Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия

Методические указания по изучению курса высшей математики для заочников

2 изд., испр.

Омск – 2001

Составители:

Е.А. Воробьева, ст. преподаватель кафедры высшей математики;

Е.В. Воробьева ст. преподаватель кафедры высшей математики, к.ф.м.н.

Методические указания предназначены для студентов-заочников и преследуют цель помочь им в освоении как теоретического курса высшей математики, так и в приобретении навыка самостоятельного решения задач.

Поэтому весь курс разбит в соответствии с рабочей программой на четыре части по числу семестров. Каждая часть содержит подробный перечень тем данного семестра; содержание каждой темы представлено в виде плана-схемы, где в определенных блоках перечислены все вопросы в порядке их изучения и с помощью стрелок указаны взаимные связи между ними. Предлагаемый способ изложения дает возможность (в силу своей наглядности) достаточно сложный и широко разбросанный по разным учебникам материал представить в виде стройной системы необходимых знаний. Четко обнаружить связь между основными понятиями, определениями, формулами и правилами.

Следуя по предложенной схеме, студент-заочник , лишенный возможности постоянного общения с преподавателем, может самостоятельно, используя лекции установочного цикла и необходимую литературу (список которой прилагается), изучить теоретический материал, а с помощью достаточно большого набора решенных задач по каждой теме научиться успешно решать задачи как в домашних контрольных работах, так и на экзамене. Решенные с подробными объяснениями задачи максимально приближены к соответствующей теме, номер в $\boxed{}$ у формулы или правила адресует показывающий раздел теории, который используется в решении данной задачи. Преподаватели будут признательны всем студентам и преподавателям, которые внесут свои замечания, пожелания и предложения, возникшие в процессе работы с методическими указаниями.

Содержание

ТЕМА 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. 1. Матрицы и определители

1 **Матрица**
(таблица)

2 **Виды матриц:**
1. прямоугольная;
2. квадратная;
3. диагональная;
4. единичная;
5. матрица-строка;
6. матрица-столбец;
7. равные матрицы

3 Операции над матрицами

4 **Линейные операции:**
1. сложение;
2. вычитание;
3. умножение матрицы на число;
Свойства этих операций

5 **Произведение матриц**, его существование основные свойства

6 **Транспонирование матриц**

7 **Обратная матрица,** ее существование, порядок ее составления

8 Элементарные преобразования матрицы

9 Ранг матрицы. Его вычисление с помощью элементарных преобразований

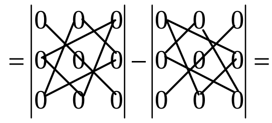
10 **Определители**
(число)

11 Вычисление определителя II-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

12 Вычисление определителя III-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{22}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} =$$



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

13 Свойства определителей

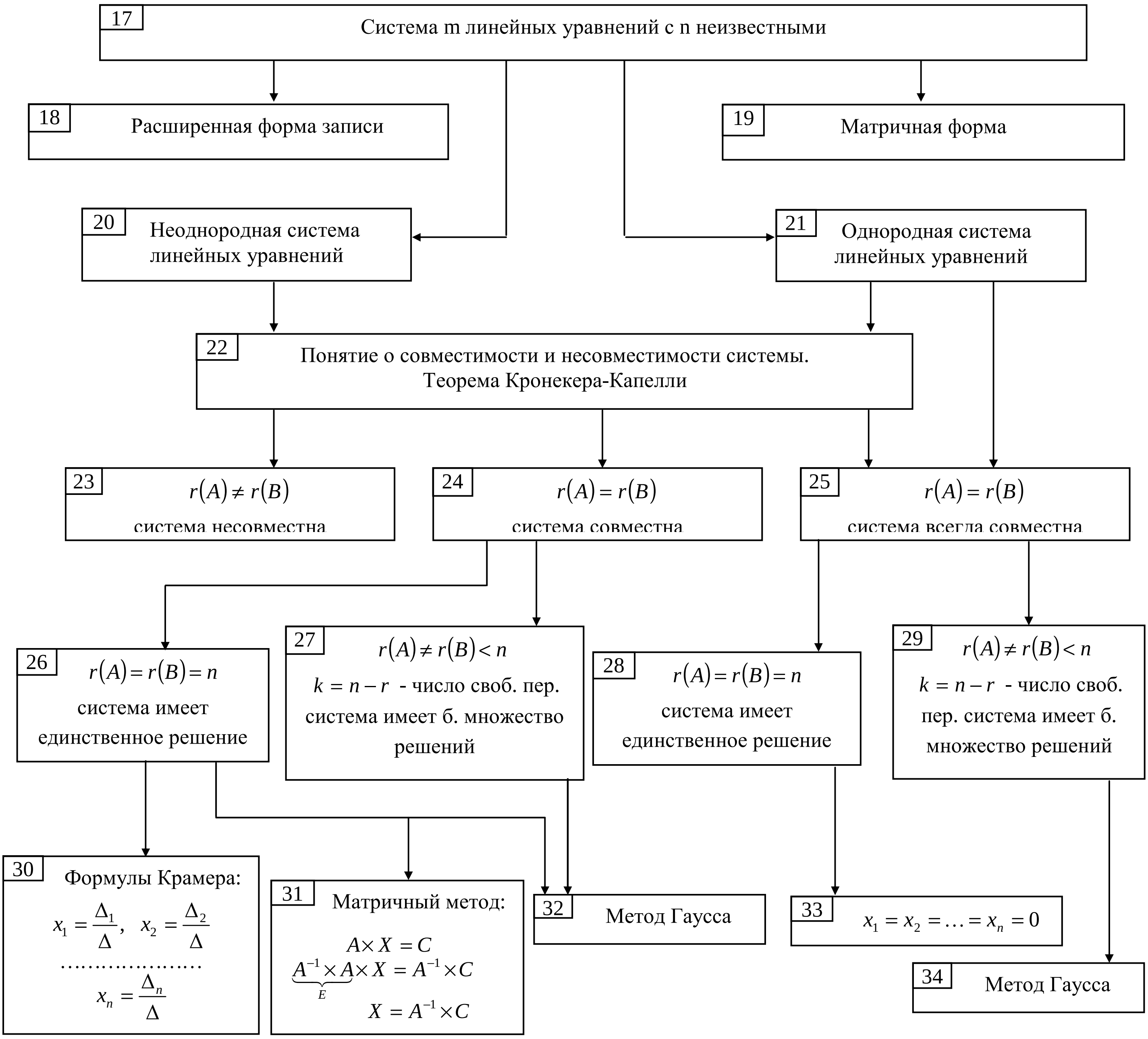
14 Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя

15 Теорема разложения определителя

16 Вычисление определителя n-го порядка по теореме разложения:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

1.2. Система линейных уравнений



<u>Задачи по теме «Линейная алгебра»</u>

<u>Задача 1.</u> Вычислить определитель III-го порядка:
а) по правилу треугольников $\boxed{12}$,
б) по теореме разложения $\boxed{16}$, используя свойства определителей $\boxed{13}$.

Решение.

а)
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1(-2) + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot (-2) - 2(-1) \cdot 3 = -4 + 1 - 9 + 3 - 2 + 6 = -5;$$

б) прибавим вторую строку сначала к первой, а затем к третьей строкам. Полученный определитель разложим по элементам второго столбца $\boxed{13}$, $\boxed{14}$, $\boxed{16}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5.$$

<u>Ответ:</u> $\Delta = -5$.

<u>Задача 2.</u> Используя свойства определителей $\boxed{13}$ и теорему разложения $\boxed{16}$, вычислить определитель IV порядка:

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&2&0&-1\\3&0&-1&2\\5&1&0&0\\0&-1&-2&0\end{vmatrix}\left[\begin{array}{l}\text{Умножим первую строку на 2}\\\text{и прибавим ко второй строке}\end{array}\right]=\begin{vmatrix}0&2&0&-1\\3&4&-1&0\\5&1&0&0\\0&-1&-2&0\end{vmatrix}=\left[\begin{array}{l}\text{разложим этот определитель по}\\\text{элементам четвертого столбца}\end{array}\right]=$$

$$=(-1)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}3&4&-1\\5&1&0\\0&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4&-1\\5&1&0\\0&-1&-2\end{vmatrix}\left[\begin{array}{l}\text{умножим первую строку на (-2)}\\\text{и прибавим к ттретье строке}\end{array}\right]=$$

$$=\begin{vmatrix}3&4&-1\\5&1&0\\-6&-9&0\end{vmatrix}\left[\begin{array}{l}\text{разложим этот определитель}\\\text{по элементам ттретьег столбца}\end{array}\right]=(-1)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5&1\\-6&-9\end{vmatrix}=-(-45+6)=39$$

Ответ: $\Delta=39.$

Задача 3. Даны матрицы А и В. Найти матрицу $C=A\times B-A'+2E$, где

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\2&0&1\\1&1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем слагаемые матрицы С, потом подставим их в правую часть равенства.

$$A\times B=\begin{pmatrix}3&1&0\\2&0&1\\1&1&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\left[\begin{array}{l}\text{по правилу умножения матрицы на}\\\text{матрицу }\boxed{5}\text{ получим}\end{array}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot1+1\cdot0+0\cdot0&3\cdot0+1\cdot3+0\cdot0&3\cdot0+1\cdot0+0\cdot2\\2\cdot1+0\cdot0+1\cdot0&2\cdot0+0\cdot3+1\cdot0&2\cdot0+0\cdot0+1\cdot2\\1\cdot1+1\cdot0+3\cdot0&1\cdot0+1\cdot3+3\cdot0&1\cdot0+1\cdot0+3\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&0\\2&0&2\\1&3&6\end{pmatrix}$$

$$A'=\begin{pmatrix}3&1&0\\2&0&1\\1&1&3\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&0&1\\0&1&3\end{pmatrix}\left[\begin{array}{l}\text{выполнена операция ттранспонрования}\\\text{матрицы }\boxed{6}\end{array}\right]$$

$$2E=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad\left[\text{E - единичная матрица умножена на 2 }\boxed{4}\right]$$

$$C=A\times B-A'+2E=\begin{pmatrix}3&3&0\\2&0&2\\1&3&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&2&1\\1&0&1\\0&1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&2&5\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{последовательно выполнены операции}\\\text{вычитания и сложения матриц }\boxed{4}\end{array}\right]$$

Ответ: $\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&2&5\end{pmatrix}$

Задача 4. Решить данную систему линейных уравнений:

а) по формулам Крамера $\boxed{30}$;

б) матричным методом $\boxed{31}$;

в) методом Гаусса $\boxed{32}$.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-1\\x_1+2x_2-x_3=0\\2x_1+3x_2+x_3=-2.\end{cases}$$

Решение.

а) **Формулы Крамера:**

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta};\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta};\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}\ \boxed{30}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\2&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&0\\1&2&-1\\3&5&0\end{vmatrix}=(-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&3\\3&5\end{vmatrix}=10-9=1,\quad \underline{\Delta=1\neq0;}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -5+6=1, \quad \underline{\Delta_1 = 1;}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4+3=-1, \quad \underline{\Delta_2 = -1;}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1.$$

Так как $\Delta = 1$, т.е. определитель системы отличен от нуля, система имеет единственное решение. Остается найти x_3, подставив найденные x_1 и x_2 в любое из уравнений системы, например в первое: $x_3 = -1 - x_1 - x_2 = -1-1+1 = -1$.

<u>Проверка:</u> подставим найденные значения $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$ в каждое уравнение системы:

$$\begin{cases} 1-1-1 \equiv -1; \\ 1-2+1 \equiv 0; \\ 2-3-1 \equiv -2. \end{cases}$$

<u>Ответ:</u> $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$.

б) **<u>Матричный метод:</u>**

Введем обозначения

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, матрица системы;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матрица из неизвестных системы;

$C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ - матрица из свободных членов системы.

С помощью этих матриц данную систему уравнений можно записать так:

$$A \times X = C.$$

Решив это уравнение относительно матрицы X (матрицы неизвестных) $\boxed{31}$,

$$X = A^{-1} \times C,$$

найдем решение системы.

Составим матрицу A^{-1}, обратную по отношению к матрице A, т.е. $A^{-1} \times A = E$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}' \; \boxed{7}:$$

1. $\Delta = 1$ (см решения этой системы по формулам Крамера).

2. Составим матрицу (присоединенную), элементами которой являются алгебраические дополнения $\boxed{14}$ соответствующих элементов матрицы A:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \tilde{a}_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

а именно $\tilde{a}_{ij}$ - произвольный элемент новой матрицы; A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A; M_{ij} - минор этого элемента.

3. Транспонируем полученную матрицу $\tilde{A}$ $\boxed{6}$, имеем $\tilde{A}' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Запишем $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Остается найти матрицу X :

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2-\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\times C=\begin{pmatrix}5&2&-3\\-3&-1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot(-1)+2\cdot 0+(-3)(-2)\\-3\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+2\cdot(-2)\\-1\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+1\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

т.е. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, отсюда по $\boxed{27}$ получим $\begin{matrix}x_1=1;\\x_2=-1;\\x_3=-1.\end{matrix}$ **<u>Ответ:</u>** $\begin{matrix}x_1=1;\\x_2=-1;\\x_3=-1.\end{matrix}$

в) **<u>Метод Гаусса</u>** (метод последовательного исключения неизвестных)$\boxed{32}$.

Выполняя элементарные преобразования <u>над строками</u> данной матрицы, стараемся придать ей «форму трапеции», т.е. обращаем в нули элементы, расположенные под главной диагональю матрицы, исключая неизвестные:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\1&2&-1&0\\2&3&1&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&1&-2&1\\0&1&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&1&-2&1\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

Полученная матрица равносильна исходной. Восстановим систему уравнений, соответствующую последней матрице (выполним «обратный ход»):

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-1\to x_1=-1-x_2-x_3=-1+2=1\\ \quad x_2-2x_3=1\to x_2=1+2x_3=1-2=-1\\ \qquad x_3=-1\to x_3=-1\end{cases}$$

<u>Ответ:</u> $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=-1$.

<u>Замечание 1.</u> Если ранг матрицы системы и ранг ее расширенной матрицы равны, т.е. $r(A)=r(B)$, то система совместна$\boxed{22}$.

В нашем примере $r(A)=r(B)=3$.

Если, кроме того, $r(A)=r(B)=n$, где n - число неизвестных, то система имеет единственное решение. В нашем примере $r(A)=r(B)=n=3$ $\boxed{26}$.

<u>Задача 5.</u> Решить следующие системы линейных уравнений методом Гаусса: $\boxed{32}$, $\boxed{33}$,$\boxed{34}$.

а) $\begin{cases}x+y+z=6\\3x+2y-z=4\\2x+y-2z=3.\end{cases}$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\3&2&-1&4\\2&1&-2&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&-1&-4&-14\\0&-1&-4&-9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&-1&-4&-14\\0&0&0&5\end{array}\right).$$

Делаем «обратный ход»: $\begin{cases}x+y+z=6\\y+z=14\\0\cdot z=5.\end{cases}$

Последнее уравнение не имеет решений.

<u>Ответ:</u> система противоречива, т.е. не имеет решений$\boxed{23}$.

<u>Замечание 2.</u> Проанализировав последнюю матрицу, можно заметить, что $r(A)=2$, а $r(B)=3$, т.е. $r(A)\neq r(B)\Rightarrow$ решений у системы нет$\boxed{23}$.

б) $\begin{cases}x+y+z=4\\2x-3y-z=-3\\6x+y+3z=13.\end{cases}$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\2&-3&-1&-3\\6&1&3&13\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\0&-5&-3&-11\\0&-5&-3&-11\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\0&-5&-3&-11\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Система уравнений, соответствующая этой матрице, имеет вид

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 5y+3z=11 \end{cases}$$

Так как число уравнений меньше числа неизвестных, то система неопределенная, т.е. имеет бесконечно много решений $\boxed{27}$. Допустим z - любое действительное число, тогда

$$\begin{cases} x+y=4-z \\ 5y=11-3z, \end{cases} \text{ или } y=\frac{11-3z}{5}, \text{ а } x=4-z-y=4-\frac{11-3z}{5}-z=\frac{9-2z}{5}.$$

<u>Проверка:</u> Допустим $z=2$, тогда $x=1$, $y=1$, подставим эти значения неизвестных в систему:

$$\begin{cases} 1+1+2\equiv 4 \\ 2\cdot 1-3\cdot 1-2\equiv -3 \\ 6\cdot 1+1+3\cdot 2\equiv 13 \end{cases}$$

<u>Ответ:</u> $\left\{x=\frac{9-2z}{5};\ y=\frac{11-3z}{5};\ z\in R;\right.$ или $\left\{x=\frac{9-2c}{5};\ y=\frac{11-3c}{5};\ z=c\right.$.

<u>Замечание 3.</u> В нашем примере легко увидеть по матрице, полученной в результате элементарных преобразований, что $r(A)=r(B)=2$, но число неизвестных $n=3>2$ $\boxed{27}$. Число свободных переменных $k=n-r=3-2=1$ (у нас это z). Так как z - любое действительное число, у системы уравнений бесконечно много решений, определяемых по формулам, приведенным в ответе.

в) $\begin{cases} 3x+4y+2z=0 \\ x-y+4z=0 \\ 5x+2y+10z=0. \end{cases}$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right) -3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right) -5 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \end{array}\right).$$

Запишем систему уравнений, соответствующую последней матрице, отбросив «лишнюю» строку:

$$\begin{cases} x-y+4z=0 \\ 7y-10z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-4z \\ 7y=10z \end{cases}$$

Так как число уравнений меньше числа неизвестных, то система неопределенная, т.е. имеет бесконечно много решений $\boxed{29}$.

Пусть z - любое действительное число – свободная переменная, выразим через нее x и y:

$$y=\frac{10}{7}z,\quad y=-4z+y=-4z+\frac{10}{7}z=-\frac{18}{7}z.$$

<u>Проверка:</u> положим $z=7$, тогда $x=-18$, $y=10$.

$$-3\cdot 18+40+14\equiv 0;\ -18-10+28\equiv 0;\ -5\cdot 18+20+70\equiv 0$$

<u>Ответ:</u> $x=-\frac{18}{7}z;\ y=\frac{10}{7}z;\ z\in R$ или $x=-\frac{18}{7}c;\ y=\frac{10}{7}c;\ z=c$.

<u>Замечание.</u> Однородная система уравнений всегда совместна $\boxed{25}$. В примере $r(A)=r(B)=2$, а $n=3$ - число неизвестных; значит, система неопределенная, $k=n-r=3-2=1$ - число свободных переменных $\boxed{29}$. У нас в примере это z.

г) $\begin{cases} 3x+2y+z=0 \\ 2x+5y+3z=0 \\ 3x+4y+2z=0. \end{cases}$

Решение.

$$-3 \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Запишем систему уравнений, соответствующую последней матрице, т.е. выполним «обратный ход»:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=0 \Rightarrow z=0 \\ 7x+y=0 \Rightarrow y=0 \\ 3x=0 \Rightarrow x=0. \end{cases}$$

Ответ: $x=y=z=0$.

Замечание. Так как однородная система линейных уравнений всегда совместна $\boxed{25}$, а из последней матрицы, полученной из матрицы систем путем элементарных преобразований, видно, что $r(A)=r(B)=3$, т.е. $\Delta A \neq 0$, то данная однородная система имеет единственное $\boxed{28}$ решение, т.е. нулевое решение.

ТЕМА 2

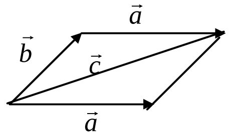
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1 Вектор (определение)

2 Основные понятия: Геометрический вектор. Длина вектора. Коллинеарные векторы. Противоположные векторы. Орт вектора. Проекция вектора на ось.

3 Линейные операции над векторами:

а) Сумма векторов: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$;

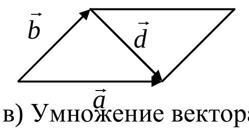


$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

б) Разность векторов: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}$;



$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{b}+\vec{d}$;

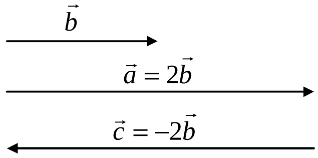
$\vec{b}-\vec{a}=-\vec{d}$

в) Умножение вектора на число: $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b},\ \lambda>0$;

$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b},\ \lambda<0$;

$|\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{b}|$.



4 Линейная зависимость и независимость векторов

Базис на прямой (R^1), на плоскости (R^2) и в пространстве (R^3). Разложение вектора относительно базиса. Координаты вектора. Декартова система координат (ДСК): - базисные орты, образующие правую тройку;
$\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}$; $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$.

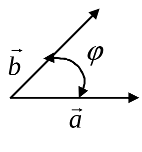
5 Теорема о свойстве линейных операций над векторами: все линейные операции над векторами сводятся к таким же операциям над их координатами.

Если $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, то $\vec{a}=\{x,y,z\}$ - декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Если $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, то $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.

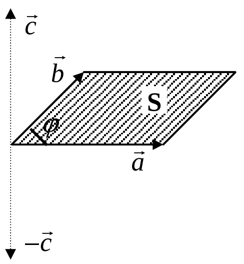
Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)\ //\ \vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, то $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}=\lambda$ - необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6



7

8 **Векторное произведение векторов** 9



$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ - <u>вектор!</u>

1. $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$;
2. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - правая тройка;
3. $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$;

$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$;

$\vec{a}\times\vec{a}=0$.

<u>ДСК:</u>

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix};$$

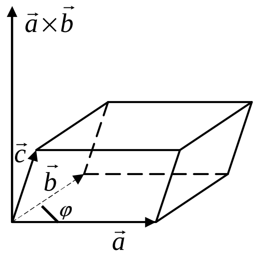
$$S_{\varnothing}=|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|;$$

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0;$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i};\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j};\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j};$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k};\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}.$$

10 **Смешанное произведение векторов**



$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ - <u>число!</u>

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$;

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;

$V_{пар-да}=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, $V_{пир}=\dfrac{1}{6}V_{пар-да}$;

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - компланарны $\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$.

<u>ДСК:</u> $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix}$.

Задачи по теме «Векторная алгебра»

<u>Задача 1.</u> Даны векторы $\vec{a}=\{3,-1,4\}$ и $\vec{b}=\{-2,0,5\}$. Найти вектор $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

Решение. Так как вектор $\vec{c}$ - линейная комбинация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\boxed{3}$, используем теорему о свойстве линейных операций над векторами $\boxed{5}$, т.е. сведем данные в задаче линейные операции над векторами к таким же операциям над их координатами:

$x_c=3x_a-2x_b=3\cdot3-2\cdot(-2)=13$;

$y_c=3y_a-2y_b=3\cdot(-1)-2\cdot0=-3$;

$z_c=3z_a-2z_b=3\cdot4-2\cdot5=2$.

<u>Ответ:</u> $\vec{c}=\{13,-3,2\}$.

<u>Задача 2.</u> Даны векторы $\vec{a}=\{1,2\}$, $\vec{b}=\{-2,3\}$, $\vec{c}=\{8,-5\}$. Выяснить, можно ли принять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ за базисные, и если можно, то выразить вектор $\vec{c}$ через них. Найти координаты вектора $\vec{c}$ относительно базиса $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение.

а) Вначале проверим коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\boxed{5}$, составив и сравнив отношения их одноименных координат $-\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{2}{3}$. Из этого неравенства следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, значит, линейно независимы, т.е. могут быть приняты за базис $\boxed{4}$.

б) В базисе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выразим вектор $\vec{c}$, как их линейную комбинацию: $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$, где λ_1 и λ_2 - неизвестные пока коэффициенты $\boxed{4}$. Используя теорему о свойстве линейных операций над векторами $\boxed{5}$, перейдем в полученном равенстве к координатам:

$$\begin{cases}8=\lambda_1\cdot1+\lambda_2(-2)\\ -5=\lambda_1\cdot2+\lambda_2\cdot3.\end{cases}$$

Решив эту систему, получим $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$, подставим их в линейную комбинацию: $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$ - это разложение вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а коэффициенты справа – координаты вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

<u>Ответ:</u> $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$, или $\vec{c}=\{2,-3\}$.

<u>Задача 3.</u> Доказать, что точки $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$ и $D(3,-5,3)$ служат вершинами трапеции. Выяснить, которое из оснований трапеции длиннее другого, во сколько раз.

Решение. Найдем координаты векторов, последовательно соединяющих данные точки $\boxed{5}$. $\overrightarrow{AB}=(-2,3,-3)$, $\overrightarrow{BC}=(-2,-1,-2)$; $\overrightarrow{CD}=(4,-6,6)$, $\overrightarrow{DA}=(0,4,-1)$. Легко увидеть, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ удовлетворяют условию коллинеарности $\boxed{5}$: $\dfrac{-2}{4}=\dfrac{3}{-6}=\dfrac{-3}{6}$, $\left(\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}=\lambda\right)$. Следовательно, $\lambda=-\dfrac{1}{2}$, значит, $\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, т.е. $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$, а $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{CD}\right|$. Проверим коллинеарность векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$: $\dfrac{-2}{0}\neq\dfrac{-1}{4}\neq\dfrac{-2}{-1}$. Значит четырехугольник $ABCD$ - трапеция.

<u>Задача 4.</u> Найти орт и направляющие конусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(1,0,-1)$, $B(3,1,-3)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ $\boxed{5}$: $\overrightarrow{AB}=\{2,1,-2\}$. Его длина по формуле $\boxed{7}$ $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$: $\overrightarrow{AB}=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$. Так как орт вектора определяют по формуле $\boxed{7}$ $\vec{a}^{\circ}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\overrightarrow{AB}^{\circ}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\left\{\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right\}$, по $\boxed{6}$

$\vec{a}^{\circ}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

<u>Ответ:</u> $\overrightarrow{AB}^{\circ}=\left\{\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{-2}{3}\right\}$; $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}\cos\beta=\dfrac{1}{3},\cos\gamma=-\dfrac{2}{3}$.

<u>Задача 5.</u> На материальную точку действуют силы $\vec{F}_1=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{F}_2=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{F}_3=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. Найти работу равнодействующей этих сил $\vec{R}$ при перемещении точки из положения $M(2,-1,0)$ в положение $N(4,1,-1)$.

Решение. Работа силы $\vec{R}$ на пути $\overrightarrow{MN}$ вычисляется по формуле $\boxed{6}$: $A=\vec{R}\cdot\overrightarrow{MN}$ (механический смысл скалярного произведения). Найдем вектор $\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+(-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})+(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})$, т.е. $\vec{R}=\{2,2,1\}$, а вектор пути $\overrightarrow{MN}=\{2,2,-1\}$ $\boxed{5}$. По формуле скалярного произведения векторов в ДСК $\boxed{7}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$ получим $A=2\cdot2+2\cdot2+1\cdot(-1)=7$.

<u>Ответ:</u> $A=7$.

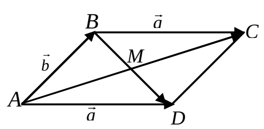
<u>Задача 6.</u> Даны векторы $\vec{a}=\{1,-1,2\}$ и $\vec{b}=\{2,-2,1\}$. Найти проекцию вектора $\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b}$ на направление вектора $\vec{b}$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой проекции вектора на вектор $\boxed{6}$: $Пр_{\vec{b}}\vec{c}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|}$, найдем координаты вектора $\vec{c}=\{1,-1,5\}$ $\boxed{5}$, длину вектора $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$ $\boxed{7}$ и скалярное произведение $\vec{c}\cdot\vec{b}=1\cdot2+(-1)\cdot(-2)+1\cdot5=9$ $\boxed{7}$. Теперь подставим в формулу найденные значения $Пр_{\vec{b}}\vec{c}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{9}{3}=3$.

<u>Ответ:</u> $Пр_{\vec{b}}\vec{c}=3$.

<u>Задача 7.</u> Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\{2,1,0\}$ и $\vec{b}=\{0,-1,1\}$.

Решение. Найдем, например, косинус угла $\alpha=\angle CMD$, который образует векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, координаты которых находим по формулам $\boxed{3}$ и $\boxed{5}$: $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}=\{2,0,1\}$; $\overrightarrow{BD}=\vec{a}-\vec{b}=\{2,2,-1\}$.



Далее используем формулу $\boxed{6}$:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\frac{3}{\sqrt{5}\cdot3}=\frac{1}{\sqrt{5}}\text{, где}$$

$\boxed{7}$ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=2\cdot2+0\cdot2+1\cdot(-1)=3$;

$\boxed{7}$ $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=3$.

Замечание: т.к. $\cos\alpha$ оказался положительным, то α - острый угол; косинус угла, смежного с углом α, отличается от $\cos\alpha$ знаком.

Задача 8. Даны вершины четырехугольника $A(1, 2, 3)$, $B(7, 3, 2)$, $C(-3, 0, 6)$ и $D(9, 2, 4)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

Решение. Если два вектора взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю $\boxed{6}$. Найдем векторы, совпадающие с диагоналями четырехугольника $\boxed{5}$: $\overrightarrow{AC} = \{-4, -2, 3\}$, $\overrightarrow{BD} = \{2, -1, 2\}$. Вычислим скалярное произведение этих векторов $\boxed{7}$: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 0$. Диагонали прямоугольника взаимно перпендикулярны $\boxed{7}$.

Задача 9. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, найти длину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Решение. Используем формулу $\boxed{6}$:

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}} = \sqrt{(3\vec{a} + 2\vec{b})^2} = \sqrt{9\vec{a}^{\,2} + 12\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^{\,2}} = \sqrt{9 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 4^2} = \sqrt{217},$$

т.к. $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$, $\vec{b}^{\,2} = |\vec{b}|^2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$.

Ответ: $|\vec{c}| = \sqrt{217}$.

Задача 10. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$.

Решение. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, совпадающие со сторонами данного треугольника $\boxed{5}$: $\overrightarrow{AB} = \{2, -2, -3\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{4, 0, 6\}$. Используя геометрический смысл векторного произведения двух векторов $\boxed{8}$: $S_\Delta = \frac{1}{2} S_{\varnothing} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$, вычислим сначала векторное произведение $\boxed{9}$: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k} = \{-12, -24, 8\}$ - это вектор. Теперь найдем его модуль : $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 28$.

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14.$$

Ответ: $S_\Delta = 14$ кв.ед.

Задача 11. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$, где $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, а угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. По формулам $\boxed{9}$:

$$S_{\varnothing} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |(\vec{p} + 2\vec{q}) \times (2\vec{p} + \vec{q})| = |2\vec{p} \times \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q} + 4\vec{q} \times \vec{p} - 2\vec{q} \times \vec{q}| = |-3\vec{p} \times \vec{q}| = 3|\vec{p} \times \vec{q}| = 3|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ кв. ед.}$$

В решении задачи использован распределительный закон, которому подчиняется векторное произведение векторов и свойства векторного произведения: $\vec{p} \times \vec{p} = 0$ и $\vec{p} \times \vec{q} = -\vec{q} \times \vec{p}$, а также формула $|\vec{p} \times \vec{q}| = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin(\vec{p} \,\hat{}\, \vec{q})$ $\boxed{8}$.

Ответ: $S_{\varnothing} = 3\sqrt{3}$ кв. ед.

Задача 12. Вычислить объем пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(1, 1, 2)$, $B(2, 3, -1)$, $C(2, -2, 4)$ $D(-1, 1, 3)$.

Решение. Найдем координаты векторов, совпадающих с ребрами пирамиды, прилежащими к одной из вершин ее, например $\overrightarrow{AB} = \{1, 2, -3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{1, -3, 2\}$, $\overrightarrow{AD} = \{-2, 0, 1\}$ $\boxed{5}$. Используя геометрический смысл смешанного произведения $\boxed{10}$, найдем объем параллелепипеда, а затем – объем пирамиды, который равен $\dfrac{1}{6}$ объема параллелепипеда. По формуле $\boxed{10}$:

$$V_{\text{ПИР}} = \frac{1}{6} V_{\text{ПАР}} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{6} \text{ куб. ед.}$$

Ответ: $V_{\text{пир}} = \frac{5}{6}$ куб ед.

Задача 13. Доказать, что четыре данные точки $A(1, 0, 7)$, $B(-1, -1, 2)$, $C(2, -2, 2)$ $D(0, 1, 9)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Чтобы решить задачу, достаточно доказать, что три вектора, соединяющие данные точки, компланарны, т.е. лежат в одной плоскости. Смешанное произведение компланарных векторов равно нулю $\boxed{10}$. Введем в рассмотрение векторы $\overrightarrow{AB} = \{-2, -1, -5\}$, $\overrightarrow{AC} = \{1, -2, -5\}$, $\overrightarrow{AD} = \{-1, 1, 2\}$ и вычислим их смешанное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 5 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

что и требовалось доказать.

ТЕМА 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1 Прямая на плоскости

$F(x, y)=0$ - линия l на плоскости.

1

Общее уравнение прямой на плоскости:

$l:\ Ax+By+C=0$, где $\vec{N}=\{A, B, C\}\perp l$;

1. $C=0 \Rightarrow Ax+By=0 \Rightarrow 0(0, 0)\in l$;
2. $A=0 \Rightarrow By+C=0 \Rightarrow y=-\dfrac{C}{B}$; $l\ //\ 0xy=0-ось\ 0x$;
3. $B=0 \Rightarrow Ax+C=0 \Rightarrow x=-\dfrac{C}{A}$; $l\ //\ 0yx=0-ось\ 0y$.

2

Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой (l) $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

3

Уравнение прямой l, проходящей через точку $M(x_0, y_0)\perp$ вектору $\vec{N}=\{A, B\}$:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0\ (l)$.

4

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$ с данным угловым коэффициентом $k=tg\alpha$, α - угол наклона прямой l к оси $0x$: $y-y_0=kx-x_0$ (l)

5

Угол между двумя прямыми на плоскости:

(l_1) $y=k_1x+b_1$; (l_2) $y=k_2x+b_2$:

$$tg\theta=\frac{\overleftarrow{k_1-k_2}}{1+k_1k_2}$$

6

Уравнение прямой l в отрезках на осях: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ (l), a, b - отрезки, отсекаемые на осях координат.

7

Уравнение прямой l, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{s}=\{m, n\}$:

$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ (l) - каноническое уравнение.

8

Уравнение прямой l, проходящей через две данные точки $M(x_1, y_1)$ и $M(x_2, y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\quad (l)$$

9

Уравнение прямой l с угловым коэффициентом:

(l) $y=kx+b$

10

Условие // прямых: $l_1\ //\ l_2 \Rightarrow k_1=k_2$

Условие $\perp$ прямых: $l_1\perp l_2 \Rightarrow k_1\cdot k_2=-1$

11

Точка пересечения двух прямых l_1 и l_2:

$$\left.\begin{array}{ll}(l_1) & A_1x+B_1y+C_1=0\\ (l_1) & A_2x+B_2y+C_2=0\end{array}\right\}$$ - это точка $M_0(x_0, y_0)$,

где (x_0, y_0) - решение системы уравнений l_1 и l_2.

Задачи по теме «Прямая на плоскости»

Задача 1. Через точку $M_0(1, -4)$ провести прямые, параллельные осям координат.

Решение.

а) Если $l_1 \,//\, 0x$, то по $\boxed{1}$ уравнение $l_1:\ y = c$, а так как $M_0 \in l_1$, то $y = -4$ (координаты M_0 должны удовлетворять уравнению l_1).

б) Если $l_2 \,//\, 0y$, то по $\boxed{1}$ уравнение $l_2:\ x = m$, а так как $M_0(1, -4) \in l_2$, то $x = 1$ (координаты M_0 должны удовлетворять уравнению l_2).

Ответ: $l_1: y = -4$; $l_2: x = 1$.

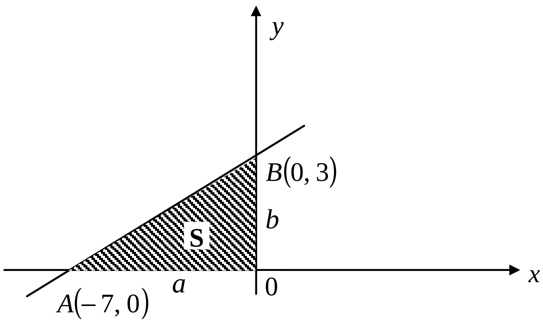
Задача 2. На каком расстоянии от начала координат проходит прямая $3x - 4y - 15 = 0$?

Решение. Воспользуемся формулой $\boxed{2}$ $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Чтобы найти расстояние от точки $O(0, 0)$ - начала координат – до данной прямой $3x - 4y - 15 = 0$, подставим в левую часть этого уравнения, вместо текущих координат, координаты точки $O(0, 0)$, возьмем полученное число по модулю и поделим его на длину нормального вектора $\vec{N} = \{A, B\}$, т.е. на $\left|\vec{N}\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$, имеем $d = \dfrac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{15}{5} = 3$.

Ответ: $d = 3$.

Задача 3. Найти площадь треугольника, образованного прямой $3x - 7y + 21 = 0$ и осями координат. Построить эту прямую.

Решение. Приведем уравнение данной прямой к виду «в отрезках на осях» $\boxed{6}$:



$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, т.е. к виду $-\dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{3} = 1$, где $a = -7$, $b = 3$ - отрезки, отсекаемые прямой на осях координат. Треугольник, образованный данной прямой и осями координат, - прямоугольный, а катеты его равны 3 и 7. Тогда:

$S_\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot |a \cdot b| = \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 = \dfrac{21}{2}$ кв. ед.

Ответ: $S_\Delta = 10{,}5$ кв.ед.

Задача 4. Даны точка $M_0(2, -3)$ и вектор $\vec{a} = \{-4, 7\}$. Через точку M_0 провести две прямых, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна вектору $\vec{a}$.

Решение.

а) $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$ - воспользуемся уравнением $\boxed{7}$, где x_0 и y_0 - координаты точки, лежащей на прямой, а $\vec{S} = \{m, n\}$ - направляющий вектор прямой. Приняв за него вектор $\vec{a}$, получим: $\dfrac{x - 2}{-4} = \dfrac{y + 3}{7}$ или $7x + 4y - 2 = 0$.

б) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – воспользуемся уравнением $\boxed{3}$, где точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит прямой, а вектор $\vec{N} = \{A, B\}$ – нормаль к прямой, за которую примем вектор $\vec{a}$: $-4(x - 2) + 7(y + 3) = 0$ или $4x - 7y - 29 = 0$.

Ответ: $l_1:\ 7x + 4y - 2 = 0$; $l_2:\ 4x - 7y - 29 = 0$.

Задача 5. Какие углы с осью $0x$ образуют прямые, проходящие через точки:

а) $M_1(4, -4)$ и $M_2(-3, 3)$; б) $M_3(4, -8)$ и $M_4(-3, -8)$; в) $M_5(2, -3)$ и $M_6(2, 3)$?

Решение. Используем уравнение прямой, проходящей через две данные точки $\boxed{8}$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

а) $\dfrac{x - 4}{-3 - 4} = \dfrac{y + 4}{3 + 4}$ или $y = -x$, где $k = -1$, т.е. $tg\alpha = -1$, $\alpha_1 = -\dfrac{3\pi}{4}$.

б) $\dfrac{x - 4}{-3 - 4} = \dfrac{y + 8}{-8 + 8}$ или $y = -8$, где $k = 0$, т.е. $tg\alpha = 0$, $\alpha_2 = 0$.

в) $\dfrac{x - 2}{2 - 2} = \dfrac{y + 3}{3 + 3}$ или $x = 2$, где $k = tg\alpha$ не существует, т.е. $tg\alpha = -1$, $\alpha_3 = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $\alpha_1 = -\frac{3\pi}{4}$; $\alpha_2 = 0$; $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$.

Задача 6. Найти углы, которые получатся при пересечении двух данных прямых (l_1) $5x+6y-1=0$ и (l_2) $x-y+3=0$.

Решение. Воспользуемся формулой $\boxed{5}$: $tg\alpha = \frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$, k_1 и k_2 - где угловые коэффициенты данных прямых соответственно. Преобразуем уравнение данных прямых к виду $y=kx+b$: (l_1) $y=-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6} \Rightarrow k_1 = -\frac{5}{6}$; (l_2) $y=x+3 \Rightarrow k_2 = 1$. Тогда $tg\theta = \frac{1+5/6}{1-5/6} = \frac{11/6}{1/6} = 11$ т.е. угол, который образует первая прямая со второй, $\theta_1 = arctg\,11$; второй, смежный с ним, который образует вторая прямая с первой, $\theta_2 = arctg\,(-11)$.

Ответ: $\theta = arctg(\pm 11)$.

Задача 7. Через точку пересечения прямых (l_1) $x+4y-5=0$ и (l_2) $7x+5y+11=0$ провести две прямые, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой (l_3) $6x+y-7=0$ ($\boxed{11}$, $\boxed{10}$).

Решение. Воспользуемся уравнением $\boxed{4}$ $y-y_0=k(x-x_0)$, где k - угловой коэффициент прямой, а $M_0(x_0, y_0)$ - точка, через которую проходит искомая прямая. Вначале найдем точку, как точку пересечения данных прямых, решив совместно их уравнения:

$$-7\begin{cases} x+4y-5=0 \\ 7x+5y+11=0 \end{cases}$$

$-23y+46=0$

$y_0 = 2x_0 = -3$

$M_0(-3, 2)$

а) первая из искомых прямых параллельна прямой l_3, следовательно, ее угловой коэффициент $k=k_3=-6$, т.к. уравнение l_3 можно записать так: $y=-6x+7$ $\boxed{9}$. Подставив в уравнение $\boxed{4}$, найденные параметры получим: $y-2=-6(x+3)$ или $6x+y+16=0$.

б) вторая из искомых прямых перпендикулярна l_3, следовательно, ее угловой коэффициент $k=-\frac{1}{k_3}=\frac{1}{6}$ $\boxed{10}$. Тогда уравнение второй - искомой прямой: $y-2=\frac{1}{6}(x+3)$ или $x-6y+15=0$.

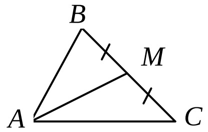
Ответ: $6x+y+16=0$ (l_4); $x-6y+15=0$ (l_5).

Задача 8. Показать, что точки $M_1(2,1)$, $M_2(-3,3)$ и $M_3(7,-1)$ лежат на одной прямой.

Решение. Через точки M_1 и M_2 проведем прямую: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ $\boxed{8}$, или $\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-1}{3-1}$, или $2x+5y-9=0$. Чтобы убедиться, что точка M_3 тоже лежит на этой прямой, подставим координаты этой точки в полученное уравнение прямой $2\cdot 7+5\cdot(-1)-9=0$. Задача решена.

Задача 9. Даны координаты вершин треугольника: $A(-1,1)$, $B(1,5)$, $C(3,1)$. Найти уравнение медианы AM, проведенной из вершины A к стороне BC, и вычислить ее длину.

Решение. а) Найдем координаты точки M - середины отрезка $BC(BM=MC)$ по формулам:



$$\boxed{x_M = \frac{x_B+x_C}{2};\ y_M = \frac{y_B+y_C}{2};}$$

$$x_M = \frac{1+3}{2} = 2,\ y_M = \frac{5+1}{2} = 3;\ M(2,3).$$

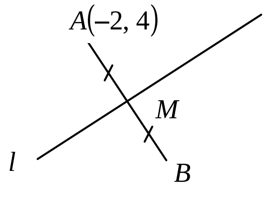
Уравнение медианы AM составим, используя уравнение прямой, проходящей через две данные точки и M $\boxed{8}$: $\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-1}{3-1}$, $2x+2=3y-3$ или $2x-3y+5=0$.

б) Длину медианы AM вычислим по формуле:

$$\boxed{\text{длина отрезка } AM = \sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}.} \qquad AM = \sqrt{(2+1)^2+(3-1)^2} = \sqrt{13}.$$

Ответ: а) $2x-3y+5=0$; б) $|AM| = \sqrt{13}$.

Задача 10. Найти точку B, симметричную точке $A(-2,4)$ относительно прямой (l) $3x+y-8=0$.



Решение. Искомая точка B симметрична точке A относительно прямой l, если она лежит на одном с ней перпендикуляре к прямой l: $AB \perp l$, и на одинаковом расстоянии от прямой l: $AM = MB$.

а) Составим уравнение прямой $AB \perp l$ $\boxed{4}$: $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $k = \dfrac{1}{3}$, т.к. $k_l = -3$ и $k_l \cdot k = -1$ $\boxed{10}$; $y - 4 = \dfrac{1}{3}(x + 2)$ или $x - 3y + 14 = 0$.

б) Найдем точку M – точку пересечения прямых l и AB $\boxed{11}$, решив систему их уравнений:

$$\begin{cases} 3x + y - 8 = 0 \\ x - 3y + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1, 5) \text{ - проверьте!}$$

в) Так как $AM = MB \Rightarrow M$ - середина отрезка AB. Воспользуемся формулами деления отрезка пополам, приведенными в предыдущей задаче. Подставив в них известные величины (x_A, y_A) и (x_M, y_M), получим уравнения $1 = \dfrac{-2 + x_B}{2}$, $5 = \dfrac{4 - y_B}{2}$. Отсюда $x_B = 4$, $y_B = 6$.

Ответ: $B(4, 6)$.

3.2 Кривые второго порядка

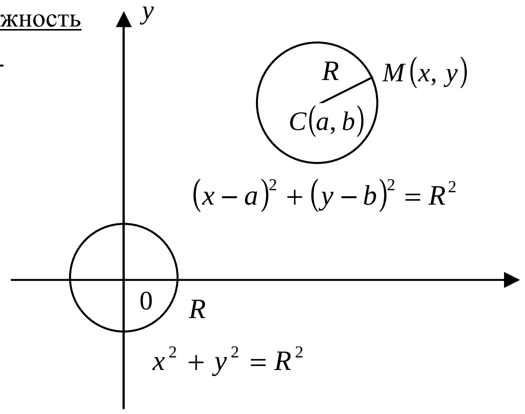
1

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ -
общее уравнение кривой II порядка

2

Окружность

1. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, $C(a, b)$ - центр, R - радиус - каноническое уравнение окружности;
2. $x^2 + y^2 = R^2$ - нормальное уравнение;
3. $A = C$, $B = 0$, $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ - общее уравнение окружности.



3

Эллипс

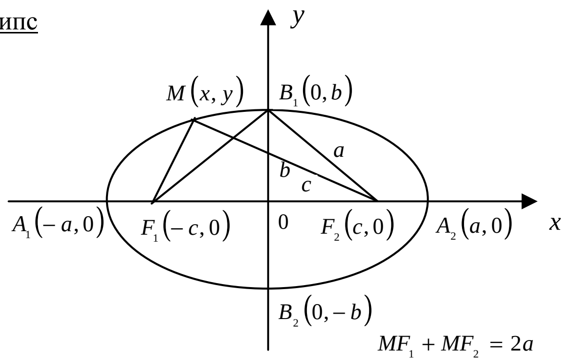
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - каноническое уравнение:

a - большая полуось;

b - малая полуось;

c - полуфокусное расстояние;

$a^2 = b^2 + c^2$; $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - эксцентриситет, $0 < \varepsilon < 1$.



4

Гипербола

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - каноническое уравнение:

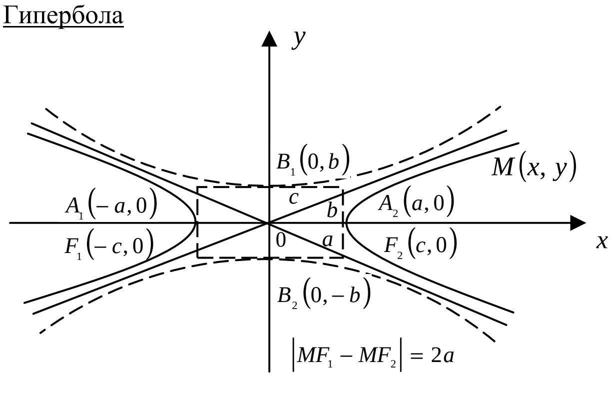
a - действительная полуось;

b - мнимая полуось;

c - полуфокусное расстояние;

$c^2 = a^2 + b^2$; $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - эксцентриситет, $\varepsilon > 1$.

$y = \pm \dfrac{b}{a} x$ - асимптоты гиперболы



$\boxed{5}$

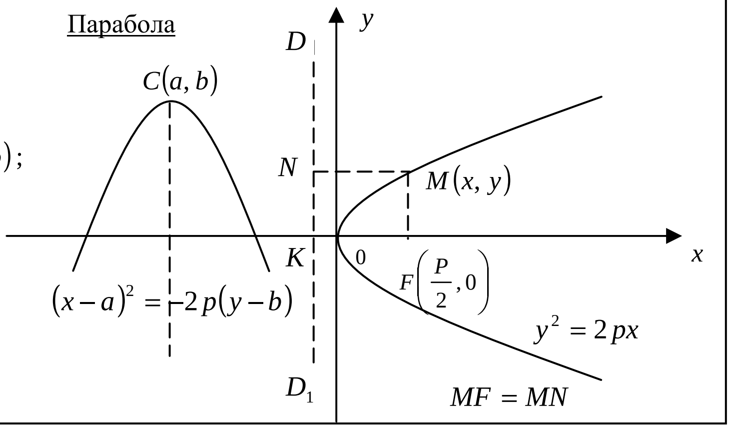
$y^2 = 2px$ - каноническое уравнение;

$p = KF$ - параметр параболы;

$(y-b)^2 = \pm 2p(x-a)$; $(x-a)^2 = \pm 2p(y-b)$;

$C(a,b)$ - вершина; $F\left(\dfrac{P}{2}, 0\right)$ - фокус;

DD_1 - директриса параболы.



Задачи по теме «Кривые второго порядка»

Задача 1. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить ее.

Решение.

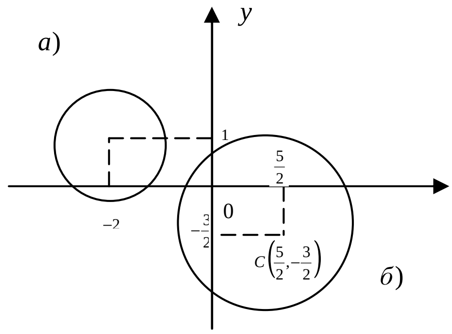
а) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0 \boxed{2}$. Выделим полные квадраты по x и по y: $(x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)=4-4+1$ или $(x+2)^2+(y-1)^2=1^2$ - каноническое уравнение окружности с центром в точке $C(-2,1)$ и радиусом $R=1$.

б) $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 4 = 0$.

$$\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)+\left(y^2+3y+\frac{9}{4}\right)=4+\frac{25}{4}+\frac{9}{4}.$$

$\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{50}{4}$ - окружность, $C\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$,

$$R=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$



Задача 2. а) Найти точки пересечения прямой $y = x + 2$ и окружности $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$.

Решение. Чтобы найти точки пересечения двух линий, нужно решить систему их уравнений $y = x + 2$ и $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$. Для этого подставим $y = x + 2$ в уравнение окружности: $x^2 + (x+2)^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4x_1 = -2x_2 = 2$, осталось найти $y_1 = -2+2$; $y_2 = 2+2$.

Ответ: $M_1(-2, 0)$, $M_2(2, 4)$.

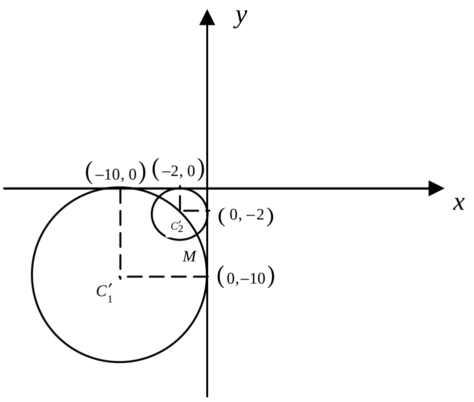
б) Показать, что прямая $y = 2x + 5$ и окружность $x^2 + y^2 = 1$ не пересекаются.

Решение. Для этого достаточно показать, что система уравнений $y = 2x + 5$ и $x^2 + y^2 = 1$ решений не имеет. Подставим $y = 2x + 5$ в уравнение окружности: $x^2 + (2x+5)^2 = 1 \Rightarrow 5x^2 + 20x + 24 = 0$, дискриминант уравнения $D = (-b)^2 - 4ac = 400 - 5\cdot 4\cdot 24 < 0$. Решений у системы нет $\Rightarrow$ точек пересечения у линий нет.

Задача 3. Окружность касается осей координат и проходит через точку. Составить уравнение этой окружности.

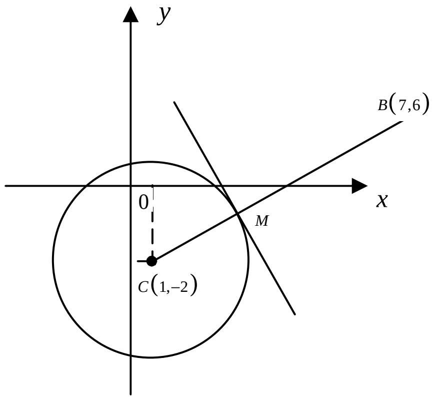
Решение. Так как окружность касается осей координат, то $a = b$ в уравнении $\boxed{2}$ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, т.е. $C\,(a, a)$ и $R = |a|$ (почему?). Таким образом, каноническое уравнение окружности $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$. Чтобы найти a, подставим в это уравнение координаты точки $M(-2,-4)$, через которую проходит окружность: $(-2-a)^2 + (-4-a)^2 =$

$= a^2 \Rightarrow a^2 + 12a + 20 = 0 a_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36-20}$, $a_1 = -10$, $a_2 = -2$.



Ответ: $(x+10)^2 + (y+10)^2 = 100$; $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$.

Задача 4. Вычислить кратчайшее расстояние от точки $B\,(7, 6)$ до окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

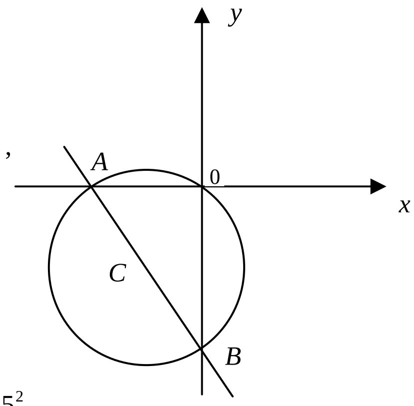


Решение. BM – кратчайшее расстояние от точки B до окружности. Очевидно, $BM = BC - CM$. $C\,(a, b)$ – центр окружности, CM - ее радиус. Приведем уравнение окружности к каноническому виду $\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 + 4y + 4\right) = 25$ [2] или $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5^2 \Rightarrow C\,(1, -2)$, $R = 5$. Вычислим длину отрезка $BC = \sqrt{(1-7)^2 + (-2-6)^2} = 10$. $BM = BC - CM = 10 - 5 = 5$

<u>Ответ:</u> $BM = 5$.

<u>Задача 5.</u> Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок прямой $12x + 5y + 60 = 0$, заключенный между осями координат.

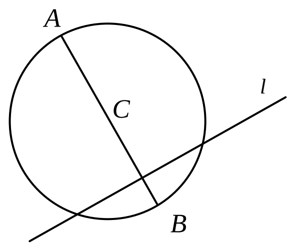
Решение. Преобразуем уравнение прямой $12x + 5y + 60 = 0$ к виду «уравнение прямой в отрезках на осях»: $\dfrac{x}{-5} + \dfrac{y}{-12} = 1$, откуда видно, что $A(-5, 0)$ - $B(0, -12)$ и точки пересечения прямой с осями координат, AB - диаметр окружности по условию задачи. Следовательно, центр окружности - точка C – середина AB, т.е. координаты центра окружности $C(-2{,}5; -6)$, ведь $x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, а радиус окружности $R = \dfrac{1}{2}|AB| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = \dfrac{1}{2} \cdot 13 = 6{,}5$. Уравнение окружности по [2] : $(x + 2{,}5)^2 + (y+6)^2 = 6{,}5^2$.



<u>Ответ:</u> $(x + 2{,}5)^2 + (y+6)^2 = 6{,}5^2$.

<u>Задача 6.</u> Окружность задана уравнением $x^2 + y^2 - 6x + 14y - 6 = 0$. Составить уравнение ее диаметра, перпендикулярного хорде $x - 2y - 2 = 0$.

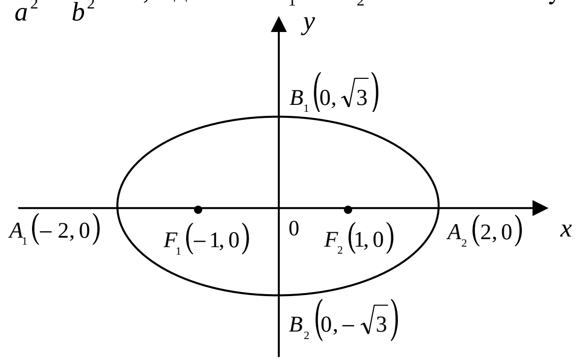
Решение. Диаметр AB проходит через центр окружности C. Приведем уравнение окружности к каноническому виду [2] $\left(x^2 - 6x + 9\right) + \left(y^2 - 14y + 49\right) = 64$ или $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 8^2$, откуда $C\,(3, 7)$. По условию задачи диаметр AB перпендикулярен данной прямой $x - 2y - 2 = 0$, значит, по условию перпендикулярности двух прямых $k_1 \cdot k_2 = -1$, получим $k_{AB} = -2$, т.к. угловой коэффициент данной прямой $k_2 = \dfrac{1}{2}$. Итак, прямая AB: $y - y_0 = k_{AB}(x - x_0)$, или $(y+7) = -2(x-3)$, или $2x + y + 1 = 0$.



<u>Ответ:</u> $2x + y + 1 = 0$.

<u>Задача 7.</u> Написать каноническое уравнение эллипса, у которого расстояние от одного из фокусов до концов большой оси равно 5 и 1.

Решение. Общий вид канонического уравнения эллипса [3]: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где $a = 0A_1 = 0A_2$ – большая полуось эллипса, а $b = 0B_1 = 0B_2$ - малая полуось эллипса. Найдем их. По условию задачи $A_1F_1 = 1$, $A_2F_1 = 5$, следовательно, $A_1A_2 = 6$ или $2a = 6$, $a = 3$, $F_1F_2 = 2c = 5 - 1 = 4$ – фокусное расстояние эллипса, откуда $c = 2$ – полуфокусное расстояние. Зависимость между параметрами a, b, c у эллипса: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$. Таким образом, каноническое уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.



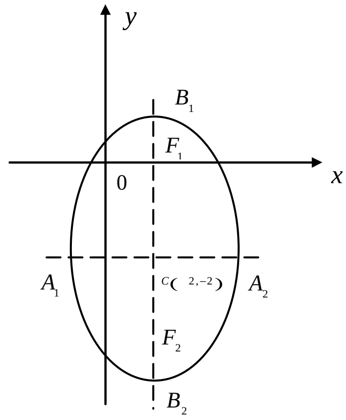
<u>Ответ:</u> $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

<u>Задача 8.</u> Найти полуоси, координаты вершин, фокусов, эксцентриситет эллипса $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$. Построить его.

Решение. Приведем уравнение эллипса к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ или $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, откуда $a=2$; $b=\sqrt{3}$, т.к. для эллипса $a^2=b^2+c^2$, то $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-3}=1$. Таким образом: $A_1(-2,0)$; $A_2(2,0)$; $B_1(0,\sqrt{3})$; $B_2(0,-\sqrt{3})$; $F_1(-1,0)$; $F_2(1,0)$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

<u>Ответ:</u> $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

<u>Задача 9.</u> Привести уравнение кривой к каноническому виду: $8x^2+3y^2-16x+12y-4=0$. Построить эту кривую, найти ее эксцентриситет.



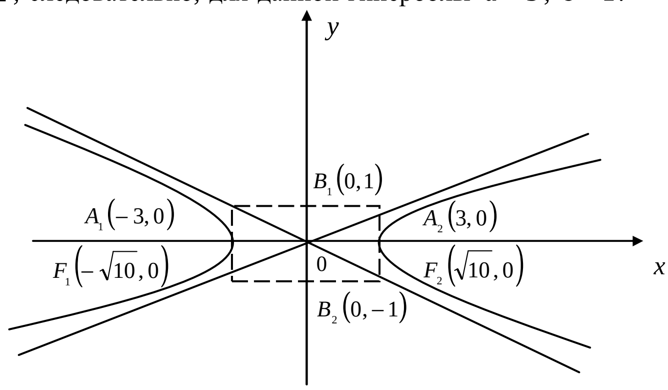
Решение. Выделим в уравнении кривой полные квадраты по x и y: $8(x^2-2x+1)+3(y^2+4y+4)=8+12+4$ или $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y+2)^2}{8}=1$. Из уравнения видно, что центр симметрии эллипса (данной кривой) находится в точке $C(1,-2)$;

$a=\sqrt{3}$ - малая и $b=\sqrt{8}$ – большая полуоси эллипса, $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{5}$; $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$.

<u>Ответ:</u> $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$.

<u>Задача 10.</u> Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$. Найти координаты ее вершин, фокусов, эксцентриситет и уравнения асимптот этой гиперболы.

Решение. Каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\boxed{4}$, следовательно, для данной гиперболы $a=3$, $b=1$.

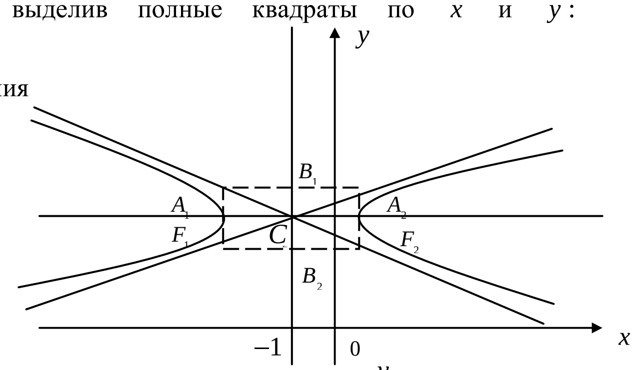


Зависимость между параметрами гиперболы: $c^2=a^2+b^2$ $\boxed{4}$

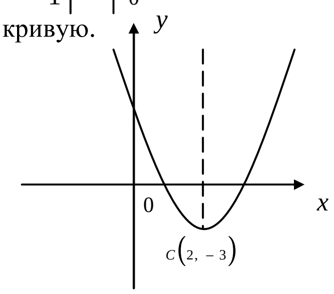
$\Rightarrow$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $c=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$. Значит, $A_1(-3,0)$; $A_2(3,0)$; $B_1(0,1)$; $B_2(0,-1)$; $F_1(-\sqrt{10},0)$; $F_2(\sqrt{10},0)$; $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{3}$; асимптоты: $y=\pm\frac{b}{a}x$ или $y=\pm\frac{1}{3}x$. (**<u>Ответ)</u>**

<u>Задача 11.</u> Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить ее: $x^2-2y^2+2x+12y-33=0$.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду, выделив полные квадраты по x и y: $(x^2+2x+1)-2(y^2-6y+9)=33+1-18$ или $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{8}$ $\boxed{4}$, из уравнения следует, что центр симметрии кривой $C(-1,3)$, $a=4$ - действительная, $b=\sqrt{8}$ - мнимая полуоси гиперболы; $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+8}=2\sqrt{6}$ - полуфокусное расстояние гиперболы $\boxed{4}$.

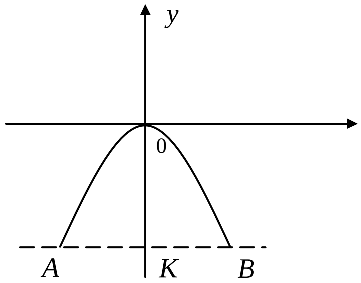


<u>Задача 12.</u> Привести уравнение кривой $y=3x^2-12x+9$ к каноническому виду, построить кривую.



Решение. Преобразуем данное уравнение. Выделив по x полный квадрат: $y=3(x^2-4x+4)-12+9$ или $(x-2)^2=\frac{1}{3}(y+3)$ - это каноническое уравнение параболы $(x-a)^2=2p(y-b)$ $\boxed{5}$. Из этого уравнения видно, что вершина параболы - $C(2,-3)$, ось симметрии параллельна оси $0y$.

Задача 13. Камень, брошенный под острым углом к горизонту, описал дугу параболы и упал на расстоянии 16 м от начального положения. Определить параметр параболической траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 12 м.



Решение. Выберем систему таким образом, чтобы можно было задать параболу каноническим $\boxed{5}$ уравнением вида $x^2 = -2py$. Из условий задачи видно, что в этой системе координат координаты точек $A(-8, -12)$, $B(8, -12)$, т.к. $AB = 16$, $OK = 12$.

Подставим координаты одной из них в уравнение параболы: $(-8)^2 = -2p(-12)$,

отсюда $p = \dfrac{64}{24} = \dfrac{8}{3} = 2\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $p = 2\dfrac{2}{3}$.

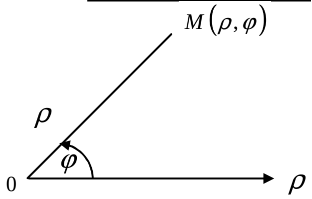
Задача 14. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, принимает форму параболы, параметр которого равен $p = 0{,}1$. Определить высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на расстоянии 2 м от места выхода.

Решение. Решая эту задачу, можно воспользоваться рисунком предыдущей задачи и уравнением параболы $x^2 = -2py$. По условию задачи известно, что $p = 0{,}1$ м, $AB = 2$, следовательно, $A(-1, y)$, $B(1, y)$,. Подставим в уравнение параболы данный параметр и координаты точки, через которую проходит парабола, например $A(-1, y)$: $(-1)^2 = -2 \cdot 0{,}1 \cdot y$, откуда $y = -5$. Это ордината точек A и B, а также и высота параболы h, следовательно, $h = |OK| = 5$.

Ответ: $h = 5$

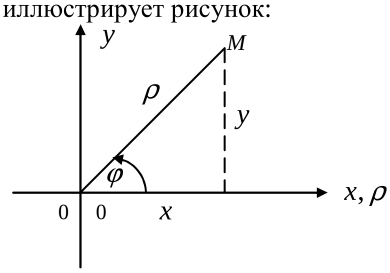
3.3 Кривые в полярной системе координат

Полярная система координат задается на плоскости точкой O – полюсом и лучом $O\rho$ – полярной осью.



Положение точки M относительно полярной системы координат определяют ее полярные координаты: ρ - полярный радиус, равный расстоянию точки M от полюса O, т.е. $\rho = OM$, и φ - полярный угол, который образует полярный радиус с полярной осью. Пишут: $M(\rho, \varphi)$, где $-\infty < \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Связь между декартовыми и полярными координатами точки M. Если полюс полярной системы координат совместить с началом координат декартовой системы, а полярную ось направить по оси $0x$, то между декартовыми и полярными координатами одной и той же точки $M(x, y) \Rightarrow M(\rho, \varphi)$ легко обнаружить следующую зависимость, которую иллюстрирует рисунок:

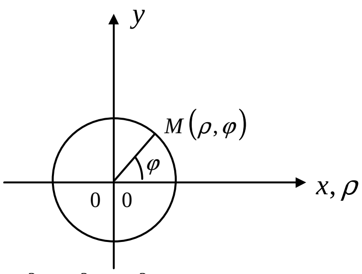


$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \varphi = arctg\,\dfrac{y}{x} \end{matrix}$$

Замечание: Чтобы правильно выбрать угол, имеющий тангенс, равный $\dfrac{y}{x}$, следует иметь в виду положение точки относительно декартовой системы координат.

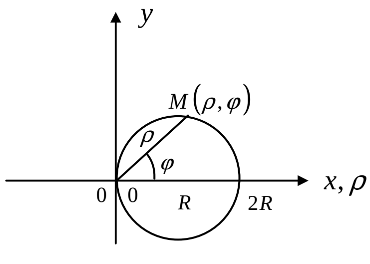
Приведем примеры некоторых кривых на плоскости, заданных в полярной системе координат.

1. Окружность



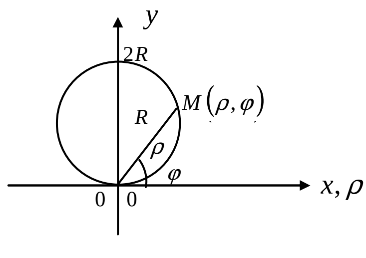
$x^2 + y^2 = R^2$

или $\rho = R$.



$(x - R)^2 + y^2 = R^2$

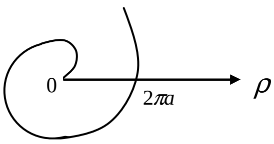
или $\rho = 2R\cos\varphi$.



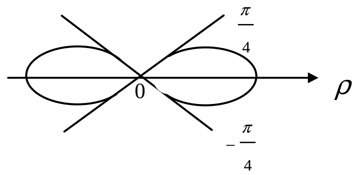
$x^2 + (y - R)^2 = R^2$

или $\rho = 2R\sin\varphi$.

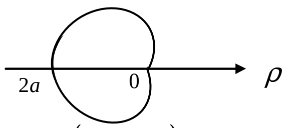
2. Спираль Архимеда $\rho = a\varphi$.



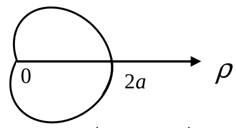
3. Лемниската Бернулли $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.



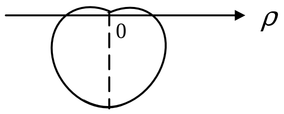
4. Кардиоида



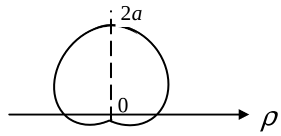
а) $\rho = a(1-\cos\varphi)$;



б) $\rho = a(1+\cos\varphi)$;

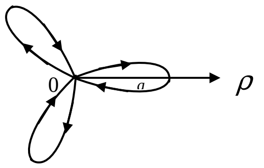


в) $\rho = a(1-\sin\varphi)$;

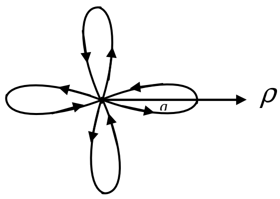


г) $\rho = a(1+\sin\varphi)$.

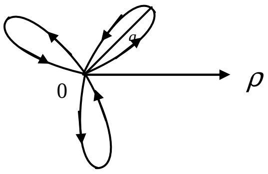
5. Розы



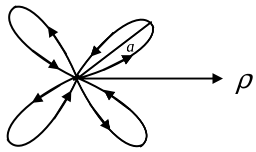
$\rho = a\cos 3\varphi$



$\rho = a\cos 2\varphi$



$\rho = a\sin 3\varphi$



$\rho = a\sin 2\varphi$

трехлепестковые

четырехлепестковые

3.4 Параметрический способ задания кривых на плоскости

Некоторые кривые на плоскости удобно задавать уравнениями вида $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где зависимость между функцией y и аргументом x устанавливается через посредство параметра (промежуточной переменной) t, причем $-\infty < t < \infty$.

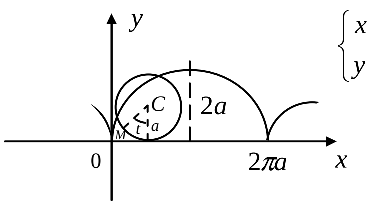
1. Параметрические уравнения прямой *l*:

$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$, где $M_0(x_0, y_0) \in l$; $\vec{s} = \{m; n\}$ - направляющий вектор прямой l, t - параметр.

2. Окружность*:* $x = R\cos t$; $y = R\sin t$.

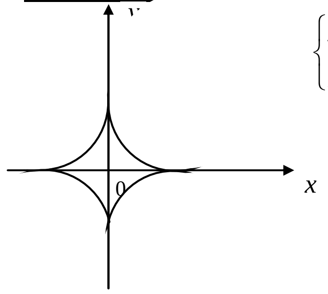
3. Эллипс*:* $x = a\cos x$; $y = b\sin t$.

3. Циклоида*:* - это линия, которую описывает неподвижная точка на окружности, в то время, как окружность без скольжения катится по оси $0x$.



$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

4. Астроида:



$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

3.5 Плоскость в пространстве

1 $F(x, y, z) = 0$ -поверхность.

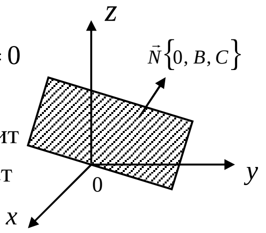
2 (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ - плоскость, где $\vec{N} = \{A, B, C\} \perp (\alpha)$ - нормаль $R(\alpha)$

3 (α): $Ax + By + Cz + D = 0$

$D = 0 \Rightarrow (0,0,0) \in (\alpha)$

Плоскость (α) проходит

Через начало координат



7 (α): $By + Cz + D = 0$

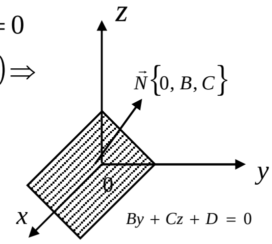
$A = 0 \Rightarrow \vec{N} = (0, B, C) \Rightarrow$

$(\alpha) \parallel OX$.

Плоскость (α)

параллельна

оси OX



4 $Ax + By = 0$;

$C = D = 0$;

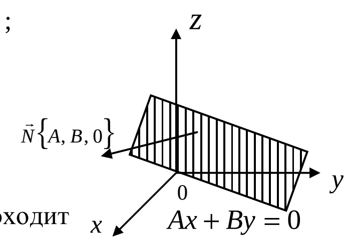
$\vec{N} = \{A, B, O\}$;

$(0,0,0) \in (\alpha)$;

$(\alpha) \parallel OZ$.

Плоскость проходит

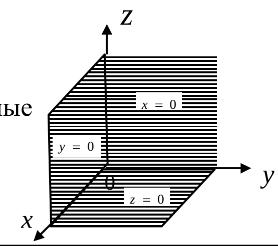
через ось OZ .



8

Координатные

плоскости



9 Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$

до плоскости (α) $Ax + By + Cz + D = 0$

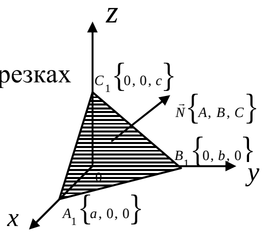
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5 Уравнение

плоскости в отрезках

на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



10 Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

6 Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{N} = \{A, B, C\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

11 $(\alpha)_1$ $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $(\alpha)_2$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Угол между двумя плоскостями:

$$\cos\varphi = \cos(\alpha_1 \hat{} \alpha_2) = \cos(\vec{N}_1 \hat{} \vec{N}_2) = \frac{\vec{N}_1\vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Rightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ -условие перпендикулярности двух плоскостей,

$(\alpha_1) \parallel (\alpha_2) \Rightarrow \vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} + \frac{B_1}{B_2} + \frac{C_1}{C_2}$ - условие параллельности двух плоскостей.

Задачи по теме «Плоскость в пространстве»

Задача1. Составить уравнение плоскости (α), параллельной плоскости XOZ и проходящей через точку $M(2,-5,3)$.

Решение. Искомая плоскость (α) параллельна координатной плоскости XOZ, значит, параллельна осям OX и OZ. Следовательно, в общем уравнении (α) $A=0$, $C=0$ $\boxed{7}$, т.е. оно имеет вид $By+D=0$, где $B\neq 0$, $D\neq 0$. Найдем B и D. Так как точка $M\in(\alpha)$, то ее координаты должны удовлетворять уравнение (α): $B(-5)+D=0 \Rightarrow D=5B$, подставив D в уравнение (α) и сократив на B, получим $By+5B=0$ или $y+5=0$ (α).

Ответ: (α) $y+5=0$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости (α), проходящей через ось OZ и через точку $M(-3,1,-2)$.

Решение. Плоскость (α), проходящая через ось OZ, проходит через начало координат параллельно оси OZ, значит, в общем уравнении (α) $D=0$, $C=0$, т.е. оно имеет вид $Ax+By=0$, где $A\neq 0$, $B\neq 0$ $\boxed{3}$ и $\boxed{7}$. Так как точка $M\in(\alpha)$, то ее координаты должны удовлетворять уравнение (α): $A(-3)+B\cdot 1=0 \Rightarrow B=3A$. Подставим B в уравнение (α) и сократим на A: $Ax+3Ay=0$, получим $x+3y=0$ - уравнение (α).

Ответ: (α) $x+3y=0$.

Задача 3. Найти объем пирамиды, отсекаемой плоскостью $2x-3y+z-12=0$ от координатного угла.

Решение. Приведем уравнение данной плоскости к виду «уравнение в отрезках на осях»$\boxed{5}$:

$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\right)$ $2x-3y+z-12=0$ или $\frac{x}{6}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{12}=1$. Откуда $a=6$, $b=-4$, $c=12$ – отрезки, отсекаемые плоскостью от осей координат, совпадающие с ребрами пирамиды $OABC$. Так как они взаимно перпендикулярны, то

$V_{пир}=\frac{1}{6}|a\cdot b\cdot c|=\frac{1}{6}6\cdot 4\cdot 12=48$.

Ответ: $V_{пир}=48$ куб.ед.

Задача 4. Составить уравнение плоскости (α), проходящей через точку $M(-2,7,3)$ параллельно плоскости $x-4y+5z-1=0$.

Решение. Если две плоскости параллельны, то их нормали тоже параллельны $\boxed{11}$, $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$. Поэтому в качестве нормали к искомой плоскости можно взять нормаль к данной плоскости $\vec{N}_1=\{1,-4,5\}$. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{N}_1=\{A,B,C\}$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ $\boxed{6}$, следовательно, искомая плоскость: $1(x+2)-4(y-7)+5(z-3)=0$ или $x-4y+5z+15=0$.

Ответ: (α) $x-4y+5z+15=0$.

Задача 5. Даны две точки: $P(1,3,-2)$ и $Q(7,-4,4)$. Через точку Q провести плоскость, перпендикулярную отрезку PQ. Найти направляющие косинусы нормали к плоскости.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ $\boxed{6}$. Примем за нормаль $\vec{N}_1=\{A,B,C\}$: вектор $\overrightarrow{PQ}=\{6,-7,6\}$. Тогда уравнение плоскости: $6(x-7)-7(y+4)+6(z-4)=0$ или $6x-7y+6z-94=0$. Чтобы найти направляющие косинусы вектора $\vec{N}=\{6,-7,6\}$, найдем его орт: $\vec{N}^0=\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$; $|\vec{N}|=\sqrt{6^2+(-7)^2+6^2}=11$.

Следовательно: $\vec{N}^0=\left\{\frac{6}{11},-\frac{7}{11},\frac{6}{11}\right\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ или $\cos\alpha=\frac{6}{11}$; $\cos\beta=-\frac{7}{11}$; $\cos\gamma=\frac{6}{11}$.

Ответ: $6x-7y+6z-94=0$; $\cos\alpha=\frac{6}{11}$; $\cos\beta=-\frac{7}{11}$; $\cos\gamma=\frac{6}{11}$.

Задача 6. Найти объем куба, если грани его лежат на плоскостях (α_1) $11x-2y-10z+15=0$ и (α_2) $11x-2y-10z-45=0$.

Решение. Объем куба $V=a^3$, где a – длина ребер куба. Ребро куба равно расстоянию между данными плоскостями, т. к. эти плоскости параллельны (коэффициенты при переменных пропорциональны), значит, на этих плоскостях лежат противоположные грани куба. Чтобы найти расстояние между двумя плоскостями, воспользуемся формулой $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ $\boxed{9}$. Для этого на одной из плоскостей выберем произвольную точку, например $M\left(0,0,\dfrac{3}{2}\right)\in\alpha_1$, и найдем расстояние от нее до второй плоскости α_2: $d=\dfrac{\left|11\cdot0-2\cdot0-10\cdot\dfrac{3}{2}-45\right|}{\sqrt{11^2+(-2)^2+(-10)^2}}=\dfrac{60}{15}=4$.

Итак, $a=d=4\Rightarrow V_{куб}=a^3=4^3=64$.

Ответ: $V_{куб}=64$.

Задача 7. Найти точку пересечения данных плоскостей: $5x+8y-z-7=0$ (α_1), $x+2y+3z-1=0$ (α_2), $2x-3y+2z-9=0$ (α_3).

Решение. Чтобы найти точку пересечения трех плоскостей, т. е. общую точку этих трех плоскостей, достаточно решить систему их уравнений: $\begin{cases}x+2y+3z=1\\5x+8y-z=7\\2x+3y+2z=9\end{cases}$.

Используем метод Гаусса:

$$\begin{array}{c}\\-5\\-2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\5&8&-1&7\\2&-3&2&9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&-2&-16&2\\0&-7&-4&7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&-1&-8&1\\0&-7&-4&7\end{array}\right)\begin{array}{c}\\-7\\\\\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&-1&-8&1\\0&0&52&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x+2y+3z=1\Rightarrow x=1-2y-3z=3\\-y-8z=1\Rightarrow y=-1\\52z=0\Rightarrow z=0.\end{cases}$$

Ответ: $M(3,-1,0)$.

Задача 8. Найти угол между плоскостью $x-y+\sqrt{2}z-5=0$ и плоскостью YOZ.

Решение. Угол между двумя плоскостями можно найти по формуле $\cos\varphi=\dfrac{\vec{N}_1\vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}|_2}$ $\boxed{9}$; нормаль к первой плоскости $\vec{N}_1=\{1,-1,\sqrt{2}\}$; уравнение второй плоскости YOZ $x=0\Rightarrow\vec{N}_2=\{1,0,0\}$.

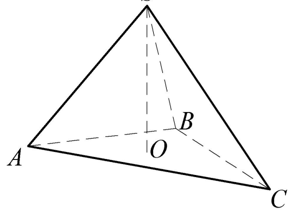
Вычислим $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\dfrac{1\cdot1+(-1)\cdot0+\sqrt{2}\cdot0}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$, т. е. $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Задача 9. Найти длину высоты пирамиды $SABC$, опущенной из вершины S на грань ABC, если $S(1,4,-2)$, $A(0,-1,1)$, $B(3,5,1)$, $C(1,-3,-1)$.

Решение. Длина высоты SO – это длина перпендикуляра, опущенного из вершины S пирамиды на плоскость ее основания, с помощью которого измеряется расстояние от точки S до плоскости основания ABC. Составим уравнение плоскости ABC, проходящей через три данные точки A, B и C, для этого воспользуемся уравнением $\boxed{10}$:

$$\begin{vmatrix}x-x_1&y-y_1&z-z_1\\x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\x_3-x_1&y_3-y_1&z_3-z_1\end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix}x-0&y+1&z-1\\3-0&5+1&1-1\\1-0&-3+1&-1-1\end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix}x&y+1&z-1\\3&6&0\\1&-2&-2\end{vmatrix}=0;\Rightarrow$$



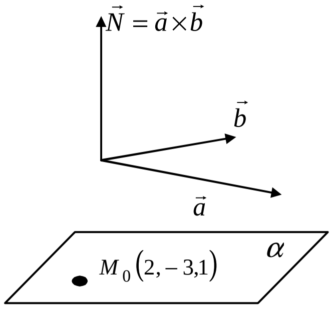
$\Rightarrow -12x+6(y+1)-12(z-1)=0\Rightarrow 12x-6y+12z-18=0$ или $2x-y+2z-3=0$ - уравнение плоскости основания пирамиды. Расстояние d (высота SO) можно найти по формуле расстояния от точки до плоскости $\boxed{9}$:

$$SO=d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot1-1\cdot4+2\cdot(-2)-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3.$$

Ответ: $SO=3$.

Задача 10. Найти уравнение плоскости (α), проходящей через точку $M_0(2,-3,1)$ параллельно векторам $\vec{a}=\{-3,2,-1\}$ и $\vec{b}=\{1,2,3\}$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0:\boxed{11}$, точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ задана в условии задачи; в качестве нормального вектора $\vec{N}_1=\{A,B,C\}$ можно взять векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которые параллельны плоскости (α), т. к. $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ будет перпендикулярен искомой плоскости (α).



$$\vec{N}=\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=8\vec{i}+8\vec{j}-8\vec{k}=\{8,8,-8\}\boxed{9}$$

Уравнение (α): $8(x-2)+8(y+3)-8(z-1)=0$, сократив на 8, получим $(x-2)+(y+3)-(z-1)$.

Ответ: $x+y-z+2=0$.

3.6 Прямая в пространстве

$\boxed{1}$ $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0-\text{поверхность}\\ F_2(x,y,z)=0-\text{поверхность}\end{cases}$ - линия пересечения

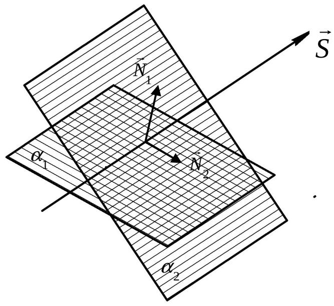
$\boxed{2}$ $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0-\textit{плоскость}\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0-\textit{плоскость}\end{cases}$ - прямая l.

Это общие уравнения прямой l;

1. $\vec{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$ - нормаль к пл. α_1,

2. $\vec{N}_1=(A_2,B_2,C_2)$ - нормаль к пл. α_2,

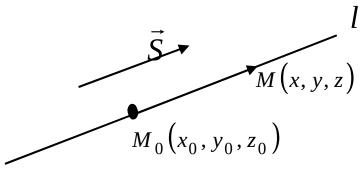
$A_1x+B_1y+C_1z+z_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ - уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую l.



$\boxed{3}$ Каноническое уравнение прямой l:

$l:\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, где $M_0(x_0,y_0,z_0)\in l$,

$\vec{s}=\{m,n,p\}$ - направляющий вектор прямой l: $\vec{s}\parallel l$.



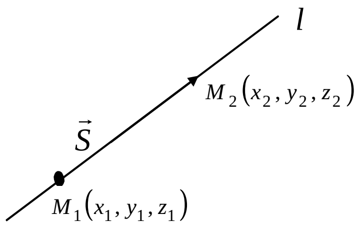
$\boxed{4}$ Уравнение прямой l, проходящей через <u>две данные</u> точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

Направляющий вектор прямой

$\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}=\{m,n,p\}$.

Через любую из данных точек проводим прямую:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$



$\boxed{5}$ Общие уравнения прямой l : $\begin{cases}(\alpha_1)\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ (\alpha_2)\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ привести к каноническому виду:

$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$. На прямой l выберем любую точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, подобрав x_0, y_0, z_0, удовлетворяющие систему уравнений l. Направляющим вектором $\vec{S}$ может служить вектор $\vec{S}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$, т.к. $\vec{N}_2$ и $\vec{N}_1$ перпендикулярны прямой l $\boxed{2}$.

6 Иногда удобно пользоваться параметрическими уравнениями прямой:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t \quad \text{или} \quad \begin{array}{l} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{array}; \text{ где } t \text{ - параметр,}$$

7 Угол между двумя прямыми l_1 и l_2:

$l_1: \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$; l_2 $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ - это угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1=\{m_1, n_1, p_1\}$ и $\vec{s}_2=\{m_2, n_2, p_2\}$:

$$\cos\varphi=\cos\left(l_1{}^{\wedge}l_2\right)=\cos\left(\vec{S}_1{}^{\wedge}\vec{S}_2\right)=\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right|\left|\vec{S}_2\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1{}^2+n_1{}^2+p_1{}^2}\sqrt{m_2{}^2+n_2{}^2+p_2{}^2}}.$$

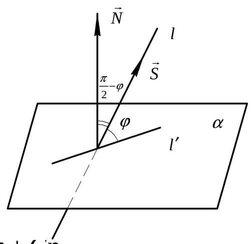
Условие параллельности двух прямых: $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \vec{S}_1 \perp \vec{S}_2 \Rightarrow \vec{S}_1\cdot\vec{S}_2=0 \Rightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

8 Дано : (α): $Ax+By+Cz+D=0$ - плоскость,

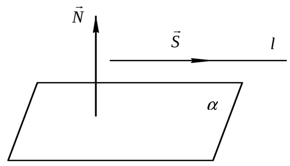
l : $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ - прямая. Угол между прямой l и плоскостью (α) - это угол φ между прямой l и l' ее проекцией на плоскость. Векторы $\vec{N}=\{A, B, C\}$ и $\vec{S}=\{m, n, p\}$ образуют угол



$\dfrac{\pi}{2}-\varphi$, значит, $\sin\varphi=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\left(\vec{N}{}^{\wedge}\vec{S}\right)=\dfrac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{\left|\vec{N}\right|\left|\vec{S}\right|}=\dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

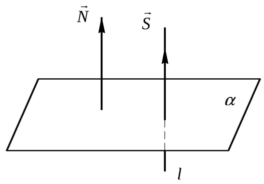
9 Условие параллельности прямой и плоскости:

$$l_1 \mathbin{//} \alpha \Rightarrow \vec{N}\perp\vec{S} \Rightarrow \vec{N}\cdot\vec{S}=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Am+Bn+Cp=0.$$



10 Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$l_1 \perp \alpha \Rightarrow \vec{N}\parallel\vec{S} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$



Задачи по теме «Прямая и плоскость в пространстве»

Задача 1. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(1,-2,2)$ параллельно оси $0y$.

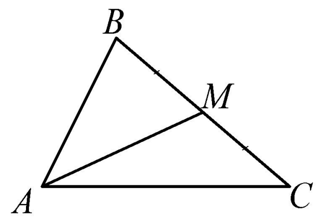
Решение. В канонических уравнениях прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ $\boxed{3}$ точка $M_0(x_0, y_0, z_0)\in l$, а вектор $\vec{S}=\{m, n, p\}$– направляющий вектор прямой. По условию задачи прямая параллельна оси $0y$, следовательно, направляющим вектором прямой может служить орт оси $0y$ вектор $\vec{j}=\{0,1,0\}$. Итак, канонические уравнения прямой l $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{0}$. Приравнивая попарно отношения, получим общие уравнения ее $(l)\begin{cases} x=1 \\ z=2 \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x=1 \\ z=2 \end{cases}$

Задача 2. Даны координаты вершин треугольника $A(2, 3, -1)$; $B(1, -2, 0)$; $C(-3, 2, 2)$. Составить уравнения медианы AM и найти ее длину.

Решение.

а) Найдем координаты точки M – середины отрезка BC по формулам:



$x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{1-3}{2} = -1$; $y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{-2+2}{2} = 0$;

$z_M = \dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{2+0}{2} = 1$, т.е. $M(-1, 0, 1)$.

Через точки A и M проведем прямую AM, используя уравнения

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ или $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z+1}{2}$.

б) Длину медианы AM можно найти по формуле расстояния между двумя точками:

$AM = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (3-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{22}$.

Ответ: 1) $AM: \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z+1}{2}$:

2) $AM = \sqrt{22}$.

Задача 3. Через точку $M_0(1, -3, 5)$ провести прямую l, параллельную прямой $l_1: \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$.

Решение. Так как прямые l и l_1 параллельны, то за направляющий вектор искомой прямой $\vec{S}$ можно принять направляющий вектор данной прямой $\vec{S}_1$, который можно найти как векторное произведение нормалей к плоскостям, при пересечении которых образуется данная прямая l: $\vec{N}_1 = \{3, -1, 2\}$ и $\vec{N}_2 = \{1, 3, -2\}$.

Итак, $\vec{S} = \vec{S}_1 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} + 10\vec{k}$ $\boxed{5}$.

Канонические уравнения прямой l: $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+3}{8} = \dfrac{z-5}{10}$ или $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z-5}{5}$.

Ответ: $l: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z-5}{5}$.

Задача 4. Доказать, что прямые $l_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{3}$ и $l_2: \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$: перпендикулярны.

Решение. Если прямые перпендикулярны, то перпендикулярны их направляющие векторы $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ $\boxed{7}$. Из условий задачи ясно, что $\vec{S}_1 = \{1, -2, 3\}$, а направляющий вектор второй прямой $\vec{S}_2$ можно найти как векторное произведение нормалей плоскостей, заданных в общих уравнениях прямой l_2, т. е. $\vec{N}_1 = \{3, 1, -5\}$ и $\vec{N}_2 = \{2, 3, -8\}$. Таким образом,

$\vec{S}_2 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = \{7, 14, 7\}$ $\boxed{5}$.

Скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов равно нулю: $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 1\cdot 7 + (-2)\cdot 14 + 3\cdot 7 = 0$. Что и требовалось доказать.

Задача 5. Найти угол между прямой, проходящей через точки $A(2, 3, -1)$ и $B(1, -2, 0)$ и плоскостью α: $x - 3y + z + 5 = 0$.

Решение. Угол между прямой и плоскостью можно найти по формуле $\sin\varphi = \dfrac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ $\boxed{8}$, где $\vec{N} = \{A, B, C\}$ – нормаль к плоскости, а $\vec{S} = \{m, n, p\}$ – направляющий вектор прямой AB.

По условию задачи $\vec{N}=\{1,-3,1\}$. Составим канонические уравнения прямой AB, используя уравнения прямой, проходящей через две данные точки: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ или $\dfrac{x+1}{1+1}=\dfrac{y-0}{2-0}=\dfrac{z+5}{0+5}$, откуда $\vec{S}=\{2,2,5\}$. Используем формулу $\boxed{8}$ $\sin\varphi=\dfrac{2\cdot1+2\cdot(-3)+5\cdot1}{\sqrt{2^2+2^2+5^2}\sqrt{1^2+(-3)^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{33}\sqrt{11}}=\dfrac{1}{11\sqrt{3}}$.

<u>Ответ:</u> $\varphi=\arcsin\dfrac{1}{11\sqrt{3}}$.

<u>Задача 6.</u> Привести общие уравнения прямой $l:\begin{cases}x-3y+2=0\\2y-z+1=0\end{cases}$ к каноническому виду.

Решение. Канонические уравнения прямой имеют вид $\boxed{5}$ $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, где точка $M_0(x_0,y_0,z_0)\in l$, а вектор $\vec{S}=\{m,n,p\}$– направляющий вектор прямой l. Точку $M_0(x_0,y_0,z_0)\in l$ выберем абсолютно произвольно на прямой l, т. е. найдем одно из бесчисленного множества решений системы уравнений $\begin{cases}x-3y+2=0\\2y-z+1=0\end{cases}$.

Положим $x_0=1$, тогда из первого уравнения $y_0=1$, а из второго $z_0=3$, т. е. $M_0(1,1,3)\in l$. Направляющий вектор прямой l, как и ранее, найдем с помощью векторного произведения векторов $\vec{N}_1=\{1,-3,0\}$ и $\vec{N}_2=\{0,2,-1\}$:

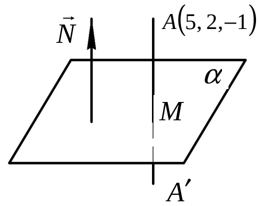
$$\vec{S}_2=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-3&0\\0&2&-1\end{vmatrix}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}=\{3,1,2\}.$$

Подставим координаты точки M_0 и вектора $\vec{S}$ в уравнения $\boxed{5}$.

<u>Ответ:</u> $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$.

<u>Задача 7.</u> Найти точку A', симметричную точке $A\{5,2,-1\}$ относительно плоскости α: $2x-y+3z+23=0$.

Решение. Точка A' – симметрична точке A относительно плоскости α, если лежит на прямой $AA'\perp(\alpha)$ и на одинаковом расстоянии от плоскости α $\boxed{10}$, т. е. $AM=MA'$. Проведем через точку A прямую AA', приняв за ее



направляющий вектор $\vec{S}=\{m,n,p\}$ вектор $\vec{N}=\{2,-1,3\}$ - нормаль к плоскости α: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ $\boxed{5}$. (AA') $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{3}=t$ или $\begin{cases}x=5+2t\\y=2-t\\z=-1+3t\end{cases}$ $\boxed{6}$ – параметрические уравнения прямой (AA'). Решив совместно уравнения плоскости α и прямой AA', найдем точку M. Подставим x, y, z, выраженные через параметр t в уравнениях AA', в уравнение α, получим $2(2t+5)-(-t+2)+3(3t-1)+23=0$. $14t=-28\Rightarrow t=-2$– это значение параметра t, соответствующее точке M, подставим его в параметрические уравнения прямой $\boxed{6}$, получим $M\{1,4,-7\}$–середину отрезка AA'.

По формулам координат середины отрезка получим

$$x_M=\frac{x_A+x_{A'}}{2},\ \text{где } 1=\frac{5+x_{A'}}{2},\ \text{откуда } x_{A'}=-3,$$

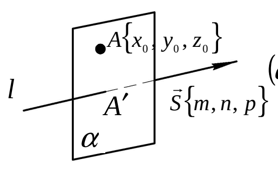
$$y_M=\frac{y_A+y_{A'}}{2},\ \text{где } 4=\frac{2+y_{A'}}{2},\ \text{откуда } y_{A'}=6,$$

$$z_M=\frac{z_A+z_{A'}}{2},\ \text{где } -7=\frac{-1+z_{A'}}{2},\ \text{откуда } z_{A'}=-13,$$

<u>Ответ:</u> $A'\{-3,6,-13\}$.

<u>Замечание:</u> точка M является ортогональной проекцией точки A на плоскость α.

<u>Задача 8.</u> Найти проекцию точки $A\{4,3,10\}$ на прямую l: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$.



Решение. Чтобы спроектировать точку A на прямую (l) в пространстве, проведем плоскость (α) через точку A перпендикулярно прямой (l): $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, приняв за нормаль к плоскости $\vec{N}=\{A, B, C\}$ - направляющий вектор прямой $\vec{S}=\{m, n, p\}=\{2, 4{,}5\}$ (α): $2(x-4)+4(y-3)+5(z-10)=0$ или (α): $2x+4y+5z-70=0$.

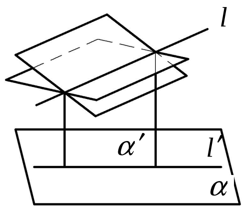
Искомая точка A'– точка пересечения прямой l и плоскости α. Решим систему их уравнений (α): $2x+4y+5z-70=0$, l: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}=t$ или l: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+4t \; \boxed{6} \\ z=3+5t \end{cases}$.

Подставим x, y, z из уравнений прямой $\boxed{6}$ в уравнение плоскости: $2(1+2t)+4(2+4t)+5(3+5t)-7=0$, откуда $45t=45$, или $t_{A'}=1$, или $x_{A'}=1+2\cdot1=3$, или $y_{A'}=2+4\cdot1=6$, $z_{A'}=3+5\cdot1=8$.

<u>Ответ:</u> $A'\{3, 6, 8\}$.

<u>Задача 9.</u> Найти проекцию прямой l: $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$ на плоскость α: $x-y+3z+8=0$.

Решение. Ортогональной проекцией прямой (l) на плоскость (α) называется линия пересечения плоскости (α) и плоскости (α'), проходящей через прямую (l) перпендикулярно плоскости (α), т.е. прямая (l'). Приведем канонические уравнения прямой к общему виду: $\begin{cases} 3x-4y+16=0 \\ x+2z+2=0 \end{cases}$ (приравняв попарно отношения) .

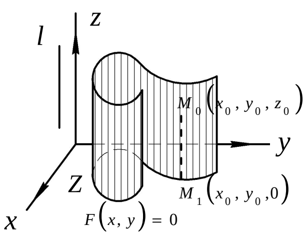


Теперь составим уравнение пучка плоскостей $\boxed{2}$, проходящих через прямую (l): $3x-4y+16+\lambda(x+2z+2)=0$, и выделим из этого пучка плоскость (α'), перпендикулярную плоскости (α). Воспользуемся условием перпендикулярности двух плоскостей: $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0$, подчинив ему уравнение плоскости (α): $x-y+3z+8=0$ и плоскости (α'): $(3+\lambda)x+(-4)\cdot y+2\lambda z+(16+2\lambda)=0$. Получим $1\cdot(3+\lambda)+(-1)\cdot(-4)+3\cdot2\lambda z=0 \Rightarrow 7\lambda=-7 \Rightarrow \lambda=-1$. Подставим найденное значение λ в уравнение пучка плоскостей, получим (α'): $2x-4y-2z+14=0$. Проекция прямой (l) на плоскость (α) – линия пересечения плоскостей (α) и (α'), т.е. (l') $\begin{cases} 2x-4y-2z+14=0 \\ x-y+3z+8=0 \end{cases}$ – это **<u>ответ.</u>**

3.7 Криволинейные поверхности

1° Цилиндрические поверхности

Цилиндром (цилиндрической поверхностью) называют поверхность, которую описывает прямая (образующая цилиндра), перемещающаяся в пространстве параллельно некоторой прямой, пересекая по пути некоторую плоскую линию (направляющую цилиндра).

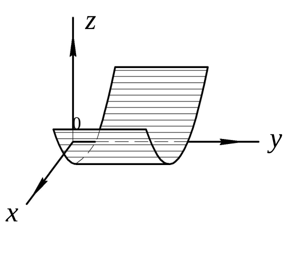


<u>Замечание</u>. В нашем курсе рассматриваем цилиндры, образующие которых параллельны осям координат.

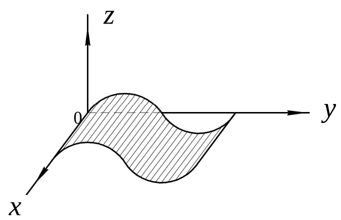
Если направляющая цилиндра L расположена в плоскости $x0y$, ее уравнение $F(x, y)=0$, а образующие параллельны оси $0z$, то уравнение цилиндрической поверхности совпадает с уравнением направляющей: $F(x, y)=0$. Вообще, уравнение цилиндрической поверхности содержит только две переменные, оно полностью совпадает с уравнением направляющей цилиндра, которая определяет его фору. При этом образующие этого цилиндра, параллельные координатной оси, одноименной координате, отсутствующей в уравнении.

Примеры

а) $x^2=2pz$– параболический цилиндр, образующие которого параллельны оси $0y$.



б) $z=\sin y$– «синусоидальный» цилиндр, образующие которого параллельны оси $0x$



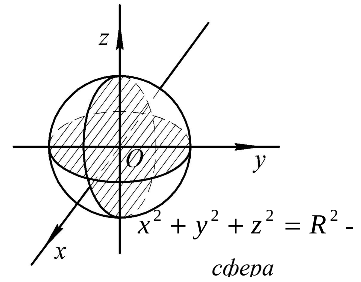
2° Поверхности вращения

Поверхности вращения образуются вращением плоской линии вокруг прямой (оси вращения) таким образом, что каждая точка линии описывает окружность.

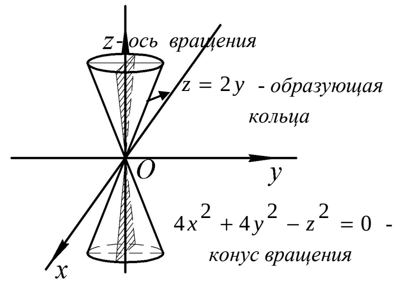
Замечание. В нашем курсе осью вращения обычно является одна из осей координат.

Правило: Чтобы получить уравнение поверхности вращения, зная уравнение вращающейся линии, надо в этом уравнении оставить неизменной координату, одноименную с осью вращения, а другую – заменить на корень квадратный из суммы квадратов двух других координат (разноименных с осью вращения).

Примеры.



1. Составить уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси $0x$ окружности $x^2+y^2=R^2$. Заменим в уравнении согласно правилу y на $\sqrt{y^2+z^2}$, тогда $x^2+\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2=R^2$ или $x^2+y^2+z^2=R^2$ – это каноническое уравнение сферы с центром в $O(0,0,0)$ и радиусом R.

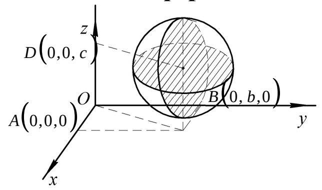


2. Составить уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси $0z$ прямой $z=2y$. Заменим в уравнении прямой согласно правилу y на $\sqrt{x^2+y^2}$:

$z=2\sqrt{x^2+y^2}$ или $z^2=4\left(x^2+y^2\right)$, или $4x^2+4y^2-z^2=0$ – коническая поверхность.

3° Криволинейные поверхности второго порядка

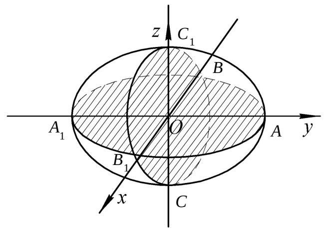
1. Сфера:



$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

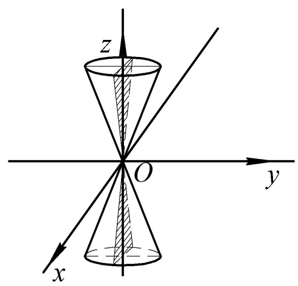
R – радиус, $C(a,b,c)$ – центр.

2. Эллипсоид трехосный:



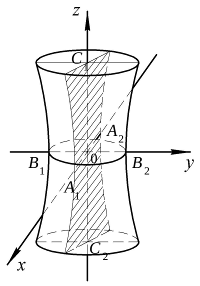
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

3. Конус эллиптический:



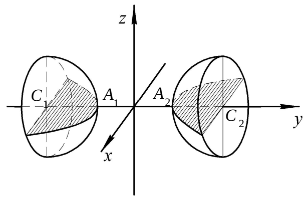
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

4. Гиперболоид однополостный:



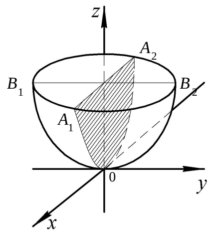
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

5. Гиперболоид двуполостный:



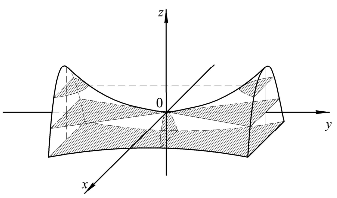
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

6. Параболоид эллиптический:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz\text{, где } p>0.$$

7. Параболоид гиперболический:



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$$

4° Метод параллельных сечений

При исследовании форм всех поверхностей второго порядка можно пользоваться методом параллельных сечений, т.е. отыскивать линии пересечения данных поверхностей с координатными плоскостями: $x=0$, $y=0$, $z=0$ и плоскостями, параллельными им: $x=const$, $y=const$, $z=const$. Как правило, по совокупности полученных сечений можно составить достаточно полное представление о конфигурации исследуемой поверхности.

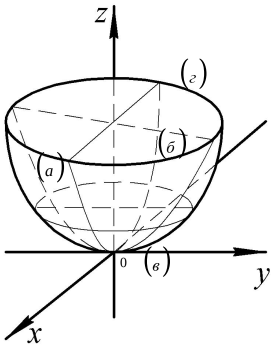
Пример: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z$ - исследовать и построить данную поверхность.

а) $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z\\ x=0\end{cases}\Rightarrow\frac{y^2}{4}=2z$ или $y^2=8z$ - парабола, симметричная относительно оси $0z$, $p=4$; $C'(0,0)$.

б) $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\frac{x^2}{9}=2z$ или $x^2=18z$ - парабола, симметричная относительно оси $0z$, $p=9$; $C(0,0)$.

в) $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z\\ z=0\end{cases}\Rightarrow O(0,0)$ - вершина поверхности.

г) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=2z \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=2\,\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{8}=1$ - эллипс с полуосями $a=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $b=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.



Эллиптический параболоид.

Список литературы

1. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. СПб.: Лань, 1997, 728 с.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989, 320 с.
3. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. М.: Высш. шк., 1978, Т1. 384 с.
4. Щипачев В.С. Основы высшей математики. М.: Высш. шк., 1998, 200 с.
5. Гурский Е.И., Ершова В.В. Основы линейной алгебры и аналитическая геометрия. Минск: Высш. шк., 1965, 184 с.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980, 1984, 120 с.
7. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. М: Высш. шк., 1996, Ч.1, 160 с.
8. Сборник задач и упражнений по курсу высшей математики / Под ред. Г.И. Кручновича, М.: Высш. шк., 1973, 576 с.
9. Васильева Н.И., Воробьева Е.А., Минабудинова Р.Ш. Системы линейных уравнений: Метод. указания к практич. занятиям. Омск: Изд-во ОмПИ, 1980, 36 с.
10. Васильева Н.И., Воробьева Е.А., Минабудинова Р.Ш. Векторная алгебра. Линейные преобразования: Метод. указания к практич. занятиям. Омск: Изд. ОмПИ, 1980, 40 с.
11. элементы линейной алгебры / Сост. Ю.Ф. Стругов, Г.А. Троценко, Е.М. Назарук. Омск: Изд-во ОмГТУ, 1998, 36 с.
12. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М.: Наука, 1970, 336 с.
13. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1986, 240 с.