Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания для дистанционного обучения

Омск-2005

Составители: Веснина Алла Александровна, доцент
Кац Наталья Самуиловна

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета.

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01
Подписано в печать 31.03.05. Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 3,75 Уч.-изд. л.3,75
Тираж 300 экз. Заказ 360

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

1. Элементы комбинаторики

Основные правила комбинаторики.
Правило сложения

Пример 1. Пусть в первой урне содержится n_1 шаров, во второй - n_2**,** а в третьей - n_3**.** Все шары полагаем различными между собой, например, пронумерованными. Сколькими различными способами можно вытащить один шар из произвольной урны? Очевидно, число способов равно $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Пример 2. Из пункта А в пункт В можно добраться самолетом, поездом и автобусом, причем между этими пунктами существуют 2 авиамаршрута, 1 железнодорожный и 3 автобусных. Следовательно, общее число маршрутов между пунктами А и В равно 2 + 1 + 3 = 6.

Обобщая изложенное, можно сформулировать правило сложения.

Если выбор каждого из k объектов $a_i (i = 1, 2, ..., k)$ можно выполнить n_i способами, причем никакие способы выбора каждого из объектов не совпадают со способами выбора любого другого объекта, то выбор «или a_1, или a_2, …, или a_k» можно произвести $N = \sum_{i=1}^{\infty} n_i$ способами.

Правило умножения

Пример 1. Пусть в урне n различных между собой шаров. Сколькими способами можно двумя взятыми из урны шарами заполнить две ячейки, в каждую из которых помещается ровно один шар? Очевидно, первую ячейку можно заполнить n способами. После заполнения первой ячейки в урне останется $n-1$ шар. Следовательно, вторую ячейку можно заполнить $n-1$ способом. Заметим, что с каждым из n способов заполнения первой ячейки может совпасть любой из $n-1$ способов заполнения второй. Поэтому общее число способов заполнения двух ячеек равно $n(n-1)$.

Пример 2. Между пунктами А и В имеется 6 различных маршрутов, а между пунктами В и С – 4 маршрута. Каким числом различных маршрутов можно проехать из А через В в С? Искомое число маршрутов равно $6 \cdot 4 = 24$, так как, приехав из А в В одним из 6-ти маршрутов, можно выбрать для проезда из В в С любой из 4-х маршрутов.

Запишем теперь правило умножения в общем виде.

Последовательный выбор k объектов $a_i (i = 1, 2, ..., k)$ может быть выполнен $M = \prod_{i=1}^{k} m_i$ способами, если принятая очередность выбора позволяет каждый объект a_i выбрать m_i способами.

Выборки

Пусть имеется множество, состоящее из n различных элементов $a_1, a_2, ..., a_n$, которое назовем **генеральной совокупностью**. Произвольное упорядоченное подмножество из k элементов, входящих в генеральную совокупность, назовем **выборкой** объемом k. Наглядно выборку объемом k можно представить как результат k последовательных случайных извлечений (выбора) элементов из урны, содержащей все элементы генеральной совокупности. Выбор может выполняться с возвращением и без возвращения. При выборе с возвращением извлеченный элемент после обследования вновь возвращается в генеральную совокупность, и поэтому один и тот же элемент может быть выбран несколько раз. В случае выбора без возвращения однажды выбранный элемент удаляется из генеральной совокупности, так что выборка не содержит повторяющихся элементов. Очевидно, что при выборе с возвращением объем выборки никак не связан с объемом генеральной совокупности, а при выборе без возвращения всегда $k \le n$.

Выборки без возвращения

Выборка без возвращения объема k из генеральной совокупности, содержащей n элементов, называется **размещением** из n по k. Размещения из n по k отличаются друг от друга или составом элементов, или порядком их расположения. Для определения числа A_n^k размещений из n элементов по k учтем, что первый элемент выборки может быть взят n различными способами, второй - $(n-1)$ способом, …., а $k-$ й элемент - $(n-k+1)$ способами. Отсюда, используя правило умножения, получим

$$A_n^k = n(n-1)....(n-k+1) =$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-k+1)[(n-k)(n-k-1)...1]}{(n-k)(n-k-1)...1} = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (1)$$

В частном случае, когда $k = n$, все выборки без возвращения имеют одинаковый состав и отличаются лишь порядком расположения элементов. Такие выборки называются **перестановками**.

Число P_n перестановок из n элементов найдем, подставив в (1) $k = n$.

Тогда $$P_n = n! \qquad (2)$$

Отличающиеся только составом элементов выборки без возвращения объема k из генеральной совокупности, содержащей n элементов, называются **сочетаниями** из n по k. Определим число C_n^k сочетаний из n элементов по k. Очевидно, что выборку без возвращения объема k, имеющую фиксированный состав элементов, можно упорядочить $k!$ способами. Следовательно, A_n^k больше C_n^k в $k!$ раз. Отсюда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (3)$$

При решении вероятностных задач часто используются следующие формулы:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad (4)$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \quad (5)$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0. \quad (7)$$

В справедливости формул (4) и (5) нетрудно убедиться, подставив в них выражение (3). Равенства (6) и (7) следуют из формулы бинома Ньютона:

$$(a+в)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} в^k. \quad (8)$$

Для получения равенства (6) необходимо в (8) подставить $a = в = 1$. Равенство (7) вытекает из (8) при $a = 1,\ в = -1$.

Выборки с возвращением

Выборка с возвращением объема k из генеральной совокупности, содержащей n элементов, называется размещением с повторениями из n по k. Число $\hat{A}_n^k$ размещений с повторениями из n элементов по k найдем из следующих соображений. Каждый элемент может быть выбран n способами, а общее число способов формирования выборки объема k подсчитывается на основании правила умножения. Следовательно,

$$\hat{A}_n^k = n^k.$$

Выборка с возвращением объема k из содержащей n элементов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ генеральной совокупности называется **перестановкой с повторениями**, если во все выборки элемент a_1 входит k_1 раз, элемент $a_2 - k_2$ раз, …, элемент $a_n - k_n$ раз, причем $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$. Определим число $\hat{P}(k_1, k_2, ..., k_n)$ перестановок с повторениями. Для этого учтем, что элемент a_1 может быть выбран k_1 раз в ходе k последовательных извлечений $C_k^{k_1}$ способами, элемент a_2 может быть выбран k_2 раз в ходе $(k-k_1)$ остальных извлечений $C_{k-k_1}^{k_2}$ способами, …, элемент a_{n-1} может быть выбран k раз в ходе $(k-k_1-\ldots-k_{n-2})$ извлечений $C^{k_{n-1}}_{k-k_1-k_2-\ldots-k_{n-2}}$ способами и, наконец, элемент a_n может выбран $C^{k_n}_{k-k_1-\ldots-k_{n-1}}=C^{k_n}_{k_n}=1$ способом. Отсюда, используя правило умножения, запишем

$$\hat{P}(k_1,\, k_2,\ldots,\, k_n)=C^{k_1}_{k}\, C^{k_2}_{k-k_1}\ldots C^{k_n-1}_{k-k_1-k_2-\ldots-k_{n-2}}. \tag{10}$$

Подставив выражение (3) в (10), после сокращения получим

$$\hat{P}(k_1,\, k_2,\ldots,\, k_n)=\frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} \tag{11}$$

Выражение (11) можно получить и другим способом. Из k элементов, составляющих выборку, можно сформировать $k!$ перестановок. Однако из-за наличия в выборке повторяющихся элементов часть перестановок будет неразличима между собой. Так, неразличимыми являются $k_1!$ перестановок, образованных взаимным обменом мест между элементами a_1; $k_2!$ перестановок, образованных взаимным обменом мест между элементами a_2, и т.д. Отсюда, используя правило умножения, приходим к выражению (11).

Отличающиеся только составом элементов выборки с возвращением объема k из генеральной совокупности, содержащей n элементов, называются **сочетаниями с повторениями** из n по k. Определим число $\hat{C}^k_n$ сочетаний с повторениями из n элементов по k. Для этого расположим элементы выборки в один ряд, причем вначале поместим все входящие в выборку элементы a_1, затем все входящие в выборку элементы a_2 и т. д. На границах между элементами различных типов будем устанавливать не входящий в генеральную совокупность пограничный элемент a_0. При этом, даже в случае отсутствия в выборке каких-либо элементов генеральной совокупности, границы их возможного расположения будем отмечать элементами a_0.

Например, при $n=4$ и $k=7$ в числе различных по положению пограничных элементов выборок будут и такие:

$$\begin{array}{cccccccccc}
a_1 & a_1 & a_0 & a_2 & a_0 & a_3 & a_3 & a_0 & a_4 & a_4, \\
a_1 & a_0 & a_2 & a_2 & a_2 & a_0 & a_0 & a_4 & a_4 & a_4, \\
a_1 & a_1 & a_1 & a_0 & a_2 & a_2 & a_2 & a_2 & a_0 & a_0.
\end{array}$$

Таким образом, число пограничных элементов, вносимых в каждую выборку, должно быть на единицу меньше числа элементов генеральной совокупности, а общее число элементов выборки и пограничных элементов равно $k+n-1$. Очевидно, что число $\hat{C}^k_n$ выборок с возвращением, различающихся составом, совпадает с числом способов, каким можно расположить $n-1$ пограничный элемент на

$k+n-1$ позициях, а это число равно C_{k+n-1}^{n-1}. Следовательно,

$$\hat{C}_n^k = C_{k+n-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k} \qquad (12)$$

Примечание. В комбинаторных расчетах часто используется формула Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}, \qquad (13)$$

которая облегчает вычисление $n!$ при больших значениях n.

Решение типовых задач в аудитории

1. Сколькими способами можно выбрать 3 прибора из 6?

Решение. Поскольку порядок взятия приборов не играет роли, различные комбинации выбранных приборов отличаются только составом. Следовательно, число способов, которыми можно выбрать 3 прибора из 6, равно числу сочетаний из 6 по 3.

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = 20.$$

2. Карточка «Спортлото» содержит 49 чисел. Играющий зачеркивает 6 произвольных чисел по своему усмотрению. После тиража объявляется 6 «счастливых» чисел. В случае совпадения по крайней мере 3 зачеркнутых «счастливых» чисел владелец карточки получает выигрыш тем больший, чем больше чисел угадано. Максимальный выигрыш достигается, если удалось угадать все 6 чисел. Необходимо определить: а) сколькими способами можно зачеркнуть 6 чисел на карточке «Спортлото»? ; б) сколькими способами можно зачеркнуть 6 чисел на карточке «Спортлото» так, чтобы угадать 4 «счастливых» числа?; в) сколькими способами можно зачеркнуть 6 чисел на карточке «Спортлото» так, чтобы был обеспечен выигрыш?

Решение. Очевидно, что различные комбинации зачеркнутых чисел отличаются только составом, т. е. являются сочетаниями.

а) Общее число различных способов выбора 6 чисел из 49 равно C_{49}^6. Используя (3), получим

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6!\,43!} = 13\,983\,816 \approx 1{,}4 \cdot 10^7.$$

б) 4 «счастливых» числа из 6 можно зачеркнуть C_6^4 способами, 2 «несчастливых» числа из (49-6) можно зачеркнуть C_{43}^2 способами. Последовательный выбор 4 из 6 «счастливых» чисел и 2 из 43 «несчастливых» на основании правила умножения может быть выполнен $C_6^4 \cdot C_{43}^2$ способами.

$$C_6^4 \cdot C_{43}^2 = \frac{6!}{4!\,2!} \cdot \frac{43!}{2!\,41!} = 13\ 545.$$

в) выигрыш достигается, если угадано или 3, или 4, или 5, или 6 «счастливых» чисел, т. е. выигрыш может быть достигнут четырьмя вариантами (то, что эти варианты отнюдь не равноценны для выигравшего, в условии данной задачи значения не имеет). Используя правило сложения, получим, что число способов, которыми можно зачеркнуть 6 чисел так, чтобы обеспечить выигрыш, равно

$$C_6^3 C_{43}^3 + C_6^4 C_{43}^2 + C_6^5 C_{43}^1 + C_6^6 C_{43}^0 =$$
$$= 246\ 820 + 13\ 545 + 258 + 1 = 260\ 624.$$

3. Сколькими способами можно упорядочить множество чисел $\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ так, чтобы числа 1, 2, 3 стояли рядом в порядке возрастания?

Решение. Числа 1, 2, 3 можно полагать склеенными в порядке возрастания и рассматривать как один элемент. Тогда число элементов множества равно $n-2$ и они могут быть упорядочены $(n-2)!$ способами (число перестановок из $n-2$ элементов).

4. Сколькими различными способами можно разбросать k шариков по n лункам так, чтобы в первую лунку попало k_1 шариков, во вторую - k_2 шариков …, в n-ю – k_n шариков $\left(\sum_{i=1}^{n} k_i = k\right)$?

Решение. Каждый шарик независимо от других выбирает себе лунку. Эту операцию он может выполнить n способами. (Схема, в которой каждая лунка выбирает шарики, приводит к выбору с очень сложной взаимной зависимостью). Таким образом, речь идет о выборках с возвращением объема k из n элементов генеральной совокупности, причем выборки различаются только порядком, а состав их одинаков. (Пронумерованными считаются не только лунки, но и шарики, номера которых и определяют порядок взятия лунок). Следовательно, число таких выборок равно числу $\hat{P}(k_1,\ k_2,\ ...,\ k_n)$ перестановок с повторениями и может быть определено по формуле (11):

$$\hat{P}(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{k!}{k_1!\,k_2!...k_n!}.$$

5. Сколькими различными способами можно разбросать 4 шарика по 3 лункам?

Решение. Так же, как и в предыдущей задаче, каждый шарик независимо от других выбирает себе лунку, т. е. идет речь о выборках возвращениями объема 4 из 3 элементов. Но далее условие задач неоднозначно. По-видимому, вполне естественно считать лунки пронумерованными (различными). Однако шарики можно считать и пронумерованными, и непронумерованными. Соответственно выборки различаются или порядком и составом элементов, или только составом. В первом случае число различных выборок равно числу $\hat{A}_3^4$ размещений с повторениями из 3 элементов по 4. При этом, в соответствии с (9) получим

$$\hat{A}_3^4 = 3^4 = 81.$$

Во втором случае число различных выборок равно числу сочетаний с повторениями из 3 элементов по 4. При этом в соответствии (12) находим

$$\hat{C}_3^4 = C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$

Задачи для решения в аудитории

1. На станке должны быть последовательно обработаны 5 различных деталей. Сколько вариантов должен проанализировать технолог для выбора наилучшей очередности их обработки?

2. Каким числом различных способов могут быть выбраны k деталей из партии в n деталей при выборочном контроле качества продукции?

3. Текст кодируется цифрами от 0 до 9 (десятичный код). Сколько различных сообщений можно передать комбинацией из 7 цифр?

4. На участке в один ряд устанавливается 8 станков. Сколько может быть различных вариантов установки станков, если 2 определенных станка обслуживает один рабочий и, следовательно, они должны стоять рядом?

5. Что изменится, если в условии предыдущей задачи станки будут стоять не в один ряд, а по кругу?

6. В ящике имеется n деталей, среди которых k - бракованных. Сколько существует различных способов отбора $s(s \le n)$ деталей из ящика, таких, что среди выбранных деталей содержатся: а) ровно $v(v \le k)$ бракованных, б) не менее v бракованных, в) менее v бракованных?

7. В кодовой комбинации, содержащей n элементов, из-за помех k элементов принято неправильно. Сколько существует различных способов расположения ошибок (неправильно принятых элементов) в комбинации?

8. При передаче информации часто применяются двоичные (т. е. использующие только 2 символа: 1; 0) коды с постоянным весом (весом называется число единиц в кодовой комбинации). Каждая комбинация такого кода содержит n элементов, из которых m - единицы. Помехи могут вызывать ошибки, в результате чего часть нулей переходит в единицы и часть единиц в нули. Код с постоянным весом обнаруживает все ошибки, кроме ошибок смещения, когда число нулей, перешедших в единицы, равно числу единиц, перешедших в нули. Допустим, что в

кодовых комбинациях встречаются только одиночные и двойные ошибки. Необходимо найти: а) число различных комбинаций кода с постоянным весом; б) число способов, какими могут произойти ошибки; в) число способов, какими могут произойти необнаруженные ошибки.

9. На участке работает 30 человек. Сколько существует различных способов формирования из них бригады в составе: а) мастера и помощника, б) мастера и четырех помощников?

10. Батарея из k орудий ведет огонь по группе, состоящей из m целей $(k \le m)$: а) сколько существует различных способов выбора целей этими орудиями; б) сколько существует различных способов выбора целей этими орудиями, если известно, что орудия выбирают различные цели?

11. Сколько существует различных способов распределения 8-ми приборов между 3-мя лабораториями, если а) все приборы различны, б) все приборы идентичны?

12. Сколько существует различных способов распределения 10-ти приборов между тремя лабораториями, если известно, что 1-я лаборатория получает 5 приборов, 2-я – 1 прибор, а 3-я – остальные 4 прибора?

13. Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, не содержащих одинаковых цифр в различных разрядах?

14. Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, у которых каждая следующая цифра а) больше предыдущей, б) меньше предыдущей?

15. В группе из n стран каждые две страны связаны договором о взаимной торговле. Сколько договоров обеспечивают торговлю между этими странами?

16. В цехе n лампочек. Достаточная освещенность цеха обеспечивается, если горят хотя бы k лампочек. Сколько существует различных способов обеспечения освещенности цеха?

17. Каким количеством способов при подведении итогов соревнования могут распределиться места 4-х участков данного цеха, если на предприятии в группу соревнующихся входит еще 15 участков такого профиля?

Ответы

1. $5!$ **2.** C_n^k. **3.** 10^7. **4.** $7!2!=10\,080$. **5.** $6!2!8=11520$. **6.** а) $C_k^v C_{n-k}^{s-v}$; б) $\sum_{i=v}^{s} C_k^i C_{n-k}^{s-i}$; в) $\sum_{i=0}^{v-1} C_k^i C_{n-k}^{s-i}$. **7.** C_n^k. **8.** а) C_n^m; б) $C_n^1 + C_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$; в) $m(n-m)$.

9. а) $A_{30}^2 = 870$; б) $30\,C_{29}^4 = 712\,530$. **10.** а) m^k; б) A_m^k. **11.** а) $\hat{A}_3^8 = 3^8 = 6561$; б) $\hat{C}_3^8 = C_{10}^8 = 45$. **12.** $\hat{P}(5,1,4) = \frac{10!}{5!1!4!} = 1260$. **13.** $9A_9^3 = 4536$.

14. а) $C_9^4 = 126$; б) $C_{10}^4 = 210$. **15.** C_n^2. **16.** $\sum_{i=k}^{n} C_n^i$. **17.** $A_{20}^4 = 116\,280$.

2. Классическое определение вероятности

Событием (или случайным событием) называется всякий факт, который в результате опыта (эксперимента) может произойти или не произойти. Обозначаются события буквами А, В, С, …

Достоверным событием называется событие, которое в результате опыта непременно должно произойти, а **невозможным** – событие, которое в результате опыта не может произойти.

Полной группой событий называется множество таких событий, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

События называются **несовместными**, если в результате опыта никакие два из них не могут появиться вместе.

Элементарными событиями будем называть события ω_i, которые

1) составляют полную группу событий,
2) несовместны,
3) по известному элементарному событию дают возможность судить, произошло или не произошло любое событие A, возможное в данном эксперименте.

Элементарные события называют исходами эксперимента.

Множество элементарных событий, поставленных в соответствие эксперименту, называется **пространством элементарных событий.** Обозначается Ω $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$.

Таким образом, всякое событие А, возможное в данном эксперименте, есть подмножество элементарных событий, и всякое подмножество пространства элементарных событий есть некоторое событие. Достоверное событие совпадает с множеством Ω, невозможное событие есть пустое множество $\varnothing$. Элементарные события, принадлежащие событию А, называются благоприятствующими наступлению события А.

Пусть пространство элементарных событий, поставленное в соответствие опыту (эксперименту), конечно и все элементарные события равновозможны. Под равновозможными понимаются события, которые в силу тех или других причин (например, симметрии) не имеют объективного преимущества одно перед другими. Равновозможные элементарные события (исходы) называют случаями или шансами.

Вероятностью случайного события А называется отношение числа элементарных равновозможных событий, благоприятствующих наступлению события А, к числу всех элементарных равновозможных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Рассмотрим некоторую область. Если вероятность попадания случайной точки в любую часть области пропорциональна мере этой части области (длине, площади, объему и т. д.) и не зависит от ее расположения и формы, может быть использовано геометрическое определение вероятности: пусть геометрическая мера всей области равна $S_Д$, а геометрическая мера части этой области, попадание в которую благоприятствует данному событию, есть S_d, и вероятность события равна $P=\frac{S_d}{S_Д}$. Области могут иметь любое число измерений.

Типовые задачи для решения в аудитории

1. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится герб.

Решение. Пространство элементарных равновозможных событий представляет собой следующее множество:

ω_1 - герб на 1–й монете, герб на 2–й монете,

ω_2 - герб на 1–й монете, цифра на 2–й монете,

ω_3 - цифра на 1–й монете, герб на 2–й монете,

ω_4 - цифра на 1–й монете, цифра на 2–й монете.

Элементарные события, благоприятствующие наступлению события А (выпадение хотя бы одного герба): ω_1, ω_2, ω_3.

Следовательно, $P(a)=\frac{3}{4}-0{,}75$.

2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

Решение. Опыт можно рассматривать как выборку с возвращением объема $k=2$ из генеральной совокупности, содержащей $n=6$ элементов. Число всех равновозможных исходов, поставленных в соответствие опыту, равно числу $\hat{A}_6^2$ размещений с повторениями из $n=6$ элементов по $k=2$ и равно $\hat{A}_6^2=6^2=36$.

Событие А – сумма очков на выпавших гранях четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

Число случаев, благоприятствующих событию, равно пяти: пары (4, 6), (2, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6).

Следовательно, $P(A)=\frac{5}{36}\approx 0{,}139$.

3. Среди 17 студентов, из которых 8 девушек, разыгрываются 7 билетов. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 4 девушки?

Решение. Событие А – среди обладателей билетов окажутся 4 девушки.

Опыт можно рассматривать как неупорядоченную выборку без возвращения объема $k=7$ из генеральной совокупности, содержащей $n=17$ элементов. Число всех равновозможных исходов (случаев), поставленных в соответствие опыту, равно числу C_{17}^7 сочетаний из $n=17$ элементов по $k=7$. Из них событию А благоприятствуют те случаи, при которых 4 элемента выбраны из 8 (девушек) (число таких способов C_8^4), а 3 из оставшихся 9 (юношей) (таких способов C_9^3).

Используя правило умножения, рассмотренное в комбинаторике, получим, что число событий, благоприятствующих наступлению события $A - C_8^4 C_9^3$.

Следовательно, $P(A) = \frac{C_8^4 C_9^3}{C_{17}^7} = \frac{8!\ 9!\ 7!\ 10!}{4!\ 4!\ 3!\ 6!\ 17!} = 0{,}302$.

4. Десять различных книг расставлены на полке наудачу. Найти вероятность того, что три определенные книги окажутся рядом.

Решение. 1 способ. Число равновозможных исходов, поставленных в соответствие опыту, равно $P_{10} = 10!$ Число благоприятствующих событию А (три определенные книги окажутся рядом) исходов определим следующим образом: определенные три книги будем рассматривать как «склеенные», тогда число перестановок всех книг $P_8 = 8!$, а число перестановок внутри 3-х «склеенных» книг $P_3 = 3!$ По правилу умножения число благоприятствующих случаев равно $P_8 \cdot P_3 = 8!\ 3!$

Следовательно $P(A) = \frac{8!\ 3!}{10!} = \frac{1}{15} 0{,}06(6)$.

II способ. Опыт можно рассматривать как неупорядоченную выборку из $n = 10$ (мест) по $k = 3$. Тогда число всех равновозможных исходов равно C_{10}^3. Число благоприятствующих исходов – это число способов выбрать три места на полке рядом. Легко видеть, что на полке, имеющей 10 мест, три следующих подряд места можно выбрать 8-ю способами.

Следовательно, $P(A) = \frac{8}{C_{10}^3} = \frac{8 \cdot 3!\ 7!}{10!} = \frac{1}{15} = 0{,}06(6)$.

III способ. Способ отличается от 2-го способа только тем, что выборка полагается упорядоченной. Тогда

$$P(A) = \frac{8 \cdot 3!}{A_{10}^3} = \frac{8 \cdot 3!}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{15} 0{,}06(6).$$

5. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии 2а. На плоскость наудачу брошена монета радиусом $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

Решение. Точка М (центр монеты) может с равной вероятностью попасть в любую точку отрезка АВ, перпендикулярного параллельным прямым; длина отрезка АВ равна 2а. Данному событию благоприятствует попадание центра монеты в любую точку отрезка СД, длина которого равна $(2a - 2r)$ (рис. 1). Следовательно,

$$P(A) = \frac{дл.СД}{дл.АВ} = \frac{2a - 2r}{2a} = 1 - \frac{r}{a}.$$

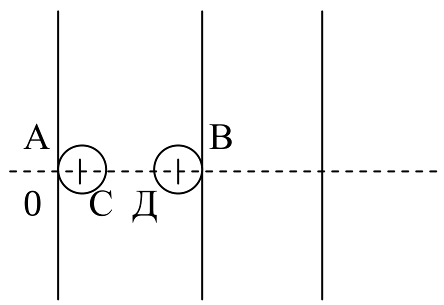


Рисунок 1

Задачи для решения в аудитории

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность следующих событий: а) сумма выпавших очков равна восьми, а разность – четырем; б) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что разность их равна четырем.

2. На пяти карточках написаны цифры: 1, 2, 3, 4, 5. Две из них, одна за другой, извлекаются. Найти вероятность того, что число на второй карточке будет больше, чем на первой.

3. Тот же вопрос, что в задаче 2, но первая карточка после извлечения кладется обратно и смешивается с остальными, а стоящее на ней число записывается.

4. На шести карточках написаны буквы к, а, р, е, т, а. После тщательного перемешивания берут наудачу по одной карточке и кладут последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «ракета».

5. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

6. В урне 3 белых и 4 черных шара. Из урны вынимают одновременно два шара. Какое событие более вероятно: А – шары одного цвета; В – шары разных цветов?

7. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

8. Батарея, состоящая из k орудий, ведет огонь по группе, состоящей из ℓ самолетов $(k \le \ell)$. Каждое орудие выбирает себе цель случайно и независимо от других. Найти вероятность того, что все k орудий будут стрелять по одной и той же цели.

9. Десять студентов условились ехать с определенным электропоездом, но не договорились о вагоне. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим, если в составе электропоезда 10 вагонов. Предполагается, что все возможности в распределении студентов по вагонам равновероятны.

10. Числа натурального ряда $1, 2, \ldots, n$ расставлены случайно. Найти вероятность того, что числа 1 и 2 расположены рядом и причем в порядке возрастания.

11. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, от второго и выше. Найти вероятности следующих событий: А – все пассажиры выйдут на четвертом этаже; В – все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже); С – все пассажиры выйдут на разных этажах.

12. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше единицы, не превзойдет единицы, а их произведение будет не больше $2/9$?

Задачи для решения в аудитории

13. Одновременно бросают 2 игральные кости, на гранях которых нанесены очки 1, 2, 3, 4, 5, 6. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух костях, равна восьми?

14. В коробке содержится 6 одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики из коробки. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

15. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани.

16. В ящике два отделения (верхнее и нижнее), в которые положены наудачу две тетради. Какова вероятность того, что в каждом отделении будет находиться одна тетрадь?

17. Группа из N человек, в том числе А и В, располагаются за круглым столом в случайном порядке. Найти вероятность того, что А и В будут сидеть рядом.

18. В ящике имеется 15 деталей, 10 из которых окрашены. Сборщик наудачу извлек 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

19. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов окажутся 5 отличников.

20 «Секретный замок» содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов с различными написанными на них цифрами. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры дисков образуют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

21. Лифт в пятиэтажном доме отправляется с тремя пассажирами. Найти вероятность того, что на каждом этаже выйдет не более одного пассажира, предполагая, что все возможные способы распределения пассажиров по этажам равновероятны.

Ответы

1. а) $P = 0{,}05(5)$; б) $P = 0{,}5$. **2.** $P = 0{,}5$. **3.** $P = 0{,}4$. **4.** $P = 0{,}0028$. **5.** $P = 0{,}692$.

6. $P(B) > P(A)$. **7.** $P = 0{,}0014$. **8.** $P = \dfrac{1}{\ell^{k-1}}$. **9.** $P = 0{,}00036$. **10**. $P = \dfrac{1}{n}$.

11. $P(A) = 0{,}0046$; $P(B) = 0{,}027(7)$; $P(C) = 0{,}5(5)$. **12.** $P = 0{,}487$.

13. $P = 0{,}138(8)$. **14.** $P = 0{,}00139$. **15.** $P = 0{,}096$. **16.** $P = 0{,}5$.

17. $P = \dfrac{2}{N-1}$, $N > 2$. **18.** $P = 0{,}026$. **19.** $P = 0{,}255$. **20.** $P = 0{,}0016$. **21.** $P = 0{,}375$.

3. Операции над событиями

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой двух событий A и B называется событие C, состоящее в появлении хотя бы одного события: A или B. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий A и B называется событие C, состоящее в совместном появлении события A и события B. Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$. Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Когда события A и B совместны, вероятность их суммы вычисляется по формуле $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$, где $A\cdot B$ - произведение событий A и B. Для нескольких совместных событий вероятность их суммы определяется по формуле

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i} P(A_i)-\sum_{i<j} P\left(A_i A_j\right)+\sum_{i<j<k} p\left(A_i A_j A_k\right)-$$
$$-\ldots+\left(-1\right)^{n-1} P\left(A_1 A_2 \ldots A_n\right),$$

где суммы распространяются на все возможные комбинации различных индексов $i,\ j,\ k,\ \ldots,$ взятых по одному, по два, по три и т. д.

Вероятность противоположного события вычисляется по формуле $P(A)=1-P(A)$.

Условной вероятностью события A относительно события B называется вероятность события A, вычисленная в предположении, что имело место событие B. Эта вероятность обозначается $P\left(A/B\right)$.

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного их них, умноженной на условную вероятность другого относительно первого: $P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$. Для нескольких событий $P(A_1 A_2 \ldots A_n)=P(A_1)\cdot P\left(A_2/A_1\right)\cdot P(A_3/A_1 A_2)\ldots P(A_n/A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$.

События A и B называются **независимыми,** если $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$. В этом случае $P(A)=P(A/B),\ P(B)=P(B/A)$. Верно и обратное утверждение. Независимость случайных событий может быть установлена из условий задачи.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если $P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)=\prod_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$.

Типовые задачи для решения в аудитории

1. Шарик бросают на стол и отмечают точку его падения. Пусть A обозначает событие, заключающееся в попадании шарика внутрь круга A, а B – попадание внутрь круга B (рис. 2).

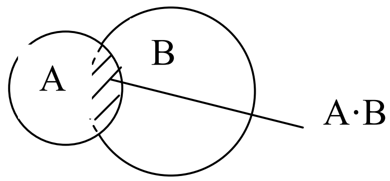


Рисунок 2

Какой смысл имеют события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A+B$, $\overline{A+B}$, $\overline{A\cdot B}$?

Решение. Если A – попадание шарика внутрь круга A, то противоположное событие $\overline{A}$ означает, что шарик попал в область, лежащую вне круга A. Аналогично, $\overline{B}$ - попадание шарика в область, лежащую вне круга B. Событие $A+B$ означает, что шарик попал в область, в которую входят все точки кругов A и B. Событие $\overline{A+B}$ - противоположное к $A+B$, следовательно, шарик попал в область вне обоих кругов A и B, $A\cdot B$ - попадание шарика в общую часть кругов A и B. Соответственно $\overline{A\cdot B}$ - шарик попал в область, лежащую вне общей части кругов A и B. Событие $\overline{A}\cdot\overline{B}$ совпадает с $\overline{A+B}$.

2. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме (рис. 3). Выход из строя элемента a - событие A, элемента b_k - событие $B_k\ (k=1, 2, 3)$. Записать выражение для событий C и $\overline{C}$, если C означает разрыв цепи.

Решение. Разрыв цепи произойдет в том случае, если выйдет из строя элемент a или все три элемента $b_k\ (k=1, 2, 3)$. Эти события соответственно равны A и $B_1B_2B_3$. Поэтому $C=A+B_1B_2B_3$.

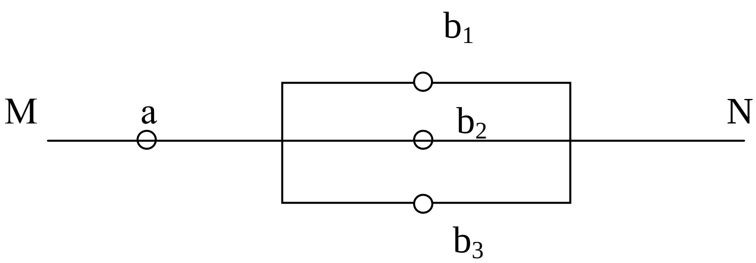


Рисунок 3

Разрыв цепи не произойдет, если не выйдет из строя элемент a и хотя бы один из элементов b_k $(k=1, 2, 3)$. Эти события соответственно равны $\overline{A}$ и $\overline{B}_1+\overline{B}_2+\overline{B}_3$. Следовательно, $C=\overline{A}\cdot\left(\overline{B}_1+\overline{B}_2+\overline{B}_3\right)$.

3. Определить вероятность того, что партия из 100 деталей, среди которых 5 % бракованные, будет принята при испытании наудачу выбранной половины всей партии, если условиями приема допускаются бракованные детали не более одной из пятидесяти.

Решение. Пусть А – событие, состоящее в том, что партия принята, т. е. среди 50 выбранных деталей бракованных будет либо одна, либо ни одной.

Обозначим В событие, состоящее в том, что при испытании не получено ни одной бракованной детали, а С – событие, состоящее в том, что получена только одна бракованная деталь.

Тогда $A=B+C$, события В и С несовместны. Поэтому

$$P(A)=P(B+C)=P(B)+P(C).$$

$$P(B)=\frac{C_{95}^{50}C_5^0}{C_{100}^{50}},\ P(C)=\frac{C_{95}^{49}C_5^1}{C_{100}^{50}},\ P(A)=\frac{C_{95}^{50}C_5^0}{C_{100}^{50}}+\frac{C_{95}^{49}C_5^1}{C_{100}^{50}}=0{,}181.$$

4. В урне а белых и в черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

Решение. Пусть А - событие, состоящее в том, что вынутые шары разных цветов.

Обозначим B_1 событие, состоящее в том, что I-й вынутый шар белый, B_2 - 2-й вынутый шар белый, а C_1 - событие, состоящее в том, что 1–й вынутый шар черный, через C_2 - 2–й вынутый шар черный.

Тогда $A=B_1C_2+B_2C_1$. События B_1C_2 и B_2C_1 несовместны. Поэтому

$$P(A)=P(B_1C_2)+P(B_2C_1),$$

$$P(B_1C_2)=P(B_1)\cdot P(C_2/B_1)=\frac{a}{a+в}\cdot\frac{в}{a+в-1},$$

$$P(B_2C_1)=P(C_1)\cdot P(B_2/C_1)=\frac{в}{a+в}\cdot\frac{a}{a+в-1},$$

$$P(A)=P(B_1C_2)+P(B_2C_1)=\frac{2aв}{(a+в)(a+в-1)}.$$

5. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассмотрим события:

А - выпадение герба на первой монете;

В - выпадение хотя бы одного герба;

С - выпадение хотя бы одной цифры;

Д - выпадение герба на второй монете.

Определить, зависимы или независимы пары событий 1) А и С; 2) А и Д; 3) В и С; 4) В и Д.

Решение. 1) Пространство элементарных равновозможных событий, поставленных в соответствие опыту, представляет собой следующее множество:

$$\Omega\ \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4\},$$

где ω_1 - герб на первой монете, герб на второй монете;

ω_2 - герб на первой монете, цифра на второй монете;

ω_3 - цифра на первой монете, герб на второй монете;

ω_4 - цифра на первой монете, цифра на второй монете.

Тогда $A=\{\omega_1\,\omega_2\}$, $C=\{\omega_2\,\omega_3\,\omega_4\}$. Следовательно,

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \qquad P(C)=\frac{3}{4}.$$

$A\cdot C$ – событие, состоящее в том, что герб выпадает на первой монете, цифра- на второй монете, $A\cdot C=\{\omega_2\}$.

$$P(A\cdot C)=\frac{1}{4}, \qquad P(A)\cdot P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4},$$

следовательно, события А и С зависимы. Можно воспользоваться вторым определением: $P(C/A)$ - вероятность того, что выпадает хотя бы одна цифра при условии, что на первой монете выпадает герб.

$$P(C/A)=\frac{1}{2},\ P(C)\neq P(C/A)\ ,$$

следовательно, события А и С зависимы.

Аналогично

2) $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A/D)=\frac{1}{2}$, следовательно, события А и D независимы.

3) $P(B)=\frac{3}{4}$, $P(B/C)=\frac{2}{3}$, следовательно, события В и С зависимы.

4) $P(B)=\frac{3}{4}$, $P(B/D)=1$, следовательно, события В и Д зависимы.

6. Вероятность получения билета, у которого равны суммы первых и последних трех цифр номера, равна 0,055 25. Какова вероятность иметь такой билет среди двух взятых наудачу, если оба билета

а) имеют последовательные номера;

б) получены независимо один от другого?

Решение. Рассмотрим следующие события:

А – первый билет имеет равные суммы;

В – второй билет имеет равные суммы;

$A + B$ - среди двух билетов хотя бы один имеет равные суммы.

а) Так как билеты, имеющие последовательные номера, не могут оба иметь равные суммы первых и последних трех цифр, то события А и В несовместные, следовательно,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}055\,25 + 0{,}055\,25 = 0{,}1105,$$

б) Для произвольных двух билетов события А и В совместные, следовательно,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \text{ и } P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B),$$

т. к. события А и В независимые.

Таким образом, $P(A + B) = 0{,}1075$.

Задачи для решения в аудитории

1. По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события

A_i - попадание при i-м выстреле $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_i и $\overline{A}_i$ следующие события:

А – все три попадания;

В – все три промаха;

С – хотя бы одно попадание;

Д – хотя бы один промах;

Е – не менее двух попаданий;

F – не больше одного попадания;

G – попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.

2. Записать событие, состоящее в том, что система исправна (дублирующие блоки обозначены одинаковыми буквами), система неисправна (рис. 4).

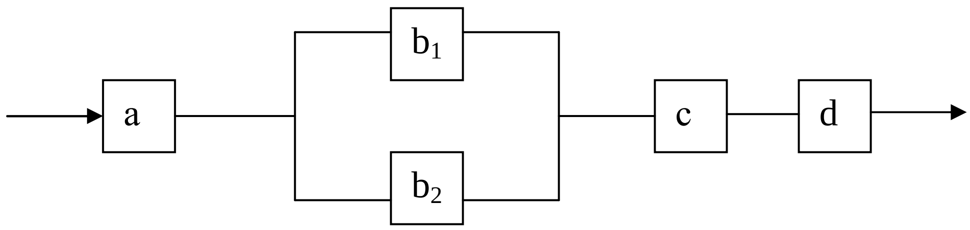


Рисунок 4

3. Две одинаковые монеты радиусом r расположены внутри круга радиусом R, в который наудачу бросается точка. Определить вероятность того, что эта точка упадет на одну из монет, если монеты не перекрываются.

4. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру любой масти или карту пиковой масти (фигурой называется валет, дама или король)?

5. В урне 10 белых и 20 черных шаров. Из 10 белых – 6 штрихованных, из 20 черных – 5 штрихованных. Рассматриваются события:

А – извлечение из урны белого шара;

В – извлечение из урны штрихованного шара.

Определить, зависимы или независимы события А и В.

6. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором – три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

7. Сколько надо бросить игральных костей, чтобы с вероятностью, меньшей 0,3, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится 6 очков?

8. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор срабатывает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор. Найти вероятность того, что сработает хотя бы один сигнализатор.

9. Дана система S (рис. 5). Блоки, обозначенные одинаковыми буквами, одинаковы; все блоки независимы. Вычислить надежность системы (вероятность безотказной работы в течение определенного времени), если известны надежность блоков: $P(a_i) = 0{,}8;\ P(b_i) = 0{,}9$.

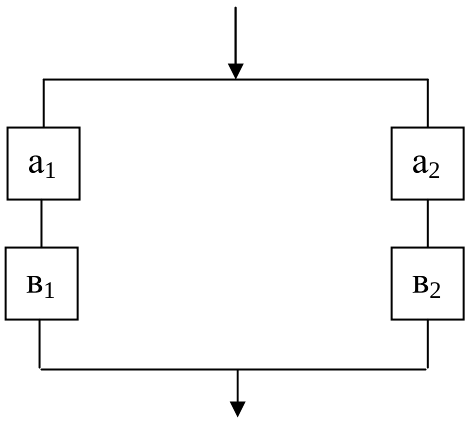


Рисунок 5

10. Два стрелка независимо один от другого делают по два выстрела (каждый по своей мишени). Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна P_1, для второго - P_2. Выигравшим соревнование считается тот стрелок, в мишени которого будет больше пробоин. Найти вероятность того, что выиграет первый стрелок.

11. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей играные от неиграных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неиграных мячей.

Задачи для решения в аудитории

12. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события:

А – появление герба на первой монете;

В – появление цифры на первой монете;

С – появление герба на второй монете;

Д – появление цифры на второй монете;

Е – появление хотя бы одного герба;

F – появление хотя бы одной цифры;

G – появление одного герба и одной цифры;

Н – непоявление ни одного герба;

К – появление двух гербов.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события: 1) $A + C$; 2) $A \cdot C$; 3) $E \cdot F$; 4) $G + E$; 5) $G \cdot E$; 6) $B \cdot Д$; 7) $E + K$.

13. Произведен залп из двух орудий по мишени. Вероятности поражения мишени для каждого из орудий соответственно равны 0,85 и 0,91. Найти вероятность поражения цели, т. е. вероятность хотя бы одного попадания.

14. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,2. Произведено 10 выстрелов. Найти вероятность поражения цели.

15. Какова вероятность того, что выбранное наудачу изделие окажется первосортным, если известно, что 3 % всей продукции составляют нестандартные изделия, а 75 % стандартных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта?

16. На 20 одинаковых жетонах написаны 20 двузначных чисел: от 11 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 4 или 7?

17. Работа прибора прекратилась вследствие выхода из строя одной лампы из общего числа «n». Отыскание этой лампы произведено путем замены каждой лампы новой. Определить вероятность того, что придется проверить «n» ламп, если вероятность выхода из строя каждой лампы равна p.

18. Бросается игральная кость. Событие А состоит в появлении цифры 6, событие В – в появлении цифры, кратной трем. Выяснить, зависимы или независимы события А и В.

19. Вероятность попадания в первую мишень для данного стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения мишени при двух выстрелах равна 0,5. Определить вероятность поражения второй мишени.

20. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения при одном выстреле первым орудием, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

21. Студент разыскивает нужную формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочнике соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится: а)только в одном справочнике, б) только в двух справочниках, в) во всех трех справочниках.

22. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0,4, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха.

Ответы

1. $A = A_1A_2A_3$; $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$; $C = A_1 + A_2 + A_3$, или $C = A_1 + \overline{A}_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$
или $C = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$;
$Д = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$;
$E = \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1A_2A_3 = \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2$;
$F = \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2$; $G = \overline{A}_1\overline{A}_2$.

2. $S = A(B_1 + B_2)CД$; $\overline{S} = \overline{A}_1 + \overline{B}_1\overline{B}_2 + \overline{C} + \overline{Д}$. **3.** $P = 2\left(\dfrac{r}{R}\right)^2$. **4.** $P = \dfrac{11}{26}$.

5. А и В зависимые события. **6.** $P = 0{,}251$. **7.** $n \ge 7$. **8.** а) $P = 0{,}14$; б) $P = 0{,}995$.

9. $P = 0{,}92$. **10.** $P = P_1^2(1 - P_2)^2 + 2P_1^2P_2(1 - P_2) + 2P_1(1 - P_1)(1 - P_2)^2$.

11. $P = 0{,}0028$. **13.** $P = 0{,}9865$. **14.** $P = 0{,}8926$. **15.** $P = 0{,}73$. **16.** $P = 0{,}35$.

17. $(1 - P)^{n-1} \cdot P$. **18.** А и В зависимые события. **19.** $P = 0{,}75$.

20. $P = 0{,}7$. **21.** а) $P = 0{,}188$; б) $P = 0{,}452$; в) $P = 0{,}336$. **22.** $n \ge 5$.

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Вероятность $P(A)$ появления события A, которое может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу несовместных событий (гипотез), определяется формулой **полной вероятности**

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i),\text{ где }\sum_{i=1}^{n}P(H_i)=1.$$

Вероятность $P(H_i/A)$ гипотезы H_i после того, как имело место событие A, определяется формулой Байеса

$$P=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Решение типовых задач для решения в аудитории

1. Имеются две урны № 1, три урны № 2 и пять урн № 3. Урны внешне не отличаются одна от другой. В урне № 1 имеется 1 белый и 4 черных шара; в урне № 2 – 5 белых и 3 черных шара, в № 3 – 6 белых и 9 черных шаров. Наугад берут одну из урн и из нее вынимают шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым?

Решение. Пусть событие A – появление белого шара из урны, взятой наудачу. Это событие будет происходить совместно с выбором урны, из которой извлекается шар. Пусть события H_1, H_2, H_3 состоят в том, что будут выбраны урны № 1, № 2, № 3 соответственно.

Определим вероятности гипотез:

$$P(H_1)=\frac{2}{10};\quad P(H_2)=\frac{3}{10};\quad P(H_3)=\frac{5}{10}.$$

Найдем условные вероятности появления белого шара из соответствующих урн:

$$P(A/H_1)=\frac{1}{5};\quad P(A/H_2)=\frac{5}{8};\quad P(A/H_3)=\frac{6}{15}.$$

Искомая вероятность

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$
$$=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{8}+\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{15}=0{,}4275.$$

2. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,6 и 6 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежит этот стрелок?

Решение. Пусть событие А – стрелок в мишень не попал. Гипотезы: H_1 - стрелял стрелок 1–й группы; H_2 - стрелял стрелок 2–й группы; H_3 - стрелял стрелок 3–й группы.

$$P(H_1)=\frac{5}{18};\ P(H_2)=\frac{7}{18};\ P(H_3)=\frac{6}{18}.$$
$$P(A/H_1)=0{,}2;\ P(A/H_2)=0{,}4;\ P(A/H_3)=0{,}5.$$

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$
$$=\frac{5}{18}\cdot 0{,}2+\frac{7}{18}\cdot 0{,}4+\frac{6}{18}\cdot 0{,}5=0{,}38.$$

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{5\cdot 0{,}2}{18\cdot 0{,}38}\approx 0{,}15.$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{7\cdot 0{,}4}{18\cdot 0{,}38}\approx 0{,}41.$$

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{6\cdot 0{,}5}{18\cdot 0{,}38}\approx 0{,}44.$$

Стрелок вероятнее всего принадлежал к третьей группе.

3. Имеются две партии деталей, причем известно, что в одной партии все детали удовлетворяют техническим условиям, а в другой партии 1/4 деталей недоброкачественная. Деталь, взятая из наудачу в выбранной партии, оказалась доброкачественной. Определить вероятность того, что вторая деталь из этой же партии окажется недоброкачественной, если первая деталь после проверки возвращена в партию.

Решение. Пусть событие А – первая деталь доброкачественная. Гипотеза: H_1 – взята партия, содержащая недоброкачественные детали; H_2 – взята партия доброкачественных деталей. По условию задачи

$$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2},\ P(A/H_1)=\frac{3}{4},\ P(A/H_2)=1.$$
$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{7}{8}.$$

После первого испытания вероятность того, что партия содержит недоброкачественные детали:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{1/2\cdot 3/4}{7/8}=\frac{3}{7}.$$

Вероятность того, что партия содержит только доброкачественные детали:

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{1/2\cdot 1}{7/8}=\frac{4}{7}.$$

Пусть событие В состоит в том, что при втором испытании деталь оказалась недоброкачественной. Вероятность данного события также находится по формуле полной вероятности. Если P_1 и P_2 - вероятности гипотез H_1 и H_2 после испытания, то, согласно предыдущим вычислениям, $P_1=\frac{3}{7}$, $P_2=\frac{4}{7}$.

Кроме того, $P(B/H_1)=\frac{1}{4}$, $P(B/H_2)=0$.

Поэтому искомая вероятность $P(B)=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{7}\cdot 0=0{,}107$.

Задачи для решения в аудитории

1. Даны два блока, соединенные последовательно с точки зрения надежности, каждый из которых может работать независимо от другого в трех разных режимах. Вероятность наступления первого режима – 0,1; второго – 0,5; третьего – 0,4. Надежность работы первого блока в 1-м, 2-м, 3-м режимах равна соответственно 0,9; 0,8; 0,7. Надежность работы второго блока в первом, втором, третьем режимах равна 0,9; 0,9; 0,8. Найти надежность системы, если блоки независимы.

2. Три самолета – один ведущий и два ведомых - посылаются на бомбометание по объекту. Радионавигационное оборудование, без которого выход к цели невозможен, имеется только у ведущего самолета. После выхода на цель самолеты выполняют бомбометание независимо, вероятность разрушить объект для каждого из них равна 0,3. Перед выходом на цель самолеты проходят зону зенитной обороны противника, в которой каждый из них может быть сбит с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что объект будет разрушен.

3. Имеется n урн, в каждой из которых a белых шаров и b черных. Из первой урны во вторую перекладывается один шар, затем из второй в третью один шар и т. д. Затем из последней урны извлекается один шар. Найти вероятность того, что он белый.

4. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – удовлетворительно и 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный на 16, удовлетворительно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен а) отлично, б) плохо.

5. 96 % продукции завода имеет повышенное качество. Если упростить процесс проверки качества продукции, то 2 % продукции повышенного качества не будут признаны таковыми и 5 % продукции, не имеющей повышенного качества, окажутся признанными за продукцию повышенного качества. Найти вероятность того, что при такой проверке изделие, выпущенное с маркой «повышенное качество», действительно имеет повышенное качество.

6. Определить вероятность того, что среди 1000 лампочек нет ни одной неисправной, если из взятых наудачу 100 лампочек все оказались исправными. Предполагается, что число неисправных лампочек из 1000 равновозможно от 0 до 5.

7. Радиолокационная станция ведет наблюдение за объектом, который может применять или не применять помехи. Если объект не применяет помех, то за один цикл обзора станция обнаруживает его с вероятностью P_0; если применяет – с вероятностью $P_1 < P_0$. Вероятность того, что во время цикла будут применены помехи, равна P и не зависит от того, как и когда применялись помехи в остальных циклах. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен хотя бы один раз за n циклов обзора.

Задачи для самостоятельного решения

8. С первого автомата на сборку поступает 20 %, со второго 30 %, с третьего 50 % деталей. Первый автомат дает в среднем 0,2 % брака, второй – 0,3 %, третий – 0,1 %. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.

9. Из урны, содержащей 2 белых и один черный шар, перекладывают шар в урну, содержащую два черных и один белый шар. Определить вероятность извлечь черный шар из второй урны после указанного перекладывания.

10. Завод изготовляет изделия, каждое из которых с вероятностью P имеет дефект. В цехе имеются три контролера; изделие осматривается только одним контролером, с одинаковой вероятностью первым, вторым или третьим. Вероятность обнаружения дефекта (если он имеется) для i-го контролера равна P_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Если изделие не было забраковано в цехе, то оно попадет в ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью P_0. Определить вероятность следующих событий: А – изделие будет забраковано; В – изделие будет забраковано в цехе; С – изделие будет забраковано в ОТК завода.

11. Пусть при массовом производстве некоторого изделия вероятность того, что оно окажется стандартным, равна 0,95. Для контроля производится некоторая упрощенная проверка стандартности изделия, которая дает положительный результат в 99 % случаев для стандартных изделий и в 3 % случаев для нестандартных изделий. Какова вероятность того, что изделие стандартно, если оно выдержало упрощенную проверку?

12. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно $4/5,\ 3/4,\ 2/3$. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

13. По линии связи возможна передача кода 1234 с вероятностью 0,6 и кода 4321 с вероятностью 0,4. Код высвечивается на табло, которое может исказить цифры. Вероятность принятия 1 за 1 равна 0,8, а 1 за 4 равна 0,2. Вероятность принятия 4 за 4 равна 0,9, а 4 за 1 равна 0,1. Вероятности принятия 2 за 2 и 3 за 3 равна 0,7. Вероятности принятия 2 за 3 и 3 за 2 равны 0,3. Оператор принял код 4231. Определить вероятность того, что был передан код: а) 1234, б) 4321.

Ответы

1. $P = 0{,}6622$. **2.** $P = 0{,}476$. **3.** $P = \frac{a}{a + в}$. **4.** а) $P = 0{,}58$; б) $P = 0{,}002$.

5. $P = 0{,}998$. **6.** $P = 0{,}214$. **7.** $1 - [1 - (1 - P)P_n - PP_1]^n$. **8.** $P = 0{,}0018$.

9. $P = 0{,}58$. **10.** $P(B) = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} \cdot P$; $P(C) = P\left(1 - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3}\right)P_0$;

$P(A) = P(B) + P(C)$. **11.** $P = 0{,}998$. **12.** $P = 0{,}46$. **13.** а) $P = 0{,}185$; б) $P = 0{,}815$.

5. Последовательность независимых испытаний (схема Бернулли). Теорема Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

Вероятность $P_{n;m}$ появления события m раз в n независимых испытаниях (опытах), в каждом из которых вероятность появления события равна P, определяется **формулой Бернулли**: $P_{n;m} = C_n^m \cdot P^m \cdot q^{n-m}$, где $q = 1 - P$.

Вероятность появления события не менее m раз в n испытаниях вычисляется по формуле

$$R_{n,m} = \sum_{k=m}^{n} P_{n;k} \qquad \text{или} \qquad R_{n,m} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_{n;k}.$$

Вероятность появления события хотя бы один раз в n испытаниях будет $P_{n,1} = 1 - q^n$.

Наивероятнейшее число появлений события A в n независимых испытаниях $np - q \le m_0 \le np + p$.

Теорема Пуассона. Вероятность того, что в n независимых испытаниях в каждом из которых вероятность появления события равна P, событие наступит ровно m раз при достаточно большом n и малом

$P(n \to \infty,\ p \to 0,\ np = \text{const})$ приближенно равна $P_{n;m} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$,

где $a = np$.

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна P, событие наступит ровно m раз при достаточно большом n приближенно равна

$$P_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна P, событие наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз при достаточно большом n приближенно равна

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - функция Лапласа,

$$x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{nq}}.$$

Типовые задачи для решения в аудитории

1. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен) : а) три партии из четырех или пять из восьми; б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

Решение. Так как противники равносильны, то вероятности выигрыша и проигрыша каждой партии одинаковы и равны $P = q = 1/2$.

а) Вероятность выиграть три партии из четырех

$$P_{4;3} = C_4^3 (1/2)^3 \cdot 1/2 = 1/4.$$

Вероятность выиграть пять партий из восьми

$$P_{8;5} = C_8^5 (1/2)^5 \cdot (1/2)^3 = 7/32.$$

Так как $\dfrac{1}{4} > \dfrac{7}{32}$, то вероятнее выиграть три партии из четырех.

б) Вероятность выиграть не менее трех партий из четырех

$$R_{4;3} = P_{4;3} + P_{4;4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16},$$

а вероятность выиграть не менее пяти партий из восьми

$$\begin{aligned} R_{8;5} &= P_{8;5} + P_{8;6} + P_{8;7} + P_{8;8} = \\ &= C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^6 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^7 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^8 (56 + 28 + 8 + 1) = \frac{93}{256}. \end{aligned}$$

Так как $\dfrac{93}{256} > \dfrac{5}{16}$, вероятнее выиграть не менее пяти партий из восьми.

2. Из таблицы случайных чисел наудачу выписаны 200 двузначных случайных чисел (от 0 до 99). Определить вероятность того, что среди них число 33 встретиться: а) три раза; б) четыре раза.

Решение. Вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число равно 33, равна $P = 0{,}01$, поскольку выбирается одно из 100 возможных. Число испытаний $n = 200$. Так как число n велико, а вероятность P мала, воспользуемся формулой Пуассона:

$$P_{n;m} = \frac{a^m}{n!} e^{-a},$$

где $a = np = 200 \cdot 0{,}01 = 2$.

$$\text{а)}\ P_{200;3} = \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0{,}18; \quad \text{б)}\ P_{200;4} = \frac{2^4}{4!} e^{-2} \approx 0{,}09.$$

3. Вероятность появления события при одном опыте равна 0,3. С какой вероятностью можно утверждать, что частота этого события при 100 опытах будет лежать в пределах от 0,2 до 0,4?

Решение. Для того чтобы частота лежала в пределах от 0,2 до 0,4 в серии из 100 опытов, число появлений события m должно быть не менее 20 и не более 40.

Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P(20 \le m \le 40) = \Phi\left(\frac{40 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{20 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

По условию $n = 100;\ p = 0{,}3;\ q = 0{,}7$, следовательно:

$$\Phi\left(\frac{40 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{40 - 30}{\sqrt{100 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}}\right) = \Phi(2{,}18) = 0{,}4854,$$

$$\Phi\left(\frac{20 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{20 - 30}{\sqrt{100 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}}\right) = \Phi(-2{,}18) = -0{,}4854$$

$$P(20 \le m \le 40) = 0{,}4854 + 0{,}4854 \approx 0{,}97.$$

Задачи для решения в аудитории

1. На отрезок АВ длиною a наудачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки А на расстоянии, меньшем x, а три точки – на расстоянии, большем x. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

2. Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что а) у обоих будет равное количество попаданий; б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

3. Большая партия изделий содержит 1 % брака. Каков должен быть объем случайной выборки, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одно бракованное изделие была не меньше 0,95?

4. Во время каждого из опытов на 1 ч в цепь включается батарея, мощностью в 120 Вт или в 200 Вт, вероятности благополучного исхода опыта равны соответственно 0,06 и 0,08. Результат проведенной серии опытов считается достигнутым в случае хотя бы одного благоприятного исхода опыта с батареей в 200 Вт или хотя бы двух батарей в 120 Вт. Общая энергия, затраченная на производство всех опытов, не может превышать 1200 Вт-ч. Какие батареи выгоднее использовать?

5. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность отказа прибора в серии из трех независимых опытов, если вероятности отказа прибора при одной, двух и трех опасных перегрузках соответственно равны 0,2; 0,5; 0,8.

6. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,02. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 855 пассажиров.

7. Вероятность любому абоненту позвонить на коммутатор в течение 1 ч равна 0,1. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение 1 ч позвонят 4 абонента.

8. На прядильной фабрике работница обслуживает 750 веретён. При вращении веретена пряжа рвется в случайные моменты времени из-за неравномерности натяжения, неровности и других причин. Считая, что вероятность обрыва пряжи на каждом из веретён в течение некоторого промежутка времени t равна 0,008, найти вероятность того, что за это время произойдет не более 10 обрывов.

9. По мишени в тире при одинаковых условиях произведено 200 независимых выстрелов, которые дали 116 попаданий. Определить, какое значение вероятности попадания при каждом выстреле более вероятно: $1/2$ или $2/3$, если до опыта обе гипотезы равновероятны и единственно возможны.

10. Линия связи, имеющая 130 каналов, связывает пункт А с пунктом В, где имеется 1000 абонентов, каждый из которых пользуется телефоном в среднем 6 мин. Найти вероятность безотказного обслуживания абонентов.

11. В магазине 10 000 книг. Вероятность продажи каждой из них в течение дня равна 0,8. Какое максимальное число книг будет продано в течение дня с вероятностью 0,999?

Задачи для решения в аудитории

12. Принимая одинаково вероятным рождение мальчика и рождение девочки, найти вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей а) два мальчика; б) мальчиков больше, чем девочек.

13. Среди вырабатываемых деталей бывает в среднем 4% брака. Какова вероятность того, что среди взятых на испытание 5 деталей будет 40% бракованных?

14. Прибор выходит из строя, если перегорит не менее пяти ламп I типа или не менее двух ламп II типа. Определить вероятность выхода из строя прибора, если известно, что перегорело пять ламп, а вероятности перегорания ламп I или II типов равны соответственно 0,7 и 0,3 (выходы из строя ламп - события независимые).

15. Найти наивероятнейшее число отрицательных и положительных ошибок и соответствующую вероятность при четырех измерениях, если при каждом измерении вероятность получения положительной ошибки равна 2/3, а отрицательной – 1/3.

16. Бомбардировщик делает четыре захода на цель и каждый раз сбрасывает по одной бомбе. Вероятность попадания бомбы в цель равна 0,4. Попавшая бомба поражает цель с вероятностью 0,7. Найти вероятность поражения цели.

17. Испытанию подвергается партия транзисторов. Вероятность безотказной работы каждого транзистора равна 0,92. Определить, какое число транзисторов следует испытать, чтобы с вероятностью не менее 0,96 можно было зафиксировать хотя бы один отказ.

18. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут три негодных изделия.

19. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти наивероятнейшее число бракованных деталей среди 1000 деталей и вероятность такого количества их в партии.

20. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

21. Вероятность появления события в каждом из 21 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

Ответы

1. $P_{5,2} = C_5^2\left(\frac{x}{a}\right)^2\left(\frac{a-x}{a}\right)^3$. **2.** а) $P = 0{,}321$; б) $P = 0{,}244$. **3.** $n \ge 298$.
4. $200\text{вт}\,(R_{6,1} = 0{,}394;\ R_{10;2} = 0{,}117)$. **5.** $P = 0{,}2816$. **6.** $m_0 = 17$.
7. $P = 0{,}17$. **8.** $P = 0{,}94255$. **9.** Вероятное значение 1/2. **10.** $P = 0{,}9992$.
11. 8124. **12.** а) $P = 0{,}3125$; б) $P = 0{,}5$. **13.** $P = 0{,}014$. **14.** $P = 0{,}04$.
15. $\mu_+ = 3;\ \mu_- = 1;\ P = \frac{32}{11}$. **16.** $P = 0{,}73$. **17.** $n \ge 36$. **18.** $P = 0{,}64$.
19. $m_0 = 8,\ P_{1000,8} = 0{,}139$. **20.** $P = 0{,}0782$. **21.** $P = 0{,}9595$.

6. Случайные величины. Законы распределения случайных величин. Числовые характеристики

Случайная величина называется **дискретной,** если ее возможные значения можно пронумеровать.

Случайная величина называется **непрерывной** (в широком смысле слова), если ее возможные значения непрерывно заполняют какой-либо интервал или интервалы.

Случайная величина X может быть задана: 1) рядом распределения (дискретная случайная величина); 2) функцией распределения (дискретная и непрерывная случайная величины); 3) плотностью распределения (непрерывная случайная величина).

Рядом распределения дискретной случайной величины называется совокупность всех возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей $P_i = P(X = x_i)$. Вероятности P_i удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$, где число возможных значений n может быть конечным или бесконечным.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, равная в x вероятности того, что случайная величина X примет значение меньше x: $F(x) = P(X < x)$. Для дискретной случайной величины функция $F(x)$ вычисляется по формуле $F(x) = \sum_{x_i < x} P_i$, где суммирование ведется по всем значениям i, для которых $x_i < x$.

Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывно дифференцируема, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Плотностью распределения непрерывной случайной величины X называется функция

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Плотность распределения любой случайной величины неотрицательна $\left(f(x) \ge 0\right)$ и обладает свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Функция распределения $F(x)$ выражается через плотность распределения формулой

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Вероятность попадания случайной величины X на участок от α до β (включая α) вычисляется по формуле

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Если случайная величина X непрерывна, то $P(X=\alpha)=0$.

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha).$$

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X на участок от α до β может быть вычислена по формуле.

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Математическое ожидание $m_x = M[X]$ случайной величины X вычисляется по формулам: $M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ (для дискретной случайной величины);

$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ (для непрерывной случайной величины).

Дисперсией $Д[X]$ случайной величины X называется

$$Д[X]=M\left[(X-m_x)^2\right].$$

Дисперсия вычисляется по формулам:

$Д[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2\cdot P_i$ (для дискретной случайной величины);

$Д[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx$ (для непрерывной случайной величины).

Для вычислений дисперсии может быть использовано свойство дисперсии $Д[X]=M\left[X^2\right]-m_x^2$.

Средним квадратичным отклонением случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии $\sigma[X]=\sqrt{Д[X]}$.

Начальными α_k **и центральными** μ_k моментами k-го порядка случайной величины X называются соответственно $\alpha_k=M\left[X^k\right]$, $\mu_k=M\left[(X-m_x)^k\right]$.

Начальные α_k и центральные μ_k моменты случайной величины X вычисляются по формулам $\alpha_k=\sum_{i=1}^{n} x_i^k P_i$; $\mu_k=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^k P_i$ (для дискретной случайной величины); $\alpha_k=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$, $\mu_k=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^k f(x)dx$ (для непрерывной случайной величины). $S_X=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$ называется **коэффициентом асимметрии,** характеризует асимметричность распределения.

$E_X=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3$ называется **эксцессом,** характеризует крутость кривой плотности распределения.

Типовые задачи для решения в аудитории

1. Производятся последовательные испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, найти математическое ожидание и дисперсию, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9.

Решение. X - случайное число испытанных приборов, оно может принимать следующие значения: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5$.

Вероятности $P_i = P(X = x_i)$ того, что число испытанных приборов равно данному частному значению x_i, будут

$$P_1 = P(X = 1) = 0{,}1;\quad P_2 = P(X = 2) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09;$$

$$P_3 = P(X = 3) = 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}081;\quad P_4 = P(X = 4) = 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 = 0{,}0729;$$

$$P_5 = P(X = 5) = 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 + 0{,}9^5 = 0{,}6561.$$

Таким образом, ряд распределения будет иметь вид

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 0{,}081 + 4 \cdot 0{,}0729 + 5 \cdot 0{,}6561$$
$$= 4{,}0951.$$

$$Д[X] = M[X^2] - m_x^2 = 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}09 + 9 \cdot 0{,}081 + 16 \cdot 0{,}0729 +$$
$$+ 25 \cdot 0{,}6561 - 4{,}0951^2 = 1{,}9881.$$

2. Плотность вероятности случайных амплитуд боковой качки корабля имеет вид (закон Релея):

$$f(x) = \frac{x}{a^2},\quad e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\quad (x \geq 0),$$

Определить: а) функцию распределения; б) моду распределения; в) математическое ожидание.

Решение. а) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Так как $x \geq 0$,

$$F(x) = \int\limits_0^x \frac{x}{a^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2a}} dx = e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \Big|_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

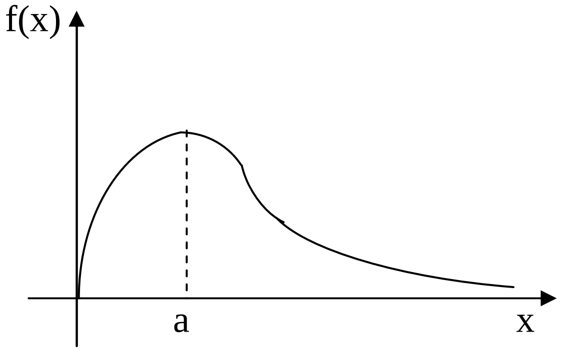
б) Модой непрерывной случайной величины называется ее значение, при котором плотность вероятности максимальная, обозначается M.

$$f'(x)=\frac{1}{a^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Таким образом, $$F(x)=\geq\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Отсюда следует, что $M=a$.

График плотности распределения вероятностей будет иметь вид



в) $$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx=-xe^{-\frac{x^2}{2a^2}}\Bigg|_0^{\infty}+\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx=$$

$$=\sqrt{2}\cdot a\int\limits_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{2}\cdot a\frac{\sqrt{\pi}}{2}=a\sqrt{\frac{\pi}{2}}\approx 1{,}25a.$$

2. Случайная величина X имеет плотность

$$f(x)=\begin{cases}A\cos^2 x & \text{при } |x|\leq\frac{\pi}{2};\\ 0 & \text{при } |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A; б) математическое ожидание X и дисперсию X.

Решение. а) Так как все значения случайной величины X принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}f(x)dx=1$, то есть $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}A\cos^2 x\,dx=1$.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} A\cos^2 x\,dx = A\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}A = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{\pi}.$$

$$f(x)\cdot\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cos^2 x & \text{при } |x| \le \frac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при } |x| > \frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

б) $M[X] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{\pi}\cos^2 x dx = 0,$

$$Д[X] = M[X^2] - m_x^2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{\pi}x^2\cos^2 x dx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}.$$

Задачи для решения в аудитории

1. Случайная величина X имеет распределение

X	-1	-0,5	-0,1	0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0
P	0,005	0,012	0,074	0,102	0,148	0,231	0,171	0,16	0,081	0,016

Найти: а) $P\left(|x| \le \frac{1}{2}\right)$; б) $P(X < 0)$; в) $P(1 \le X \le 2)$.

2. Пусть X - случайная величина: $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Найти закон распределения случайных величин: а) $У = \sin\frac{\pi}{2}X$, б) $Z = \sin\pi X$.

3. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5, вторым 0,4. Составить закон распределения числа попаданий при двух выстрелах, найти математическое ожидание и дисперсию числа попаданий в мишень. Построить график функции распределения.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 0,\\ x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1,\\ 1 & \text{при} \quad x > 1.\end{cases}$$

Построить график функции распределения. Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний случайная величина X ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу $(0{,}25,\ 0{,}75)$.

Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad \text{при} & x \le 1,\\ a+b\arcsin x \ \text{при} & -1<x<1,\\ 1 \quad \text{при} & x \ge 1.\end{cases}$$

Определить постоянные a и b. Найти $M[X]$ и $Д[X]$.

6. Случайная величина X подчинена закону Лапласа:

$$f(x)=ae^{-\lambda|x|} \ (\lambda>0).$$

а) Найти коэффициент a; б) построить графики плотности распределения и функции распределения; в) найти m_x и $Д_x$; г) найти коэффициент асимметрии, эксцесс.

7. Точка брошена наудачу внутрь круга радиусом R. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади области. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию расстояния точки до центра круга.

8. Даны две независимые случайные величины X и $У$:

X	-4	0	4
P	0,25	0,5	0,25

У	2	4
P	0,5	0,5

а) Составить закон распределения случайной величины $U = X \cdot У$.

б) Составить закон распределения $Z=\frac{1}{2}(X+У)$.

в) Проверить выполнение свойства математического ожидания

$$M\left[\frac{X+У}{2}\right]=\frac{1}{2}(M[X]+M[У]).$$

Задачи для решения в аудитории

9. В партии из 10 деталей имеются 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение стандартных деталей.

10. Случайная величина X имеет следующее распределение:

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Найти выражение и построить график функции распределения случайной величины X. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, не превосходящее по абсолютной величине единицы. Найти математическое ожидание и дисперсию.

11. Вероятность того, что станок, работающий в момент t_0, не остановится до момента $t_0 + t$, дается формулой $P(t) = e^{-\alpha t}$. Найти математическое ожидание и дисперсию рабочего периода станка (между двумя последовательными остановками).

12. Непрерывная случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\frac{\pi}{2}, \\ A\cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

а) Найти коэффициент А; б) построить график плотности распределения $f(x)$; в) найти вероятность попадания случайной величины на интерал $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$;

г) найти функцию распределения $F(x)$; д) найти математическое ожидание и дисперсию.

13. Производится три выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $P_1 = 0{,}4;\ P_2 = 0{,}3;\ P_3 = 0{,}6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

14. Две независимые случайные величины заданы законами распределения

X	-1	0	1
P	0,2	0,3	0,5

У	0	1	3
P	0,1	0,3	0,6

Найти: 1) закон распределения случайной величины Z, равной произведению случайных величин X и $У$; 2) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z.

Ответы

1. а) 0,738; б) 0,091; в) 0,257.

3.

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

2. $M[X] = 0{,}9;\ Д[X] = 0{,}49$.

4. $P = 0{,}25$. **5.** $M[X] = 0;\ Д[X] = 0{,}5$. **6**. а) $a = \frac{\lambda}{2}$;

б) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\lambda x} & \text{при } x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$ в) $M[X]=0;\ Д[X]=\frac{2}{\lambda^2}$; г) $S_x=0;\ E_x=3$.

7. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } r\le 0,\\ \left(\frac{r}{R}\right)^2 & \text{при } 0<r\le R,\\ 1 & \text{при } r>R;\end{cases}$ $M_r=\frac{2}{3}R,\ Д_r=\frac{R^2}{18}$.

9. $M[X]=1{,}6;\ \sigma_x=0{,}533$. **10.** $P=0{,}4;\ M[X]=0{,}2;\ Д[X]=1{,}36$.

11. $F(t)=1-P(t)=1-e^{-\alpha t};\ M_t=\frac{1}{\alpha},\ Д_t=\frac{1}{\alpha^2}$. **12**. а) $A=\frac{1}{2}$; в) $P=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<-\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}(\sin x+1) & \text{при} -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2},\\ 1 & \text{при } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ д) $M[X]=0;\ Д[X]=\frac{\pi^2}{4}-2$.

13. $M[X]=1{,}3$. **14.** $M[X]=0{,}63;\ Д[X]=3{,}5931$.

7. Примеры распределения случайных величин

Дискретная случайная величина X называется распределенной по **биномиальному** закону, если ее возможные значения $0, 1, \ldots, n$, а вероятность того, что $X=m$, выражается формулой

$$P(X=m)=P_{n;m}=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m},$$

где $0<p<1;\ q=1-p$.

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, равно $m_x=np$, а дисперсия $Д_x=npq$.

Дискретная случайная величина X называется распределенной по закону **Пуассона,** если ее возможные значения $0, 1, \ldots, m, \ldots$, а вероятность того, что $X=m$ выражается формулой

$$P(X=m)=P_m=\frac{a^m}{m!}e^{-a},$$

где $a>0$ - параметр закона Пуассона.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равны параметру a: $m_x=a$; $Д_x=a$.

Непрерывная случайная величина X называется **равномерно** распределенной в интервале $(a, в)$, если ее плотность распределения в этом интервале постоянна.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{в-a} & \text{при } x\in(a,в),\\ 0 & \text{при } x\notin(a,в).\end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной равномерно на участке $(a, в)$, равны соответственно

$$m_x=\frac{a+в}{2},\qquad Д_x=\frac{(в-a)^2}{12}.$$

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по **показательному** закону, если ее плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x>0.\end{cases}$$

где $\lambda>0$ - параметр показательного закона.

Для случайной величины X, распределенной по показательному закону,

$$m_x=\frac{1}{\lambda};\qquad Д_x=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по **нормальному** закону, если ее плотность распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по нормальному закону, равно $m_x = a$, а дисперсия $Д_x = \sigma^2$.

Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал $(\alpha; \beta)$ равна

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - табулирована,

отсюда $P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$.

Типовые задачи для решения в аудитории

1. Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий и вычислить математическое ожидание и дисперсию указанной случайной величины.

Решение. Случайная величина X - число попаданий в мишень при 3-х выстрелах, распределена по биномиальному закону, ее возможные значения 0, 1, 2, 3.

$$P(X = 0) = C_3^0 p^0 q^3 = 0{,}7^3 = 0{,}343;$$

$$P(X = 1) = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{1!\,2!} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}441;$$

$$P(X = 2) = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2!\,1!} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}189;$$

$$P(X = 3) = C_3^3 p^3 q^0 = 0{,}3^3 = 0{,}027.$$

Ряд распределения случайной величины X:

X	0	1	2	3
P	0,343	0,441	0,189	0,027

$$M[X] = np = 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9; \quad Д[X] = npq = 3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}63.$$

2. Длина заготовляемой автоматом детали представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону с параметрами $m_x = 15$ см, $\sigma_x = 0{,}2$ см. Найти вероятность брака, если допускаемые размеры детали должны быть $(15 \pm 0{,}3)$ см. Какую точность длины можно гарантировать с вероятностью 0,97?

Решение. а) $P(|X - m_x| < 0{,}3) = 2\Phi\left(\frac{0{,}3}{\sigma_x}\right)$.

$$P(|X - 15| < 0{,}3) = 2\Phi\left(\frac{0{,}3}{0{,}2}\right) = 2\Phi(1{,}5) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664.$$

Вероятность брака $p = 1 - 0{,}8664 = 0{,}1336$.

б) $P(|X - m_x| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right) = 0{,}97; \qquad \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right) = 0{,}485;$

$$\frac{\varepsilon}{\sigma_x} = 2{,}17; \ \varepsilon = 2{,}17 \cdot \sigma_x = 2{,}17 \cdot 0{,}2 = 0{,}434 \text{ см}.$$

Следовательно, с вероятностью 0,97 можно гарантировать размеры $(15 \pm 0{,}434)$ см.

3. Снайпер стреляет по замаскированному противнику до первого попадания. Вероятность промаха при отдельном выстреле равна P. Найти математическое ожидание числа промахов.

Решение. Возможные значения случайной величины X - числа промахов: $0, 1, 2, ..., k, ...$ $\quad P(X = k) = P^k(1 - P)$.

Ряд распределения случайной величины X:

X	0	1	2	…	k	…
P	$1-P$	$P(1-P)$	$P^2(1-P)$	…	$P^k(1-P)$	…

Полученное распределение носит название **геометрического** распределения.

$$M[X] = 0(1-P) + 1P(1-P) + ... + kP^k(1-P) + ... = (1-P)\sum_{k=1}^{\infty} kP^k.$$

Для вычисления суммы полученного ряда рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} P^k = \frac{P}{1-P}; \ \left[\sum_{k=1}^{\infty} P^k\right]' = \left[\frac{P}{1-P}\right]'; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} kP^{k-1} = \frac{1}{(1-P)^2}.$$

Отсюда $\quad \sum_{k=1}^{\infty} kP^k = \frac{P}{(1-P)^2}, \qquad M[X] = \frac{P}{1-P}$.

Задачи для решения в аудитории

1. Случайная величина X имеет биномиальный закон распределения с числовыми характеристиками $m_x = 6$, $Д_x = 2{,}4$. Определить вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[3{,}5;\ 5{,}5]$.

2. Известно, что в партии деталей имеется 10 % бракованных. Найти закон распределения случайной величины $У$ - числа годных деталей из пяти, выбранных наудачу. Определить числовые характеристики этого закона m_y, $Д_y$.

3. Число атак истребителей, которым может подвергнуться бомбардировщик над территорией противника, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием $a = 3$. Каждая атака с вероятностью 0,4 заканчивается поражением бомбардировщика. Определить: а) вероятность поражения бомбардировщика; б) ту же вероятность, если число атак истребителей – неслучайная величина и в точности равна трем.

4. Монету бросают до первого появления герба. Найти среднее число бросаний.

5. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания амперметра определяют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

Указание. Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину X, которая равномерно распределена в интервале между двумя соседними целыми делениями.

6. Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска задается формулой $P(t) = 1 - e^{-\lambda t} (\lambda > 0)$. Определить математическое ожидание случайной величины T - время поиска затонувшего судна.

7. Нагрузка на стержень подчиняется нормальному закону распределения с числовыми характеристиками $m_x = 5$ Н, $\sigma_x = 0{,}05$ Н. Усилие, разрушающее стержень, составляет 5,08 Н. Найти вероятность разрушения стержня.

8. Станок-автомат изготовляет валики, контролируя их диаметр X. Считая, что X распределен нормально, $m_x = 10$ мм, $\sigma_x = 0{,}1$ мм, найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

Задачи для решения в аудитории

9. Вероятность взять деталь в пределах допуска из большой партии деталей равна $P = 0{,}85$. Найти математическое ожидание и дисперсию числа деталей в пределах допуска из 8 деталей, взятых наудачу.

10. Поезда данного маршрута городского трамвая идут с интервалом 5 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через минуту после ухода предыдущего поезда, но не позднее чем за две минуты до отхода следующего поезда?

11. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $M[X]=40$ и дисперсией $Д[X]=200$. Вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $(30;\ 80)$.

12. Считается, что отклонение длины изготовляемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Если стандартная длина равна $40\ см$ и среднее квадратичное отклонение равно $0{,}4\ см$, то какую точность длины изделие можно гарантировать с вероятностью $0{,}8$?

13. Число частиц, излученных радиоактивным элементом в течение произвольного промежутка времени, имеет распределение Пуассона с параметром $a=1{,}5\ 1/с$. Найти вероятность того, что число частиц, излученных за две секунды, будет заключено в отрезке $[2;\ 4]$.

14. Дистанция X между двумя соседними самолетами в строю имеет показательное распределение, причем $m_x=100\ м$. Опасность столкновения самолетов возникает при уменьшении дистанции до $20\ м$. Найти вероятность того, что возникает опасность столкновения самолетов в воздухе.

О т в е т ы

1. $P=0{,}312$. **2.** $m_y=4{,}5;\ Д_y=0{,}45$. **3**. а) $P=0{,}699$; б) $P=0{,}784$.

4. $m_x=2$. **5.** $P=0{,}6$. **6.** $M[T]=\dfrac{1}{\lambda}$. **7.** $P=0{,}055$. **8.** $(9{,}7;\ 10{,}3)$.

9. $m_x=6{,}8;\ Д_x=1{,}02$. **10.** $P=0{,}4$. **11.** $P=0{,}758$. **12.** $(39{,}5;\ 40{,}5)$.

13. $P=0{,}616$. **14.** $P=0{,}181$.

8. Системы случайных величин

Функцией распределения системы двух случайных величин $(X,\ Y)$ называется функция $F(x,\ y)=P(X<x,\ Y<y)$.

Для системы непрерывных случайных величин существует **плотность распределения** вероятностей, определяемая следующим образом:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Плотность распределения вероятностей неотрицательна:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)dx\ dy=1; \quad F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,\ y)dxdy;$$

$$P[(X, Y)\in Д]=\iint\limits_{Д} f(x, y)dxdy.$$

Плотности распределения вероятностей случайных величин, входящих в систему:

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy,$$

$$f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

Случайные величины X, Y называются **независимыми**, если

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Система двух дискретных случайных величин может быть задана **таблицей**, в которой приведены пары значений случайных величин и соответствующие им вероятности.

Величины	X_1	X_2	X_3	…	X_n
Y_1	P_{11}	P_{21}	P_{31}	…	P_{n1}
Y_2	P_{12}	P_{22}	P_{32}	…	P_{n2}
Y_3	P_{13}	P_{23}	P_{33}	…	P_{n3}
…	…	…	…	…	…
Y_m	P_{1m}	P_{2m}	P_{3m}	…	P_{nm}

Здесь P_{ij} - вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}P_{ij} = 1$. Вышеприведенная таблица может содержать счетное множество строк и столбцов.

По таблице распределения вероятностей системы случайных величин (X, Y) можно найти закон распределения случайных величин, входящих в систему:

$$P_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}, \quad q_j = P(Y = y_i) = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}.$$

Дискретные случайные величины называются **независимыми**, если

$$P_{ij} = P(X = x_i)\cdot P(Y = y_j).$$

Начальный α_{ks} и центральный μ_{ks} – моменты системы двух случайных величин определяются следующим образом:

$$\alpha_{ks} = M\left[X^k Y^s\right],\ \mu_{ks} = M\left[(X - m_x)^k \left(Y - m_y\right)^s\right]$$
и могут быть вычислены по формулам

$$\alpha_{ks} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^k \cdot y_j^s \cdot P_{ij},$$

$$\mu_{ks} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)^k \cdot \left(y_j - m_y\right)^s \cdot P_{ij}$$

(для дискретных случайных величин)

и
$$\alpha_{ks} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot y^s f(x,y)dxdy,$$

$$\mu_{ks} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^k \cdot \left(y - m_y\right)^s \cdot f(x,y)dxdy$$

(для непрерывных случайных величин).

$$\alpha_{10} = M\left[X^1 Y^0\right] = M[X] = m_x,$$
$$\alpha_{01} = M\left[X^0 Y^1\right] = M[Y] = m_y,$$
$$\mu_{20} = M\left[(X - m_x)^2 \left(Y - m_y\right)^0\right] = Д[X],$$
$$\mu_{02} = M\left[(X - m_x)^0 \left(Y - m_y\right)^2\right] = Д[Y].$$

Центральный момент $\mu_{11} = k_{xy} = M\left[(X - m_x)\left(Y - m_y\right)\right]$ называется **корреляционным моментом.** Корреляционный момент характеризует степень линейной зависимости случайных величин. Безразмерной характеристикой связи между случайными величинами X и Y служит коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \qquad -1 \le r_{xy} \le 1.$$

Если случайные величины, входящие в систему, независимы, то $r_{xy} = 0$; в общем случае из-за некоррелированности $(r_{xy} = 0)$ не следует независимость случайных величин X, Y.

Решение типовых задач

1. В двух ящиках содержатся шары, по 6 шаров в каждом. В ящике 1 шар – с № 1, 2 шара с № 2, 3 шара с № 3; во втором ящике – 2 шара с № 1, 3 шара с № 2 и 1 шар с № 3. Рассматриваются случайные величины: X - номер шара, вытянутого из первого ящика; Y - номер шара, вытянутого из второго ящика. Из каждого ящика вынули по шару. Составить таблицу распределения системы случайных ве-

личин (X, Y). Найти математические ожидания, дисперсии X и Y, коэффициент корреляции.

Решение

X / Y	1	2	3	q_j
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	

Вероятности P_{ij} вычисляются следующим образом:

$$P_{11} = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18},$$

$$P_{22} = P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ и т.д.}$$

По таблице распределения вероятностей системы случайной величин (X, Y), можно составить законы распределения случайных величин, входящих в систему.

X	1	2	3
Y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Y	1	2	3
Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$$M[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 2\frac{1}{3}.$$

$$M[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 2\frac{1}{3}.$$

$$Д[X] = M\left[(X - m_x)^2\right] = M\left[X^2\right] - m_x^2.$$

$$Д[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{2} - \left(2\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \approx 0{,}55.$$

$$Д[Y] = 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{6} - \left(1\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{17}{36} \approx 0{,}47\,.$$

$$\sigma[X] = \sqrt{Д[X]} \approx 0{,}75\,.$$
$$\sigma[У] = \sqrt{Д[У]} \approx 0{,}69\,.$$

$$K_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[XY] - m_x m_y\,.$$

$$M[XY] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P_{ij} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} +$$
$$+ 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{18} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{77}{18} = 4\frac{5}{18}.$$

$$K_{xy} = 4\frac{5}{18} - 2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{5}{6} = \frac{77}{18} - \frac{77}{18} = 0\,;$$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0\,.$$

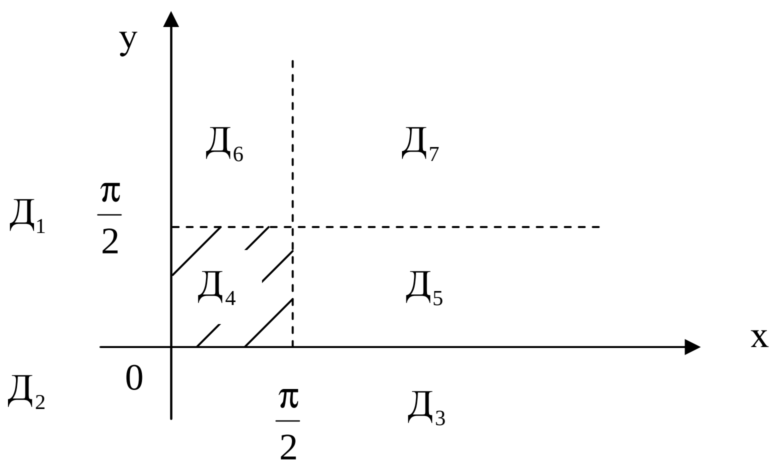
Этот результат можно было предвидеть, так как X и Y независимы из условия.

2.Дана плотность распределения вероятностей системы случайных величин $(X,\, Y)$

$$f(x, y) = 0{,}5\sin(x + y),\ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Определить функцию совместного распределения системы (X, Y), математические ожидания, дисперсии X и Y, корреляционную матрицу.

Решение.



Определим функцию $F(x,y)$, рассматривая области $Д_1, Д_2, Д_3, Д_4, ..., Д_7$.
$Д_1, Д_2, Д_3$: $F(x,y)=0$.

$$Д_4: F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_0^x\int_0^y 0{,}5\sin(x+y)dxdy =$$
$$=0{,}5(\sin x+\sin y-\sin(x+y)).$$

$$Д_5: F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_0^{\pi/2} dx\int_0^y 0{,}5\sin(x+y)dy =$$
$$=0{,}5(1+\sin y-\cos y).$$

$$Д_6: F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_0^{\pi/2} dy\int_0^x 0{,}5\sin(x+y)dx =$$
$$=0{,}5(1+\sin x-\cos x).$$

$Д_7: F(x,y)=1$.

Таким образом,

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in Д_1,Д_2,Д_3;\\ 0{,}5(\sin x+\sin y-\sin(x+y)), & (x,y)\in Д_4;\\ 0{,}5(1+\sin y-\cos y), & (x,y)\in Д_5;\\ 0{,}5(1+\sin x-\cos x), & (x,y)\in Д_6;\\ 1, & (x,y)\in Д_7.\end{cases}$$

Найдем математические ожидания случайных величин, входящих в систему

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_0^{\pi/2}0{,}5\sin(x+y)dy=$$
$$=0{,}5(\sin x+\cos x) \qquad \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right).$$
$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_0^{\pi/2}0{,}5\sin(x+y)dx=$$
$$=0{,}5(\sin y+\cos y) \qquad \left(0\le y\le\frac{\pi}{2}\right).$$

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx=\int_0^{\pi/2} x\cdot 0{,}5(\sin x+\cos x)dx=\frac{\pi}{4}.$$

$$M[Y]=\int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)dy=\int_0^{\pi/2} y\cdot 0{,}5(\sin y+\cos y)dy=\frac{\pi}{4}.$$

Для составления корреляционной матрицы найдем

$$Д[X]\ ,\ Д[У],\ K_{xy}\,.$$

$$K_{xx}=Д[X]\ ;\ K_{yy}=Д[Y];\ K_{xy}=M[X\cdot Y]-m_x m_y\,.$$

$$Д[X]=M\left[X^2\right]-m_x^2=\int\limits_0^{\pi/2}x^2\cdot 0{,}5(\sin x+\cos x)dx-\frac{\pi^2}{16}\approx 0{,}188\,.$$

$$Д[Y]=M\left[Y^2\right]-m_y^2\int\limits_0^{\pi/2}y^2\cdot 0{,}5(\sin y+\cos y)dy-\frac{\pi^2}{16}\approx 0{,}188\,.$$

$$K_{xy}=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2}xy\cdot 0{,}5\sin(x+y)dxdy-\frac{\pi^2}{16}\approx -0{,}046\,.$$

$$\left\|K_{xy}\right\|=\left\|\begin{matrix}0{,}118 & -0{,}046\\ -0{,}046 & 0{,}188\end{matrix}\right\|.$$

3. Определить в точке $x_0=2,\ y_0=2$ плотность распределения вероятностей системы двух нормально распределенных случайных величин, для которых $M[X]=M[Y]=0$.

$$\left\|K_{xy}\right\|=\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}\right\|.$$

Решение. Так как $K_{xy}=0$ и случайные величины X,Y распределены по нормальному закону, то случайные величины X,Y независимы и, следовательно,

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)\,.$$

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_x}\cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,,$$

$$f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_y}\cdot e^{-\frac{(x-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}\cdot e^{-\frac{y^2}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{4}}\,,$$

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)}\,,$$

$$f(2;2)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}(4+2)}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-3}\approx 0{,}0056\,.$$

Задачи для решения в аудитории

1. Совместное распределение случайных величин X, Y задано таблицей

Величины	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
1	5/24	1/6	1/8

Найти ряды распределения для X и $У$. Будут ли независимы X и $У$?

2. По цели производятся два независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна P_1, при втором – P_2. Построить таблицу распределения системы двух случайных величин (X, Y), где X - число попаданий при первом выстреле, $У$ - число попаданий при втором выстреле. Найти функцию распределения системы (X, Y).

3. Независимые случайные величины X и $У$ подчинены следующим законам распределения: $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$,

$$f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \le 0, \\ 1 & \text{при } 0 < y \le 1, \\ 0 & \text{при } y > 1. \end{cases}$$

Написать выражение функции распределения системы двух случайных величин (X, Y).

4. Дана функция распределения системы двух случайных величин (X, Y):

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \text{ или } y \le 0, \\ 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta y} + e^{-\alpha x - \beta y}, & \text{при } x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Определить, зависимы ли случайные величины X и Y. Найти плотность распределения вероятностей системы (X, Y). Вычислить числовые характеристики $M[X], M[Y], Д[X]$, $Д[Y]$.

5. Система случайных величин (X, Y) имеет плотность

$$f(x, y) = \frac{A}{\pi^2 (16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Определить величину A. Найти функцию распределения $F(x, y)$, $M[X]$, $M[Y]$. Определить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область, заданную неравенствами: $0 \le x \le 4; 0 \le y \le 5$.

6. Система двух случайных величин (X, Y), подчинена закону равномерной плотности внутри прямоугольника: $-a < x < a; -в < y < в \quad (в > a)$. Найти плотность распределения вероятности и вероятность P попадания случайной точки (X, Y) в квадрат со стороной $a/2$, если центр этого квадрата совпадает с началом координат.

7. Плотность распределения вероятностей систем двух независимых случайных величин (X, Y) задана следующим выражением:

$$f(x, y) = c \cdot e^{-\left[\frac{(x-4)^2}{50} + (y+6)^2\right]}.$$

Найти неизвестный параметр c и определить корреляционную матрицу системы.

Задачи для решения в аудитории

8. Закон распределения системы двух случайных величин (X, Y) задан таблицей распределения (рис. 1). Найти следующие характеристики системы (X, Y): $M[X], M[Y]$, $Д[X]$, $Д[Y]$, r_{xy}.

Величины	0	1
-1	0,10	0,15
0	0,15	0,25
1	0,20	0,15

Рисунок 6

9. Случайные величины (X, Y) независимы и их плотности распределения вероятностей соответственно равны:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > 2, \\ \frac{1}{4} & \text{при } |x| \le 2, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \le 2, \\ e^{-y} & \text{при } y > 2. \end{cases}$$

Определить функцию распределения системы случайных величин (X, Y). Найти числовые характеристики системы случайных величин (X, Y).

10. Функция совместного распределения случайных величин X и Y задана выражением

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0, \quad \text{или } \; y\le 0,\\ \left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-2y}\right) & \text{при } x>0, \quad \text{и} \quad y>0.\end{cases}$$

Определить, зависимы ли случайные величины X и Y. Найти плотность распределения вероятностей системы (X, Y). Найти вероятность одновременного выполнения неравенств $2\le x<3$ и $3\le y<5$.

11. Определить математическое ожидание и корреляционную матрицу системы двух случайных величин (X,Y), если плотность распределения вероятностей системы имеет следующий вид:

$$f(x, y)=\frac{2}{\pi\left(x^2+y^2+1\right)^3}.$$

Определить вероятность попадания случайной точки (X,Y) в круг радиусом $R=2$.

12. Случайная точка (X, Y) имеет равномерное распределение внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=в$. Найти функцию распределения $F(x, y)$ системы случайных величин (X, Y).

13. Система двух случайных величин (X, Y) имеет плотность распределения вероятностей $f(x, y)=\frac{1}{\pi}e^{-x^2-y^2}$.

Найти следующие числовые характеристики системы

$$M[X],\ M[Y]\ ,\ Д[X],\ Д[Y],\ k_{xy}.$$

О т в е т ы

2.

Величины	0	1
0	q_1q_2	p_1q_2
1	q_1p_2	p_1p_2

Где
$q_1=1-p_1$,

$q_2=1-p_2$.

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0 \quad \text{или} \; y\le 0,\\ q_1q_2 & \text{при} \quad 0<x\le 1,\ 0<y\le 1,\\ q_2 & \text{при} \quad x>1,\ 0<y\le 1,\\ q_1 & \text{при} \quad 0<x\le 1,\ y>1,\\ 1 & \text{при} \quad x>1, y>1.\end{cases}$$

3. $F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } y\le 0,\\ \frac{y}{2}[1\ \Phi(x)] & \text{при } 0<y\le 1,\\ \frac{1}{2}[1+\Phi(x)] & \text{при } y>1,\end{cases}$ где $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$.

4. а) нет; б) $f(x,y)=\begin{cases}\alpha\beta e^{-\alpha x-\beta y} & \text{при } x>0 \text{ и } y>0,\\ 0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0;\end{cases}$

в) $M[X]=\frac{1}{\alpha}$, $M[Y]=\frac{1}{\beta}$, $Д[Y]=\frac{1}{\alpha^2}$, $Д[Y]=\frac{1}{\beta^2}$.

5. а) $A=20$; б) $f(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{5}+\frac{1}{2}\right)$; в) $M[X]=M[Y]=0$;

г) $P=1/16$.

6. а) $f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } |x|>a \quad \text{или } |y|>в,\\ \frac{1}{4aв} & \text{при } -a<x<a \text{ и } -в<y<в;\end{cases}$ б) $P=\frac{a}{16в}$.

7. а) $C=\frac{1}{5\pi\sqrt{2}}$; б) $\|K_{xy}\|=\begin{Vmatrix}25 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{Vmatrix}$.

8. $M[X]=0{,}10$; $M[Y]=0{,}55$; $Д[X]=0{,}59$; $Д[Y]=0{,}2475$;
$r_{xy}=-0{,}144$.

9. $F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -2 \quad \text{или } y<0,\\ \frac{x+2}{4}\left(1-e^{-y}\right) & \text{при } -2<x\le 2 \text{ и } y>0,\\ 1-e^{-y} & \text{при } x>2 \text{ и } y>0;\end{cases}$

$M[X]=0$; $M[Y]=1$; $Д[X]=1{,}33$; $Д[Y]=1$;
$r_{xy}=0$.

10. а) нет; б) $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)} & \text{при } x>0 \text{ и } y>0,\\ 0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0;\end{cases}$ в) $P=0{,}208\cdot 10^{-3}$.

11. $M[X]=M[Y]=0$; $\|K_{xy}\|=\begin{Vmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{Vmatrix}$; $P=0{,}96$.

12. $F(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \text{ или } y \le 0, \\ \dfrac{xy}{ав} & \text{при } 0 < x \le a,\ 0 < y \le в, \\ \dfrac{x}{a} & \text{при } 0 < x \le a,\ y > в, \\ \dfrac{y}{в} & \text{при } x > a,\ 0 < y \le в, \\ 1 & \text{при } x > a,\ y > в. \end{cases}$

13. $M[X]=M[Y]=0$; $Д[X]=Д[Y]=0{,}5$; $K_{xy}=0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абезгауз Г.Г. и др. Справочник по вероятностным расчетам. М.: Воениздат, 1970.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1976.
3. Венцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.
4. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. Задачи и упражнения. М.: Наука, 1969.
5. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука,1969.
6. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. школа, 1972.
8. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. школа, 1970.
9. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, 1961.
10. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики: М.: Высш. школа, 1971.
11. Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. М.: Наука, 1977.
12. Ивашов-Мусатов О.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979.
13. Коваленко И.Н., Филиппов А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. школа, 1973.
14. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.
15. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979.
16. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А. А. Свешникова М.: Наука, 1970.
17. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. М.: Изд-во МГУ, 1972.
18. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964.
19. Халамайзер А.Я. Комбинаторика и бином Ньютона. М.: Просвещение, 1980.