Министерство образования Российской Федерации

Омский государственный технический университет

Н.И.Васильева, Е.А.Воробьева, Р.Ш.Минабудинова

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания к практическим занятиям

Омск – 2001

Составители: Васильева Нина Иосифовна, старший преподаватель
Воробьева Елена Алексеевна, старший преподаватель
Минабудинова Рамзия Шаиховна

Методические указания содержат теоретические сведения, примеры с решениями задач, а также примеры для самостоятельного решения. Ко всем примерам в конце работы приведены ответы.

1. МАТРИЦЫ. ОСНОВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Прямоугольную таблицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящую из действительных чисел a_{ij}, называют <u>матрицей</u> над полем действительных чисел R.

Числа a_{ij} называют <u>элементами</u> матрицы, причем i - номер строки, а j - номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Индекс i принимает все натуральные значения от 1 до m $(i=1,2,\dots,m)$, индекс j принимает все натуральные значения от 1 до n $(j=1,2,\dots,n)$. Если m – число строк матрицы, а n – число число столбцов, то матрицу называют <u>прямоугольной</u> размера $m\times n$. Если $m=n$, то матрицу называют <u>квадратной</u> матрицей порядка n.

Обозначают матрицу одной буквой (например, буквой A) или кратко записывают

$$A=(a_{ij}), \quad \text{где } i=1,2,\dots,\ m; \quad j=1,2,\dots,\ n.$$

Матрицу размера $1\times n$ называют <u>матрицей-строкой</u>, матрицу размера $m\times 1$ называют <u>матрицей-столбцом.</u>

Например, $(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n)$ - матрица-строка, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрица-столбец.

Квадратная матрица называется <u>диагональной</u>, если $a_{ij}=0$ при $i\neq j$, то есть матрица вида $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, где $\lambda_j \in R$.

Диагональная матрица $E=(\delta_{ij})$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & при \quad i = j \\ 0 & при \quad i \neq j \end{cases}$ (символ Кронекера),

называется <u>единичной.</u>

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется <u>нулевой</u> (или нуль-матрицей) и обозначается буквой О.

Две матрицы $A = (a_{ij})$ $и$ $B = (b_{ij})$ одного и того же размера называют равными только тогда, когда для всех i и j $a_{ij} = b_{ij}$.

<u>Суммой</u> двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного и того же размера $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера $m \times n$, где для всех i и j $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ и при этом пишут: $C = A + B$.

<u>Произведением</u> матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ <u>на действительное число</u> α называется матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, причем для всех i и j $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$; при этом пишут: $B = \alpha \cdot A$..

При $\alpha = -1$ $\alpha \cdot A$ называют матрицей, <u>противоположной</u> матрице A и обозначают -A.

<u>Произведением матрицы</u> $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ <u>на матрицу</u> $B = (b_{jk})$ размера $n \times p$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times p$, где для всех i и j:

$$C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \; ;$$

при этом пишут: $C = A \cdot B$.

Умножение матрицы A на матрицу B возможно, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Поэтому, если имеет смысл произведения $A \cdot B$, то не обязательно имеет смысл произведение $B \cdot A$. Если A и B – квадратные матрицы одного порядка, то оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ имеют смысл, но не обязательно $A \cdot B = B \cdot A$.

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называют <u>перестановочными.</u>

Имеют место следующие операции над матрицами:

1). $A + B = B + A$,

2). $A + (B + C) = (A + B) + C$,

3). $0 + A = A + 0 = A$,

4). $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$,

5). $\alpha \cdot \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$,

6). $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$,

7). $1 \cdot A = A$,

8). $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$,

9). $A \cdot (B \cdot C) = (AB) \cdot C$,

10). $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$,

11). $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Операция над матрицей A, при которой ее строки становятся столбцами с теми же номерами, а столбцы – строками, называется <u>транспонированием</u> и обозначается A'.

Например, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Имеют место следующие свойства операции транспонирования:

$$(A')' = A; \quad (A + B)' = A' + B'; \quad (\alpha \cdot A)' = \alpha \cdot A'; \quad (A \cdot B)' = B' \cdot A'; \quad E' = E.$$

Примеры.

1. Найти произведение $A \cdot B$ матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1+0\cdot 5+1\cdot 2 & 3\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot(-3) \\ 1\cdot 1-2\cdot 5-1\cdot 2 & 1\cdot 0-2\cdot 1-1\cdot(-3) \\ 2\cdot 1+0\cdot 5+1\cdot 2 & 2\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -11 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Найти матрицу $A\cdot B - B\cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-8+2 & 1+4+4 & 1+0+2 \\ 8-4+2 & 2+2+4 & 2+0+2 \\ 4-8+3 & 1+4+6 & 1+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2+1 & 8+1+2 & 8+2+3 \\ -4+4+0 & -8+2+0 & -8+4+0 \\ 1+4+1 & 2+2+2 & 2+4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 13 \\ 0 & -6 & -4 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix};$$

Обратите внимание $A\cdot B \neq B\cdot A$.

$$A\cdot B - B\cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 11 & 13 \\ 0 & -6 & -4 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -2 & -10 \\ 6 & 14 & 8 \\ -7 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть A – прямоугольная матрица, B – квадратная матрица. Возможно ли сложение матриц A и B?

2) Возможно ли сложение матрицы-столбца и матрицы-строки?

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $A+B$ и $B+A$..

4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $(A+B)+C$ и $A+(B+C)$.

5) Какая матрица получится в результате умножения произвольной матрицы

а) на число 0?

б) на число -1?

6) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Найти матрицы $2\cdot A,\quad 0\cdot A,\quad (-3)\cdot A.$

7) Представить матрицу-строку $A=\begin{pmatrix}10 & -5 & -3\end{pmatrix}$ как линейную комбинацию матриц $B_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}4 & 3 & 5\end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\end{pmatrix}.$

8) Найти матрицу, противоположную матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$

9) Доказать, что для любой матрицы существует единственная противоположная ей матрица.

10) Как с помощью линейных операций над матрицами можно определить вычитание матриц и их разность?

11) Является ли операция вычитания матриц обратной по отношению к сложению?

12) Найти a_1, a_2, a_3, если $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$

13) Представить матрицу $A=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации матриц

$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

14) Доказать, что матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ образует базис линейного пространства квадратных матриц второго порядка.

15) Истинно ли высказывание $(\forall A)(\forall B)(o\cdot A=o\cdot B)$, где o – число?

16) При каком условии имеет смысл произведение произвольной матрицы:

а) на матрицу-столбец?

б) на матрицу-строку?

Что представляет собой это произведение?

17) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$. Найти $A\cdot B$.

18) Пусть A – матрица размера $m\times n$. Какого размера должна быть единичная матрица *E*, чтобы имело смысл произведение

а) $A\cdot E$?

б) $E\cdot A$?

19) Для какой матрицы имеет смысл произведение $A\cdot A=A^2$?

20) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$. Найти $A\cdot B$. Имеет ли смысл произведение $B\cdot A$?

21) Установить, являются ли перестановочными матрицы

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$.

22) Найти матрицы $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

23) Найти *x*, *y*, *z* из уравнений:

а) $(xy)\cdot\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=(5\quad 3)$, б) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\ 4\end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$.

24) Показать, что $A\cdot B = B\cdot A$=*E*, если

$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}$.

25) $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 4\\ 1 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$. Найти $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

26) Убедиться, что $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C,$ если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 7\\ 1 & 8 & 9\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}3 & 7 & 1\\ 2 & 6 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}.$$

27) Убедиться, что $A^3 = A\cdot A\cdot A = E$, если $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

28) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$. Найти $A\cdot B$ и A^2.

29) Истинно ли высказывание $(A\cdot B=0) \Rightarrow (A=0 \vee B=0)$?

30) Какая матрица является транспонированной для

а) единичной матрицы?

б) нулевой матрицы?

в) матрицы-строки?

г) матрицы-столбца?

31) Какая матрица является транспонированной для произведений $A\cdot E$ и $E\cdot A$?

32) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$.

Проверить справедливость равенства $(A\cdot B)' = B'\cdot A'$.

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу любого порядка n:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Поставим в соответствие каждой матрице такого вида число Δ, называемое определителем (или детерминантом) этой матрицы, причем:

1. Если $n=1$, то матрица состоит из одного элемента a_{11}, и определитель, соответствующий такой матрице, равен этому элементу: $\Delta = a_{11}$.

2. Если $n=2$, то есть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то определитель, соответствующий матрице, равен разности произведения элементов, расположенных на главной диагонали, и произведения элементов, расположенных на побочной диагонали:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

3. Если $n=3$, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то}$$

такой матрице соответствует определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}$$

Правило вычисления определителя третьего порядка схематично можно изобразить в следующей форме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Оно называется правилом треугольников или правилом Сарриуса.

Пример.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-2) + 2\cdot 5\cdot 6 + 4\cdot(-7)\cdot 3 - 6\cdot(-1)\cdot 3 - 2\cdot 4\cdot(-2) - (-7)\cdot 5\cdot 1 =$$

$$= 2 + 60 - 84 + 18 + 16 + 35 = 47.$$

4. Определитель, соответствующий матрице порядка n, имеет вид:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и для его вычисления верна формула:

$$\Delta = \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij} ,$$

где i – любое число: $1 \le i \le n$, а M_{ij} - минор, соответствующий элементу a_{ij} .

Минором, соответствующим элементу a_{ij} определителя (матрицы) $n-го$ порядка, называется определитель $(n-1)-го$ порядка, который образуют оставшиеся элементы данного определителя, если в нем вычеркнуть строку $(i-ую)$ и столбец $(j-ый)$, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Минор элемента a_{ij}, снабженный знаком «+» , если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}- четная, и – знаком «минус», если эта сумма нечетная, называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} и обозначается A_{ij}, то есть

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \quad M_{ij}.$$

Отсюда следует правило вычисления определителей, которое называется разложением определителя по элементам i-ой строки: всякий определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения.

Например, определитель третьего порядка можно вычислить, разложив его по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3-2) - 2 \cdot (1-2) + 3 \cdot (1+3) = 9.$$

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. (О равноправии строк и столбцов определителя)

При замене каждой строки определителя столбцом с тем же номером (при транспонировании) определитель не меняется

$$\det A = \det A'.$$

2. Если поменять местами две строки (или два столбца) определителя, то определитель изменит знак.

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

4. Общий множитель всех элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя.

5. Если одна из строк (столбец) определителя есть линейная комбинация остальных строк (столбцов) его, то такой определитель равен нулю.

6. Определитель не изменится, если к какой-либо его строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

УПРАЖНЕНИЯ

33) Верно ли, что

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1?$$

34) Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

35) Решить неравенства

а). $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \langle 14,$ б). $\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 8x & 2 \end{vmatrix} \rangle 5$

36) Вычислить определители:

а). $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ б). $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ в). $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & -a \end{vmatrix}$ г). $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

37) Вычислить, используя свойства определителей:

а) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 13647 & 13657 & 17844 \\ 28423 & 28433 & -19372 \\ 28423 & 28433 & -19372 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}$.

38) Определителем Вандермонда называется определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y).$$

При каких значениях x, y, z он равен нулю?

39) Вычислить определитель Вандермонда $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$.

40) Решить уравнение:

а). $\begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ x & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0;$ б). $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

41) Решить неравенства:

а). $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1;$ б). $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

42) Вычислить определители четвертого порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

43) Доказать, что определитель диагональной матрицы *n-го* порядка

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \dots & a \end{vmatrix} \quad \text{равен } a^n.$$

44) Вычислить определитель $n-го$ порядка:

а) $\begin{vmatrix} \chi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \chi_n \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & в_2 & в_3 & \dots & в_n \\ 0 & 0 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & -в & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & -в & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & -в \\ -в & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

45) Не вычисляя определителя, решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Пусть $A = (a_{ij})$ - квадратная матрица порядка n.

Матрица A^{-1} называется обратной для A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$ где E – единичная матрица.

Необходимым и достаточным условием существования обратной матрицы для A является отличие от нуля определителя матрицы $A;$ (такая матрица называется невырожденной). Обозначим через A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента d_{ij} матрицы A. Если через M_{ij} обозначить минор матрицы $A,$ соответствующий элементу a_{ij}, то $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Обратная матрица

$$A = \frac{1}{\det A}\left(A_{ij}\right)'.$$

Укажем способ отыскания матрицы, обратной для матрицы *A:*

1)Вычисляем определитель матрицы *A;*

2)Составляем матрицу, элементами которой являются алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы *A* (такая матрица называется присоединенной);

3) Транспонируем полученную матрицу;

4) Умножаем последнюю матрицу на множитель $\frac{1}{\det A}$.

Например, найдем обратную матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det A = 5 \neq 0.$ Поэтому

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Убедимся в том, что обратная матрица найдена верно

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

то есть $A \cdot A^{-1} = E$.

УПРАЖНЕНИЯ

47) Найти матрицу, обратную для матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, к) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

48) Доказать, что матрица, обратная диагональной, тоже является диагональной.

49) Доказать справедливость равенства $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ для любой невырожденной матрицы A.

50) Решить следующие матричные уравнения:

а) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

в) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 7 & -17 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 12 & 33 \\ 11 & 34 \end{pmatrix}$.

д) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 & -10 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & -21 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & 1 \\ 11 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

4. КРАМЕРОВСКИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = в_m \end{cases} \qquad (1)$$

Решением такой системы уравнений является любая совокупность значений переменных $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, … $x_n = \alpha_n$, при подстановке которых все уравнения обращаются в верные равенства. Предположим, что определитель системы отличен от нуля, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

В этом случае система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ_i - определитель переменной x_i , который получается из определителя системы Δ , если в нем i-ый столбец заменить столбцом свободных членов $(i = 1,2,3,\ldots,n)$.

Пример. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases} .$$

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8.$

2. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -3 \\ -6 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 18 = -16.$

3. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

4. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -4 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8.$

$$x_1 = \frac{-16}{-8} = 2, \qquad x_2 = \frac{0}{-8} = 0, \qquad x_3 = \frac{8}{-8} = -1.$$

Для решения крамеровской системы линейных уравнений, кроме формул Крамера, можно использовать матричный способ решения. Заменим исходную систему n линейных уравнений с n неизвестными (1) эквивалентным ей матричным уравнением:

$$A \cdot X = B, \tag{2}$$

где A -матрица системы,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец, составленная из переменных, и подлежащая определению.

$B = \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ \vdots \\ в_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец, составленная из свободных членов уравнения системы.

Так как $\Delta = \det A \neq 0$, то A – невырожденная матрица, следовательно, существует ей обратная A^{-1}.

Умножим обе части уравнения (2) слева на A^{-1}.

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B.$$

Так как $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = E \cdot X = X$, то $\underline{X = A^{-1} \cdot B}$.

Пример.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 5x + y + 3z = 14 \\ 2x + y + 2z = 5. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix},$$

то есть $x = 2, \quad y = -5, \quad z = 3.$

УПРАЖНЕНИЯ

51) Выяснить, является ли данная система системой Крамера:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$

Совместна ли данная система?

52) Решить системы по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ 4x + y + 3z = 9 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$

53) Решить системы матричным способом :

а) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ 3x - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = -2 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

5. РАНГ МАТРИЦЫ

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$. Если в этой матрице выбрать произвольно k строк и k столбцов $(k \le n$ и $k \le m)$, то элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k. Определитель этой матрицы называется минором k - го порядка матрицы A.

Натуральное число r называется рангом матрицы A, если у нее имеется минор порядка r, отличный от нуля, а все миноры порядка $r+1$ равны нулю.
Если ранг матрицы равен r, то всякий минор порядка r, отличный от нуля, называют базисным минором.

Имеет место следующая теорема:
Если в матрице A имеется минор M -порядка r, отличный от нуля, а всякий минор порядка $r+1$, включающий все элементы минора M (окаймляющий минор), равен нулю, то ранг матрицы A равен r.

При вычислении ранга матрицы находим некоторый минор k-го порядка, отличный от нуля. Затем вычисляем только миноры порядка $k+1$, окаймляющие этот минор; если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. Практически этот способ нахождения ранга матрицы весьма трудоемок. Укажем еще один способ вычисления ранга матрицы, основанный на применении так называемых элементарных преобразований матрицы

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие преобразования:

1) Умножение всех элементов строки на одно и то же число;
2) Перестановка двух строк;
3) Вычеркивание одной из двух пропорциональных строк;
4) Вычеркивание строки, состоящей из одних нулей;
5) Прибавление ко всем элементам какой-либо строки соответствующих элементов другой, умноженных на одно и то же постоянное число;

6) Те же операции со столбцами.

Справедлива следующая теорема:

Ранг матрицы не меняется в результате элементарных преобразований, примененных к матрице.

Любую матрицу можно элементарными преобразованиями привести к диагональной форме. Тогда ранг матрицы равен числу отличных от нуля элементов диагонали.

Рассмотрим оба способа отыскания ранга для матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первый способ.

Выделяем в матрице A минор 2-го порядка, отличный от нуля:

$$M_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 12 = 2 \neq 0.$$

Вычислим окаймляющие его миноры третьего порядка:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0, \qquad M_4 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как все окаймляющие миноры равны нулю, то ранг матрицы A равен 2.

Второй способ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В последней диагональной матрице два элемента по диагонали отличны от нуля. Поэтому ранг матрицы равен 2. Иногда можно комбинировать эти два метода:

элементарными преобразованиями матрицу можно привести к такому виду, из которого ранг матрицы усматривается непосредственно.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 47 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 74 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

В последней матрице легко выделить минор второго порядка, отличный от нуля.

УПРАЖНЕНИЯ

54) Чему равен ранг единичной матрицы порядка n ?

55) Пусть $n>m$. Может ли ранг матрицы порядка $n\times m$ быть:

а). Больше n,

б). Равен n?

56) Показать, что всякая матрица ранга r при помощи элементарных преобразований может быть преобразована в диагональную матрицу порядка r.

57) С помощью элементарных преобразований привести матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ 11 & -12 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$ к диагональному виду.

58) Найти ранги следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 7 & 8 & 18 \\ 3 & 7 & 17 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$, ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$, з) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, и) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$,

к) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 10 & 5 & 30 \end{pmatrix}$.

59) Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \chi & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \chi & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ при различных значениях χ?

60) В данной системе строк $(1\,2\,1)$, $(3\,0\,1)$, $(-1\,1\,1)$, $(1\,-1\,1)$ найти линейно независимые строки и выразить через них остальные.

61) В матрице $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -10 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ найти базисные столбцы и выразить остальные столбцы через базисные.

62) В матрицах

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 19 & 11 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -7 & 6 & 4 \\ 1 & 12 & -11 & 7 \end{pmatrix}$ найти базисные строки и выразить через них остальные строки.

6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1m}x_m = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = в_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = в_m . \end{cases} \qquad (3)$$

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной. Если система имеет одно решение, она называется определенной; если решений более одного – система называется неопределенной.

Матрица A, составленная из коэффициентов при переменных, называется матрицей системы (3).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица B, полученная из матрицы A добавлением к ней столбца свободных членов, называется расширенной матрицей системы (3)

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{mn} в_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} в_m \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $r(B) \geq r(A)$, так как каждый минор матрицы является минором матрицы B, но не наоборот.

Вопрос о совместности системы (3) полностью решается теоремой Кронекера-Капелли:

ТЕОРЕМА (критерий совместности системы линейных уравнений).

Для совместности системы линейных уравнений необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы B был равен рангу матрицы A.

$$r(B) = r(A) = r.$$

Предположим для определенности, что определитель r-ого порядка, отличный от нуля (базисный минор), расположен в левом верхнем углу матрицы A .(Это всегда можно сделать простой перестановкой уравнений в системе). Тогда первые r строк матрицы B линейно независимы, а так как ранг её равен r , то остальные строки матрицы B линейно выражаются через первые r строк её. Это означает, что первые r уравнений системы (3) независимы, а остальные m-r уравнений является их следствием. Таким образом, система состоит лишь из r независимых уравнений, которые достаточно решить, так как остальные уравнения этими решениями будут удовлетворены.

Возможны два случая:

1) $R=n$.

Систему из первых r уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{12}x_2 = в_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{r2}x_r = в_r \end{cases}$

можно решить по формулам Крамера. Система (3) совместна и определена, имеет единственное решение.

Пример. $\begin{cases} x_2 - 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_2 + x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases}$ $\qquad n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -13 \end{pmatrix} \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -13 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

то есть четвертое уравнение системы – линейная комбинация первых трех. Минор третьего порядка, расположенный в левом верхнем углу матрицы, отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \text{ то есть } \quad r(B) = 3,$$

но определитель состоит из первых трех строк A, следовательно $r(A) = 3$.

Итак, $r(B) = r(A) = 3 = n$. Система имеет единственное решение, это решение находится по формулам Крамера из системы (4-ым уравнением можно пренебречь)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ x_1 + 3x \;\; - 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2 \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1 \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 1 \end{array}$$

2) $r < n$.

Возьмем первые r уравнений системы (3) , оставим в левых частях их слагаемые, содержащие первые r переменных (назовем их основными), а остальные слагаемые, содержащие n-r переменных (свободные переменные), перенесём в правые части.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = в_1 - a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = в_r - a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{4}$$

Решая систему (4) по формулам Крамера, получим формулы, выражающие основные переменные $x_1, x_2, \ldots,\ x_r$ через свободные переменные $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Придавая свободным переменным произвольные значения, получаем бесконечное множество всех решений системы.

Пример.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases} \qquad n = 5$$

$$B = \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right) \qquad r(B) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

$$r(B) = r(A) = 2 < n.$$

Минор второго порядка, отличный от нуля, расположен в левом верхнем углу матрицы B. Составим подсистему линейных уравнений, состоящую из первых двух уравнений (так как остальные – их линейная комбинация) и решим её относительно двух переменных, например, x_1 и x_2, а остальные $(n - r)$ переменные x_3, x_4, x_5 – считаем свободными:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 + x_3 + x_4 - x_5 \\ x_1 - x_2 = - x_5 - x_4 + 2x_5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Эту систему решаем по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 + x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ - x_3 - x_4 + 2x_5 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(1 + x_5)$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 + x_3 + x_4 - x_5 \\ 1 & - x_5 - x_4 + 2x_5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(1 + 3x_2 + 3x_4 - 5x_6)$$

Получено бесконечное множество решений данной системы.

Замечание. Если в системе (3) $n = m$ и $\Delta = 0$, то $r(A) < n$.

Тут возможны два случая:

1) Если $r(B) = r(A)$ - система совместная и неопределенная.

2) Если $r(B) \neq r(A)$, то система несовместна.

7. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

Частным случаем системы (1) является однородная система $(в_1 = в_2 = \ldots = в_n = 0:)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Такая система всегда совместна, так как имеет нулевое (тривиальное) решение: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$

Чтобы однородная система имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг *r* её матрицы был меньше *n:* $r<n$. Система в этом случае

неопределенная. Бесконечное множество её решений находится по общему правилу, изложенному выше для системы (3).

Пример.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases} \qquad n = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2 \qquad\qquad r(A) \langle\ n\,.$$

Минор второго порядка , отличный от нуля, расположен в левом верхнем углу матрицы, следовательно, третье уравнение – следствие первых двух. Решаем систему $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -2x_3 \\ x_1 - x_2 = -4x_3 \end{cases}$.

Отсюда по формулам Крамера получим:

$$x_1 = -\frac{18}{7}x_3\,, \qquad x_2 = -\frac{10}{7}x_3\,,$$ где x_3 – свободная переменная.

В случае $m = n$ система (5) имеет единственное нулевое решение при $A \neq 0$. Если $A = 0$, то система имеет бесчисленное множество ненулевых решений.

Пример.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad n = m = 3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -24 \neq 0.$$

Система имеет только нулевое решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 0 \end{cases} \qquad n = m = 3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Все миноры второго порядка тоже равны нулю – это очевидно, то есть в системе только одно независимое уравнение:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

Отсюда $x_1 = -2x_2 - 3x_3$, где x_2 и x_3 - свободные переменные.

МЕТОД ГАУССА

Изложим способ решения систем линейных уравнений, который носит название <u>метода последовательного исключения переменных</u>, или метода Гаусса.

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{6}$$

Выпишем расширенную матрицу этой системы B:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \hdashline a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

где чертой отделен столбец свободных членов. С помощью элементарных преобразований, производимых над <u>строками</u> (!) этой матрицы, приводим ее к такому виду, чтобы матрица *B* оказалась трапециевидной или близкой к ней.

Соответствующая ей система равносильна данной и решение ее не составит особого труда.

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad n=3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Соответствующая этой матрице система, равносильная данной

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_3 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = -4 \end{cases}$$

Отсюда : $\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = -4 + 4x_3 \\ x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

В этом случае $r(B) = r(A) = n = 3.$

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8 \end{cases} \qquad n=4.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$r(B)=2$$

Отсюда следует система, равносильная данной:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Тогда $x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4$

$x_1 = -2x_2 - 3x_3 + x_4 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 - x_4$, где x_3, x_4- свободные переменные.

В этом случае $r(B) = r(A) < n.$

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6 \end{cases} \qquad n=4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Система несовместна, т.к. последнее уравнение в матрице, равносильной данной, таково: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 14$.

В этом случае $r(B)=3$

$r=(A)=2 \qquad r(B) \neq r(A)$

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 9x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} \qquad n=5.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & -11 & -13 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -19 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этой матрице соответствует система, равносильная данной

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + +3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 0 \\ \qquad\quad -x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$r(A) = 3$. Следовательно, в системе три переменных основных, остальные две $(n-r)$ - свободные , выразить основные через свободные можно, например, так:

$$\begin{cases} x_4 = x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 9x_5 = -2x_3 - 12x_5 \\ x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = x_3 + 15x_6. \end{cases}$$

Здесь x_1, x_2, x_4 - основные переменные;

x_3, x_5 - свободные переменные.

УПРАЖНЕНИЯ

63) Исследовать системы уравнений. В случае совместности системы, найти все ее решения:

а) $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 3y + 4z = 2 \\ 11x - 12y + 17z = 3 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = 2 \\ 5x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 4 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5x + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x - 3y + 5x = -7 \\ x + y + z = -4 \\ 5x + 3y - 4z = 11 \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

з) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x - 6y + 6z = 6 \end{cases}$

и) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

к) $\begin{cases} 2x - 4y + z = 1 \\ x - 5y + 3z = 2 \\ x - y + z = -1 \\ 3x + 5y - 5z = -6 \end{cases}$

л) $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$

64) Определить, при каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y+z=\mathrm{b} \\ 5x-8y+9z=3 \\ 2x+y+az=-1 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение,

б) не имеет решений,

в) имеет бесконечное множество решений.

65) Подобрать λ так, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda \end{cases}$$ имела решение.

66) Исследовать систему при различных значениях λ:

а) $\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=1 \\ x+y+\lambda z=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+\lambda y+z=1 \\ 2x+y+z=\lambda \\ x+y+z\lambda=\lambda^2 \end{cases}$

ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

67) Исследовать и найти все решения системы:

а) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 5x-y+2z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+4y+6z=0 \\ 2x-y-7z=0 \\ 3x+5y-2z=0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+4y+2z=0 \\ x-y+4z=0 \\ 5x+2y+10z=0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y+4z-3u=0 \\ 3x+5y+6z-4u=0 \\ 4x+5y-2z+3u=0 \\ 3x+8y+24z-19u=0 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+3y+3z=0 \\ 4x+8y+3z=0 \\ x+2y+3z-7u=0 \\ y+5z+2u=0 \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x-2y+5z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x-3y+z=0 \\ 2x-9y+3z=0 \end{cases}$ з) $\begin{cases} 3x-5y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$

и) $\begin{cases} ax - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$

к) $\begin{cases} 4x - 3y + z - u = 0 \\ 2x + y + 3z - 5u = 0 \\ x - 2y - 2z + 3u = 0 \end{cases}$

68) При каком значении a система имеет ненулевые решения:

а) $\begin{cases} ax + 2y = 0 \\ 3x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} (5-a)x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - (4+a)y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + (5-a)z = 0 \end{cases}$

69*. Найти размерность и базис пространства решений данной однородной системы уравнений. Найти общее решение системы и какое-нибудь ненулевое частное решение.

а) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + 2y + 9z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z + 4u = 0 \\ 6x - 4y + 4z + 3u = 0 \\ 9x - 6y + 3z + 2u = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x + y - 4z - 2u = 0 \\ x - 2y ?+ 3z + u = 0 \\ 3x + y + 5z - 2u = 0 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 9x - 3y + 5z + 6u = 0 \\ 6x - 2y + 3z + u = 0 \\ 3x - y + 3z + 14u = 0 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x - 3y + 4z - u = 0 \\ 3x - 2y + z + 4u = 0 \\ 2x + y + z + 5u = 0 \\ x + 4y - 3z + 6u = 0 \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x + 2y - z - 8u = 0 \\ 2x - 2y - 4z - 2u = 0 \\ 3x - 2y - 5z - 4u = 0 \\ 4x + 2y - 2z - 10u = 0 \end{cases}$

70) Решить методом Гаусса данные системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + 2y + 5z = 1 \\ -x + 2y + z = 1 \\ 5x + 2y + 13z = 1 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 4y + 2z = 6 \\ 3x + 6y + 3z = 9 \end{cases}$

е) $\begin{cases} 7x - y + 5z = -1 \\ 5x + y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+4y+2z=4 \\ 3x+6y+3z=5 \end{cases}$

з) $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 3x-y+2z=-1 \\ 11x+y+4z=0 \end{cases}$

и) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y-3z=13 \\ 3x-2y+4z=-15 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$

к) $\begin{cases} 3x-2y+5z+4u=2 \\ 6x-4y+4z+3u=3 \\ 9x-6y+3z+2u=4 \end{cases}$

л) $\begin{cases} 3x-2y+z=1 \\ 8x+y-3z=-1 \\ x-7y+6z=4 \\ x+12y-11z=-7 \end{cases}$

м) $\begin{cases} x-2y+3z-4u=2 \\ 3x+3y-5z+u=-3 \\ -2x+y+2z-3u=5 \\ 3x+3z-10u=8 \end{cases}$

н) $\begin{cases} x_1+2x_2+6x_3+3x_4=1 \\ x_1+x_2+5x_3-2x_4=1 \\ x_1-2x_4=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3 \end{cases}$

о) $\begin{cases} 2x_1+x_2-7x_3=9 \\ x_1+4x_2-5x_3+7x_4=-1 \\ x_1-x_2-x_3-4x_4=4 \\ x_1-3x_2+2x_3-5x_4=8 \\ 2x_1-x_3+2x_4=-5 \end{cases}$

п) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=19 \\ x_1+2x_2+4x_3=31 \\ 4x_1+6x_2+9x_3=-2 \\ 3x_1+4x_2+5x_3=5 \end{cases}$

р) $\begin{cases} 2x+y+3z-u=0 \\ 3x-2y+z+2u=0 \\ 4x+3y+2z-8u=0 \\ -3x+4y+3z-2u=0 \end{cases}$

с) $\begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_2-x_4=0 \\ -x_1+x_3-x_5=0 \\ -x_2+x_4-x_6=0 \\ -x_3+x_5=0 \\ -x_4+x_6=0 \end{cases}$

т) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0 \end{cases}$

ОТВЕТЫ

12. $a_1=5, \quad a_2=5, \quad a_3=-2.$

13. $A=5B+3C.$

20. $\begin{pmatrix} 6 & 14 & 36 \\ 15 & 32 & 78 \end{pmatrix}$; $B\cdot A$ не имеет смысла.

22. $A\cdot B=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 7 & 2\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 10 & 5 & 7\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

23. а) $x=\frac{7}{13},\ y=\frac{15}{13}$, б) нет решения. в) $x=2,\ y=-1,\ z=1$.

25. $A\cdot B=\begin{pmatrix}21 & -1\\ 8 & 20\end{pmatrix}$ $B\cdot A=\begin{pmatrix}24 & 12 & 10 & 18\\ -2 & 14 & 20 & 6\\ 11 & 13 & 15 & 12\\ -5 & -19 & -25 & -12\end{pmatrix}$.

33. Да.

34. $x=2.$

35. а) $-1<x<7$, б) $x<-\frac{9}{4}$.

36. а) $\Delta=0$, б) $\Delta=-26$, в) $\Delta=-2a^2$, г) $\Delta=282.$.

37. а) $\Delta=0$, б) $\Delta=147760$, в) $\Delta=a(y-x)\cdot(z-x)\cdot(x-y)$.

38. $x=y,\quad x=z,\quad y=z$.

39. $\Delta=6$.

40. а) $x=0.$ б) $x_1=-10,\ x_2=2$.

41. $x_1=a,\quad x_2=b$.

42. а) $x>\frac{7}{2}$ б) $-6<x<-4$

43. а) $\Delta=14$ б) $\Delta=160$.

47. б) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & 5 & -3\\ 1 & -2 & 3\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}$ в) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & -4\\ -1 & 2 & 5\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$ г) $\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-3 & 6 & -3\\ -24 & 3 & 6\\ 22 & -4 & -3\end{pmatrix}$ д) $\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}$

е) $\begin{pmatrix}11 & -4 & 1\\ -25 & 9 & -2\\ 15 & -5 & 1\end{pmatrix}$

50. а) $\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -8 & 8\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{23}{16}\\ 0 & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 7\end{pmatrix}$ д) $\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$ е) $\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

51. Нет, так как $\Delta = 0$.

52. а) $x = 1, y = 2, z = 3.$ б) $x = 1, y = -1, z = 2.$ в) $x = 2, y = 0, z = -1$. г) $x = 1, y = 1, z = 1.$

53. а) $x = 1, y = -2, z = 3, \Delta = 4$. б) $x = \frac{1}{2}, y = 2, z = \frac{3}{2}, \Delta = 10.$ в) $x = -1, y = 0, z = 1, \Delta = 14$.

г) $x = 1, y = 0, z = 2.$

58. а) $r = 3,$ б) $r = 2,$ в) $r = 2,$ г) $r = 3,$ д) $r = 2,$ е) $r = 3,$ ж) $r = 1,$ з) $r = 2,$

и) $r = 4,$ к) $r = 4.$

59. а) $\mathrm{r} = 2$, при $\lambda = 3,$ б) $r = 3,$ при $\lambda \neq 3.$

60. $x_3 = x_1 - x_2 + x_4$

63. а) $x = 2,\ y = -\frac{1}{2},\ z = \frac{5}{2}.$ б) несовместна, в) $x = \frac{z+3}{4},\ y = \frac{13z-1}{8}.$

г) $x_1 = 30,\ x_2 = -7,\ x_3 = -14,\quad x_4 = 0.$ д) несовместна. е) $x = 1,\ y = -2,\ z = -3$.

ж) $x_1 = \frac{7 - 5x_3 - 2x_4}{3},\quad x_2 = \frac{4 - 2x_3 - 5x_4}{3}$, где x_3, x_4 - любые действительные числа.

з) $x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$ и) несовместна. к) $x = -\frac{11}{8},\ y = -\frac{9}{8},\ z = -\frac{3}{4}$.

л) $x_3 = 13,\quad x_4 = 19 - 3x_1 - 2x_2,\quad x_5 = -34;\quad x_1, x_2 -$ *любые действительные числа.*

64. 1) $a \neq -3$, 2) $a = -3;\quad в \neq \frac{1}{3},$ 3) $a = -3,\ в = \frac{1}{3}$.

65. $\lambda = 5.$

66. 1) единственное решение при $\lambda \neq 1,\ \lambda \neq -2,$

2) несовместна при $\lambda = -2,$

3) неопределенные при $\lambda = 1$..

67. а) $x = y = z = 0,\quad \Delta = -24.$ б) $x = y = z = 0,\quad \Delta = 47.$

в) $x = -\frac{18}{7}z,\ y = \frac{10}{7}z,\ z \in R$. г) $x = 8z - 7u,\quad y = -6z + 5u,\quad z, u \in R$.

д) $x = y = z = u = 0$. е) $x = \frac{3}{11}z,\quad y = \frac{4}{11}z,\quad z \in R$.

ж) $x = 0,\quad y = \frac{z}{3},\ z \in R$. з) $x = \frac{3}{4}y,\ z = \frac{11}{4}y,\ y \in R$.

и) $x=-z,\quad y=(1-a)z,\quad z\in R$. к) $x=\frac{3}{5}u,\ y=\frac{4}{5}u,\quad z=u,\quad u\in R$.

70. а) $x=-3,\ y=-1,\ z=8.$ б) $x=-\frac{4}{7},\quad y=\frac{10}{7},\ z=\frac{19}{7}$ в) $x=1{,}6;\ y=0{,}2;\ z=3.$

г) $x=-2z;\ y=\frac{1-3z}{2};$ где z - свободная переменная.

д) система имеет бесконечное множество решений $z=3-x-2y$, где x,y - свободные переменные.

з) система несовместна.

л) $x=-\frac{1}{19}+\frac{5}{19}z;\quad y=-\frac{11}{19}+\frac{17}{19}z$, где z - свободная переменная.

м) система несовместна.

р) $\begin{cases} x=u \\ y=2u \\ z=-u \end{cases}$, где u - свободная переменная.

с) нулевое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1979.

2. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1979.

3. Ефимов Н.В. Квадратичные формы. М.: Наука, 1978.

4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979.