличие от множеств). Кортежи длины 2 называются парами; длины 3 – тройками;… длины n - n-ками («энками»). Примеры кортежей: кортеж машин; кортеж букв в слове; кортеж координат точки в пространстве; кортеж дней недели и т. д. Два кортежа $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равны, если они имеют одинаковую длину и соответствующие компоненты кортежей равны.

Прямым произведением двух множеств A и B (обозначение $A \cdot B$) называется множество, состоящее из всех пар $\langle a, b \rangle$ таких, что $a \in A$, $b \in B$, т.е.

$$A \cdot B = \{\langle a, b \rangle : a \in A, \quad b \in B\}.$$

В частности, если A=B, то прямое произведение $A \cdot A$ обозначается A^2. Аналогично определяются прямые произведения: $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m$ и A^m, $m \geq 2$. В общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$. Для прямого произведения $A \cdot B$ можно определить операцию возведения в степень минус один $(A \cdot B)^{-1} = B \cdot A$. Эта операция означает перестановку компонент каждой пары множества $A \cdot B$.

Рассмотрим кортеж $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ длины n.

Проекцией кортежа $\bar{a}$ на i–ю ось (обозначается $pr_i \bar{a}$) называется его i–ая компонента:

$$pr_i \bar{a} = a_i .$$

Проекцией кортежа $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ на оси с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k, 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ называется и через $pr_{i_1 i_2 \ldots i_k} \bar{a}$ обозначается кортеж $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} \rangle$:

$$pr_{i_1 i_2 \ldots i_k} \bar{a} = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} \rangle .$$

Пусть теперь M – множество кортежей длины s > 0. Проекцией множества M на i–ую ось называется множество проекций кортежей из M на i–ую ось.

$$pr_i M = \{pr_i \bar{a}; \bar{a} \in M\} .$$

Проекцией множества M на оси с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ называется и через $pr_{i_1 i_2 \ldots i_k} M$ обозначается множество проекций кортежей из M на оси с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Например, M ={<1, 2, 3>, <b, r, f>, <от Матфея, от Марка, от Луки>}, то $pr_1 M$ = {1, b, от Матфея}, $pr_{2,3} M$ = {<2, 3>, < r, f>, < от Марка, от Луки>}.

График - это множество пар, то есть множество, каждый элемент которого является парой. Например, множество $R^2 = R^1 \cdot R^1$ и любое его подмножество являются графиками. Пусть A и B – произвольные множества. Тогда любое подмножество $G \subseteq A \cdot B$ является графиком. Множества $pr_1 G$ и $pr_2 G$ называются соответственно областью определения и областью значений графика G.

Если $G = \{\langle a, b\rangle;\ a \in A,\ b \in B\}$- график, то график $G^{-1} = \{\langle b, a\rangle;\ b \in B,\quad a \in A\}$ называется обратным к графику G. $G^{-1} \subseteq B \cdot A = (A \cdot B)^{-1}$.

Пусть P и Q – графики. График R называется композицией графиков P и Q, если $\langle x, y\rangle \in R$ тогда и только тогда, когда существует такое z, что $\langle x, z\rangle \in P$ и $\langle z, y\rangle \in Q$. Композиция графиков P и Q обозначается через $P \circ Q$. Введенные операции над графиками обладают свойствами:

1). $\left(G^{-1}\right)^{-1} = G$;

2). $pr_1 G^{-1} = pr_2 G,\quad pr_2 G^{-1} = pr_1 G$;

3). $(P \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ P^{-1}$;

4). $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$.

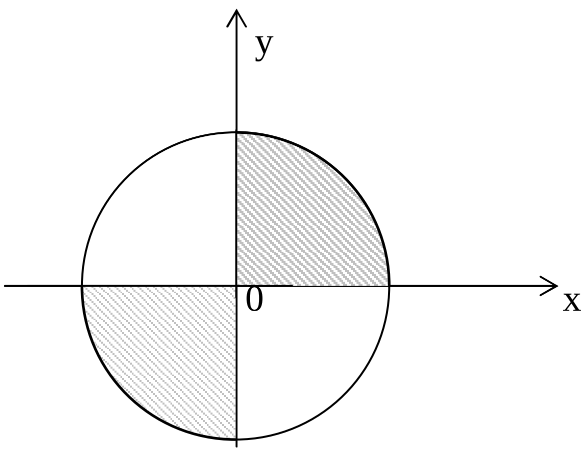
1.4. Примеры, упражнения, задачи

1.Изобразить на плоскости R^2 подмножества, заданные аналитическими выражениями:

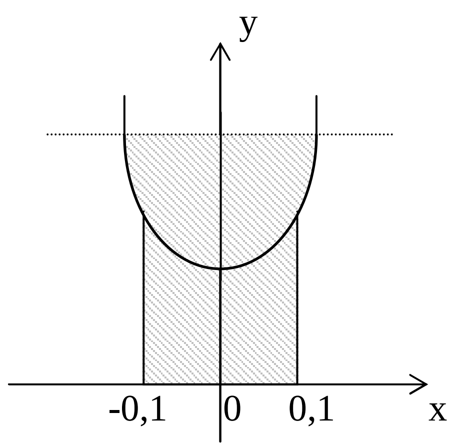
а) $\{(x, y) \in R^2 : (x^2 + y^2 < 1) \cap (x \cdot y) > 0\}$;

б) $\{(x, y) \in R^2 : (y \le 2) \cap (y \ge x^2 + 1)\} \cup \{(x, y) \in R^2 : (0 \le y \le 1 + x^2) \cap (|x| \le 0{,}1)\}$.

Решение представлено на рисунках

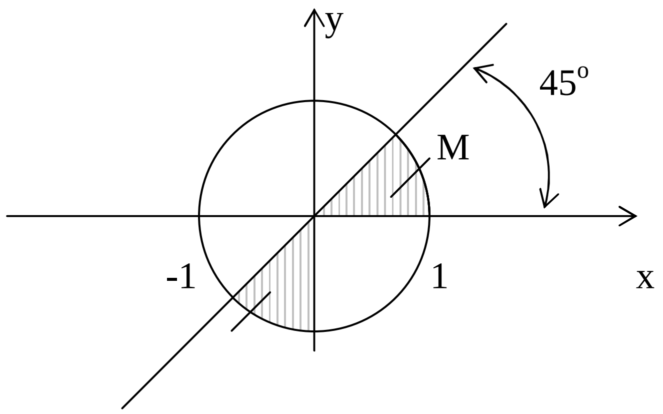


а)



б)

Найти аналитическое выражение для заштрихованного множества M:



Ответ: $M=\left\{(x,y)\in R^2:(x^2+y^2<1)\cap(xy>0)\cap(y<x)\right\}$.

3. Даны множества A={простые числа < 20}, B={нечетные числа < 20}. Найти следующие множества: а) $A\cup B$; б) $A\setminus B$; в) $B\setminus A$; г) $A\cap B$.

Решение. Множества A и B конечные и можно перечислить их элементы. A={2,3,5,7,11,13,19} , B={1,3,5,7,9,11,13,15,17,19}. Так как объединению множеств A и B принадлежат элементы, входящие в A или B ,(при этом одинаковые элементы зачисляются только один раз), то $A\cup B=\{1,2,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$. По определению в множество A\B должны входить те элементы множества A, которые не принадлежат множеству B. Поэтому $A\setminus B=\{2\}$. Аналогично множество $B\setminus A=\{1,9,15\}\cdot$, множество $A\cap B=\{3,5,7,11,13,17,19\}$.

4. Множества $X_n=\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]$; $n=1,2,...$; $Y_n=\left(0,\frac{1}{n}\right)$; $n=1,2,...$.

Найти $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}Y_n$.

Решение. Ясно, что $X_1=[-1,1]\supset X_2=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\supset...\supset X_n\supset...$, поэтому

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]=[-1,1]=X_1$.

Покажем, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}Y_n=\varnothing$. Пусть $x_0\in(0,1)$ – любое число. Тогда найдется такое $n_0\left(n_0>\left[\frac{1}{x_0}\right]\right)$, что $x_0\notin Y_{n_0}=\left(0,\frac{1}{n_0}\right)$. Поэтому $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}Y_n=\varnothing$.

5. Найти: а) $\bigcup\limits_{X\in M} X$; б) $\bigcap\limits_{X\in M} X$, если M - множество всех правильных треугольников, вписанных в данный круг.

Решение: а) пусть C - произвольная точка круга. Проведем прямую, проходящую через точку C и центр круга O. Пусть A и A' - точки пересечения окружности с прямой. Найдется правильный треугольник (одна из вершин которого A или A'), содержащий точку C, поэтому $\bigcup\limits_{X\in M} X$ совпадает с кругом; б) любая точка, лежащая в круге, вписанном в некоторый правильный треугольник X, принадлежит также любому другому правильному треугольнику. Если же точка не принадлежит вписанному в некоторый треугольник X кругу, то найдется треугольник из M, не содержащий эту точку. Следовательно, $\overset{\infty}{\cap} X$ совпадает с вписанным в любой треугольник из M кругом.

6.Используя тождества с множествами, упростить

а) $A \cup (B \setminus A)$; б) $(A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

Решение: а) прежде всего заметим, что $B \setminus A = B \cap \overline{A}$. Используя свойство дистрибутивности и свойства $A \cup \overline{A} = E$, $A \cap E = A$ получаем:

$$A \cup (B \setminus A) = A \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = (A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{A}\right) = (A \cup B) \cap E = A \cup B;$$

б) $$(A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \cap \left(\overline{B \cap C}\right) = (A \cap C) \cap \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right) =$$

$$= \left((A \cap C) \cap \overline{B}\right) \cup \left((A \cap C) \cap \overline{C}\right) = \left(A \cap C \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap \left(C \cap \overline{C}\right)\right) =$$

$$= A \cap C \cap \overline{B} \cup \varnothing = A \cup \left(C \cap \overline{B}\right) = A \cup (C \setminus B).$$

7. Для любого конечного множества A через $n(A)$ обозначим число его элементов. Показать, что

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Решение. Если $A \cap B = \varnothing$, то равенство $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ очевидно. Если $A \cap B \neq \varnothing$, то множества A и B можно представить в виде объединения непересекающихся множеств

$$A = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B), \quad B = \left(B \cap \overline{A}\right) \cup (B \cap A).$$

Тогда $\quad n(A)=n(A\cap\overline{B})+n(A\cap B)$ и $n(B)=n(B\cap\overline{A})+n(B\cap A)$.

Так как множества $A\cap\overline{B}, \overline{A}\cap B$ и $A\cap B$ попарно не пересекаются и их объединение есть множество $A\cup B$, то

$$n(A\cup B)=n(A\cap\overline{B})+n(\overline{A}\cap B)+n(A\cap B)=n(A\cap\overline{B})+n(A\cap B)+n(\overline{A}\cap B)+$$
$$+n(A\cap B)-n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

8. Из 20 человек двое изучают только английский язык, трое – только немецкий, шестеро – только французский. Никто не изучает трех языков. Один изучает немецкий и английский, трое французский и английский. Сколько человек изучают французский и немецкий?

Решение. Пусть A,N,F– множества людей, изучающих английский, немецкий, французский язык. Воспользуемся результатом предыдущей задачи для трех множеств. Легко получить, что

$$n(A\cup N\cup F)=n(A)+n(N)+n(F)-n(A\cap N)-n(A\cap F)-n(N\cap F)+n(A\cap N\cap F).$$

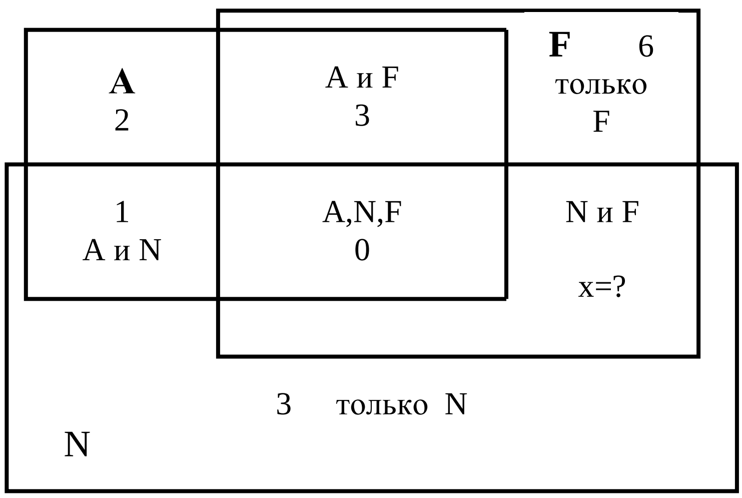
Подставляя данные задачи, получим:

$$20 = (2+1+3) + (1+3+n(N\cap F)) + (3+6+n(N\cap F))-1-3-n(N\cap F).$$

Отсюда $n(N\cap F)=5$. Здесь при вычислениях использовались представления множеств A,N,F в виде объединения непересекающихся множеств. Например,

$$A=\underbrace{\left(A\cap\overline{N}\cap\overline{F}\right)}_{\text{только англ.:2}}\cup\underbrace{\left(A\cap N\cap\overline{F}\right)}_{\text{англ. и нем.:1}}\cup\underbrace{\left(A\cap\overline{N}\cap F\right)}_{\text{франц. и англ.:3}}\cup\underbrace{\left(A\cap N\cap F\right)}_{\text{все языки :0}}.$$

Задача легко решается также с помощью диаграммы Венна



Имеем: 1+2+3+6+3+0+x=20. $x = 5$.

9. Пусть $A = \{\{a\}\}$, т.е. A – одноэлементное множество, элементом которого является одноэлементное множество $\{a\}$. Тогда $\{a\} \in A$ – верно, а $\{a\} \subseteq A$ – неверно, так как у множества A нет элемента a, но есть элемент $\{a\}$.

Верно ли, что $\{1,2\} \in \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1, 2\}$; $\{1,2\} \subset \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1, 2\}$?

10. Показать, что множество F = {множества, которые не являются элементами самих себя} = {A: A – множество и $A \notin A$ } не существует.

Решение. Допустим, что множество F существует. Тогда существует элемент G такой, что $G \in F$, либо $G \notin F$. Если $G \in F$, то по условию содержания $G \notin G$ (G не является элементом G), следовательно, $G \notin F$. Если же $G \notin F$, то G не удовлетворяет условию вхождения в F и , следовательно, $G \in F$. Следовательно, во всех случаях приходим к противоречию. Поэтому F не может существовать.

Этот пример – один из логических парадоксов XX века, придуманный Б. Расселом. Вот его широко известная формулировка. В небольшом городке цирюльник бреет всех, кто не бреется сам и не бреет никого из тех, кто бреется сам. Бреет ли цирюльник самого себя? Если цирюльник бреет самого себя, то тем самым он нарушает правило, так как бреет одного из тех, кто бреется сам. Если же цирюльник не бреет самого себя, то он опять-таки нарушает правило, так как не бреет одного из тех, кто не бреется сам. Ответ заключается в том, что существование такого цирюльника невозможно.

11. Для следующих рассуждений построить их буквенную форму и проверить с помощью диаграммы Венна, правильна ли эта форма:

а) «если все квадраты являются прямоугольниками, то некоторые прямоугольники не являются квадратами»;

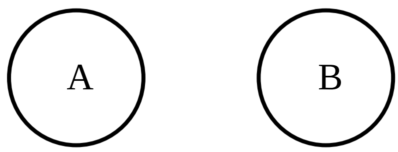
б) «если ни один кит не может летать, то ни один летающий предмет не является китом»;

в) «если некоторых хищников можно приручить и все львы хищники, то некоторых львов можно приручить».

Решение: а) обозначим x – квадрат; y – прямоугольник. Тогда буквенная форма рассуждения имеет вид: «Если все x являются y, то некоторые y не являются x». Чтобы проверить правильность этой формы, обозначим через *A* и *B* множества, содержащие соответственно элементы x и y. Тогда условие примера можно записать так: $A \subseteq B$. На диаграмме Венна это условие изображается следующим образом:

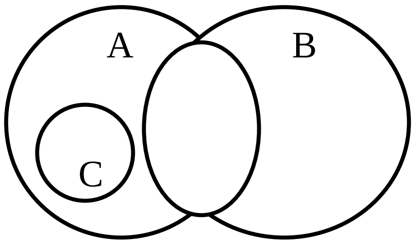
Поскольку возможен случай A=B (все прямоугольники являются квадратами), то рассуждение неправильное. В случае $A \subset B$ неправильное рассуждение приводит к истинному заключению (не всякий прямоугольник является квадратом);

б) обозначим x – кит, y – летающий предмет. В буквенной форме это рассуждение звучит так: «Если ни один x не является y, то ни один *y* не является x». Обозначим через A и B множества соответственно элементов x и y. Тогда условие примера означает, что $A \cap B = \varnothing$, и диаграмма Венна выглядит так:



В этом случае рассуждение верно.

в) обозначим x – хищник, y - животное, которое можно приручить, z - лев. Рассуждение звучит так: «Если некоторые x являются y и все z являются x, то некоторые z являются y». Пусть A,B,C – соответственно множества элементов x,y,z. Тогда условия примера означают: $A \cap B = \varnothing$, $C \subset A$. Может быть так, что $C \cap B = \varnothing$, то есть ни один z не является элементом множества B. Рассуждение неправильное.



12. Рассмотрим множество клеток шахматной доски. Каждая клетка может быть задана однозначно кортежем длины 2, например $\langle e,2\rangle$. Множество клеток шахматной доски – это прямое произведение $F\times K$, где множество $F=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, а множество $K=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

13. Пусть $R^1=\{x:-\infty<x<\infty\}$ - множество вещественных чисел.

Тогда $R^2=\{\langle x,y\rangle:-\infty<x,y<\infty\}$ - множество точек плоскости;

$R^3=R^1\times R^1\times R^1=\{\langle x,y,z\rangle:-\infty<x,y,z<\infty\}$ - множество точек трехмерного пространства.

14. Пусть $X=\{1,0\}$, $\quad Y=\{a,b\}$. Тогда

$X\cdot \text{У}=\{\langle 0,a\rangle,\langle 0,b\rangle,\langle 1,b\rangle\}$; $\qquad Y\cdot X=(X\cdot Y)^{-1}=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle\}$;

$Y^3=\{\langle a,a,a\rangle,\langle a,b,a\rangle,\langle b,a,a\rangle,\langle b,b,b\rangle,\langle b,b,a\rangle,\langle a,a,b\rangle,\langle a,b,b\rangle,\langle b,a,a\rangle\}$.

15. Если $M=\{\langle 1,2,3,4,5\rangle,\langle 2,1,3,5,5\rangle,\langle 3,3,3\rangle\}$, то выражения pr_2M и $pr_{1,3}M$ не имеют смысла, так как понятие проекции множества определено только в случае, когда кортежи, составляющие множество M, имеют одинаковую длину.

16. Кортеж $\bar{a}=\langle 1,3,2,3,5,4\rangle$. Найти $pr_2\bar{a}$; $pr_4\bar{a}$; $pr_{1,3}\bar{a}$; $pr_{1,3,5}\bar{a}$; $pr_{2,6,6}\bar{a}$; $pr_7\bar{a}$.

17. Пусть $M=\{\langle \Delta, \square, O\rangle,\langle 3,2,1\rangle,\langle в,r,g\rangle\}$. Найти pr_1M; $pr_{2,3}M$; $pr_{1,2,3}M$.

18. Пусть X,Y,Z – подмножества вещественной оси.

Упростить выражение $(Y\times X)^{-1}\cap\left(Y^2\cup X^3\cup\overline{Z}\right)\cap\overline{pr_{1,2}(X\cdot Y\cdot Z)}$.

Решение. $pr_{1,2}(X\cdot Y\cdot Z)=X\cdot Y$; $\quad (Y\cdot X)^{-1}=X\cdot Y$.

Поэтому

$$(Y\cdot X)^{-1}\cap\left(Y^2\cup X^3\cup\overline{Z}\right)\cap\overline{pr_{1,2}(X\cdot Y\cdot Z)}=(X\cdot Y)\cap\left(\overline{X\cdot Y}\right)\cap\left(Y^2\cup X^3\cup\overline{Z}\right)=\varnothing.$$

19. Пусть $M=\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$, $К=\{\{1,2\},\{3,4,5\},6,7\}$, $L=\{1,2,\{1,2\}\}$. Верно ли, что $M\subseteq К;\ \{1,2\}\in L;\ \{1,2\}\subseteq L$?

20. Изобразить на плоскости R^2 подмножества, заданные аналитическими выражениями:

а) $\left\{(x,y)\in R^2;\left(\sqrt{x^2+y^2}\le r\right)\cap(x\le 0)\cup(x>0)\cap\left(\frac{r}{2}\le y\le r\right)\right\}$;

б) $\left\{(x,y)\in R^2;\left(\left(x^2+y^2\right)\le 1\right)\cap\left(y\le -x^2\right)\cap\left(y\ge x^2+1\right)\right\}$.

21. Даны два множества $A=\{2n:n\in Z,n\ge 0\}$, $B=\{2^n:n=1,2,...\}$. Найти множества $A\cup B;\ A\cap B;\ A\setminus B;\ B\setminus A$.

22. Найти $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}X_n$, если а) $X_n=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$; б) $X_n=\left[0,\frac{1}{n}\right]$.

23. Используя тождества алгебры множеств упростить

а) $(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)$; б) $\left(\overline{A}\cup B\right)\cap A$.

24. Из 220 студентов 163 играют в баскетбол, 175 – в футбол, 24 не играют в эти игры. Сколько человек одновременно играют в баскетбол и футбол?

25. В группе 30 студентов. Все, кроме двух, имеют оценки «5» ,«4» и «3». Число студентов, имеющих оценки «5», - двенадцать, «4» – четырнадцать, «3» - шестнадцать. Трое учатся лишь на «5» и на «3», трое – лишь на «5» и на «4» и четверо лишь на «4» и на «3». Сколько человек имеют одновременно оценки «3», «4», «5»?

26. $M=\left\{(x,y)\in R^2;\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$. Найти $pr_1M,\ pr_2M$.

27. $M=\left\{(x,y)\in R^2;\ x^2+y^2=1\right\}$, $P=\left\{t;\ t\in R^1\right\}$. Что представляет собой множество $M\cdot P$?

28. $A=\{1,2,3,4,5\}$. Изобразить множество A^3. Найти $pr_{4,5}A^3$.

29. Упростить выражения:

а) $pr_2 X^2 \cap pr_3 X^3 \cdot Y \cap \overline{X \cap Y}$;

б) $\left(\left((Y \times X)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} \cap \left(X^5 \cup X^2 \cap Y^2\right) \cap \overline{pr_{2,3} X^2 \times Y}$.

30. Доказать равенства:

а) $(A \cup B) \cdot C = (A \cdot C) \cup (B \cdot C)$;

б) $(A \cap B) \cdot C = (A \cdot C) \cap (B \cdot C)$;

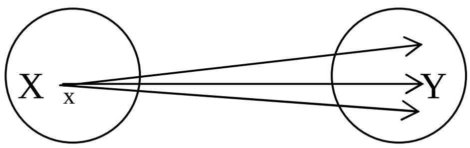
с) $(A \setminus B) \cdot C = (A \cdot C) \setminus (B \cdot C)$.

2. СООТВЕТСТВИЯ. ОТОБРАЖЕНИЯ. ФУНКЦИИ

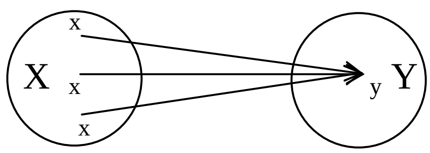
2.1. Соответствия

Пусть даны множества X и Y. Соответствием q называется тройка множеств $q = (X, Y, Q)$, где $Q \subseteq X \times Y$, Q - график соответствия. Содержательный смысл понятия «соответствия» состоит в том, что некоторые элементы множеств X и Y сопоставляются друг с другом, образуя пары $\langle x, y \rangle \in X \times Y$.

Множество X называется областью отправления соответствия q; множество Y - областью прибытия соответствия q; Q - закон (график) соответствия q; $pr_1 Q$ - область определения; $pr_2 Q$ - область значений соответствия q . Если пара $\langle x, y \rangle \in Q$, то говорят, что элемент y соответствует элементу x в соответствии q. Геометрически этот факт изображают стрелкой, направленной от x к y . Множество всех $y \in Y$, соответствующих элементу $x \in X$, называется образом элемента x в Y и обозначается Q(x); $Q(x) = \{y \in Y; \langle x, y \rangle \in Q\}$. Множество всех $x \in X$, которым соответствует $y \in Y$, называется прообразом y в X и обозначается $Q^{-1}(y)$; $Q^{-1}(y) = \{x \in X; \ \langle x, y \rangle \in Q\}$.



Образ *x*; *Q(x)*



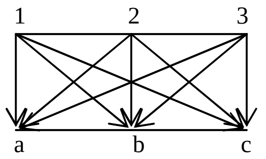
Прообраз *y*; $Q^{-1}(y)$

Рассмотрим пример. Пусть

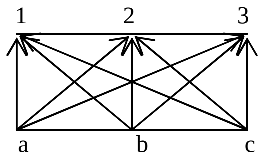
$X=\{1,2,3\}, Y=\{a,b,c\}$, тогда $Q=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 3,c\rangle\}=$

$X\cdot Y-$ закон соответствия (см. рис.) . $Q(1)=Q(2)=Q(3)=\{a,b,c\}=Y$ - образ 1,2,3.

$Q^{-1}(a)=Q^{-1}(b)=Q^{-1}(c)=\{1,2,3\}=X-$ прообраз a,b,c.



q



q^{-1}

Пусть $A\subseteq pr_1Q$, $B\subseteq pr_2Q$. Тогда $q(A)=\bigcup\limits_{x\in A}Q(x)-$ образ множества A в соответствии q , а $q^{-1}(B)=\bigcup\limits_{y\in B}Q^{-1}(y)$ - прообраз множества B в соответствии q .

Для каждого соответствия q=(X,Y,Q) определим обратное соответствие q^{-1}.

$q^{-1}=(Y,X,Q^{-1})$, где $Q^{-1}\subseteq Y\times X$. Очевидно, что $\left(q^{-1}\right)^{-1}=q$, и поэтому все образы соответствия q^{-1} совпадают с прообразом соответствия q, а все образы соответствия q^{-1} совпадают с образами соответствия q.

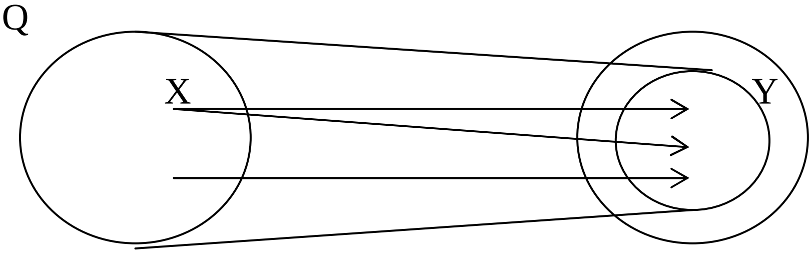
Пусть $q=(X,Y,Q)$, $Q\subseteq X\times Y$ и $p=(Y,Z,P)$, $P\subseteq Y\times Z-$ два соответствия, причем область значений соответствия q совпадает с областью определения соответствия p, т .е. $pr_2Q=pr_1P$. Тогда соответствие

$$q\circ p=(X,Z,Q\circ P),$$

где $Q\circ P\subseteq X\times Z$ композиция графиков Q и P называется композицией соответствий.

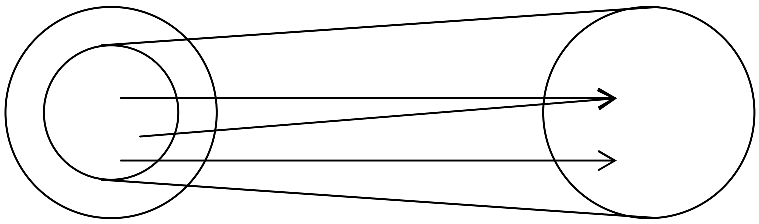
Соответствия могут характеризоваться следующими свойствами:

1. Соответствие всюду определено, если $pr_1Q=X$, т.е. $\forall x \in X \quad \exists\, y \in pr_2Q$, что $\langle x, y \rangle \in Q$



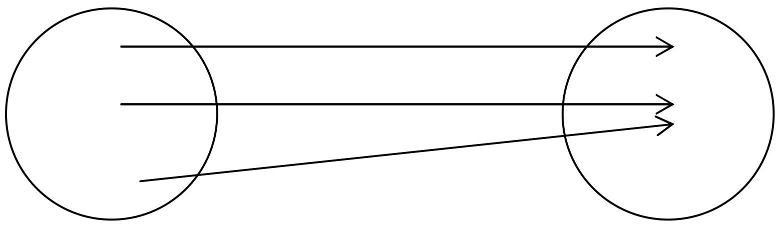
$Pr_1Q=X$ $\qquad\qquad$ $pr_2Q \subseteq Y$

2.Соответствие сюръективно, если $pr_2Q=Y$, т.е. $\forall y \in Y \quad \exists\, x \in pr_1Q$, что $\langle x, y \rangle \in Q$



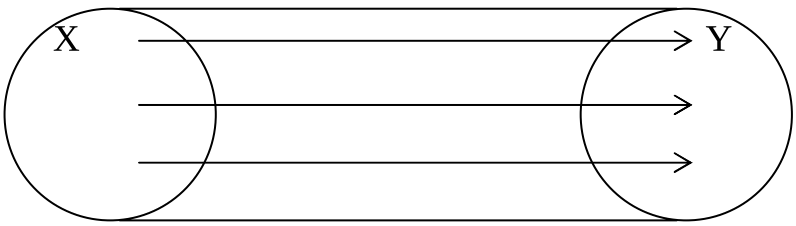
$Pr_1Q \subseteq X$ $\qquad\qquad$ $pr_2Q=Y$

3. Соответствие функционально (однозначно), если образ Q(x) любого элемента $x \in pr_1Q$ состоит из одного элемента



pr_1Q $\qquad\qquad$ pr_2Q

4. Соответствие взаимно однозначно, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и прообразом любого элемента из pr_2Q является единственный элемент из pr_1Q.



$X=pr_1Q$ $\qquad\qquad$ $Y=pr_2Q$

2.2. Отображения

Отображением называется такое соответствие $\gamma = (X, Y, \Gamma)$, $\Gamma \subseteq X \times Y$, у которого область определения $pr_1\Gamma$ совпадает с областью отправления X, т.е. отображение – это всюду определенное соответствие, $X = pr_1\Gamma$. Иначе, $\forall x \in X \;\; \exists\, y \in Y$ такое, что $\langle x, y \rangle \in \Gamma$. Пишут $\Gamma : X \to Y$.

Пусть X=Y , т.е. $\Gamma : X \to X$ - отображение множества X в себя, оно определяется парой (X,Г), $\Gamma \subseteq X \cdot X = X^2$. Равенство $\Gamma^s x = \Gamma(\Gamma^{s-1}x) = \Gamma \circ \Gamma^{s-1}x$ определяет степень отображения. Если нулевую степень отображения определить как тождественное отображение $\Gamma^{\circ} x = x$, то понятие степени отображения можно распространить и на отрицательные s. Γ^{-1} – обратное отображение; $\Gamma^{-2}x = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}x)$ и т.д.

Функции

Отображение $f : X \to Y$ называется функцией (однозначным отображением), если каждый элемент $x \in X$ имеет только один образ $y \in Y$. Иначе, отображение $f \subseteq X \times Y$ – функция, если для любых $\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \in f$ из условия $x_1=x_2$ следует $y_1=y_2$. Пишут y=f(x). Если $Y \subseteq R^1$, то функция f называется вещественнозначной. Пусть отображение $f : X \to Y$ является взаимно однозначным. Тогда определено отображение $f^{-1} : Y \to X$ такое, что $\forall y \in f(X)$ $\exists$ один элемент $x \in X$ такой, что $\langle x, y \rangle \in f$. Это отображение определяет функцию $x = f^{-1}(y)$, называемую обратной по отношению к функции $y = f(x)$.

2.4. Примеры, упражнения, задачи

1.Определить область отправления, прибытия, определения, значений и закон Q соответствия q=(X,Y,Q), представленного следующими операциями:

а) операция транспонирования матриц;

б) скалярного произведения векторов;

в) произведения матриц;

г) вычисления обратной матрицы.

Решение.

а) пусть X – множество матриц размера $m \times n$, $m, n = 1,2,\ldots$. Соответствие t сопоставляет каждой матрице $A \in X$ матрицу $A^T \in X$. Это соответствие всюду определено так как каждую матрицу можно транспонировать, сюръективно, так как для каждой матрицы $B \in X$ существует матрица $A \in X$ такая, что $B = A^T$, соответствие однозначно и взаимно однозначно, так как образ и прообраз любой матрицы единственен.

б) пусть X – множество пар векторов из R^n, $Y=R^1$. Каждой паре векторов ставится в соответствие одно число – скалярное произведение. Это соответствие всюду определено сюръективно так как любое число $y \in R^1$ можно представить как скалярное произведение некоторых векторов из X, однозначно, так как любой паре векторов соответствует только одно их скалярное произведение, не взаимно однозначно, например $\bar{a} = \langle 1,2,3 \rangle$, $\bar{b} = \langle 0,0,1 \rangle$ и $\overline{a_1} = \langle 1,2,3 \rangle$, $\overline{b_1} = \langle 1,1,0 \rangle$, но здесь $(\bar{a}, \bar{b}) = (\overline{a_1}, \overline{b_1}) = 3$.

в) пусть X – множество пар матриц, Y - множество матриц. Закон соответствия $Q \subseteq X \times Y$ сопоставляет паре матриц их произведение. Это соответствие не является всюду определенным, так как умножение матриц определено не для любых матриц; соответствие сюръективно, так как для любой матрицы C существуют матрицы A и B такие, что $A \cdot B = C$; соответствие функционально (однозначно), но не взаимно однозначно, например пусть C - заданная матрица второго порядка. Существует бесчисленное множество матриц второго порядка A и B таких, что $A \cdot B = C$.

г) пусть X=Y – множество квадратных матриц. Так как обратная матрица существует в том и только в том случае, когда ее определитель отличен от нуля, то область определения и область значений соответствия $Q \subseteq X \times Y$ состоит из множества квадратных матриц с отличным от нуля определителю. Значит, это соответствие не всюду определено, не сюръективно, но функционально (для каждой матрицы A с $\det A \neq 0$ существует только одна обратная).

Соответствие q=(E,R,Q) задается англо-русским словарем. Какими свойствами обладает это соответствие? Что будет обратным соответствием?

Решение. E - множество английских слов; R - множество русских слов; $Q \subseteq E \times R$. Соответствие Q , заданное англо-русским словарем, не всюду определено на E ; не сюръективно, так как не для каждого русского слова в словаре имеется английское слово; не функционально, так как одному английскому слову ставится в соответствие, как правило, несколько русских слов. Обратное соответствие q^{-1} сопоставляет в словаре русскому слову английское слово.

Пусть множество X – населенные пункты Сибири; Y – «слова», составленные из букв русского алфавита; $Z = \{z \in R^1; 0 \le z < \infty\}$. Определим законы соответствия: $Q \subseteq X \times Y$ - название населенного пункта; $P \subseteq Y \times Z$ - численность населения населенного пункта с названием $y \in Y$. Описать свойства соответствий. Найти p^{-1} и q^{-1}.

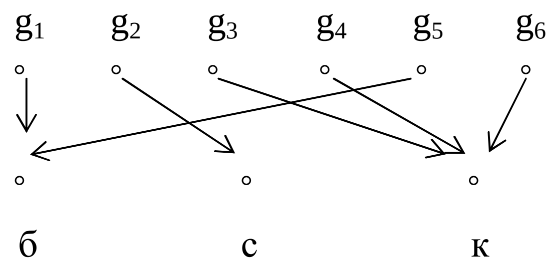
Решение. Соответствия p и q всюду определены, не сюръективны (не для каждого слова есть населенный пункт с таким наименованием и не для каждого числа $z \ge 0$ есть населенный пункт с числом жителей, равным z). Соответствия p и q не функциональны (одному населенному пункту может соответствовать несколько названий и населенному пункту с одним и тем же названием может соответствовать разное число жителей. Например, населенному пункту Ивановка может соответствовать различное число жителей). Прообразы элементов из pr_2Q и pr_2P не единственны. Соответствие $q^{-1} = (Y, X, Q^{-1})$ определяет пары (y, x), где y – «слова», x – населенные пункты. Соответствие p^{-1} = (Z,Y, P^{-1}) определяет пары (z, y), где z – неотрицательные числа; y – «слова».

4. Пусть $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$ – грани куба; *C* - {белый, синий, красный} – цвета. Закон соответствия Q – раскраска граней куба в цвета из множества *C*.

Закон соответствия Q задан следующим образом:

$Q = \{\langle g_1, \delta\rangle, \langle g_2, c\rangle, \langle g_3, к\rangle, \langle g_4, к\rangle, \langle g_5, к\rangle, \langle g_6, к\rangle\}$. Описать свойства соответствия $q = (G, C, Q)$. Найти образы и прообразы элементов.

<u>Решение.</u>



Соответствие q всюду определено, так как $pr_1 Q = \{g_1, g_2, ..., g_6\} = G$; сюръективно так как $pr_2 Q = \{\delta, c, к\} = C$. Найдем образы элементов из *G*. $Q(g_1) = \delta$, $Q(g_2) = c$, $Q(g_5) = \delta$, $Q(g_3) = Q(g_4) = Q(g_6) = к$. Так как образом любого элемента является единственный элемент из С, то отображение Q функционально (однозначно). Найдем прообразы элементов к, с, з$\in C$. $Q^{-1}(k) = \{g \in G; \langle g, к \rangle \in Q\}$, следовательно, $Q^{-1}(k) = \{g_3, g_4, g_6\}$. Аналогично $R^{-1}(\delta) = \{g_1, g_5\}$; $R^{-1}(c) = \{g_2\}$. Элементы к и с имеют больше одного прообраза, поэтому отображение не взаимно однозначно.

5. Пусть X – множество двумерных векторов. Отображение Γ: $X \to X$ задается матрицей

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Найти степени отображения Γ, Γ^s, $s = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, ...$. Указать геометрический смысл отображений Γ^s.

6. Показать, что функция $y = [x]$ не имеет обратной; показать, что функция $y = x^3$ имеет обратную и найти ее.

7.Пусть $X = Y = R^n$, $Z = R^1$, A - невырожденная квадратная матрица порядка *n* . Найти композицию соответствий $q = (X, Y, Q)$, $Q \subset X \times Y$, $y = Ax, x \in X$ и $p = (Y, Z, P)$, $P = Y \times Z$, $z = |y|$. Найти соответствия q^{-1} и p^{-1} .

<u>Решение</u>. По определению композиции соответствий и обратного соответствия имеем

$$q \circ p = (X, Z, Q \circ P); \quad Q \circ P \subseteq X \times Z; \quad z = |y| = |Ax|;$$

$$q^{-1}=\left(Y,X,Q^{-1}\right);\quad Q^{-1}\subseteq Y\times X;\quad x=A^{-1}y;$$
$$p^{-1}=\left(Z,Y,P^{-1}\right);\quad P^{-1}\subseteq Z\times Y;\quad |y|=z.$$

8.X – множество упорядоченных пар векторов в R^3; Y - множество векторов в R^3. Закон соответствия $Q\subseteq X\cdot Y$ определяет векторное произведение векторов. Описать свойства соответствия $q=(X,Y,Q)$. Найти q^{-1}.

9. X – множество упорядоченных троек векторов в R; $Y=R^1$. Закон соответствия $Q\subseteq X\cdot Y$ определяет смешанное произведение векторов. Описать свойства соответствия $q=(X,Y,Q)$. Найти q^{-1}.

10. Пусть $G=\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$– множество граней тетраэдра, C = {белый, синий, красный} - цвета. Раскраска граней (закон соответствия): одна грань белая, одна - синяя, одна - красная, четвертая грань раскрашена всеми цветами. Установить свойства этого соответствия.

11. X – множество научных публикаций. Определим отображение $(X,\Gamma), \Gamma\subseteq X^2$. Пара $\langle x,y\rangle\in\Gamma$, если публикация y ссылается на x.

Найти степени отображения $\Gamma^s, s=0,\quad \pm1,\quad \pm2,...$.

12. M – множество людей; N - множество натуральных чисел. Отображение $\alpha:M\to N$ ставит в соответствие каждому человеку его рост (округленный до целочисленного значения). Описать свойства отображения α. Найти образ $\alpha(M)$ и прообраз $\alpha^{-1}(N)$ отображения α.

12. M – множество живущих людей; L - множество всех людей. Отображение α: $M\to L$ ставит в соответствие каждому человеку его отца. Описать свойства отображения α. Найти образ $x\in M$ и прообраз $y\in L$.

ОТНОШЕНИЯ

3.1. Понятие отношения. Операции над отношениями

Пусть X - некоторое множество, $\Gamma \subseteq X \cdot X = X^2$. Отношением φ на множестве X называется упорядоченная пара (X,Г). Пишут φ=(X,Г); Г- график отношения, X - область задания отношения φ. Если пара $\langle x, y \rangle \in \Gamma$, то говорят, что «элемент x находится в отношении φ к элементу y» и пишут xφy (иногда xГy). Содержательный смысл понятия отношения состоит в том, что выбор подмножества $\Gamma \subseteq X^2$ определяет, какие пары находятся в отношении φ. Так как отношение φ связывает между собой только элементы множества $X \cdot X$, то такое отношение называется бинарным. Бинарные отношения удобно задавать квадратными матрицами. Матрица $A = \| a_{ij} \|$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_i \varphi xj; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

называется матрицей бинарного отношения на множестве $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. В случае не всюду определенного бинарного отношения некоторые из элементов матрицы могут быть не определены.

Отношение $\varphi_\varnothing$ на множестве X такое, что ни для каких пар $\langle x, y \rangle$ не выполняется x $\varphi_\varnothing$ y, называется пустым отношением. Матрица пустого отношения, заданного на конечном множестве X , является нуль матрицей.

Отношение φ_E называется отношением равенства (или диагональным отношением) , если x φ_E x для любых $x \in X$. Множество $E = \{\langle x, x \rangle, x \in X\}$ – график отношения равенства . Матрицей отношения равенства, заданного на конечном множестве X, является, очевидно, единичная матрица n-го порядка.

Отношение φ_U называется полным отношением, если для любых пар выполняется x φ_U y. График U полного отношения совпадает с множеством X^2. Все элементы матрицы полного отношения, заданного на конечном множестве X, равны единице.

Другой способ задания бинарных отношений на конечных множествах состоит в следующем. Элементы конечного множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ изображают точками на плоскости. Если $x_i \varphi x_j$, то проводят стрелку от x_i к x_j; если $x_i \varphi x_i$, то рисуют петлю, выходящую из точки x_i и входящую в точку x_i. Такой рисунок называют графом отношения.

Рассмотрим операции над отношениями.

1.<u>Обратное отношение</u>. Пусть $\varphi = (X, \Gamma)$, $\Gamma \subseteq X^2$- отношение на множестве X.

Обратное отношение φ^{-1} определяется условием: $x\, \varphi^{-1} y$ тогда и только тогда, когда $y\, \phi\, x$. Например, пусть X=R и $x\, \varphi\, y \equiv (x < y)$. Запись $x < y$ равносильна записи $y > x$, поэтому $y\, \varphi^{-1}\, x \equiv (y > x)$, то есть отношение φ^{-1} есть отношение « > ».

2.<u>Композиция (произведение) отношений</u>. Напомним, что график $R \subseteq X^2$ называется композицией графиков $P \subseteq X^2$ и $Q \subseteq X^2$, если $\langle x, y \rangle \in R$ тогда и только тогда, когда существует элемент $z \in X$ такой, что $\langle x, z \rangle \in P$ и $\langle z, y \rangle \in Q$. Композиция графиков P и Q обозначается $P \circ Q$. Композицией отношений $\varphi = (X, P)$, $P \subseteq X^2$ и $\psi = (X, Q)$, $Q \subseteq X^2$ называется отношение $\varphi \circ \psi$, график которого равен композиции графиков отношений φ и ψ, $\varphi \circ \psi = (X, P \circ Q)$. Другое обозначение для композиции отношений: $\varphi\psi$. Так, запись φ^n означает $\varphi \circ \varphi \circ ... \circ \varphi$ n раз.

3.Пусть все рассматриваемые отношения заданы на множестве X. Исходя из операций над множествами, определим операции включения, дополнения, объединения, пересечения и разности отношений

$$\varphi = (X, P), \quad \psi = (X, Q), \quad P \subseteq X^2, \quad Q \subseteq X^2.$$

<u>Включение отношений</u>: $\varphi \subseteq \psi$, если $P \subseteq Q$. <u>Дополнение отношения</u> φ (противоположное отношение): $\overline{\varphi} = (X, \overline{P})$. <u>Объединение отношений</u>: $\varphi \cup \psi = (X, P \cup Q)$. <u>Пересечение отношений</u>: $\varphi \cap \psi = (X, P \cap Q)$. <u>Разность отношений</u>: $\varphi \setminus \psi = (X, P \setminus Q)$.

3.2. Свойства отношений

Пусть $\varphi = (X, \Gamma)$- отношение на множестве X, $\Gamma \subseteq X^2$ - график отношения φ.

1. Отношение φ называется рефлексивным, если для любого $x \in X$ имеет место $x \varphi x$, то есть $E \subseteq \Gamma$, $E = \{\langle x, x \rangle; x \in X\}$ - график отношения равенства содержится в графике рефлексивного отношения. Матрица А такого отношения (в случае конечного множества X) на главной диагонали имеет единицы. Отношение равенства включается в рефлексивное отношение. Содержательные примеры рефлексивных отношений: «не больше», «не старше», «быть похожим». Отношение «быть братом» не является рефлексивным.

2. Отношение φ называется антирефлексивным , если ни для какого $x \in X$ не выполняется $x \varphi x$; иначе для антирефлексивного отношения из $x \varphi y$ следует $x \neq y$, то есть антирефлексивное отношение φ может выполняться только для несовпадающих объектов . В алгебраической записи: $\Gamma \cap E = \varnothing$.

Матрица антирефлексивного отношения имеет на главной диагонали нули. Отношения «меньше», «быть сыном» – антирефлексивны.

3. Отношение φ называется симметричным, если $x \varphi y$ влечет $y \varphi x$. Для симметричного отношения $\Gamma \subseteq \Gamma^{-1}$, так как $y \varphi x = x \varphi^{-1} y$. Матрица симметричного отношения (в случае конечного множества X) симметрична относительно главной диагонали: $a_{ij} = a_{ji}$. Содержательные примеры: «быть родственником», «иметь общую границу», «быть похожим с».

4. Отношение φ называется антисимметричным, если $x \varphi y$ и $y \varphi x$ выполняются одновременно тогда и только тогда, когда x=y. Алгебраическое условие: $\Gamma \cap \Gamma^{-1} \subseteq E$. Примеры антисимметричных отношений: отношение “ $\leq$ ” на множестве действительных чисел; отношение « быть не старше » на множестве людей.

5. Отношение φ называется асимметричным, если из двух соотношений $x \varphi y$ и $y \varphi x$ по крайней мере одно не выполняется. В алгебраической записи: $\Gamma \cap \Gamma^{-1} = \varnothing$. Примеры асимметричного отношения : «быть сыном», «$<$».

6. Отношение φ называется транзитивным, если для любых $x, y, z \in X$ из $x \varphi y$ и $y \varphi x$ следует $x \varphi z$, то есть $\Gamma^2 \subseteq \Gamma$.

Отношения «равенство», "$\leq$", «жить в одном городе» транзитивны. Отношение «иметь непустое пересечение», заданное на множестве подмножеств некоторого множества, не является транзитивным.

7. Для любого отношения φ на X отношение $\hat{\varphi}$ называется его транзитивным замыканием, если $x \hat{\varphi} y$ выполнено, когда существует цепочка элементов $y_0 = x, y_1, ..., y_n = y$ такая, что между соседними элементами этой цепочки выполнено отношение φ : $y_0 \varphi y_1$, $y_1 \varphi y_2$, …, $y_{n-1} \varphi y_n$.

Транзитивное замыкание отношения φ есть объединение всех степеней этого отношения:

$$\hat{\varphi} = \varphi \cup \varphi^2 \cup ... \cup \varphi^n \cup ... = \bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi^k .$$

Примером транзитивного замыкания отношения «быть сыном» является отношение «быть прямым потомком», являющееся объединением отношений «быть сыном», «быть внуком», «быть правнуком»,…

8. Система непустых подмножеств $\{X_1, X_2, ..., X_n, ...\}$ множества X называется разбиением множества X, если 1. $X = \bigcup_i X_i$; 2. $X_i \cap X_j = \varnothing, i \neq j$. Множества X_i называются классами разбиения.

9. Отношение φ на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Отношение эквивалентности обозначается знаком «~». Содержательный смысл отношения эквивалентности - «одинаковость», «взаимозаменяемость». Через [x] обозначается класс элементов, эквивалентных x , то есть $[x] = \{y \in X; y \sim x\}$. Тогда множество X разбивается на классы эквивалентности.

10. Отношение на множестве называется отношением нестрогого порядка (частичного порядка, частичным упорядочением), если оно рефлексивно,

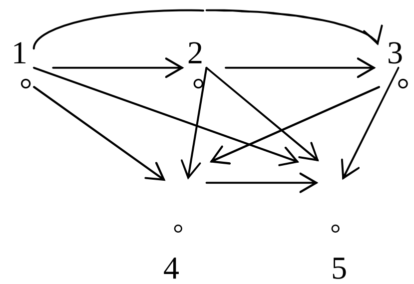
антисимметрично и транзитивно. Отношение нестрогого порядка обозначается символом « $\le$ » . Если $x \le y$, то говорят: « x предшествует y », « x меньше либо равно y », «x не превосходит y». Примерами отношений нестрогого порядка являются: отношение « $\le$ » на множествах N, Q, R^1; отношение « $\subseteq$ »на множестве подмножеств любого множества.

11.Отношение на множестве называется отношением строгого порядка, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Отношение строгого порядка обозначается символом « < ». Если x< y, то говорят: «x строго предшествует y», «x меньше y», «x строго подчинен y».

3.3. ПРИМЕРЫ, УПРАЖНЕНИЯ, ЗАДАЧИ

1. На множестве X={1,2,3,4,5} задано всюду определенное отношение φ график которого $\Gamma = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,5\rangle\}$. Это отношение выполняется для тех пар $\langle x_i, x_j\rangle \in X^2$, у которых x_i меньше x_j (отношение “ < ”). Матрица этого отношения и граф имеют вид

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

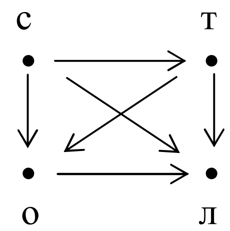


2. На множестве X={1,2,3,4,5} задать матрицами отношения а) “больше”; б) ”равно”; в) ”больше на единицу”; г) “иметь тот же остаток при делении на 2”.

3. Пусть множество X состоит из букв *с, т, о, л*. На множестве X задано отношение φ. x φ y≡ (буква x стоит левее буквы y в слове «стол»). Задать отношение φ матрицей и графом.

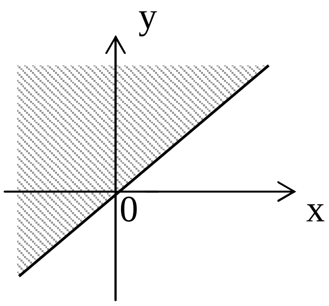
Решение. Так как с φ m=1; с φ о=1; с φ л=1; m φ о=1; m φ л=1; о φ л=1 , а в остальных парах $\langle x, y\rangle$ буква *x* стоит правее буквы *y*, то матрица и граф отношения имеют вид

	с	т	о	л
с	0	1	1	1
т	0	0	1	1
о	0	0	0	1
л	0	0	0	0



4. Пусть X=R. На X определим отношение φ. $x \varphi y \equiv (x< y)$. Изобразить график $\Gamma \subseteq X^2$ этого отношения.

Решение. График $\Gamma = \{\langle x, y\rangle; x < y\}$ отношения φ имеет вид



5. Пусть X - множество людей, на котором задано отношение $\varphi \equiv$ («быть мужем»). Определить обратное отношение.

6. Пусть на конечном множестве $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ задано некоторое отношение φ и A – матрица этого отношения. Показать, что матрицей обратного отношения φ^{-1} является матрица A^T (транспонированная).

7. Пусть X – множество людей , определить композицию отношений:

а) $\varphi \equiv$ («быть женой»), $\psi \equiv$ («быть отцом»);

б) $\varphi \equiv$ («быть братом»), $\psi \equiv$ («быть родителем»);

в) $\varphi \equiv$ («быть братом»), $\psi \equiv$ («быть отцом»);

г) $\varphi \equiv$ («быть братом»), $\psi \equiv$ («быть матерью»).

Решение. а) пусть $x\varphi\circ\psi y$. По определению композиции отношений φ и ψ должен существовать элемент $z\in X$ такой, что $x\varphi z$ и $z\psi y$, то есть x - жена z и z- отец y. Это означает, что x - мать y. Следовательно, отношение $\varphi\circ\psi\equiv$(«быть матерью»).

б) $\varphi\circ\psi\equiv$ («быть дядей»);

в) $\varphi\circ\psi\equiv$ («быть братом отца»);

г) $\varphi\circ\psi\equiv$ («быть братом матери»).

8. Множество X=N={1,2,3,…}. На X заданы отношения $\varphi\equiv$ («быть кратным трем»); ψ(«быть кратным двум»). Найти отношения: $\varphi\cup\psi$; $\varphi\cap\psi$; $\varphi\setminus\psi$; φ; ψ .

9. Пусть X=*{ф, у, н, к, ц, и, я}* . На множестве X заданы отношения φ и ψ. $x\varphi y\equiv$ (буква x стоит левее буквы y в слове «*функция*»), $\psi\equiv$(номер буквы $x\in X$ в слове «функция» меньше номера буквы $y\in X$ (нумерация в алфавите)). Найти отношения $\varphi\cup\psi$; $\varphi\cap\psi$; $\varphi\setminus\psi$; φ^2; ψ^2; $\varphi\circ\psi$; $\psi\circ\varphi$.

10. X=Z – множество целых чисел. Отношение $\varphi=("<")$, отношение $\psi\equiv(">")$. Найти отношения : $\varphi\psi$; φ^2.

11. X = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}. $x\varphi y\equiv(x<y)$, $x\psi y\equiv(x>y)$. Какие отношения выражают $\varphi\circ\psi$ и $\psi\circ\varphi$.

12. На множестве X={1,2,3,4,5} заданы отношения:

a) A=(“больше на 1”); б) B≡(“равно”); c) C≡ (“больше либо равно”);
d) $D\equiv("\le")$; e) E≡(“иметь тот же остаток при делении на 2”); f) F≡ (“кратно”);
g) $G\equiv("\ne")$.

Найти для них обратные и противоположные отношения. С помощью операций над отношениями A и B получить отношения: ”>”; C; “<”; D.

13. Доказать, что для любых отношений φ и ψ на множестве X выполняются соотношения:

а) $(\varphi\cup\psi)^{-1}=\varphi^{-1}\cup\psi^{-1}$; б) из $\varphi\subseteq\psi$ следует $\varphi^{-1}\subseteq\psi^{-1}$.

Решение. а) пусть Γ_{φ} и Γ_{ψ} - графики отношений φ и . Если $x(\varphi \cup \psi)^{-1} y$, то по определению обратного отношения $y(\varphi \cup \psi)x$, то есть пара $\langle y, x \rangle \in \Gamma_{\varphi}$ или $\langle y, x \rangle \in \Gamma_{\psi}$. Следовательно, пара $\langle x, y \rangle \in \Gamma_{\varphi}^{-1}$ или $\langle x, y \rangle \in \Gamma_{\psi}^{-1}$. Поэтому $\langle x, y \rangle \in \Gamma_{\psi}^{-1} \cup \Gamma_{\psi}^{-1}$, то есть $x\left(\varphi^{-1} \cup \psi^{-1}\right) y$, что означает включение
$(\varphi \cup \psi)^{-1} \subseteq \varphi^{-1} \cup \psi^{-1}$.

Включение $\varphi^{-1} \cup \psi^{-1} \subseteq (\varphi \cup \psi)$ доказывается аналогично;

б) включение $\varphi^{-1} \subseteq \psi^{-1}$, если $\varphi \subseteq \psi$, следует из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
x\varphi y \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & x\psi y \arrow[d, Leftrightarrow] \\
y\varphi^{-1}x \arrow[r, Rightarrow] & y\psi^{-1}x
\end{tikzcd}$$

14. $X=R^2$. Отношение φ задано так: $x\ \varphi\ y \equiv (|x-y| \geq 3)$. Составить таблицу отношения φ.

15. График отношения φ на множестве $R^{+} = \{x \in R^{1};\ x \geq 0\}$ есть некоторое множество первого квадранта $R^{+} \times R^{+}$. Каковы особенности этого графика, если отношение φ: а) рефлексивно; б) симметрично; в) транзитивно; г) отношение эквивалентности.

16. Привести примеры отношений: а) рефлексивного и симметричного, но не транзитивного; б) рефлексивного и транзитивного, но не симметричного;
в) симметричного и транзитивного, но не рефлексивного.

17. Пусть S - множество клеток шахматной доски. Отношение φ связывает клетки, которые определяются ходом коня, то есть $x\,\varphi\,y$, если из клетки x можно ходом коня попасть в клетку y за один ход. Описать свойства отношения φ.

18. Являются ли следующие отношения рефлексивными, симметричными, антисимметричными или транзитивными:

а) $X = \{1,2,3,4,5\}$, $x\,\varphi^{\pm}\,y \equiv$ ($x \pm y$ - четное число);

б) X = {множество людей}, $x\,\psi\,y$ = (x и y имеют общего предка).

19. Установить, какие из следующих отношений на N рефлексивны, антирефлексивны, симметричны, антисимметричны, транзитивны:

а) m+n - четное число; б) $m+n \le 100$; в) m+n - нечетное число;

г) $\frac{m}{n}$ - степень двойки; д) $\frac{m}{n}$ - четное число; е) $m \cdot n$ - нечетное число.

20. Построить два симметричных отношения на множестве $\{1,2,3\}$, композиция которых антисимметричное отношение

21. Пусть $X = \{1,2,3\}$ и $\Gamma = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$. Показать, что отношение $\varphi = (X, \Gamma)$ рефлексивно и симметрично, но не транзитивно.

22. Пусть $f\ : X \to Y$ - сюръективное отображение. Показать, что система M полных прообразов $f^{-1}(y)$, $y \in Y$ является разбиением множества X .

23.Пусть X – множество людей. Показать, что отношение $x\,\varphi\,y$ ≡(x старше y) на X не определяет разбиение на X.

Действительно, отец находится в отношении φ к своей дочери и, следовательно, должен быть с ней в одном классе, но дочь не находится в отношении φ к своему отцу и, следовательно, не должна быть с отцом в одном классе. Противоречие.

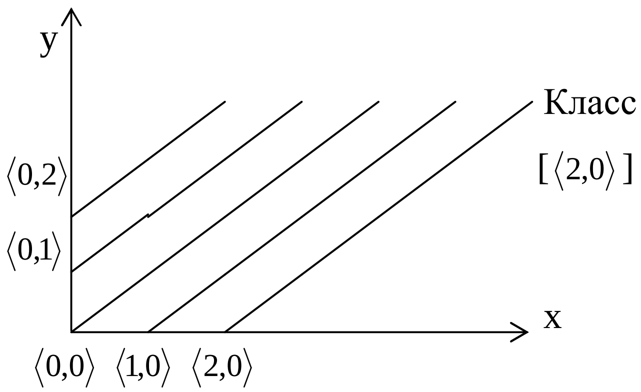
24. Пусть X - множество треугольников на евклидовой плоскости. Отношение подобия является отношением эквивалентности. Множество X разбивается на непересекающиеся классы подобных треугольников.

25. Отношение «проживать в одном доме» на множестве людей, проживающих в домах города, является отношением эквивалентности. Это отношение разбивает множество на непересекающиеся подмножества людей, проживающих в одном доме.

26. На множестве N^2 введем отношение φ: $\langle m,n\rangle \varphi \langle p,q\rangle \equiv (m+n=n+q)$. Показать, что φ – отношение эквивалентности; описать классы эквивалентности. Какой вид имеет график этого отношения ?

<u>Решение</u>. Отношение φ – рефлексивно, так как $m+n=m+n$. Отношение φ- симметрично, так как из $m+q=n+p$ следует $p+n=q+m$. Отношение φ - транзитивно, так как из $m+l=n+k$, $k+q=k+p$ следует $m+q=n+p$. Следовательно, φ есть отношение эквивалентности.

Если $\langle m,n\rangle$ - представитель класса, то класс $[\langle m,n\rangle]=\{\langle p,q\rangle; \quad q=n-m+p\}$. Точки класса $[\langle m,n\rangle]$- это целочисленные точки, лежащие на прямой $y=h-m+x$.



27. Пусть множество X - точки плоскости, $X=R^2$. Отношение φ на X определяется так: $x\,\varphi\,y \equiv (\langle x,y\rangle): (x=y) \cup (x, y - \text{целые})$). Показать, что φ – отношение эквивалентности.

28. Пусть p - натуральное число. Обозначим через S_p = {A, B, …} совокупность всех непустых подмножеств множества $\{1,2,3,...,p\}$. Введем отношение τ на S_p: $A\tau B \equiv \{A \cap B \neq \varnothing\}$. Показать, что отношение φ рефлексивно, симметрично, но не транзитивно. Такие отношения называются толерантными (сходными).

29. Отношение «≤ » на множествах N, Q, R является отношением нестрогого порядка, а отношение «<» - отношением строгого порядка.

30. Отношение «$\subseteq$» на множестве подмножеств множества X является отношением нестрогого порядка, а отношение «$\subset$» - отношением строгого порядка.

31. Отношение $m \varphi n \equiv$ (n кратно m; n, $m \in N$) является отношением нестрогого порядка.

32. Пусть X - множество русских слов. На множестве X задано отношение φ, $x \varphi y \equiv$ (слово y получается из слова x вычеркиванием нескольких букв слева и справа или только с одной стороны). Показать, что отношение φ задает на X отношение строгого порядка.

33. Обозначим через $B_p^{\ m}$ множество кортежей длины p, $x = \langle \xi_1, \xi_2, ... \xi_p \rangle \in B_p^{\ m}$, где компоненты ξ_i принимают любые целые значения от 0 до m-1. Ввести на $B_p^{\ m}$ отношения нестрогого и строгого порядков.

34. На множестве людей отношение φ, $x \varphi y \equiv$ (x старше y) является отношением строгого порядка.

35. Пусть τ и s- отношения на *N*, определяемые соотношениями: $\langle a, b \rangle \tau \langle c, d \rangle$ тогда и только тогда, когда $a \le c$ и $b \le d$; $\langle a, b \rangle s \langle c, d \rangle$ тогда и только тогда, когда $a \le c$ и $b \ge d$. Являются ли отношения τ и s отношениями нестрогого порядка?

4.ЧАСТИЧНО И ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

4.1. Основные понятия

Бинарное отношение на множестве называется отношением частичной упорядоченности, если оно удовлетворяет условиям: рефлексивности; транзитивности и антисимметричности. Для записи частичной упорядоченности употребляется символ $\le$; если $a \le b$, a и $b \in M$, то говорят «a меньше или равно b», «a предшествует b». Если $a \le b$ и $a \ne b$, то пишут $a < b$ (« *a* меньше *b*»; «*a* строго предшествует *b* ».

Бинарное отношение $<$ уже не будет рефлексивным. Отношение $\ge$ означает, что $a \ge b$ тогда и только тогда когда $b \le a$. Пусть на множестве M задано отношение частичного порядка $\le$. Элементы a, $b \in M$ называются сравнимыми, если $a \le b$ или $b \le a$. Не любые два элемента частично упорядоченного множества сравнимы. Тривиальный пример несравнимых элементов: если $a \le b$ тогда и только тогда, когда $a=b$, то различные элементы из M будут несравнимы. Частично упорядоченное множество, в котором любые два элемента сравнимы, называется линейно упорядоченным (совершенно упорядоченным).

Пусть между частично упорядоченными множествами M и M' установлено взаимно - однозначное соответствие φ, $a' = \varphi(a)$, $a \in M$, $a' \in M'$. Если из $a \le b$ следует $\varphi(a) \le \varphi(b)$ и обратно, то φ называется изоморфизмом, а сами множества M и M' изоморфными частично - упорядоченными множествами.

Пусть $(X; \le)$ - частично упорядоченное множество. Элемент $a \in X$ называется наименьшим элементом множества X, если $a \le x$ для всех $x \in X$, если же для всех $x \in X$ $a \ge x$, то элемент a называется наибольшим элементом множества X. В любом частично упорядоченном множестве может существовать не более одного наименьшего (наибольшего) элемента.

Простейшим примером частично упорядоченного множества, в котором не существует наименьшего (наибольшего) элемента, является множество вещественных чисел R с обычным отношением порядка $\le$ (меньше или равно).

Пусть $(X;\le)$ - частично упорядоченное множество. Элемент $a \in X$ называется минимальным элементом множества X, если не существует ни одного элемента $x \in X$ такого, что $x < a$. Это равносильно условию: из того, что $x \le a$ следует $x=a$. Элемент $a \in X$ называется максимальным элементом множества X, если не существует ни одного элемента $x \in X$ такого, что $a < x$ (из $a \le x$ следует $x = a$).

Множество X может содержать много различных минимальных элементов, но может также не иметь ни одного такого элемента.

Если частично упорядоченное множество имеет наименьший (наибольший) элемент, то он является единственным минимальным (максимальным) элементом.

Следующие определения вводятся для подмножества *M* множества *X*.

Пусть $(X;\leq)$ есть частично упорядоченное множество и $M \subseteq X$ - подмножество множества X. Элемент $a \in X$ называется верхней (нижней) гранью множества M, если для любого элемента $x \in M$ имеет место $x \leq a$ $(a \leq x)$. Множество M может иметь много верхних (нижних) границ. Например, X = R, $M = (0,1)$, тогда любое a < 0 – нижняя грань множества M, а любое a >1- верхняя грань множества M. Элемент $\bar{a} \in M$ называется точной верхней гранью множества M, если $\bar{a}$ - верхняя грань и $\bar{a} \leq a$ для любой другой верхней грани множества M. Элемент $\underline{a} \in M$ называется точной нижней гранью множества M, если $\underline{a}$ - нижняя грань и $a \leq \underline{a}$ для любой другой нижней грани множества M. Точная верхняя (нижняя) грань множества M обозначается sup M (inf M). Множество M имеет не более одной точной верхней (нижней) грани.

Частично упорядоченное множество $(X;\leq)$ называется вполне упорядоченным, если каждое его непустое подмножество содержит наименьший элемент. Каждое вполне упорядоченное множество $(X;\leq)$ является линейно упорядоченным, так как для любых двух различных элементов x и y множества X множество $\{x, y\}$ должно иметь наименьший элемент.

Примером линейно упорядоченного множества, но не вполне упорядоченного множества является отрезок $[0,1]$. Наименьший элемент этого множества – число 0, но его подмножество $(0,1]$ не имеет наименьшего элемента.

4.2. Примеры, упражнения, задачи

Множество S всех подмножеств некоторого данного множества M с отношением $\subseteq$ - частично упорядоченного.

Множество всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[0,1]$ с отношением f ≤ g означающим, что f(t) ≤ g(t), $t \in [0,1]$ - частично упорядоченно. Здесь несравнимыми являются, например, функции со свойствами: f(t) ≤ g(t), $t \in [0, t_0)$ и $f(t) \geq g(t)$, $t \in [t_0, 1]$.

Множество натуральных чисел N с отношением $m \leq n$, если m делится нацело на n частично упорядоченно. Например, числа $m = 7$ и $n = 3$ несравнимы.

На R^n определим отношение $x \leq y$, $x = (x_1,...x_n)$, $y = (y_{1,...}y_n)$, если $x_i \leq y_i$, I = 1,2,…n и хотя бы для одного i $x_i < y_i$. R^n с таким отношением порядка является частично упорядоченным множеством. Например, элементы (1,2,3) и (2,3,1) в R^n несравнимы.

Множество N натуральных, Q рациональных, R^1 вещественных чисел с естественным отношением $\leq$ являются линейно упорядоченными множествами.

Множество слов в словаре с лексикографическим упорядочением является линейно упорядоченным множеством.

Множество S всех подмножеств некоторого множества M имеет единственный минимальный элемент – это пустое подмножество $\varnothing$.

Множество *S* всех непустых подмножеств некоторого множества M не имеет наименьшего элемента; само множество M является наибольшим элементом и максимальным элементом; любое подмножество, состоящее из одного элемента является минимальным элементом.

Если M - конечное частично упорядоченное множество, то оно имеет единственный наибольший (наименьший) элемент, который является и максимальным (минимальным) элементом.

Если M – бесконечное частично упорядоченное множество, то множество всех его бесконечных подмножеств не имеет минимального элемента.

Промежуток $(0,1]$ не имеет наименьшего элемента и имеет наибольший элемент, равный 1.

Доказать, что если отношение φ на множестве X есть отношение частичной упорядоченности, то обратное отношение φ^{-1} также является отношением частичной упорядоченности.

<u>Доказательство</u>. По условию отношение φ: 1) рефлексивно: $\forall x \in X,\ x \varphi x$;

2) транзитивно: из φxy и $y\varphi z$ следует $x\varphi z$; 3) антисимметрично : из $x\varphi y$ и $y\varphi x$ следует $x = y$. Нужно доказать, что отношение φ^{-1} также рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

По определению обратного отношения $x\varphi^{-1}y$ тогда и только тогда, когда $y\varphi x$. Пусть φ рефлексивно, то есть $x\varphi x$; но тогда и $x\varphi^{-1}x$, следовательно, φ – рефлексивно.

Пусть $x\varphi^{-1}y$ и $y\varphi^{-1}x$. Это означает, что $y\varphi x$ и $x\varphi y$, но φ антисимметрично, поэтому $y = x$, следовательно, φ^{-1} антисимметрично.

Пусть $x\varphi^{-1}y$ и $y\varphi^{-1}z$. Это означает, что $y\varphi x$ и $z\varphi y$, но φ транзитивно и поэтому $z\varphi y$, то есть $y\varphi^{-1}z$, следовательно, φ – транзитивно. Поэтому φ^{-1} является отношением частичного порядка.

13. Доказать, что если f есть изоморфизм между частично упорядоченными множествами $(X;\leq)$ и $(X; \leq')$, то $x \leq y$ равносильно $f(x) \leq' f(y)$.

14. Пусть F_n есть система всех подмножеств множества N, имеющих не более n элементов (n – фиксированное положительное целое число), а F – совокупность всех конечных подмножеств множества N. Доказать, что относительно включения $\subset$:
а) каждый элемент множества F_n, имеющий n элементов, максимален; б) множество F не имеет максимальных элементов.

15.Пусть X – множество всех квадратов, лежащих внутри некоторого прямоугольника с длинами сторон a и b, не являющегося квадратом. Каковы максимальные элементы этого множества относительно включения?

Решение. По определению максимального элемента максимальным элементом будет такой квадрат K из множества X квадратов, если не существует ни одного квадрата L такого, что $K \subset L$ (или из того, что $K \subseteq L$ следует $K = L$). Поэтому максимальными элементами будут квадраты со стороной min (a,b).

16.Доказать, что для линейно упорядоченного множества X понятия наименьшего (наибольшего) и минимального (максимального) элемента совпадают.

Доказательство. Пусть a – минимальный элемент, тогда из $x \leq a$ следует, что $x = a$. Поэтому $\forall\ x \neq a \quad a \leq x$, так как любые элементы сравнимы (линейная упорядоченность), но это означает, что a – наименьший элемент. Обратное очевидно. Если частично упорядоченное множество имеет наименьший элемент a, $a \leq x \quad \forall x \in X$, то ни для одного x не выполняется $x < a$.

17. Показать, что каждое конечное частично упорядоченное множество обладает максимальным элементом.

18. Показать, что в конечном множестве имеется наименьший элемент тогда и только тогда, когда у него есть ровно один минимальный элемент.

19. На множестве N отношение ≤ означает: $m \leq n$, если n делится на m. Доказать, что это отношение является отношением частичного порядка на N и любая пара чисел из N имеет относительно этого упорядочения sup и inf.

Доказательство. Пусть $m \leq n$, то есть n делится на m. Например, $6 \leq 24$. Покажем, что ≤ отношение частичного порядка. а) рефлексивность: $m \leq m$ - это очевидно; б) транзитивность: пусть $m \leq n$ и $n \leq s$, то $m \leq s$. Действительно, если $\frac{m}{n} = k$, $\frac{s}{n} = r$, то $\frac{s}{m} = \frac{s}{n}\frac{n}{m} = k \cdot r$, то есть s делится на m. в) антисимметричность: если $m \leq n$ и $n \leq m$, то $n = m$. Итак, ≤ есть отношение частичного порядка.

Пусть m и n – любая пара чисел из N; a – верхняя грань чисел m и n, если $m \leq a$ и $n \leq a$, то есть a делится на m и a делится на n. Тогда sup(m,n) = НОК(m,n). Аналогично inf(m,n) =НОД(m,n).

20 .Определим в $N^2=N\times N$ отношение φ условием: $\langle m, n\rangle\ \varphi\ \langle m_1, n_1\rangle$ означает, что $m \leq m_1$ и $n \leq n_1$. Показать, что: а) отношение φ является частичным упорядочением; б) в частично упорядоченном множестве $(N^2;\varphi)$ любое непустое подмножество обладает минимальным элементом.

5. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА.

5.1. Счетные и несчетные множества. Сравнение мощностей

Определение 1. Если между множествами X и Y можно установить взаимно - однозначное соответствие, то множества X и Y называются эквивалентными.

Приведем примеры эквивалентных множеств.

1. 1. Два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое количество элементов.

2. Множество N натуральных чисел и множество M положительных четных чисел эквивалентны. Взаимно однозначное соответствие между элементами множеств устанавливается следующим образом:

N: 1 2 3 4…n …

M: 2 4 6 8…2n …

3. Множества (0,1) и $(-\infty,\infty)$ эквивалентны. Взаимно однозначное соответствие устанавливается функцией $y = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{2}$.

Определение 2. Множество, эквивалентное множеству всех натуральных чисел N=$\{1,2,3,...\}$, называется счетным.

Примеры счетных множеств.

4. Множество Z всех целых чисел. Взаимно однозначное соответствие между Z и N устанавливается по следующей схеме:

N: 1 2 3 4 5 6 7 …

M: 0 -1 1 2 -2 3 -3…

5. Множество $M = \{2^n; n \in N\}$ степеней числа 2^n. Взаимно однозначное соответствие: $n \leftrightarrow 2^n$.

6. Множество всех рациональных чисел. Пусть $\frac{p}{q}$- рациональное число, записанное как несократимая дробь. Число $h = |p| + |q|$ называется высотой

рационального числа $\frac{p}{q}$. Например, число $\frac{0}{1}=0$ имеет высоту $h=|0|+|1|=1$; $-1=\frac{1}{-1}$ - имеет высоту $h=|1|+|-1|=2$. Число дробей с данной высотой конечно. Пронумеруем рациональные числа по возрастанию высоты, при этом любое рациональное число получит свой номер.

<u>Свойства счетных множеств.</u>

1) всякое подмножество счетного множества конечно или счетно;

2) объединение любого конечного или счетного множества счетных множеств есть счетное множество.

3) всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

<u>Теорема Кантора</u>. Множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей несчетно, то есть отрезок $[0,1]$ несчетен.

Примеры множеств, эквивалентных отрезку $[0,1]$.

7. Любой отрезок $[a,b]$.

8. Любой интервал (a,b). Установим взаимно-однозначное соответствие между $(0,1)$ и $[0,1]$. Числу 0 из отрезка $[0,1]$ поставим в соответствие число $\frac{1}{3}$ из интервала $(0,1)$; числу $1\in[0,1]$ - число $\frac{1}{2}\in(0,1)$; числам $\frac{1}{n}\in[0,1]$ поставим в соответствие числа $\frac{1}{n+2}\in(0;1)$. Остальным числам $x\in[0,1]$ поставим в соответствие числа $x\in(0;1)$.

Относительно двух эквивалентных множеств говорят, что они имеют одинаковую мощность. Мощность множества X обозначается $|X|$. Мощность конечного множества совпадает с числом элементов множества. Мощность пустого множества принимается равной нулю. Мощность счетного множества обозначается символом χ_0 («алеф нуль»). Про множества эквивалентные отрезку

$[0{,}1]$ говорят, что они имеют мощность континуума . Эта мощность обозначается символом c или χ («алеф»).

Любые два множества X, У сравнимы между собой по мощности, то есть либо $|X|<|У|$, либо $|X|=|У|$, либо $|X|>|У|$. Для множества любой мощности можно построить множество большей мощности, затем еще большей и так далее, получая неограниченную шкалу мощностей.

Теорема. Пусть X – некоторое множество и S - множество, элементами которого являются всевозможные подмножества множества X. Тогда |S| > |X|.

5.2. **Примеры, упражнения, задачи**

1. Найти множество всех подмножеств множества $A=\{a, в, c, d\}$. Какова его мощность?

2. Доказать, что мощность множества перестановок из n различных элементов равна n!.

3. Доказать, что множество простых чисел счетно.

Доказательство. Пусть $P=\{1,3,5,....\}$- множество простых чисел. Очевидно, что $P\subset N$, поэтому $|P|\le\chi_0$. Предположим, что простых чисел конечное число $\{p_1, p_2,..., p_m\}$. Тогда число $p=p_1\cdot p_2\cdot ...\cdot p_m+1$ - простое. Противоречие, следовательно, $|P|=\chi_0$.

4. Доказать, что множество кортежей $\langle m, n\rangle$, $m, n\in N$ длины два – счетно.

5. Установить взаимно однозначное соответствие между промежутком $[0{,}1)$ и точками окружности радиуса R.

Решение. Формула $t=2\pi\tau,\ \tau\in[0{,}1)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между промежутками $[0{,}1)$ и $[0{,}2\pi)$, а формулы $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками промежутка $[0{,}2\pi)$ и точками $M(x; y)$ окружности.

6. Доказать, что множество точек квадрата $K=\{(x;y);\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ имеет мощность континуума.

<u>Доказательство</u>. Всякое число из $[0;1]$ можно представить в виде

$$a=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+....+\frac{a_к}{2^к}+...,\qquad (1)$$

где $a_i=0$ или $a_i=1$. Например, $\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{0}{2^5}+\frac{0}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{0}{2^8}+\frac{1}{2^9}$;

$\frac{23}{32}=\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}++\frac{1}{2^5}=\frac{2^4+2^2+2+1}{2^5}$.

Рациональные числа вида $\frac{P}{2^k}$ можно представить двояко, например,

$$\frac{3}{4}=0{,}1100....\ \text{(0 в периоде)};\quad \frac{3}{4}=0{,}10111....\ \text{(1 в периоде)}.$$

Договоримся представлять такие числа без 1 в периоде. Тогда представление всякого числа a в виде (1) – единственно.

Установим взаимно-однозначное соответствие между $[0;1]$ и $[0;1]\times[0;1]$. Каждо Каждому $x\in[0,1]$, $x=0,x_1x_2x_3...$ поставим в соответствие точку $(0,x_1x_3x_5...;\ \ 0,x_2x_4x_6...)$ квадрата K и каждой точке квадрата $(x;y)=(0,x_1x_2x_3...;\ 0,y_1y_2y_3...)$ поставим в соответствие точку $z=(0,x_1y_1x_2y_2...)$ отрезка $[0;1]$.

7. Пусть множество A имеет n элементов (если n = 0, то A = Ø). Доказать, что множество всех подмножеств множества A имеет 2^n элементов.

8.Доказать, что множество всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты счетно.

9. Число x_0 называется алгебраическим, если оно является корнем уравнения $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...\ +a_{n-1}x+a_n=0$ с целыми коэффициентами. Доказать, что множество алгебраических чисел счетно.

10. Установить взаимно однозначное соответствие между точками внутренности круга и точками внутренности эллипса.

11. Установить в виде аналитической формулы взаимно однозначное соответствие между множеством рациональных чисел отрезка $[0;1]$ и множеством всех рациональных чисел.

12. Множество точек сферы эквивалентно множеству точек на плоскости. Установить взаимно однозначное соответствие.

Множество всех иррациональных чисел на отрезке $[0,1]$ имеет мощность континуума.

6. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ:

Множества. Соответствия. Отношения.

Задача 1. Используя тождества алгебры множеств, упростить следующие выражения с множествами.

1. $(M \setminus N) \cap (N \setminus M)$. 2. $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B$. 3. $(A\cap B\cap C) \cup (\overline{A}\cap B\cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

4. $(A\cap B\cap C\cap \overline{D}) \cup (\overline{A}\cap C) \cup (\overline{B}\cap C) \cup (C\cap D)$. 5. $\overline{\overline{A \cap \overline{B}} \cap B} \cap B$.

6. $\overline{(A \cup B) \cap (A \setminus B)}$. 7. $(A\cap \overline{A \cap B} \cap (B \setminus \overline{B})) \cup (\overline{B} \setminus B)$.

8. $A\cap A\cap B\cap((B \setminus \overline{B})) \cup (\overline{B} \setminus B)$. 9. $A\setminus (B \setminus (C \setminus A))$. 10. $(((((A \setminus B) \setminus C) \setminus D)\setminus A)\setminus X)$.

11. $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \setminus B)} \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \setminus B)$. 12. $(A\cap B\cup A) \cap \overline{A}\cup D\cap \overline{A}\cup D\setminus \overline{A}\cup \overline{D}$.

13. $\overline{(C \setminus A) \cap (C \setminus B)}$. 14. $\overline{(A \cap B \cup \overline{A} \setminus B} \cup A \cap B \cup A \cup B) \cap C$.

15. $(A\setminus B\cup B\setminus A\cup B\cap A) \cap \overline{B}$. 16. $(A\cup B) \cap (\overline{A}\cup \overline{B}) \cup B\cap A\cap B\cup(\overline{A \cup B})$.

17. $A\setminus(A\setminus B)$. 18. $A\cup B\setminus((A\cup B)\setminus B)$. 19. $\overline{A \cup B \cap \overline{C}} \cup C$.

20. $A\cap B\cap C\cap D\cap \overline{A}\cap(B\cap C\cap D\cup \overline{B}\cap(C\cap D\cup \overline{C}))$. 21. $\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cup C \cap \overline{C}}$.

22. $(A\setminus B) \cap C\cup \overline{A}\cup A\cap B\cup \overline{C}\cap(A\setminus B)$. 23. $\overline{A \cap B \cup \overline{C} \cap C}$. 24. $\overline{(A \setminus B) \cup (A \cap B)}$.

25. $(A\cap B)\setminus((A\cap B)\setminus(A\cup B))$.

Задача 2.

1. Привести пример функции, определенной на R^1 со значениями на N.

2. Привести пример функции вида f: $Z^+ \to Z^+$: а) взаимно-однозначной, но со значе-ниями не на Z^+; б) со значениями на Z^+, но не взаимно-однозначной.

3. Пусть A={1, 2, ….., n}. Доказать, что если отображение f: A→A принимает значения на A, то оно взаимно однозначно, и что если отображение g: A→A взаимно однозначно, то оно принимает значения на A.

4. Пусть f: $R^+ \to R$, где $f(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$. Показать, что f есть взаимно однозначная функция, принимающая значения на R.

5. Для произвольных множеств A, B, C доказать, что: а) $A \cdot B$ находится во взаимно однозначном соответствии с $B \cdot A$; б) $A \cdot (B \cdot C)$ находится во взаимно однозначном соответствии с $A \cdot (B \cdot C)$.

6. Доказать тождество $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ для взаимно однозначных функций.

7. M - множество всех русских слов, L - множество частей речи русского языка. Отображение $\alpha: M \to L$ ставит в соответствие каждому слову часть речи, к которой оно принадлежит. Описать свойства отображения α.

8. Доказать, что для любой функции f и для любых множеств A и B из условия $A \cap B = \varnothing$ следует $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \varnothing$.

9. M={a,b,c,d,e}, G={<a,b>,<b,b>,<a,c>,<b,d>,<a,e>,<e,e>}, A={a,c,e}, Г: M→M. Найти Г (A) и $Г^{-1}(A)$.

10. Доказать, что если f - функция, а A и B - множества, то $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

11.Доказать, что если f - функция, а A и B – множества, то $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Привести пример случая строгого включения.

12. Построить функцию f: A→A, где A = {0,1}, не имеющую обратной.

13. Показать, что на множестве A={-1,0,1} отображение f: $x \to x^2$, $x \in A$ является функцией, не имеющей обратной.

14. Привести пример отображения f: $N \to N$; а) взаимно однозначного, но со значениями не на N; б) со значениями, на N, но не взаимно однозначного.

15. Доказать, что если f - отображение, то $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

16. Доказать, что если f - взаимно однозначное отображение, то $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

17. Пусть A - любое множество из области определения функции f(x). Как соотносятся множества A и $f^{-1}(f(A))$?

18. Существует ли функция f(x), непрерывная на отрезке [a,b], взаимно однозначно отображающая [a,b] на $(-\infty;\infty)$?

19. Существует ли функция f(x), непрерывная на отрезке [10,11], взаимно однозначно отображающая [10,11] на $[0;1] \cup [3;4]$?

20. Пусть $X = Y = R^n$, $Z = R^1$, A - невырожденная квадратная матрица порядка n. Найти композицию соответствий $q = (X, Y, Q)$, $Q \subset X \times Y$, $y = A^2 x$, $x \in X$ и $p = (Y, Z, P)$, $P = Y \times Z$, $z = <y, y>$. Найти соответствия q^{-1} и p^{-1}.

21. Показать, что функция $y = [x^3]$ не имеет обратной; показать, что функция $y = \mathrm{Ln}(2x+1)$ имеет обратную и найти ее.

22. X – множество упорядоченных пар векторов в R^3, Y - множество неотрицательных чисел. Закон соответствия $Q \subseteq X \times Y$ определяет модуль векторного произведения векторов. Описать свойства соответствия $q = (X, Y, Q)$. Найти q^{-1}.

23. M – множество людей; N - множество натуральных чисел. Отображение $\alpha : M \to N$ ставит в соответствие каждому человеку его вес (округленный до целочисленного значения). Описать свойства отображения α. Найти образ $\alpha(M)$ и прообраз $\alpha^{-1}(N)$ отображения α.

24. Отношение «иметь одинаковое количество цифр» на N - отношение эквивалентности.

25. Установить, какие из следующих отношений на N рефлексивны, антирефлексивны, симметричны, асимметричны и транзитивны: а) $m\varphi n \equiv$ («m+n степень двойки»); б) $m\varphi n \equiv$ («m/n нечетно»)

Задача 3.

1. Найти область определения и область значений отношений φ и ψ, заданных графиками:

$\Gamma_\varphi = \{< x, y > \in R \times R;\ |x| + 2|y| = 1\}$; $\Gamma_\psi = \{< x, y > \in R^1;\ (y \geq 0) \cap (y \leq x) \cap (x + y \leq 1)\}$. Представить отношение φ в виде объединения четырех отношений, а отношение ψ в виде пересечения трех отношений.

2.Пусть отношение $\varphi \equiv$ («быть братом»), а отношение $\psi \equiv$ («быть сестрой»). Описать отношения $\varphi \cup \psi$, $\varphi \cap \psi$, $\varphi \setminus \psi$.

3. На улице 30 домов, пронумерованных обычным способом: нечетные номера с одной стороны, четные с другой. Пусть a_n обозначает жителя, живущего в доме с номером n. Отношение φ на множество жителей определено так: $a_i \varphi a_j \equiv$(a_i сосед a_j). Описать свойства отношения φ.

4. Пусть φ и ψ - отношения на N такие, что $\Gamma_\varphi = \{<x, x+1>;\ x \in N\}$, $\Gamma_\psi = \{<x^2, x>;\ x \in N\}$. Найти отношения $\varphi\psi$, φ^n, ψ^n.

5. Пусть φ и ψ - отношения на N такие, что $\Gamma_\varphi = \{<x, x+1>;\ x \in N\}$, $\Gamma_\psi = \{<x^2, x>;\ x \in N\}$. Найти отношения $\psi\varphi$, φ^{-1}, ψ^{-1}, $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$.

6. Пусть X - множество всех людей. $x\varphi y \equiv$ («x отец y»), $x\psi y \equiv$ («x дочь y»). Описать отношения $\varphi\psi$, $\psi\varphi$, φ^2, ψ^2.

7. Пусть X - множество всех людей. $x\varphi y \equiv$ («x отец y»), $x\psi y \equiv$ («x дочь y»). Описать отношения $\varphi^{-1}\psi$, $\psi\varphi^{-1}$, $\varphi\psi^{-1}$, $\psi^{-1}\varphi$.

8. Пусть X - множество всех людей. $x\varphi y \equiv$ («x отец y»), $x\psi y \equiv$ («x дочь y»). Описать отношения $\varphi^{-1}\psi^{-1}$, $\psi^{-1}\varphi^{-1}$, $\psi\psi^{-1}$, $\psi^2\varphi^2$.

9. Пусть φ отношение на N такое, что $x\varphi y \equiv (y=x+1)$. Найти транзитивное замыкание $\hat{\varphi}$ отношения φ.

10. Пусть M - множество станций метро и S_1, S_2, S_3-последовательность станций. Отношение φ определено так: $S_i\varphi\, S_j \equiv$(S_i является следующей станцией за S_j). Показать, что $\hat{\varphi}$ -полное отношение.

11. Пусть X - множество всех людей. $x\varphi y \equiv$ («x отец y»), $x\psi y \equiv$ («x дочь y»). Описать транзитивные замыкание отношений φ; ψ; $\psi\psi^{-1}$; $\psi^2\varphi^2$.

12. Составить анкету отношения $\varphi = (X, \Gamma)$, где $X = \{a,b,c,d\}$, $\Gamma = \{<a,a>, <a,b>, <c,a>,<b,d>,<a,d>,<b,c>\}$. Найти матрицу отношения φ и построить его граф.

13. Установить свойства отношений φ и ψ, заданных на множестве Z целых чисел. $m\varphi n \equiv$ («m+n кратно трем»); $m\psi n \equiv$ («m-n кратно трем»).

14. Показать, что отношение $\varphi \equiv$ («$I \le j$») на множестве N задается треугольная матрицей.

15. Описать свойства отношений φ, заданных на множестве R действительных чисел. $x\varphi y \equiv (\mid x+y \mid \le 5;\ x,y \in R)$.

16. Описать свойства отношения φ, заданного на множестве N натуральных чисел. $m\varphi n \equiv$ («существует $k \in N$ такое, что $m-n = 7k$»).

14. Показать, что отношение φ на N «иметь одинаковый остаток при делении на 3» является отношением эквивалентности.

15.Пусть C - множество комплексных чисел. Отношения $z_1\varphi z_2 \equiv (|z_1| = |z_2|;\ z_1,z_2 \in C)$; $z_1\psi z_2 \equiv (\arg z_1 = \arg z_2;\ z_1,z_2 \in C)$ является отношениями эквивалентности.

19. Показать, что отношение $f\varphi g \equiv$ («$f(t) \le g(t);\ t \in R^1$»), заданное на множестве всюду определенных на R^1 функций f: $R^1 \to R^1$ является отношением нестрогого порядка.

20. Показать, что отношение $f\varphi g \equiv$ («$f(t) \le g(t);\ t \in R^1$») и $(\exists\ t \in R^1\ f(t) < g(t))$, заданное на множестве всюду определенных на R^1 функций f: $R^1 \to R^1$ является отношением строгого порядка.

21. Пусть C - множество комплексных чисел. На множестве C задано отношение φ. $z_1\varphi z_2 \equiv ((\mathrm{Re}\ z_1 < \mathrm{Re}\ z_2)$ или $(\mathrm{Re}\ z_1 = \mathrm{Re}\ z_2$ и $\mathrm{Jm}\ z_1 < \mathrm{Jm}\ z_2))$. Показать, что φ отношение строгого порядка на C.

22.Пусть C - множество комплексных чисел. На множестве C задано отношение φ. $z_1\varphi z_2 \equiv ((|z_1| < |z_2|)$ или $(|z_1| = |z_2|$ и $z\neq 0$ и $\arg z_1 < \arg z_2))$. Показать, что φ отношение строгого порядка на C.

23. Пусть $x\varphi y \equiv ((\sin x \leq \sin y),\ x,\ y \in R^1)$. Доказать, что отношение φ рефлексивно и транзитивно.

24. Пусть $x\varphi y \equiv ((x>1) \Rightarrow (y>1),\ x, y \in R^1)$. Доказать, что отношение φ рефлексивно и транзитивно.

24.Пусть C - произвольное число. $x\varphi y \equiv (x-y = ck;\ x,\ y \in R^1,\ k \in Z$ - произвольное целое число). Доказать, что φ - отношение эквивалентности.

Задача 4.

Доказать или опровергнуть следующие свойства отношений на множестве X:

1. $\overline{\varphi \cup \psi} = \overline{\varphi} \cup \overline{\psi}$; $\overline{\varphi \cap \psi} = \overline{\varphi} \cap \overline{\psi}$.

2. $(\varphi\cup\psi)^{-1} = \varphi^{-1}\cup\psi^{-1}$; $(\varphi\cap\psi)^{-1} = \varphi^{-1}\cap\psi^{-1}$.

3. $(\overline{\varphi})^{-1} = \left(\overline{\varphi^{-1}}\right)$; $(\varphi \setminus \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \setminus \psi^{-1}$.

4. $\varphi \subseteq \psi \Rightarrow \varphi^{-1} \subseteq \psi^{-1}$; $(\varphi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\varphi^{-1}$.

5. $(\varphi \cup \psi)\chi = (\varphi\chi) \cup (\psi\chi)$; $(\varphi \cap \psi)\chi = (\varphi\chi) \cap (\psi\chi)$; $(\varphi \setminus \psi)\chi = (\varphi\chi) \setminus (\psi\chi)$.

6. Если φ отношение нестрогого (строгого порядка), то отношение $\overline{\varphi}$ отношение нестрогого (строгого порядка).

7. Если отношение φ и ψ рефлексивны, (антирефлексивны, симметричны, антисимметричны, транзитивны), то отношение $\varphi \cup \psi$ также обладает этим свойством.

8. Если отношение φ и ψ рефлексивны, (антирефлексивны, симметричны, антисимметричны, транзитивны), то отношение $\varphi \cap \psi$ также обладает этим свойством.

9. Отношение φ тогда и только тогда симметрично, когда $\varphi = \varphi^{-1}$.

10. Если отношение φ асимметрично (т.е. $\Gamma_\varphi \cap \Gamma^{-1}_\varphi = \varnothing$), то оно антирефлексивно.

11. Отношение φ рефлексивно тогда и только тогда, когда отношение $\overline{\varphi}$ - антирефлексивно.

12. Если отношение φ обладает каким-то из основных свойств, то обратное отношение φ^{-1} также обладает этим свойством.

13. Если отношение φ транзитивно и рефлексивно, то φ^2 равно φ.

14. Если отношение φ транзитивно и антирефлексивно, то оно антисимметрично.

15. Транзитивное замыкание $\hat{\varphi}$ любого бинарного отношения φ транзитивно.

16. Если φ и ψ - рефлексивные отношения, то $\varphi \cup \psi \subseteq \varphi \circ \psi$.

17. Если φ и ψ - рефлексивные и симметричные отношения, то следующие условия равносильны: а) $\varphi \circ \psi$ - симметричное отношение; б) $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$; в) $\varphi \circ \psi = \varphi \cup \psi$.

18. Если φ и ψ отношения эквивалентности, то отношение $\varphi \cap \psi$ также отношение эквивалентности.

19. Если φ - симметричное отношение, то $\hat{\varphi}$ - также симметричное отношение.

20. Если отношения φ и ψ являются отношениями строгого (нестрогого) порядка, то отношение $\varphi \cup \psi$ также обладает этим свойством.

21. Что можно сказать об отношении $\overline{\varphi}$, если отношение φ: а) рефлексивно; б) антирефлексивно; в) симметрично; г) асимметрично; д) транзитивно.

22. Следующее утверждение ошибочно: симметричное и транзитивное отношение φ на X является также и рефлексивным, т.к. из $x\varphi y$ и $y\varphi x$ следует $x\varphi x$. Найти ошибку в рассуждениях. Построить на множестве X={1,2,3} отношение, которое является симметричным, транзитивным, но не рефлексивным.

23. Пусть C - множество комплексных чисел. Установить свойства отношения $z_1 \varphi z_2 \equiv$ («$|z_1| = |z_2|$ и $\arg z_1 > \arg z_2$»).

24. Пусть C [a,b] - множество непрерывных функций f(t) на отрезке [a,b]. Определим на C[a,b] отношение φ. $f \varphi g \equiv$ («$\int_a^b f(t)dt > \int_a^b g(t)dt$»). Установить свойства отношения φ.

25. Пусть Mat_n - множество квадратных невырожденных матриц порядка n.
$A \varphi B \equiv$ («$\det A^{-1} > \det B^{-1}$»). Является ли это отношение отношением строгого порядка на множестве Mat_n?

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. М.: Энергоатомиздат, 1988. 480 с.

2. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. М.: Наука, 1990. 384 с.

3. Шиханович Ю.А. Введение в современную математику. М.: Наука, 1990. 376 с.

4. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. М.: Энергоатомиздат, 1987. 496 с.

5. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971. 256 с.

6. Столл Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968. 232 с.

7. Червенчук В.Д. Логические функции, таблицы решений и аксиоматическое моделирование. Омск: Изд-во ОМПИ, 1989. 80 с.

8. Червенчук В.Д., Можан Н.Н. Задачи и упражнения по дискретной математике (методические указания). Омск: Изд-во ОМПИ, 1993. 44 с.