Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов вечерней и заочной форм обучения

Омск – 2004

Составители: Васильева Нина Иосифовна, старший преподаватель,
Минабудинова Рамзия Шаиховна

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета.

Содержание

Решение многих задач естествознания, техники, экономики приводит к нахождению неизвестных функций, описывающих рассматриваемые явления или процессы, когда известны соотношения, связывающие между собой эти функции и их производные. Такие соотношения называются дифференциальными уравнениями. Рассмотрим конкретную задачу о потоке научной информации, приводящую к дифференциальному уравнению.

Задача. При исследовании роста информационных потоков в науке (числа научных публикаций) исходят из допущения, что скорость роста $\frac{dy}{dt}$ пропорциональна достигнутому уровню y числа публикаций, т. е. $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$, где $k > 0$ – константа, характеризующая отклики на публикации в той или иной области.
Уравнение $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$ является дифференциальным уравнением. Его решением является экспонента $y = c \cdot e^{kt}$, где c – некоторая постоянная.

1. Основные понятия и определения

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные различных порядков. Например:

1) $y' \cdot x - x^2 - y = 0$
2) $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$
3) $y'' + 2y' - y = 0$,

т. е. дифференциальное уравнение может содержать производные $y'\left(\frac{dy}{dx}\right)$ или дифференциалы dx и dy независимой переменной и функции.

Определение. Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение. Так, в рассмотренных примерах первое и второе уравнения – уравнения первого порядка, третье – второго порядка.

Определение. Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, удовлетворяющая этому уравнению (т. е. функция, которая обращает данное уравнение в тождество).

Пример. Показать, что функция $y = e^{3x}$ является решением дифференциального уравнения $y'' - 9y = 0$.

Решение. Для функции $y = e^{3x}$ находим первую $y' = 3 \cdot e^{3x}$ и вторую $y'' = 9 \cdot e^{3x}$ производные. Подставляя выражения y и y'' в исходное уравнение, получаем тождество $9 \cdot e^{3x} - 9 \cdot e^{3x} = 0$, что и доказывает, что функция $y = e^{3x}$ – решение дифференциального уравнения $y'' - 9y = 0$. Нетрудно убедиться, что решениями этого уравнения являются и все функции вида $y = c \cdot e^{3x}$, где c – произвольная постоянная. Действительно, $y' = 3c \cdot e^{3x}$, $y'' = 9c \cdot e^{3x}$. Подставляя y и y'' в уравнение, получаем тождество

$$9c \cdot e^{3x} - 9c \cdot e^{3x} = 0.$$

Таким образом, дифференциальному уравнению удовлетворяет бесконечная система функций – его решений. Для выделения одной из них должны быть заданы так называемые начальные условия. Для д. у.1 начальные условия будут такими: известно значение функции $y = y_0$ при заданном значении независимой переменной $x = x_0$. Записываются в виде

$$y(x_0) = y_0 \qquad \text{или} \qquad y\big|_{x=x_0} = y_0.$$

Для уравнений второго порядка начальных условий будет два:

$$y(x_0) = y_0; \qquad y'\big|_{x=x_0} = y'_0.$$

Определение. Решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется **задачей Коши.**

Пример. Легко проверить, что функции вида $y = x^2 + c \cdot x$ являются решениями дифференциального уравнения $y' \cdot x - x^2 - y = 0$ (проверьте самостоятельно).

Зададим начальные условия $y\big|_{x=1} = 2$. Из формулы решений $y = x^2 + c \cdot x$ выделим соответствующее частное решение. Для этого в решение $y = x^2 + c \cdot x$ подставим $x = 1$ и $y = 2$. Получим уравнение $2 = 1^2 + c \cdot 1$ для вычисления постоянной c. В данном случае $c = 1$. Подставив найденное значение $c = 1$ в решение $y = x^2 + c \cdot x$, получим $y = x^2 + x$ – искомое частное решение.

Рассмотрим различные типы дифференциальных уравнений и методы их решения.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Так как дифференциальное уравнение первого порядка (условимся в дальнейшем писать д.у.1) содержит независимую переменную *x*, функцию y и ее производную y', общий вид д.у.1 будет выглядеть как

$$F(x,\ y,\ y') = 0. \qquad (1)$$

Если уравнение (1) решить относительно производной y', то оно может быть записано в виде $y' = f(x,\ y)$. (2)

Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, из выражения (2) $\dfrac{dy}{dx} = f(x,\ y)$

можно перейти к форме $M(x, y) \cdot dx + N(x,y) \cdot dy = 0$. (3)

Например, дифференциальное уравнение $ydy + (x - 2y)\,dx = 0$ (3) можно записать в виде $y\,dy = (2y - x)\ dx$, затем, разделив уравнение на $y \cdot dx$, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x}{y} \qquad \text{или} \qquad y' = \frac{2y - x}{y}.$$

Наконец, можно получить $\dfrac{2y - x}{y} - y' = 0$.

Таким образом, формы записи дифференциальных уравнений (1) – (3) равноправны, можно пользоваться любой из удобных для решения.

Определение. Общим решением д .у.1 называется функция $y = \varphi(x,\ c)$, которая зависит от одной произвольной постоянной c и

1) удовлетворяет данному д .у.1 при любом значении c;

2) каково бы ни было начальное условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$, можно найти такое значение c_o, при котором функция $y = \varphi(x,\ c_o)$ удовлетворяет начальному условию.

Например, для д .у.1 $y' = 4x^3$ общим решением является функция $y = x^4 + c$. Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 3$. Для этого подставим в общее решение $y = x^4 + c$ значение $x = 0$ и $y = 3$. Получим $3 = 0 + c$, откуда $c = 3$. Подставим найденное значение $c = 3$ в общее решение; $y = x^4 - 3$– это искомое частное решение. Таким образом, всякое частное решение получается из формулы общего решения при конкретном значении *c*.

3. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и способы их решения

Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Простейшим д .у.1 является уравнение вида $y' = f(x)$. Как известно из курса интегрального исчисления, функция y находится интегрированием

$$y = \int f(x)\ dx + c.$$

Определение. Уравнение вида $f_1(x) \cdot dx + f_2(y) \cdot dy = 0$ называется дифференциальным уравнением с **разделенными переменными.** Его можно записать в виде

$$f_2(y)\ dy = -f_1(x)\ dx.$$

Проинтегрируем обе части уравнения, получим так называемый общий интеграл (или общее решение).

Пример. $x \cdot dx + y \cdot dy = 0.$

Решение. Запишем уравнение в виде $y\,dy = -x\,dx$. Проинтегрируем обе части уравнения: $\int y\,dy = -\int x\,dx$; $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$ (общий интеграл дифференциального уравнения).

Определение. Уравнение вида $M(x,\ y) \cdot dx + N(x,\ y) \cdot dy = 0$ называется уравнением **с разделяющимися переменными,** если функции $M(x,\ y)$ и $N(x,\ y)$ можно представить в виде произведения функций

$$M(x,\ y) = M_1(x) \cdot M_2(y),$$
$$N(x,\ y) = N_1(x) \cdot N_2(y),$$

т. е. есть уравнение имеет вид $M_1(x) \cdot M_2(y) \cdot dx + N_1(x) \cdot N_2(y) \cdot dy = 0.$

Чтобы решить такое дифференциальное уравнение, нужно привести его к виду дифференциального уравнения с разделенными переменными, для чего разделим уравнение на произведение $M_2(y) \cdot N_1(x)$. Действительно, разделив все члены уравнения $M_1(x) \cdot M_2(y) \cdot dx + N_1(x) \cdot N_2(y) \cdot dy = 0$ на произведение $M_2(y) \cdot N_1(x)$, получим

$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = 0$ – дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

Для решения его достаточно почленно проинтегрировать

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = 0.$$

При решении дифференциального уравнения с разделяющимися переменными можно руководствоваться следующим **алгоритмом (правилом) разделения переменных.**

Первый шаг. Если дифференциальное уравнение содержит производную y', ее следует записать в виде отношения дифференциалов: $y' = \frac{dy}{dx}$.

Второй шаг. Умножим уравнение на dx, затем сгруппируем слагаемые, содержащие дифференциал функции и дифференциал независимой переменной $(dy$ и $dx)$.

Третий шаг. Выражения, полученные при dy и dx, представить в виде произведения двух множителей, каждый из которых содержит только одну переменную (либо x, либо y). Если после этого уравнение примет вид $M_1(x)\cdot M_2(y)\cdot dx + N_1(x)\cdot N_2(y)\cdot dy = 0$, то, разделив его на произведение $M_2(y)\cdot N_1(x)$, получим дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

Четвертый шаг. Интегрируя почленно уравнение, получим общее решение исходного уравнения (или его общий интеграл).

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = c.$$

Рассмотрим уравнения

№ 1. $(1+x)\cdot y\ dx + (1-y)\cdot x\ dy = 0,$

№ 2. $y' = -\frac{y}{x},$

№ 3. $y' + x = 2 - y.$

Дифференциальное уравнение № 1 является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, по определению. Разделим уравнение на произведение $y\cdot x$. Получим уравнение

$$\frac{1+x}{x}\,dx + \frac{1-y}{y}\,dy = 0; \qquad \left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \left(\frac{1}{y}-1\right)dy = 0.$$

Интегрируя, получим $\int \frac{1}{x}dx + \int dx + \int \frac{dy}{y} - \int dy = 0;$

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = c$$

или

$$\ln|xy| + x - y = c.$$

Последнее соотношение есть общий интеграл данного дифференциального уравнения.

В дифференциальном уравнении № 2 заменим y' на $\frac{dy}{dx}$, умножим на dx, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}; \qquad dy = -\frac{y}{x}\cdot dx; \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}; \qquad \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|.$$

$\ln|y| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$; $\quad y = \frac{c}{x}$ – общее решение дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение № 3 не является уравнением с разделяющимися переменными, т. к., записав его в виде

$$\frac{dy}{dx} = 2 - y - x \qquad \text{или} \qquad dy = (2 - y - x)\cdot dx,$$

видим, что выражение $(2 - y - x)$ в виде произведения двух множителей (один – только c y, другой – только с x) представить невозможно. Заметим, что иногда нужно выполнить алгебраические преобразования, чтобы видеть, что данное дифференциальное уравнение – с разделяющимися переменными.

Пример № 4. Дано уравнение $(x^2y^2 - x^2y)\,dy - xy^2\,dx = 0$. Преобразуем уравнение, вынося общий множитель слева x^2: $\quad x^2\cdot(y^2 - y)\,dy = xy^2\,dx$. Разделим левую и правую части уравнения на произведение $x^2\cdot y^2$, получим

$$\frac{y^2 - y}{y^2}\,dy = \frac{x\,dx}{x^2}, \qquad \text{или} \qquad \frac{y-1}{y}dy = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{y-1}{y}\,dy = \int\frac{dx}{x}; \qquad \int dy - \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x};$$

откуда $y - \ln|y| = \ln|x| + c$ – общий интеграл данного уравнения. (а)

Заметим, что если постоянную интегрирования записать в виде $\ln c$, то общий интеграл данного уравнения может иметь другую форму:

$$y - \ln|y| = \ln|x| + \ln|c|;$$

$$y = \ln|\,y + \ln|x|\,| + \ln|c|$$

или $\quad y = \ln|c\cdot x\cdot y|$ – общий интеграл. (б)

Таким образом, общий интеграл одного и того же дифференциального уравнения может иметь различную форму. Важно в любом случае доказать, что полученный общий интеграл удовлетворяет данному дифференциальному уравнению. Для этого нужно продифференцировать по x обе части равенства, задающего общий интеграл, учитывая, что y есть функция от x. После исключения c получим одинаковые дифференциальные уравнения (исходное). Если общий интеграл $y - \ln|y| = \ln|x| + c$, (вид (a)), то

$$y' - \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}; \qquad y'\left(1 - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x};$$

$$dy \cdot \left(1 - \frac{1}{y}\right) = \frac{dx}{x}; \qquad dy(y-1) = \frac{y\,dx}{x}.$$

Если общий интеграл $y = \ln|c \cdot x \cdot y|$, (вид (б)), то

$$y' = \frac{c \cdot y + c \cdot x \cdot y'}{c \cdot x \cdot y}; \qquad y' = \frac{y + x \cdot y'}{xy};$$

$$y' \cdot xy = y + xy'; \qquad y' \cdot xy - xy' = y;$$

$$x \cdot y'(y-1) = y; \quad x \cdot (y-1)\,dy = y \cdot dx; \qquad dy \cdot (y-1) = \frac{y\,dx}{x}.$$

Получим то же уравнение, что и в предыдущем случае (а).

Рассмотрим теперь простые и важные классы уравнений первого порядка, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Легко можно убедиться в том, что дифференциальные уравнения

$$y' = \frac{y - x}{y + x}; \qquad y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}; \qquad y\,dx = (x + y)\,dy$$

не являются уравнениями с разделяющимися переменными. Они являются **однородными уравнениями.**

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **однородным дифференциальным уравнением первого порядка,** если $f(x, y)$ – однородная функция нулевого измерения.

Дадим понятие однородной функции нулевого измерения.

Определение. Функция $f(x, y)$ называется **однородной функцией нулевого измерения,** если при любом t справедливо тождество $f(t \cdot x;\ t \cdot y) = f(x, y)$.

Так, функции $f_1(x,\ y)=\dfrac{y-x}{y+x}$; $f_2(x,\ y)=\dfrac{x^2+y^2}{2x\,y}$ – однородные функции нулевого измерения, т. к.

$$f_1(t\cdot x,\ t\cdot y)=\frac{ty-tx}{ty+tx}=\frac{t(y-x)}{t(y+x)}=\frac{y-x}{y+x}=f_1(x,\ y);$$

$$f_2(tx;\ yt)=\frac{(tx)^2+(ty)^2}{2(tx)\cdot(ty)}=\frac{t^2x^2+t^2y^2}{2tx\cdot ty}=\frac{t^2\left(x^2+y^2\right)}{t^2(2xy)}=\frac{x^2+y^2}{2xy}=f_2(x,y).$$

Чтобы проверить, является ли д. у.1 однородным уравнением, нужно в этом уравнении заменить *x* на tx, *y* на ty. Если после этого t всюду сократится и получится первоначальное уравнение, то данное уравнение – **однородное.**
Поэтому уравнение $y\,dx=(x+y)\ dy$ является однородным. Действительно, $t\cdot ydx=(xt+yt)\,dy$; $t\cdot ydx=t\cdot(x+y)\ dy$; сократив уравнение на t, получим исходное уравнение.

Решение однородного дифференциального уравнения первого порядка

Так как функция $f(x,\ y)$ в правой части уравнения $y'=f(x,\ y)$ является однородной функцией нулевого измерения, то, по определению, $f(tx,\ yt)=f(x,\ y)$.
Положим в этом тождестве $t=\dfrac{1}{x}$, получим $f(x,\ y)=f\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)$, т. е. однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения *y/x*. Д.у.1 в этом случае примет вид

$$y'=f\left(1;\ \frac{y}{x}\right).$$

Сделаем подстановку *y/x*=u, т. е. $y=x\cdot u$,

где $u=u(x)-$ неизвестная функция.
Тогда $y'=u+x\cdot u'$.

Уравнение $y'=f\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)$ примет вид $u+x\cdot u'=f(1;\ u)$ или $x\cdot u'=f(1;\ u)-u$,

или $x\cdot\dfrac{du}{dx}=f(1;\ u)-u$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{du}{f(1,\ u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим $\displaystyle\int \frac{du}{f(1,u)-u} = \int \frac{dx}{x} + c$.

Найдя отсюда выражение u как функции от x, подставим его в равенство $y = x \cdot u$; получим искомое общее решение однородного д.у. 1. Чаще всего не удаётся найти явное выражение функции $u(x)$. Тогда после интегрирования следует в левую часть вместо u подставить y/x. В результате получим общий интеграл (т. е. общее решение в неявном виде).

Решим уравнения.

П**ример 1.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}.$$

Решаем уравнение подстановкой $y = x \cdot u$; $y' = u + xu'$. Подставив y и y' в данное уравнение, получим

$$u + xu' = \frac{x^2 + u^2 x^2}{2x \cdot ux} \quad \text{или} \quad xu' = \frac{1+u^2}{2u} - u.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно вспомогательной функции $u(x)$. Упростим правую часть:

$x \cdot \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1-u^2}{2u}$. Умножив на $\dfrac{dx \cdot 2u}{x \cdot (1-u^2)}$, получим уравнение с разделенными переменными $\dfrac{2u\,du}{1-u^2} = \dfrac{dx}{x}$.

Интегрируя, получим $-\ln\left|1-u^2\right| = \ln|x| - \ln|c|$;

или $\ln\left|1-u^2\right| = \ln|c| - \ln|x|$,

или $\ln\left|1-u^2\right| = \ln\left|\dfrac{c}{x}\right|$;

Потенцируем $1 - u^2 = \dfrac{c}{x}$; $u^2 = 1 - \dfrac{c}{x} = \dfrac{x-c}{x}$.

Подставив $u = y/x$, получим общий интеграл данного дифференциального уравнения.

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{x-c}{x}; \qquad \frac{y^2}{x} = x - c; \qquad y^2 = x^2 - xc; \qquad x^2 - y^2 = xc.$$

Проверка: $\begin{cases} 2x - 2y \cdot y' = c \\ x^2 - y^2 = cx \end{cases}$

$x^2 - y^2 = 2x^2 - 2xy \cdot y'$ или $2xyy' = x^2 + y^2$; $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ – искомое уравнение.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения
$x\cdot dy-\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx=0$ при начальных условиях $y(1)=\pi$.
Убедимся, что данное дифференциальное уравнение является однородным. Подставим в уравнение вместо x и y соответственно $t\cdot x$ и $t\cdot y$. Получим

$$t\cdot x\,dy-\left(t\,y+\sqrt{(t\,x)^2-(t\,y)^2}\,dx\right)=0;$$
$$t\cdot x\,dy-t\cdot\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx=0.$$

Разделив на t обе части уравнения, получим данное уравнение. Решаем уравнение подстановкой

$$y=x\cdot u;\qquad dy=u\cdot dx+x\cdot du.$$

Поставим y и dy в уравнение, получим

$$x\cdot(u\,dx+x\,du)-\left(u\,x+\sqrt{x^2-u^2x^2}\right)dx=0.$$

Сгруппируем слагаемые с dx и du.
$x^2\,du=x\sqrt{1-u^2}\,dx$ – это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив обе части на $x^2\cdot\sqrt{1-u^2}$, получим
$\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\dfrac{dx}{x}$ – уравнение с разделенными переменными. Интегрируя левую и правую части уравнения, получим

$$\arcsin u=\ln|x|+\ln|c|.$$

Подставив $u=\dfrac{y}{x}$, получим общий интеграл данного дифференциального уравнения:

$$\arcsin\frac{y}{x}=\ln|x\,c|.$$

Найдем частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям $y=\pi$ при $x=1$.
Подставим в формулу общего интеграла $y=\pi,\ x=1$:

$\arcsin\dfrac{\pi}{1}=\ln 1\cdot c;\qquad 0=\ln c$, отсюда $c=1$ и частный интеграл

$$\arcsin\frac{y}{x}=\ln|x|.$$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производной. Общий вид линейного д.у.1: $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции или постоянные. Если $q(x) = 0$, то уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$ решается как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Рассмотрим уравнения:

1) $y' - x^2 \cdot y - x^2 = 0$. Это уравнение является линейным по определению $y' - x^2 \cdot y = x^2$, но лучше рассматривать его как уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = x^2 + x^2 \cdot y; \qquad y' = x^2 \cdot (1 + y).$$

2) $y' - y^3 = 4x$. Это уравнение не является линейным, т. к. функция y в уравнении имеет не первую степень, а выше

3) $y' = \dfrac{2x + 3y}{x}; \qquad y' = 2 + \dfrac{3}{x} y; \qquad y' - \dfrac{3}{x} y = 2.$

Уравнение является линейным по определению. Но проще рассматривать его как однородное д.у.1: $y' = \dfrac{2x + 3y}{x}$, где $f(x, y) = \dfrac{2x + 3y}{x}$ – однородная функция нулевого измерения.

4) $\dfrac{dy}{dx} = y + x$. Запишем уравнение в виде $y' - y = x$. Это линейное д.у.1.

Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

Общее решение ищется в виде $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – некоторые функции.

Покажем на примере, что любую функцию $y = f(x)$ можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых выбирается произвольно, а вторая зависит от этого выбора.

Пусть $y = \sin x$. Можно $\sin x$ представить в виде различных пар множителей:

$$\sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x;$$

$$\sin x = \sin^3 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = \sin^3 x \cdot \left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right).$$

$\sin x = 2 \sin \dfrac{x}{2} \cdot \cos \dfrac{x}{2}$, где первый множитель выбирается произвольно.

Указанная подстановка $y = u \cdot v$ приводит линейное д.у.1 к решению двух д.у. с разделяющимися переменными. Покажем это в общем виде. В линейное уравнение $y' + p(x) \cdot y = g(x)$ подставим $y = u \cdot v$; $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Получим

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot uv = g(x)$$

или

$$v \cdot (u' + p(x) \cdot u) + u \cdot v' = g(x). \tag{4}$$

Выберем функцию u такой, чтобы

$$u' + p(x) \cdot u = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{du}{dx} = -p(x) \cdot u$; $\frac{du}{u} = -p(x) \cdot dx$. Интегрируя, найдем функцию $u = u(x)$ без учета произвольной постоянной. Подставим найденную функцию $u(x)$ в уравнение (4) и получим $u(x) \cdot v' = g(x)$ – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными (3). Его общее решение позволит получить второй множитель $v = v(x,\ c)$. Тогда $y = u(x) \cdot v(x,\ c)$ – общее решение линейного д. у. 1.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y' + \frac{1}{x} y = \frac{\sin x}{x}$.

Решаем подстановкой

$$y = u \cdot v; \quad y' = u'v + u \cdot v'.$$

$$u'v + uv' + \frac{1}{x} u \cdot v = \frac{\sin x}{x}.$$

$$v \cdot \left(u' + \frac{1}{x} u \right) + u \cdot v' = \frac{\sin x}{x}. \tag{6}$$

$u' + \frac{1}{x} u = 0$	$u \cdot v' = \frac{\sin x}{x}$
$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot u$	$\frac{1}{x} \cdot v' = \frac{\sin x}{x}$
$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$	$v' = \sin x$
$\ln u = -\ln x.$	$v = -\cos x + c$

$u = \frac{1}{x}$ подставим в (6).

Общее решение: $y = \frac{1}{x} \cdot (-\cos x + c).$

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}\cdot y=(x+1)^3 \quad \text{при} \quad y(0)=3.$$

Подстановка: $y=u\cdot v$.

$$\frac{dy}{dx}=y'=u'v+uv';$$

$$u'\cdot v+u\cdot v'-\frac{2}{x+1}\cdot uv=(x+1)^3$$

$$v\cdot\left(u'-\frac{2}{x+1}\cdot u\right)+u\cdot v'=(x+1)^3 \tag{7}$$

$$u'-\frac{2}{x+1}\cdot u=0, \qquad \frac{du}{u}=\frac{2dx}{x+1}, \qquad \int\frac{du}{u}=\int\frac{2dx}{x+1},$$

$$\ln|u|=2\ln|x+1|, \qquad u=(x+1)^2.$$

Подставим найденную функцию u в уравнение (7): $u\cdot v'=(x+1)^3$;

$$(x+1)^2\cdot v'=(x+1)^3.$$

$$v'=x+1; \qquad \frac{dv}{dx}=x+1, \qquad dv=(x+1)\,dx,$$

$$v=\int(x+1)\,dx=\frac{(x+1)^2}{2}+c.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения будет иметь вид

$$y=(x+1)^2\cdot\left(\frac{(x+1)^2}{2}+c\right)$$

или $\quad y=\dfrac{(x+1)^4}{2}+c\cdot(x+1)^2.$

Найдем частное решение дифференциального решения, удовлетворяющее начальному условию $y=3$ при $x=0$.

$$3=\frac{(0+1)^4}{2}+c\cdot(0+1)^2; \qquad c=5/2.$$

Следовательно, искомое частное решение такое:

$$y=\frac{(x+1)^4}{2}+\frac{5}{2}\cdot(x+1)^2.$$

Уравнения, приводящиеся к линейным (уравнения Бернулли)

Уравнение вида $y'+p(x)\cdot y=g(x)\cdot q^n$ называется **уравнением Бернулли.** Здесь n – действительное число, причем при n = 0 получим линейное уравнение; при $n=1$ получим уравнение с разделяющимися переменными. При $n\neq 0$ и $n\neq 1$ уравнение Бернулли приводится к линейному, поэтому решается подстановкой $y=u\cdot v$.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$x\cdot\frac{dy}{dx}+y=y^2\cdot\ln x.$$

Разделив левую и правую части уравнения на *x*, представим его в виде $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\ln x}{x}\cdot y^2$. Можно утверждать, что это уравнение имеет общий вид

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\cdot y=g(x)\cdot y^n,$$

т. е. является уравнением Бернулли. Решаем его подстановкой $y=u\cdot v$;

$$\frac{dy}{dx}=y'=u'\cdot v+u\cdot v',$$

где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – вспомогательные функции.

Подставим *y* и dy/dx в исходное уравнение:

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{\ln x}{x}\cdot u^2v^2.$$

$$v\left(u'+\frac{u}{x}\right)+u\cdot v'=\frac{\ln x}{x}\cdot u^2v^2 \qquad (8)$$

$$u' + \frac{u}{x} = 0$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = -\ln|x|$$

$$u = \frac{1}{x}.$$

Подставим u в уравнение (8)

$$\frac{1}{x} \cdot v' = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot v^2$$

$$v' = \frac{\ln x}{x^2} \cdot v^2$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\ln x}{x^2} \cdot v^2$$

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{\ln x}{x^2} \cdot dx$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$-\frac{1}{v} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - c;$$

$$\frac{1}{v} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c.$$

Для получения общего интеграла найдем

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{v},$$

$$\frac{1}{y} = x \cdot \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c \right)$$

или

$$\frac{1}{y} = \ln x + 1 + cx.$$

Замечание. Неопределенный интеграл $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ найден с применением формулы интегрирования по частям:

$$\int z\, dt = z \cdot t - \int t\, dz;$$

Производим подстановку

$$z = \ln x; \qquad dz = \frac{dx}{x}; \qquad dt = \frac{dx}{x^2}; \qquad t = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Тогда $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = = -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c.$

4. Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка (д.у. II) содержит вторую производную некоторой функции, саму эту функцию, независимую переменную и первую производную. Д.у. II может быть записано в виде

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0$$

или

$$y''=f(x,\ y,\ y').$$

Определение. Общим решением д.у.II называется функция $y=\varphi(x,\ c_1,\ c_2)$, зависящая от двух произвольных постоянных c_1 и c_2, такая, что

1) она удовлетворяет уравнению при любых значениях постоянных c_1 и c_2;
2) каковы бы ни были начальные условия $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y_0'$, можно найти такие значения c_1^0 и c_2^0, при которых функция $y=\varphi\left(x,\ c_1^0,\ c_2^0\right)$ удовлетворяет этим условиям.

Определение. Всякая функция, полученная из общего решения при конкретных значениях постоянных c_1, c_2, называется частным решением д.у.II.

Заметим, что начальные условия для д.у. II представляют собой заданные значения функции $y=f(x)$ и ее производной $y'=f'(x)$ при одном и том же данном значении независимой переменной x_0. Их обычно записывают $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y_0'$ или $y|_{x=x_0}=y_0$; $y'|_{x=x_0}=y_0'$, т. е. задать начальные условия для нахождения частного решения д.у. II – значит задать три числа: x_0, y_0, y_0'.

Пример. Дано д.у.II $y''-4y'+3y=0$. Проверим, что его общим решением является функция

$$y=c_1\cdot e^{3x}+c_2\cdot e^{x}.$$

Найдем первую и вторую производные этой функции

$$y'=3c_1\cdot e^{3x}+c_2\cdot e^{x}$$

$$y''=9c_1\cdot e^{3x}+c_2\cdot e^{x}.$$

Подставив $y,\ y',\ y''$ в данное уравнение, получим

$$\left(9c_1e^{3x}+c_2e^{x}\right)-4\left(3c_1e^{3x}+c_2e^{x}\right)+3\left(c_1e^{3x}+c_2e^{x}\right)=0$$

или

$$9c_1e^{3x}+c_2e^{x}-12c_1e^{3x}-4c_2e^{x}+3c_1e^{3x}+3c_2e^{3x}=0\ –$$

верное равенство. Найдем частное решение этого уравнения при заданных начальных условиях $y|_{x=0}=0$; $y'|_{x=0}=2.$ Подставим эти условия в выражения y и y':

$$y=c_1\cdot e^{3x}+c_2\cdot e^{x};\qquad \begin{cases}0=c_1\cdot e^{0}+c_2\cdot e^{0}\\ 2=3c_1\cdot e^{0}+c_2\cdot e^{0}.\end{cases}$$

$$y'=3c_1\cdot e^{3x}+c_2\cdot e^{x};$$

или $\quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 + c_2 = 2. \end{cases}$

Решив эту систему, получим значения постоянных $c_1 = 1,\quad c_2 = -1,$ при которых из общего решения $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x$ выделим искомое частное решение

$$y = e^{3x} - e^x.$$

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений второго порядка и способы их решения.

5. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим некоторые типы д.у. II, решение которых сводится к решению дифференциальных уравнений первого порядка.

1-й тип. Простейший тип таких уравнений – это $y'' = f(x)$. Дифференциальное уравнение содержит только вторую производную и некоторую функцию от x (ни сама функция y, ни ее первая производная y' в уравнение не входят). Уравнение вида $y'' = f(x)$ решается последовательным интегрированием два раза.

Пример 1. $y'' = \cos 4x.$

$$y' = \int \cos 4x\, dx = \frac{1}{4}\sin 4x + c_1;$$

Получили уравнение первого порядка

$$y' = \frac{1}{4}\sin 4x + c_1;$$

отсюда

$$y = \int \left(\frac{1}{4}\sin 4x + c_1\right) dx = -\frac{1}{16}\cos 4x + c_1 x + c_2 \text{ –}$$

общее решение исходного уравнения (содержит две произвольные постоянные c_1 и c_2).

Аналогично решаются и дифференциальные уравнения порядков выше второго, если они имеют такой же вид, например: $y''' = f(x);\quad f^{iv} = f(x).$

Пример 2. $y''' = 3e^{-2x}.$

$$y'' = -\frac{3}{2}e^{-2x} + c_1,$$

$$y' = \frac{3}{4}e^{-2x} + c_1 x + c_2,$$

$$y = -\frac{3}{8}e^{-2x} + c_1 \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_2 \text{ –}$$

общее решение данного уравнения.

Пример 3. $y^{iv}=\frac{x^2}{2}+3x.$

$$y'''=\frac{x^3}{6}+\frac{3x^2}{2}+c_1.$$

$$y''=\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{2}+c_1x+c_2.$$

$$y'=\frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{8}+c_1\cdot\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3.$$

$$y=\frac{x^6}{720}+\frac{x^5}{40}+c_1\cdot\frac{x^3}{6}+c_2\cdot\frac{x^2}{2}+c_3x+c_4 -$$

общее решение уравнения. Обратите внимание, общее решение дифференциального уравнения третьего порядка содержит три произвольные постоянные (c_1, c_2, c_3), а дифференциального уравнения четвертого порядка – уже четыре (c_1, c_2, c_3, c_4). Допускают понижение порядка и дифференциальные уравнения вида $F(x,\ y',\ y'')=0.$

2-й тип. $F(x,\ y',\ y'')=0,$ т. е. уравнения, в которые явно не входит сама искомая функция *y*. Решаются такие уравнения подстановкой $y'=p,$ где $p=p(x)-$ вспомогательная функция. Тогда $y''=p'\left(\frac{dp}{dx}\right).$ Подставив $y'=p$ и $y''=p'$ в данное уравнение, получим уравнение $F(x, p, p')=0$ – дифференциальное уравнение первого порядка.

Пример 4. Решить уравнение

$$y''+\frac{y'}{x}=x. \tag{9}$$

Положим $y'=p;$ $y''=p'$ и уравнение примет вид

$$p'+\frac{p}{x}=x - \tag{10}$$

это линейное уравнение первого порядка относительно функции $p=p(x)$.

Решаем его подстановкой $p=u\cdot v,$ где $u=u(x),$ $v=v(x);$ $p'=u'\cdot v+u\cdot v'.$

Получим $u'\cdot v+u\cdot v'+\frac{u\cdot v}{x}=x;$

$$v\left(u'+\frac{u}{x}\right)+u\cdot v'=x;$$

$$u'+\frac{u}{x}=0;\qquad \frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=0;\qquad \frac{du}{u}+\frac{dx}{x}=0;$$

$$\ln u + \ln x = 0; \qquad u = \frac{1}{x};$$

$$u \cdot v' = x; \qquad \frac{1}{x} \cdot v' = x; \qquad v' = x^2; \qquad \frac{dv}{dx} = x^2;$$

$$dv = x^2 dx;$$

$$v = \frac{x^3}{3} + c_1.$$

Функция

$$p = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + c_1 \right).$$

Исходное уравнение (9) решалось подстановкой $y' = p$. Поэтому

$$y' = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + c_1 \right) = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}.$$

Интегрируя, получим $y = \dfrac{x^3}{9} + c_1 \ln x + c_2$ –

общее решение уравнения (9).

Пример 5. Найти частное решение уравнения $y'' \cdot (x^2 + 1) = 2xy'$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$. Применим подстановку $y' = p$; $y'' = p'$. Получим уравнение $p' \cdot (x^2 + 1) = 2x \cdot p$.

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными относительно функции p. Разделим переменные:

$$\frac{dp}{dx} \cdot (x^2 + 1) = 2x \cdot p; \quad dp \cdot (x^2 + 1) = 2x \cdot p\,dx; \quad \frac{dp}{p} = \frac{2x\,dx}{x^2 + 1}.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x\,dx}{x^2 + 1}; \qquad \ln p = \ln(x^2 + 1) + \ln c_1;$$

$$p = c_1 \cdot (x^2 + 1). \ \text{Откуда} \quad y' = c_1 (x^2 + 1).$$

Используем второе начальное условие $y'(0) = 3$, получим

$$3 = c\ (0 + 1); \quad c_1 = 3.$$

Следовательно, $y' = 3 \cdot (x^2 + 1)$, а после интегрирования $y = x^3 + 3x + c_2$.

Применим первое начальное условие $y(0) = 1$, получим

$$1 = 0 + 0 + c_2, \qquad c_2 = 1.$$

Искомым частным решением будет

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

Еще одним типом уравнений, допускающих понижение порядка, является уравнение вида $F(y,\ y',\ y'') = 0$.

3-й тип

$$F(y,\ y',\ y'') = 0,$$

т. е. уравнение, не содержащее явно независимую переменную x. Здесь порядок уравнения понижается на единицу путем следующей замены:

$$y' = p,$$

где

$$p = p\ (y).$$

Здесь p – новая вспомогательная функция, а y играет роль независимой переменной. Тогда $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$, т. е. $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$.

Заметим, что вторая производная y'' получена по правилу дифференцирования сложной функции.

Подставив выражения $y' = p,\ y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ в данное уравнение, получим

$$F(y,\ p,\ p') = 0 -$$

уравнение первого порядка относительно p как функции от y.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$2y \cdot y'' + y'^2 = 0. \tag{11}$$

Полагаем $y' = p,\ y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$, получим $2y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 0$ – (12)

это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Приведя его к виду $\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}$ и интегрируя, получим $\ln p = -\frac{1}{2}\ \ln y + \ln c_1$;

$$\ln p = \ln \frac{c_1}{\sqrt{y}}, \qquad p = \frac{c_1}{\sqrt{y}}.$$

Так как исходное уравнение (11) решалось с помощью подстановки $p = y'$, получим $y' = \frac{c_1}{\sqrt{y}}$ – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно искомой функции y от x.

$$\sqrt{y} \cdot dy = c_1 \cdot dx.$$

$$\int \sqrt{y}\, dy = \int c_1\, dx; \qquad \frac{2y^{3/2}}{3} = c_1 x + c_2; \qquad y^{3/2} = \frac{3}{2} c_1 \cdot x + \frac{3}{2} c_2.$$

Но так как c_1 и c_2 – произвольные постоянные, $\left(\frac{3}{2} \cdot c_1\right)$ и $\left(\frac{3}{2} \cdot c_2\right)$ – также произвольные постоянные. Поэтому полученный общий интеграл данного дифференциального уравнения можно записать в виде

$$y^{3/2} = c_1 \cdot x + c_2,$$

т.е. $\sqrt{y^3} = c_1 x + c_2$,

или $y = \sqrt[3]{(c_1 x + c_2)^2}$.

Пример 7. Найти частное решение уравнения $y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0$ при начальных условиях $y(0) = 2$; $y'(0) = 2$. Применим подстановку $y' = p$; Тогда $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$. Получим уравнение первого порядка:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 + p \cdot (y-1) = 0.$$

Разделив уравнение на $p \neq 0$, получим

$$\frac{dp}{dy} - p = 1 - y.$$

Это линейное уравнение первого порядка относительно функции p от y.
Решаем его подстановкой $p = u \cdot v$, где $u = u(y)$; $v = v(y)$.
$p' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
Тогда $u' \cdot v + u \cdot v' - u \cdot v = 1 - y$; $v \cdot (u' - u) + u \cdot v' = 1 - y$; $u' - u = 0$.

$$\frac{du}{dy} = u; \qquad \frac{du}{u} = dy; \qquad \int \frac{du}{u} = \int dy.$$

$$\ln u = y; \quad u = e^y.$$

$$u \cdot v' = 1 - y; \qquad e^y \cdot v' = 1 - y;$$

$$v' = \frac{1-y}{e^y} = (1-y)\cdot e^{-y}; \qquad \frac{dv}{dy} = (1-y)\cdot e^{-y};$$

$$dv = (1-y)\cdot e^{-y}dy;$$

$$\int dv = \int (1-y)\cdot e^{-y}dy; \qquad v = \int (1-y)\cdot e^{-y}dy.$$

Интеграл справа берем по частям с помощью подстановки

$$1-y=t; \qquad dt=-dy; \qquad e^{-y}dy = ds; \qquad s = \int e^{-y}dy = -e^{-y}.$$

Тогда $\int (1-y)\cdot e^{-y}dy = -(1-y)\cdot e^{-y} - \int e^{-y}dy = -(1-y)\cdot e^{-y} + e^{-y} + c_1.$

Таким образом, $v = e^{-y} - (1-y)\cdot e^{-y} + c_1$.

Тогда функция $p = e^y\cdot\left(e^{-y} - (1-y)\cdot e^{-y} + c_1\right) = 1-(1-y) + c_1\cdot e^y = y + c_1\cdot e^y.$

Таким образом, $p = y + c_1\cdot e^y$, или $y' = y + c_1\cdot e^y$.

Найдем значение c_1 из начальных условий $y(0)=2, \quad y'(0)=2.$

$$2 = 2 + c_1\cdot e^2; \qquad c_1\cdot e^2 = 0; \qquad c_1 = 0.$$

Таким образом $y' = y; \qquad \frac{dy}{dx} = y; \qquad dy = y\cdot dx; \qquad \frac{dy}{y} = dx.$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx; \qquad \ln y = x + c_2, \qquad y = e^{x+c_2} = e^x\cdot e^{c_2} = c\cdot e^x.$$

Заметим, что константа e^{c_2} может быть обозначена как c, т. к. c_2 – произвольная константа , e^{c_2} – тоже произвольная постоянная. Таким образом,

$$y = c\cdot e^x.$$

Найдем c из первого начального условия $y(0)=2$:

$$2 = c\cdot e^0; \qquad c = 2.$$

Искомое частное решение имеет вид $y = 2\cdot e^x$.

6. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Обратимся к весьма важным дифференциальным уравнениям, особенно часто встречаемым во всевозможных приложениях математики, именно к линейным уравнениям.

Определение. Дифференциальное уравнение второго порядка называется линейным, если оно первой степени (линейно) относительно искомой функции y и ее производных y' и y''. Линейное уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x), \tag{13}$$

где p и q – либо функции от x, либо постоянные. Функция $f(x)$, стоящая в правой части уравнения, называется правой частью уравнения. Будем рассматривать линейные д.у. II только с постоянными коэффициентами p и q, т. е. $p = \text{const}$, $q = \text{const}$. При $f(x) = 0$ уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \tag{14}$$

называется линейным однородным д.у.II с постоянными коэффициентами.

При $f(x) \neq 0$ уравнение $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$ называется неоднородным д.у. II с постоянными коэффициентами (или уравнением с правой частью).

Сформулируем теорему о структуре общего решения однородного линейного д.у.II с постоянными коэффициентами $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ (14).

Теорема 1. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$$

имеет вид $y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$,

где c_1, c_2 – две произвольные постоянные; y_1, y_2 – два частных решения уравнения (14), линейно независимых. Заметим, что два решения: $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – называются линейно независимыми, если их отношение не является постоянным, т. е.

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}.$$

Например, функции $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = e^x$ линейно независимы, т. к.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x \neq \text{const}.$$

Функции $y_1 = 2e^x$ и $y_2 = e^x$ линейно зависимы, т. к.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{2e^x}{e^x} = 2 = \mathrm{const}.$$

Из теоремы 1 следует: чтобы найти общее решение уравнения (14), достаточно найти два частных решения этого уравнения. Вид уравнения (14) показывает, что частные решения этого уравнения следует искать прежде всего среди таких функций, которые в алгебраическом смысле подобны своим производным. Известно, что среди элементарных функций этим свойством обладает показательная функция, в частности экспонента. Поэтому, следуя русскому математику Эйлеру, будем искать частные решения уравнения (14) в виде

$$y = e^{rx},$$

где $r = \mathrm{const}$.

Так как $y' = r \cdot e^{rx}$, $y'' = r^2 \cdot e^{rx}$, подстановка выражений y, y', y'' в уравнение (14) приводит его к виду

$$e^{rx} \cdot \left(r^2 + p \cdot r + q\right) = 0. \qquad (15)$$

Так как $e^{rx} \neq 0$ при любом r, должно иметь место тождество

$$r^2 + p \cdot r + q = 0. \qquad (16)$$

Таким образом, функция e^{rx} действительно удовлетворяет уравнению (14) (является его решением), если число r является корнем уравнения (16). Уравнение (16) называется характеристическим уравнением. Для составления его по данному дифференциальному уравнению (14) нужно заменить функцию y единицей, а производные y' *и* y'' соответствующими степенями $r\left(r \text{ и } r^2\right)$, при этом сохранить коэффициенты $1, p, q$.

Так, для дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$ характеристическим будет уравнение $r^2 - 3r + 2 = 0$. Для уравнения $y'' + 4y = 0$ – уравнение $r^2 + 4 = 0$. Для всякого линейного однородного д.у. II с постоянными коэффициентами $y'' + py' + py = 0$ характеристическим является алгебраическое уравнение второй степени $r^2 + p \cdot r + q = 0$ (16) (квадратное уравнение).

Пример. Составить линейное однородное д.у.II, зная характеристическое уравнение $r^2 + 3r + 2 = 0$. Д.у. II будет таким: $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Решение квадратных уравнений

Обратимся к решению квадратных уравнений $ax^2+bx+c=0$.

Формула корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a\cdot c}}{2a},$$

где $b^2-4a\cdot c=D-$ дискриминант. Любое квадратное уравнение всегда имеет два корня (это известное положение высшей алгебры).

1) Если $D>0$, то $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4a\cdot c}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4a\cdot c}}{2a}$; имеют место два различных действительных корня.

2) Если $D=0$, то $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$. Имеем два равных действительных корня.

3) Если $D<0$, то квадратное уравнение имеют два корня, но они не являются действительными числами. Эти корни называются комплексными числами.

Обозначим $\sqrt{-1}=i$, назовем мнимой единицей $i^2=-1$. Тогда число вида $\alpha+\beta\cdot i$, где $\alpha,\beta-$ действительные числа, называется **комплексным числом.** Здесь α называется действительной частью, $\beta i-$ мнимой частью комплексного числа. Для всякого комплексного числа $\alpha+\beta\cdot i$ существует комплексное число, ему сопряженное: $\alpha-\beta\cdot i$. Так, для числа $3-2i$ сопряженным является число $3+2i$. Два комплексных числа $\alpha+\beta\cdot i$ и $\alpha-\beta\cdot i$ являются взаимно сопряженными. Покажем примеры решения квадратных уравнений.

№ 1. $5x^2-3x-2=0$.

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+4\cdot5\cdot2}}{10}=\frac{3\pm7}{10}.$$

$$x_1=\frac{3+7}{10}=1;\quad x_2=\frac{3-7}{10}=\frac{-2}{5}.$$

x_1, x_2 – различные действительные корни.

№ 2. $2x^2+5x=0$.

$$x(2x+5)=0;\quad x_1=0;\quad x_2=-\frac{5}{2}.$$

x_1, x_2- различные действительные корни.

№ 3. $4x^2+12x+9=0.$

$$x_1,\ \ x_2=\frac{-12\pm\sqrt{144-4\cdot4\cdot9}}{8}=\frac{-12\pm0}{8}=\frac{-3}{2}.$$

$x_1=x_2=-\dfrac{3}{2}-$ равные действительные корни.

№ 4. $2x^2-5=0;$ $\qquad x_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ – различные корни.

№ 5. $x^2+4=0;\quad x^2=-4;\qquad x_{1,2}=\pm\sqrt{-4};$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{4\cdot(-1)}=\pm2\cdot i;$$

$$x_1=2i;\qquad x_2=-2i.$$

Уравнение имеет два комплексных корня, взаимно сопряженных, с действительной частью $\alpha=0$ и коэффициентом мнимой части $\beta=2.$

№ 6. $x^2-8x+20=0.$

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot20}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{16\cdot(-1)}}{2}=\frac{8\pm4i}{2}=4\pm2i.$$

$$x_1=4+2i;\quad x_2=4-2i.$$

Уравнение имеет 2 взаимно сопряженных комплексных корня: $4\pm2i$, где $\alpha=4;\ \beta=2.$

Заметим, что всякое алгебраическое уравнение степени n имеет ровно n корней, среди которых могут быть как действительные (различные или равные), так и комплексные (обязательно попарно взаимно сопряженные).

№ 7. $x^4-16=0.$

Разложим левую часть уравнения на множители: $\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)=0$, или $\left(x^2+4\right)(x+2)(x-2)=0.$ Нужно решить три простейших уравнения:

$$x^2+4=0;\ \ x+2=0;\quad x-2=0.$$

Имеем четыре корня:

$$x=\pm\,2i;\quad x=-2;\quad x=2.$$

Решение однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Дано дифференциальное уравнение $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$.
При решении характеристического уравнения $r^2 + p \cdot r + q = 0$ возможны три случая.

1) Корни характеристического уравнения (16) действительны и различны: $r_1 \neq r_2 \in R$. В этом случае частными решениями y_1 и y_2 будут функции

$$y_1 = e^{r_1 x}; \quad y_2 = e^{r_2 x},$$

при этом эти решения линейно независимы, т. к.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{r_1 x}}{e^{r_2 x}} = e^{(r_1 - r_2)x} \neq \text{const}.$$

Тогда по теореме 1 общее решение уравнения (14) имеет вид

$$y = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x} \tag{17}$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

2) Корни характеристического уравнения (16) действительны и равны: $r_1 = r_2$ (обозначим их $r_1 = r_2 = r$). Тогда имеет место одно частное решение д.у. II $y = e^{rx}$. Доказано, что второе частное решение имеет вид $y = x \cdot e^{rx}$, при этом очевидно, что эти решения линейно независимы. Тогда общим решением д.у. II будет

$$y = c_1 \cdot e^{rx} + c_2 \cdot x \cdot e^{rx}$$

или $$y = e^{rx} \cdot (c_1 + x \cdot c_2). \tag{18}$$

3) Корни характеристического уравнения (16) комплексные сопряженные:

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i.$$

Тогда общее решение д.у. II имеет вид

$$y = e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cdot \cos \beta x + c_2 \sin \beta x). \tag{19}$$

Рассмотрим примеры.

№ 1. $y'' - y' - 6y = 0$;

$r^2 - r - 6 = 0$ – характеристическое уравнение.

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}.$$

$$r_1=\frac{1+5}{2}=3; \qquad r_2=\frac{1-5}{2}=-2.$$

По формуле (17) находим общее решение дифференциального уравнения:

$$y=c_1\cdot e^{3x}+c_2\cdot e^{-2x}.$$

№ 2. $y''+8y'+16y=0.$

$r^2+8r+16=0$ – характеристическое уравнение.

$$r_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot 16}}{2}=\frac{-8\pm 0}{2}=-4.$$

$$r_1=r_2=-4.$$

По формуле (18) получим общее решение дифференциального уравнения:

$$y=e^{-4x}\cdot(c_1+c_2\cdot x).$$

№ 3. $y''+9y=0;$

$r^2+9=0$ –характеристическое уравнение.

$$r^2=-9; \quad r_{1,2}=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9\cdot(-1)}=\pm 3\cdot i.$$

Уравнение имеет комплексные корни $r_{1,2}=\pm 3i \quad (\alpha=0; \ \beta=3).$

По формуле (19) общим решением будет

$$y=e^{0x}(c_1\cdot\cos 3x+c_2\sin 3x)$$

или $\quad y=c_1\cdot\cos 3x+c_2\cdot\sin 3x.$

№ 4. Найти частное решение уравнения $y''-6y'+10y=0$ при начальных условиях $y(0)=1, \quad y'(0)=3.$

Характеристическое уравнение: $r^2-6r+10=0;$

$$r_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 10}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{6\pm 2i}{2}=3\pm i.$$

Общее решение – $y=e^{3x}\cdot(c_1\cdot\cos x+c_2\cdot\sin x).$

Найдем производную $y'=3e^{3x}(c_1\cdot\cos x+c_2\sin x)+e^{3x}(-c_1\cdot\sin x+c_2\cdot\cos x).$

Подставив начальные условия $\left.y\right|_{x=0}=1;\quad \left.y'\right|_{x=0}=3,$ получим систему для определения c_1 и c_2:

$$\begin{cases}1=e^0\cdot(c_1\cdot\cos 0+c_2\cdot\sin 0)\\3=3\cdot e^0(c_1\cdot\cos 0+c_2\cdot\sin 0)+e^0(-c_1\cdot\sin 0+c_2\cdot\cos 0),\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}1=1\cdot(c_1\cdot 1+c_2\cdot 0)\\3=3\cdot 1(c_1\cdot 1+c_2\cdot 0)+1(-c_1\cdot 0+c_2\cdot 1),\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}1=c_1; & c_1=1.\\3=3c_1+c_2; & c_2=0.\end{cases}$$

Подставив полученные значения $c_1=1,\quad c_2=0$ в общее решение, получим $y=e^{3x}\cdot\cos x$ – искомое частное решение.

Проверка. Найдем первую y' и вторую y'' производные функции $y=e^{3x}\cdot\cos x$ и подставим в данное дифференциальное уравнение:

$$y'=3e^{3x}\cdot\cos x-e^{3x}\cdot\sin x;$$

$$y''=9e^{3x}\cdot\cos x-3e^{3x}\sin x-3e^{3x}\sin x-e^{3x}\cos x=$$

$$=8e^{3x}\cos x-6e^{3x}\sin x;$$

$$\left(8e^{3x}\cos x-6e^{3x}\sin x\right)-6\left(3e^{3x}\cos x-e^{3x}\sin x\right)+10\left(e^{3x}\cos x\right)=0,$$

$0=0$ –верное равенство, т. е. частное решение найдено верно.

Таким образом, решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами совершается без операции интегрирования функций (как в случае д.у.1) и полностью завершается посредством решения алгебраических квадратных уравнений. Аналогичный результат имеет место и для линейных однородных д.у. с постоянными коэффициентами высших порядков.

Примеры решения однородных линейных дифференциальных уравнений высших порядков

№ 1. $y'''-7y''+10y'=0.$

$r^3-7r^2+10r=0$ – характеристическое уравнение

$$r\left(r^2 - 7r + 10\right) = 0, \qquad r_1 = 0;\ r^2 - 7r + 10 = 0.$$

$$r_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2};$$

$$r_2 = 5; \qquad r_3 = 2.$$

Общее решение:

$$y = c_1 \cdot e^{0x} + c_2 \cdot e^{5x} + c_3 \cdot e^{2x}$$

или

$$y = c_1 + c_2 e^{5x} + c_3 \cdot e^{2x}.$$

№ 2. $9y''' - 24y'' + 16y' = 0.$

$9r^3 - 24r^2 + 16r = 0$ – характеристическое уравнение.

$$r\left(9r^2 - 24r + 16\right) = 0.$$

$$r_1 = 0, \qquad 9r^2 - 24r + 16 = 0;$$

$$r_{2,3} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16}}{18} = \frac{24 \pm 0}{18} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}.$$

Общее решение: $y = c_1 \cdot e^{0x} + e^{4/3x} \cdot \left(c_1 + c_2 x\right)$ или $y = c_1 + e^{4x/3} \cdot \left(c_1 + c\ x\right).$

№ 3. $y''' - 4y'' + 20y' = 0.$

$r^3 - 4r^2 + 20r = 0, \quad r\left(r^2 - 4r + 20\right) = 0, \quad r_1 = 0; \quad r_2 - 4r + 20 = 0.$

$$r_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{4 \pm 8i}{2} = 2 \pm 4i.$$

Общее решение: $y = c_1 + e^{2x}\left(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x\right).$

№ 4. $y^{iv} + 13y'' + 36y = 0.$

$r^4 + 13r^2 + 36 = 0$ – характеристическое уравнение.

Положим $r^2 = t.$

$$t^2 + 13t + 36 = 0.$$

$$t_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{-13 \pm 5}{2}.$$

$$t_1 = -4; \qquad t_2 = -9.$$

$r^2 = -4; \quad r_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i. \qquad r_2 = -9; \quad r_{3,4} = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i.$

Общее решение уравнения: $y = c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x + c_3 \cdot \cos 3x + c_4 \cdot \sin 3x.$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейное неоднородное уравнение отличается от однородного функцией в правой части. Линейное неоднородное уравнение имеет вид

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x),$$

а соответствующее ему линейное однородное уравнение –

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0,$$

которое, как известно, решается с помощью характеристического уравнения (16)

$$r^2 + p \cdot r + q = 0.$$

Сформулируем теорему о структуре общего решения неоднородного уравнения (13).

Теорема 2. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме какого-либо частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Пусть y – общее решение уравнения (13)

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x),$$

$\bar{y}$ – какое-либо частное решение уравнения (13),

y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения (14)

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0.$$

Тогда $$y = y_0 + \bar{y}.$$

Таким образом, основная задача при решении неоднородного линейного д.у. II состоит в нахождении какого-либо частного решения.

Укажем один из методов нахождения частного решения неоднородного уравнения , когда правая часть уравнения $f(x)$ имеет специальный вид. К таким функциям $f(x)$ относятся следующие функции: экспонента $e^{\alpha x}$ $(\alpha = \text{const})$; многочлены n-й степени относительно переменной x $P_n(x)$; тригонометрические функции $\cos nx$; $\sin nx$, а также их произведения.

Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод иначе называется методом подбора частного решения $\bar{y}$ уравнения (13) по виду правой части $f(x)$.

Пусть правая часть $f(x)$ **уравнения**

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x),$$

имеет вид $f(x)=P_n(x)\cdot e^{\delta x}$, т. е. представляет собой произведение экспоненты на многочлен, где $\delta - \text{const}$; $P_n(x)-$ многочлен n-й относительно *x*. Тогда возможны следующие случаи.

1) Число α не является корнем характеристического уравнения (16)

$$r^2+p\cdot r+q=0.$$

В этом случае частное решение нужно **искать в виде** $\bar{y}=Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$,
где $Q_n(x)-$многочлен той же степени, что и данный многочлен $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

2) Число α есть простой (однократный) корень характеристического уравнения (т. е. α совпадает с одним корнем характеристического уравнения). В этом случае частное решение нужно **искать в виде** $\bar{y}=Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot x$.

3) Число α есть двукратный корень характеристического уравнения (т. е. α совпадает с двумя равными корнями характеристического уравнения). В этом случае частное решение нужно **искать в виде** $\bar{y}=Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot x^2$. Неизвестные (неопределенные) коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ находим из условия, что функция $\bar{y}$ является решением уравнения (13), т. е. удовлетворяет этому уравнению.

Рассмотрим примеры, на которых покажем не только принцип применения метода, но и **порядок оформления** решения.

№ 1. Найти общее решение уравнения

$$y''+7y'+12y=24x^2+16x-15.$$

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$r^2+7r+12=0.$$

$$r_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{-7\pm1}{2}.$$

$$r_1=-3;\qquad r_2=-4.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения:

$$y_0=c_1\cdot e^{-3x}+c_2\cdot e^{-4x}.$$

3) Запишем формулу, по которой следует искать частное решение $\bar{y}$ данного уравнения. Для этого сравним правую часть уравнения $f(x)=24x^2+16x-15$
с общим видом правой части:

$$f(x)=e^{\alpha x}\cdot P_n(x).$$

$24x^2+16x-15$ – многочлен второй степени с коэффициентами 24; 16; –15.
В данном случае показательная функция $e^{\alpha x}=1$, т. е. $\alpha=0$. Так как $\alpha=0$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения $(r_1=-3;\ r_2=-4)$, частное решение нужно искать в виде $\bar{y}=Ax^2+Bx+C$.

$Q_n(x) = Ax^2 + Bx + C -$ многочлен второй степени $(n = 2)$, неизвестные (неопределенные) коэффициенты A, B, C этого многочлена нужно найти, подставив выражения $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в данное уравнение.

4) Запишем $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l} 12 & \bar{y} = Ax^2 + Bx + c \\ 7 & \bar{y}' = 2Ax + B \\ 1 & \bar{y}'' = 2A \end{array}$$

Слева указаны коэффициенты 12, 7, 1, на которые следует умножить $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$, чтобы получить левую часть уравнения $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15$. В левой части получим многочлен второй степени с неопределенными коэффициентами, который должен быть равен данному многочлену второй степени в правой части. Два многочлена будут равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях x. Запишем столбиком полученные уравнения:

$$\left.\begin{array}{r|l} x^2 & 12A = 24 \\ x^1 & 14A + 12B = 16 \\ x^0 & 2A + 7B + 12C = -15 \end{array}\right\}.$$

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными коэффициентами A, B, C. Решив ее, найдем $A = 2, \quad B = -1, \quad C = -1$.

Частное решение: $\bar{y} = 2x^2 - x - 1$.

5). Общее решение данного уравнения:

$$y = y_0 + \bar{y}$$

или

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-4x} + 2x^2 - x - 1.$$

№ 2. Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

1) $r^2 + r - 2 = 0, \qquad r_1 = -2; \quad r_2 = 1.$

2) $y_0 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$.

3) Сравним правую часть данного дифференциального уравнения $f(x) = 3e^x$ с $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$. Отметим, что $\alpha = 1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения; многочлен – число 3 – нулевой степени, т. е. $n = 0$. Поэтому частное решение $\bar{y}$ следует искать в виде $\bar{y} = A \cdot e^x \cdot x$.

4) Запишем

$$\begin{array}{r|l} -2 & \bar{y} = A \cdot e^x \cdot x, \\ 1 & \bar{y}' = A \cdot e^x + A \cdot e^x \cdot x, \\ 1 & \bar{y}'' = A \cdot e^x + A \cdot e^x + A \cdot e^x \cdot x. \end{array}$$

Подставив выражения $\bar{y},\ \bar{y}',\ \bar{y}''$ с указанными коэффициентами в данное дифференциальное уравнение, получим

$$2A\cdot e^{x}+A\cdot e^{x}\cdot x+A\cdot e^{x}+A\cdot e^{x}\cdot x-2A\cdot e^{x}\cdot x=3e^{x}$$

или

$$3A\cdot e^{x}=3e^{x},$$

откуда $A=1$. Частное решение: $\bar{y}=x\cdot e^{x}$.

5) Искомое общее решение данного уравнения:

$$y=c_1\cdot e^{-2x}+c_2\cdot e^{x}+x\cdot e^{x}.$$

№ 3. $y''-y=x\cdot e^{-x}$.

1) $r^2-1=0$; $r_1=-1$; $r_2=1$.

2) $y_0=c_1\cdot e^{-x}+c_2\cdot e^{x}$.

3) Сравним правую часть данного уравнения $f(x)=x\cdot e^{-x}$ с $f(x)=e^{\alpha x}\cdot P_n(x)$. Отмечаем, что $\alpha=-1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения и многочлен x степени $n=1$. Поэтому частное решение следует искать в виде

$$\bar{y}=(Ax+B)\cdot x\cdot e^{-x}.$$

4) Так как требуется найти $\bar{y}',\ \bar{y}''$, удобнее записать $\bar{y}$ в виде

$$\bar{y}=\left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{-x}.$$

Запишем $\bar{y},\ \bar{y}',\ \bar{y}''$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l}
-1 & \bar{y}=\left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{-x}, \\
0 & \bar{y}'=(2Ax+B)\cdot e^{-x}-\left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{-x}, \\
1 & \bar{y}''=2A\cdot e^{-x}-(2Ax+B)\cdot e^{-x}-(2Ax+B)\cdot e^{-x}+\left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{-x}.
\end{array}$$

Подставим выражения $\bar{y}'',\ \bar{y}$ с указанными коэффициентами в данное уравнение. Получим равенство

$$2A\cdot e^{-x}-2(2Ax+B)\cdot e^{-x}+\left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{-x}-\left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{-x}=x\cdot e^{-x}.$$

Разделим уравнение на $e^{-x}\neq 0$ и упростим:

$$2A-2(2Ax+B)=x,$$

$$2A-4Ax-2B=x.$$

$$\begin{array}{c|c}
x^1 & -4A=1 \\
x^0 & 2A-2B=0
\end{array}\ \Bigg\}\qquad \begin{array}{l} A=-1/4. \\ B=--1/4. \end{array}$$

Частное решение: $\bar{y}=-\dfrac{1}{4}\left(x^2+x\right)\cdot e^{-x}$.

5) Общее решение дифференциального уравнения:

$$y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{x} - \frac{1}{4}\left(x^2 + x\right) \cdot e^{-x}.$$

Пусть правая часть $f(x)$ уравнения (13)

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$$

имеет вид

$$f(x) = M \cdot \cos\beta x + N \cdot \sin\beta x,$$

где M и N – постоянные числа. Тогда вид частного решения $\bar{y}$ определяется следующим образом.

а) Если число βi не есть корень характеристического уравнения (16), то частное решение $\bar{y}$ имеет вид

$$\bar{y} = A \cdot \cos\beta x + B \cdot \sin\beta x,$$

где A и B – постоянные неопределенные коэффициенты.

б) Если число βi есть корень характеристического уравнения (16), то

$$\bar{y} = \left(A \cdot \cos\beta x + B \cdot \sin\beta x\right) \cdot x.$$

Сделаем важное замечание. Даже тогда, когда в правой части уравнения стоит выражение, содержащее только $\cos\beta x$ или только $\sin\beta x$, следует искать частное решение в том виде, в каком оно было указано, т. е. с синусом и косинусом. Иными словами, из того, что правая часть не содержит $\cos\beta x$ или $\sin\beta x$, не следует, что частное решение уравнения не содержит этих функций.

Пример № 1. Решить уравнение

$$y'' + 3y' + 2y = 4\sin 3x + 2\cos 3x.$$

1) $r^2 + 3r + 2 = 0;$

$$r_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}.$$

$$r_1 = -1; \qquad r_2 = -2.$$

2) $y_0 = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-2x}.$

3) Сравним правую часть уравнения $f(x) = 4\sin 3x + 2\cos 3x$ с $f(x) = M \cdot \cos\beta x + N \cdot \sin\beta x$. Здесь $M = 2$, $N = 4$; $\beta = 3$. Так как числа $\pm\beta i = \pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, частное решение следует искать в виде $\bar{y} = A \cdot \cos 3x + B \cdot \sin 3x.$

4) Найдем $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ и запишем столбиком

$$\begin{array}{r|l} 2 & \bar{y} = A \cdot \cos 3x + B \cdot \sin 3x, \\ 3 & \bar{y}' = -3A \cdot \sin 3x + 3B \cdot \cos 3x, \\ 1 & \bar{y}'' = -9A \cdot \cos 3x - 9B \cdot \sin 3x. \end{array}$$

Подставив эти выражения в данное дифференциальное уравнение, получим

$$-9A\cdot\cos x-9B\cdot\sin 3x-9A\cdot\sin 3x+9B\cdot\cos 3x+2A\cdot\cos 3x+2B\cdot\sin 3x=$$

$$=4\sin 3x+2\cos 3x$$

или $\sin 3x\cdot(-7B-9A)+\cos 3x\cdot(-7A+9B)=4\sin 3x+2\cos 3x.$

Приравниваем коэффициенты при $\sin 3x$ и $\cos 3x$ в левой и правой частях уравнения, получим систему уравнений:

$$\begin{array}{r|l} \sin 3x & -7B-9A=4 \\ \cos 3x & -7A+9B=2 \end{array}\Bigg\}$$

$$A=-\frac{5}{13};\qquad B=-\frac{1}{13}.$$

Частное решение: $\bar{y}=-\dfrac{5}{13}\cos 3x-\dfrac{1}{13}\sin 3x.$

6) Общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y=c_1\cdot e^{-x}+c_2\cdot e^{-2x}-\frac{5}{13}\operatorname{cox} 3x-\frac{1}{13}\sin 3x.$$

Пример № 2. Решить уравнение $y''+2y'+5y=2\cos x.$

1) $r^2+2r+5=0;$

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i.$$

2) $y_0=e^{-x}\cdot(c_1\cdot\cos 2x+c_2\cdot\sin 2x).$

3) Сравним правую часть уравнения $f(x)=2\cos x$ с $f(x)=M\cdot\cos\beta x+N\cdot\sin\beta x.$ Здесь $M=2,\ N=0;\ \beta=1.$ Числа $\pm\beta i=\pm i$ не являются корнями характеристического уравнения. Частное решение следует искать в виде

$$\bar{y}=A\cdot\cos x+B\cdot\sin x.$$

4) Запишем

$$\begin{array}{r|l} 5 & \bar{y}=A\cos x+B\sin x, \\ 2 & \bar{y}'=-A\sin x+B\cos x, \\ 1 & \bar{y}''=-A\cos x-B\sin x. \end{array}$$

Подставив $\bar{y},\ \bar{y}',\ \bar{y}''$ в уравнение, получим

$$-A\cos x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x + 5A\cos x + 5B\sin x = 2\cos x,$$

или $\quad \sin x\cdot(4B-2A)+\cos x\cdot(4A+2B)=2\cos x.$

$$\left.\begin{array}{r|l} \sin x & 4B-2A=0 \\ \cos x & 4A+2B=2 \end{array}\right\}.$$

$$A=\frac{2}{5};\quad B=\frac{1}{5}.$$

Частное решение: $\quad \bar{y}=\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$

5) Общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$

Пусть правая часть $f(x)$ неоднородного линейного д.у. II представляет собой сумму **функций вида** $f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$ **или** $f(x)=M\cdot\cos\beta x+N\cdot\cos\beta x.$

$$y''+p\cdot y'+q\cdot y=f_1(x)+f_2(x).$$

Частное решение $\bar{y}$ этого уравнения следует искать в виде суммы $\bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2$ частных решений двух уравнений:

$$y''+p\cdot y'+q\cdot y=f_1(x)$$

и

$$y''+p\cdot y'+q\cdot y=f_2(x).$$

№ 3. Решить уравнение $\quad y''+y'=2x-1-3e^x.$

Здесь $\quad f_1(x)=2x-1;\quad \alpha=0;\quad n=1.$

$\quad f_2=-3e^x;\quad \alpha=1;\quad n=0.$

1) $r^2+r=0;\quad r_1=0;\quad r_2=-1.$

2) $y_0=c_1\cdot e^{0x}+c_2\cdot e^{-x}=c_1+c_2\cdot e^{-x}.$

3) При $\quad f_1(x)=2x-1;\quad \alpha=0;\quad n=1$

$$\begin{array}{r|l} 0 & \bar{y}_1=(Ax+B)\cdot x=Ax^2+Bx, \\ 1 & \bar{y}_1'=2Ax+B, \\ 1 & \bar{y}_1''=2A. \end{array}.$$

$$2A-2Ax-B=2x-1.$$

$$\left.\begin{array}{r|l} x' & -2A=2, \\ x^0 & 2A-B=-1. \end{array}\right\}$$

$$A=-1;\quad B=-1.$$

$$\bar{y}_1=-x^2-x.$$

4) При $f_2 = -3e^x$; $\alpha = 1$; $n = 0$

$$\begin{array}{c|l} & \bar{y}_2 = c\cdot e^x \\ 1 & \bar{y}_2' = c\cdot e^x \\ 1 & \bar{y}_2'' = c\cdot e^x \end{array}$$

$$c\cdot e^x + c\cdot e^x = -3e^x; \qquad 2c = -3.$$

$$c = -\frac{3}{2}. \qquad \bar{y}_2 = -\frac{3}{2}e^x.$$

5) Общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = y_0 + \bar{y}_1 + \bar{y}_2$$

или $y = c_1 + c_2\cdot e^{-x} - x^2 - x - \frac{3}{2}e^x.$

7. Контрольные задания (задачи №№ 1 – 6)

Задача 1. Проверить, является ли указанная функция (а, б,) решением данного уравнения

№ варианта	Уравнение	а	б
1	$y'\cdot\sin x = y\cdot\ln y$	$y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$,	$y = 2\cdot e^{\operatorname{tg} x}$
2	$x\cdot\ln\frac{x}{3}dy - y\cdot dx = 0$	$y = C\cdot(\ln x - \ln 3)$	$y = 3\cdot\sin x$
3	$(x^2+4)\cdot y' - 2x\cdot y = 0$	$y = C\cdot(x^2+4)$	$y = x^2 + C$
4	$y' - \frac{xy}{x^2-1} = y$	$y = \sqrt{x^2-1}$	$y = e^{x+C}\cdot\sqrt{x^2-1}$
5	$y'\cdot\operatorname{tg} x - y = 1$	$y = -2\cdot\sin x$	$y = C\cdot\sin x - 1$
6	$y'\cdot\operatorname{tg} x - 2y = 5$	$y = \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{5}{2}$	$y = \sin 2x - 5$
7	$\operatorname{tg} x\cdot\frac{dy}{dx} - 1 = y$	$y = 2\sin x - 1$	$y = \frac{1}{2}\sin x - 1$
8	$x\cdot y' + x + y = 0$	$x^2 + 2xy = 5$	$x^2 + 2xy = y^2$

№ варианта	Уравнение	а	б
9	$y' = \frac{y}{x} - 1$	$y = x \cdot (C - \ln x)$	$y = x \cdot e^{Cx}$
10	$2x \cdot y \cdot y' + x^2 - y^2 = 0$	$y = x^2 + \sqrt{1 - x^2}$	$y = \sqrt{C \cdot x - x^2}$

Задача 2. Проверить, является ли функция *y* общим решением данного уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее указанному начальному условию

№ варианта	Уравнение	Общее решение (общий интеграл)	Начальное условие
1	$y' \cdot \sqrt{1 - x^2} = x$	$y = C - \sqrt{1 - x^2}$	$y(0) = 1$
2	$(x^2 + 4) \cdot dy - 2xy \cdot dx = 0$	$y = C(x^2 + 4)$	$y(1) = 5$
3	$\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0$	$x^2 + y^2 = C$	$y(3) = 4$
4	$(1 + y^2) \cdot dx - x \cdot y \cdot dy = 0$	$\sqrt{1 + y^2} = Cx$	$y(1) = 0$
5	$y' \cdot x \cdot \ln x - y = 0$	$y = C \cdot \ln x$	$y(e) = 1$
6	$dy - y^2 \cdot dx = 0$	$\frac{1}{y} = C - x$	$y(-1) = 1$
7	$2xy\,dx = (x^2 + 4)dy$	$y = C(x^2 + 4)$	$y(1) = 5$
8	$x\,dx = \sqrt{1 - x^2} \cdot dy$	$y + \sqrt{1 - x^2} = C$	$y(0) = 1$
9	$\operatorname{tg} x \cdot dy - dx = y \cdot dx$	$y = C \cdot \sin x - 1$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
10	$\operatorname{tg} x \cdot y' - 2y = 5$	$y = \frac{1}{2}(C \cdot \sin^2 x - 5)$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$

Задача 3. Найти общее решение дифференциального уравнения (или частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию)

№ варианта	Уравнение	Начальное условие
1	а) $y - xy' = a \cdot (1 + x^2 \cdot y')$	–
	б) $x \cdot y' - y = x \cdot \mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$	$y(1) = \frac{\pi}{2}$
	в) $y' + 2xy = e^{-x^2}$	–
2	а) $x \cdot dy + y \cdot \ln y\, dx = 0$	–
	б) $x \cdot y' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$	–
	в) $y' - y \cdot \mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\cos x}$	$y(0) = 0$
3	а) $y' \cdot \sin x - y \cdot \ln y = 0$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$
	б) $(y^2 - x^2) \cdot dx - x\,y\,dy = 0;$	$y(1) = 1$
	в) $y' - y \cdot \mathrm{tg}\, x = \mathrm{ctg}\, x$	–
4	а) $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$	$y(0) = 1$
	б) $x \cdot y' - y = x \cdot \cos^2 \frac{y}{x}$	–
	в) $x\,y' - \frac{y}{x+1} = x$	$y(1) = 0$
5	а) $x\,dy = 2\sqrt{y} \cdot \ln x\, dx$	$y(e) = 1$
	б) $2x^2 \cdot y' = x^2 + y^2$	–
	в) $y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x = 2x$	$y(0) = 0$

№ варианта	Уравнение	Начальное условие
6	а) $\sin y \cdot \cos x \cdot dy - \cos y \cdot \sin x \cdot dx = 0$	$y(0) = \frac{\pi}{4}$
	б) $x \cdot y' = y + 5x^3$	–
	в) $y' \cdot x \cdot \ln x - y = 3x^3 \cdot \ln^2 x$	–
7	а) $\frac{dy}{dx} - y = 3$	$y(0) = -2$
	б) $x \cdot y' \cdot \cos\frac{y}{x} = y \cdot \cos\frac{y}{x} - x$	–
	в) $2(y + x^4)\, dx - x\, dy = 0$	–
8	а) $x^3 \cdot \sin y \cdot y' = 2$	–
	б) $(x + y) \cdot dy + (x - y)dx = 0$	–
	в) $(1 + x^2) \cdot y' - 2xy = (1 + x^2)^2$	$y(0) = 1$
9	а) $x \cdot \ln\frac{x}{a} \cdot dy - y\,dx = 0$	–
	б) $(x^2 - 2y^2) \cdot dx + 2xy\,dy = 0$	–
	в) $x \cdot y' - y - x^2 = 0$	$y(-2) = 1$
10	а) $x \cdot y \cdot y' + x^2 = 1$	–
	б) $x^2 + y^2 = 2xy \cdot y'$	$y(1) = 2$
	в) $y' \cdot \cos x + y \cdot \sin x = 1$	$y(0) = 0$

Задача 4. Найти общее решение (общий интеграл) уравнения

№ варианта	а	б
1	$y'' \cdot \cos^2 \dfrac{x-1}{2} = 1$	$1 + \dfrac{y'}{x} = y''$
2	$y'' \cdot \sin^2 \dfrac{x}{2} = 2$	$y'' + 1 = -\dfrac{y'}{x}$
3	$y'' = \dfrac{3}{\cos^2 2x}$	$x \cdot (y'' + 1) + y' = 0$
4	$y'' = \dfrac{1}{2} \cdot \left(3x - \cos\dfrac{2}{3}x\right)$	$(3 + x) \cdot y'' + y' = 0$
5	$y'' = x^2 - \cos 2x$	$x \cdot y'' - y' \cdot \ln\dfrac{y'}{x} = 0$
6	$(1 + 2x)^3 \cdot y'' = 3$	$y' - x \cdot \ln x \cdot y'' = 0$
7	$y'' \cdot e^{-x} + 3 = 0$	$(1 + 2x^2) \cdot y' - xy'' = 0$
8	$y'' = \dfrac{1}{5} \cdot (x - 2\sin 3x)$	$x \cdot y'' + y' = 0$
9	$y'' = \sin\dfrac{x}{2} - x$	$y' = -x\,y''$
10	$y'' - 2e^{-2x} = 0$	$x \cdot y'' - y' - x^2 = 0$

Задача 5. Найти общее решение дифференциального уравнения

№ варианта	а	б
1	$y'' - 3y' = 0$	$y'' - 6y' + 34y = 0$
2	$2y'' + 3y' = 0$	$y'' - 4y' + 13y = 0$
3	$y'' - 2y' = 0$	$2y'' - 3y' - 2y = 0$
4	$4y'' + y = 0$	$y'' - 6y' - 7y = 0$

№ варианта	а	б
5	$9y'' + y = 0$	$y'' - 8y' + 7y = 0$
	а	б
6	$4y'' - y' = 0$	$y'' - 4y' + 5y = 0$
7	$y'' + 4y' + 5y = 0$	$y'' - 3y' = 0$
8	$4y'' + y' = 0$	$y'' + 4y' - 5y = 0$
9	$y'' - 6y' + 10y = 0$	$y'' - y = 0$
10	$y'' - 4y = 0$	$y'' + 6y' + 10y = 0$

Задача 6. Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, используя метод подбора коэффициентов частного решения (метод неопределенных коэффициентов)

1. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x) \cdot e^{3x}$	2. $y'' - 4y' + 4y = x \cdot e^{2x}$
3. $y'' + 6y' + 34y = 5x \cdot e^{-3x}$	4. $9y'' + 24y' + 16y = -5x \cdot e^{3x}$
5. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$	6. $y'' - 3y' + 2y = x \cdot e^{x}$
7. $y'' - 3y' + 2y = 10 \cdot e^{-x}$	8. $y'' - 2y' + y = x^3$
9. $y'' + 6y' + 34y = 5x \cdot e^{-2x}$	10. $y'' + y' = 3 \cdot e^{-x} + 2x$

8. Примеры решения задач из контрольного задания

Задача 1. Проверить, являются ли указанные функции решениями уравнения $x \cdot y' - y = 2x$,

а) $y = x \cdot (2\ln x + c)$, б) $y = cx + 2\ln x$.

Решение

а) $y = x \cdot (2\ln x + c)$; $y' = 2\ln x + c + x \cdot \dfrac{2}{x} = 2\ln x + c + 2.$

Подставим y и y' в уравнение:

$$x\cdot(2\ln x+c+2)-x\cdot(2\ln x+c)=2x$$

или

$$\underline{2x\ \ln x}+\underline{\underline{cx}}+2x-\underline{2x\ln x}-\underline{\underline{cx}}=2x \text{ – верно,}$$

т. е. $y=x\cdot(2\ln x+c)$ – **решение** уравнения.

б) $y=c\cdot x+2\ln x;\qquad y'=c+\dfrac{2}{x}.$

$$x\cdot\left(c+\frac{2}{x}\right)-(cx+2\ln x)=2x$$

или

$\underline{c\ x}+2-\underline{c\ x}-2\ln x=2x$ – неверно, т. е. $y=cx+2\ln x$ не является решением.

Задача 2. Проверить, является ли функция $y=x\cdot c^{cx}$ общим решением уравнения $x\cdot y'=y(1+\ln y-\ln x)$ и найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Решение. Подставим функцию $y=x\cdot e^{cx}$ в данное уравнение:

$$y'=e^{cx}+x\cdot e^{cx}\cdot c=e^{cx}+c\cdot x\cdot e^{cx}.$$

$$x\cdot\left(e^{cx}+c\cdot x c^{cx}\right)=x\cdot e^{cx}\cdot\left(1+\ln\left(x e^{cx}\right)-\ln x\right).$$

$$x\cdot e^{cx}+cx^2e^{cx}=xe^{cx}+xe^{cx}\left(\underline{\ln x}+cx-\underline{\ln x}\right).$$

$$x\cdot e^{cx}+cx^2e^{cx}=xe^{cx}+c\cdot x^2e^{cx} \text{ – верно,}$$

т. е. функция $y=x\cdot e^{cx}$ содержит произвольную постоянную c и является решением уравнения, эта функция является **общим** решением. Подставим начальные условия $x=1$ и $y=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ в общее решение:

$$\frac{1}{\sqrt{e}}=1\cdot e^{c\cdot 1};\qquad \frac{1}{\sqrt{e}}=e^{c};\quad e^{-1/2}=e^{c};\qquad c=-\frac{1}{2}.$$

Найденное значение с подставим в общее решение.

$y=x\cdot e^{-1/2x}$ – частное решение.

Задача 3. Найти общее решение дифференциального уравнения (или частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию).

а) $y' + y \cdot \cos x = \cos x$. б) $(x y' - y) \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x; \quad y(1) = 0$. в) $x\,dy - (3y + x^2)dx = 0$.

Решение

а) $\underline{y' + y \cdot \cos x = \cos x}$. Это дифференциальное уравнение является линейным, но проще решать его как уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{dx} = (1 - y) \cdot \cos x$. Умножим на $\frac{dx}{1-y}$; $\quad \frac{dy}{1-y} = \cos x \cdot dx; \quad \int \frac{dy}{1-y} = \int \cos x\, dx;$

$$-\ln|1-y| = \sin x - \ln c \quad \text{или} \quad \ln|1-y| = \ln c - \sin x; \quad \ln|1-y| - \ln c = -\sin x;$$

$$\ln\left|\frac{1-y}{c}\right| = -\sin x; \quad \frac{1-y}{c} = e^{-\sin x}; \quad 1 - y = c \cdot e^{-\sin x};$$

$y = 1 - c \cdot e^{-\sin x}$ – общее решение.

б) $\underline{(x y' - y) \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x; \quad y(1) = 0.}$

Это однородное д.у.1, т. к. после замены x на $t \cdot x$; y на $t \cdot y$ уравнение не изменится:

$$(tx \cdot y' - t \cdot y) \cdot \operatorname{arctg} \frac{t \cdot y}{t \cdot x} = t \cdot x; \qquad t \cdot (xy' - y) \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = t \cdot x;$$

получим $(x \cdot y' - y) \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$ – исходное дифференциальное уравнение.

Решаем подстановкой:

$$y = u \cdot x; \qquad y' = u' \cdot x + u.$$

$$(xu' \cdot x + \underline{xu} - \underline{ux}) \cdot \operatorname{arctg} \frac{ux}{x} = x\,.$$

Или $x^2 \cdot u' \cdot \operatorname{arctg} u = x$ – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$x \cdot \frac{du}{dx} \cdot \operatorname{arctg} u = 1; \qquad x \cdot du \cdot \operatorname{arctg} u = dx; \qquad \operatorname{arctg} u \cdot du = \frac{dx}{x}.$$

$$\int \operatorname{arctg} u\, du = \int \frac{dx}{x}. \qquad \int \operatorname{arctg} u\, du = \ln x + c.$$

$\int \operatorname{arctg} u\, du$ берем по частям по формуле : $\int z\, dt = z \cdot t - \int t\, dz.$.

После подстановки

$$z = \operatorname{arctg} u; \qquad dz = \frac{du}{1+u^2}; \qquad dt = du; \qquad t = u$$

интеграл $\int \operatorname{arctg} u\, du = u \cdot \operatorname{arctg} u - \int \frac{u\, du}{1+u^2} = u \cdot \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right).$

Таким образом, получаем $u \cdot \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) = \ln x + c.$

Подставим $y = u \cdot x$; $u = \frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x} \cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \ln x + c.$$

Это общий интеграл данного уравнения. Подставим начальные условия

$x = 1,\quad y = 0$: $\qquad 0 - \frac{1}{2}\ln 1 = \ln 1 + c$; отсюда $c = 0$.

Искомый частный интеграл имеет вид. $\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \ln x.$

в) $\underline{x\, dy - \left(3y + x^2\right)dx = 0.}$

Разделим уравнение на $x \cdot dx$:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3y + x^2}{x} = 0; \qquad \frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x.$$

Это линейное дифференциальное уравнение. Решаем его подстановкой:

$$y = u \cdot v; \qquad y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

$$\underline{u' \cdot v} + u \cdot v' - \underline{\frac{3}{x} u \cdot v} = x.$$

$$v\left(u' - \frac{3}{x} u\right) + u \cdot v' = x.$$

$$u' - \frac{3}{x} u = 0$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{x} u; \qquad \frac{du}{u} = \frac{3dx}{x}.$$

$$\int \frac{du}{u} = 3 \int \frac{dx}{x}; \qquad \ln u = 3 \ln x; \qquad \underline{u = x^3}$$

$$x^3 \cdot v' = x; \qquad v' = \frac{1}{x^2}; \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2};$$

$$dv = \frac{dx}{x^2}; \qquad \int dv = \int \frac{dx}{x^2}; \qquad \underline{v = -\frac{1}{x} + c}.$$

Так как $y = u \cdot v$, получим $y = x^3 \cdot \left(-\frac{1}{x} + c\right)$ или

$y = cx^3 - x^2$ – общее решение.

Задача 4. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения:

а) $y'' \cdot (1 + \cos x) = 2$

б) $(x+1) \cdot y'' + x \cdot (y')^2 = y'$

Решение

а) $y'' \cdot (1 + \cos x) = 2$ или $y'' = \dfrac{2}{1 + \cos x}$ – дифференциальное уравнение 2-го порядка. Последовательно интегрируем дважды, применив предварительно

формулу тригонометрии $1 + \cos x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$.

$$y' = \int \frac{2}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = 2\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}} = 2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + c_1.$$

$$y = \int\left(2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + c_1\right)dx = 2\cdot 2\int \mathrm{tg}\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right) + \int c_1\,dx.$$

$$y = -4\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + c_1 x + c_2 \ \text{– общее решение.}$$

б) $(x+1)\cdot y'' + x\cdot(y')^2 = y'$ – дифференциальное уравнение, допускающее понижение порядка. Решаем при помощи подстановки:

$$y' = p; \qquad y'' = p'\left(\frac{dp}{dx}\right).$$

$$(x+1)\cdot p' + x\cdot p^2 = p$$

или

$$p' - \frac{p}{x+1} = -\frac{x}{x+1}\cdot p^2 \ .$$

Это уравнение Бернулли относительно функции $p = p(x)$. Решаем уравнение подстановкой:

$$p = u\cdot v; \qquad p' = u'\cdot v + u\cdot v'.$$

Получим

$$\underline{u'v} + uv' - \frac{uv}{\underline{x+1}} = -\frac{x}{x+1}\cdot u^2\cdot v^2.$$

$$v\left(u' - \frac{u}{x+1}\right) + u\cdot v' = -\frac{x}{x+1}\cdot u^2 v^2.$$

$$u' - \frac{u}{x+1} = 0$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x+1}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln u = \ln(x+1)$$

$$\underline{u = x+1}$$

Подставим выражение $u = x+1$ в уравнение $u \cdot v' = -\frac{x}{x+1} \cdot u^2 \cdot v^2$

$$(x+1) \cdot v' = -\frac{x \cdot (x+1)^2}{x+1} \cdot v^2$$

$$v' = -x \cdot v^2$$

$$\frac{dv}{dx} = -x \cdot v^2$$

$$\frac{du}{v^2} = -x\,dx$$

$$+\int \frac{dv}{v^2} = -\int x\,dx$$

$$-\frac{1}{v} = -\frac{x^2}{2} - \frac{c_1}{2}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{x^2 + c_1}{2}$$

$$v = \frac{2}{x^2 + c_1}$$

$p = u \cdot v$; $\quad p = (x+1) \cdot \frac{2}{x^2 + c_1}$ – общее решение уравнения $p' - \frac{p}{x+1} = -\frac{x}{x+1} \cdot p^2$.

Так как $p = y'$, получим $y' = \frac{2(x+1)}{x^2 + c_1}$ – дифференциальное уравнение 1–го порядка относительно функции $y = y(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+1)}{x^2 + c_1}$$

$$dy = \frac{2(x+1)}{x^2 + c_1}dx; \qquad \int dy = \int \frac{2x\,dx}{x^2 + c_1} + 2\int \frac{dx}{x^2 + c_1}.$$

Интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + c_1}$ зависит от знака c_1, поэтому положим $c_1 > 0$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{c_1}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{c_1}}.$$

Общим решением данного уравнения будет

$$y = \ln\left|x^2 + c_1\right| + \frac{2}{\sqrt{c_1}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{c_1}} + c_2 .$$

Задача 5. Найти общее решение уравнения

$$\text{а) } 2y'' - 5y' = 0, \qquad \text{б) } y'' - 10y' + 26y = 0 .$$

Решение. Это линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Решаем их с помощью характеристического уравнения.

а) $2y'' - 5y' = 0;$ $\quad 2r^2 - 5r = 0;$ $\quad r(2r - 5) = 0;$ $\quad r_1 = 0;$ $\quad r_2 = 5/2.$

$$y = c_1 \cdot e^{0x} + c_2 \cdot e^{5/2x}$$

или

$$y = c_1 + c_2 \cdot e^{5/2x} \quad - \text{ общее решение .}$$

б) $y'' - 10y' + 26y = 0,$ $\quad r^2 - 10r + 26 = 0;$

$$r_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 104}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{10 \pm 2i}{2} = 5 \pm i.$$

Здесь $\alpha = 5;$ $\beta = 1.$

$$y = e^{5x} \cdot (c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x) - \text{общее решение.}$$

Задача 6. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' - 2y = x^2 \cdot e^{4x}.$$

Решение. Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами с правой частью (неоднородное).

Общее решение: $y = y_0 + \bar{y}$, где y_0 – общее решение соответствующего однородного линейного уравнения; $\bar{y}$ – частное решение данного уравнения.

Характеристическое уравнение:

$$r^2 + r - 2 = 0; \qquad r_1 = 1; \qquad r_2 = -2.$$

$$y_0 = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-2x}.$$

Правая часть $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$, $\quad \alpha = 4 -$ не корень характеристического уравнения.

$$\begin{array}{r|l} -2 & \bar{y} \;=\left(Ax^2+Bx+c\right)\cdot e^{4x}, \\ 1 & \bar{y}'=\left(2Ax+B\right)\cdot e^{4x}+4\left(Ax^2+Bx+c\right)\cdot e^{4x}, \\ 1 & \bar{y}''=2A\cdot e^{4x}+8\left(2Ax+B\right)\cdot e^{4x}+16\left(Ax^2+Bx+c\right)\cdot e^{4x}. \end{array}$$

Приравниваем коэффициенты при x^2, x^1, x^0:

$$\left.\begin{array}{c|l} x^2 & -2A+4A+16A=1 \\ x^1 & -2B+2A+4B+16A+16B=0 \\ x^0 & -2C+B+4C+2A+8B+16C=0 \end{array}\right\} \qquad \begin{cases} 18A=1. \\ 18A+18B=0. \\ 2A+9B+18C=0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем

$$A=1/18; \qquad B=-1/18; \qquad C=7/324.$$

$$\bar{y}=\left(\frac{x^2}{18}-\frac{x}{18}+\frac{7}{324}\right)\cdot e^{4x}.$$

Искомое общее решение:

$$y=c_1\cdot e^{x}+c_2\cdot e^{-2x}+\left(\frac{x^2}{18}-\frac{x}{18}+\frac{7}{324}\right)\cdot e^{4x}.$$

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1972. Т.2. 576 с.

2. Бермант А.Ф., Араманович Н.Г. Краткий курс математического анализа (для втузов). М.: Наука, 1967. 736 с.

3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985. 442 с.

4. Гутер Р.С., Янпольский А.Р. Дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.

5. Виленкин Н.Я. Задачник по курсу математического анализа.М.: Просвещение, 1971. Ч.2. 336 с.

6. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу (для втузов). М.: Наука, 1968. 472 с.

7. Бермант А.Ф. Курс математического анализа. М.: Изд-во техн.-теор. лит., 1956. Т.2. 358 с.

8. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высш. школа. 1983. 128 с.

9. Бугров Л.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. М.: Наука 1985. 464 с.

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01.
Свод. темплан 2004 г.
Подписано в печать 03.03.04. Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 3,5. Уч. – изд. л. 3,5.
Тираж 100 экз. Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ