Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ

Для студентов дневного отделения

Омск – 2003

Составители:

Веснина Алла Александровна, доцент
Котюргина Александра Станиславовна, доцент

Занятие 1

Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов

Определение 1. Геометрическим вектором, или просто вектором, называется **направленный отрезок.**

Будем обозначать вектор либо как направленный отрезок символом $\overrightarrow{AB}$, где точки A и B - начало и конец данного вектора, либо $\vec{a}$. Начало вектора называют **точкой его приложения**.

Определение 2. Вектор называется **нулевым,** если начало и конец его совпадают.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю. Это позволяет при записи отождествлять нулевой вектор с вещественным числом нуль.

Определение 3. Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Определение 4. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости.

Определение 5. Два вектора называются **равными**, если они коллиннеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

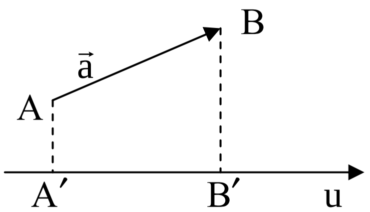
Все нулевые векторы считаются равными.

Определение 6. Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **вектор**, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.

Определение 7. Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется такой **вектор** $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

Определение 8. Произведением $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину, равную $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{a}$ при $\alpha>0$ и противоположное направлению вектора $\vec{a}$ при $\alpha<0$.

Обозначим буквами A' и B' основания перпендикуляров, опущенных на ось u из точек A и B соответственно.



Определение 9. Проекцией вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на ось u называется **величина** $A'B'$ направленного отрезка $\overrightarrow{A'B'}$ оси u и обозначается $\text{пр}_u\vec{a}$. $\text{пр}_u\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, где φ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью u.

Любой вектор $\vec{a}$ может быть разложен по декартову прямоугольному базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Числа x, y, z - называется декартовыми прямоугольными координатами вектора $\vec{a}$. Обозначим буквами α, β и γ углы наклона вектора $\vec{a}$ к осям координат; $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

Длина вектора через его координаты имеет вид $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Направляющие косинусы вектора вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

откуда следует $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Определение 10. Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}^0$, удовлетворяющий условиям:

1) $\vec{a}^0$ коллинеарен вектору $\vec{a}$,
2) $|\vec{a}^0| = 1$.

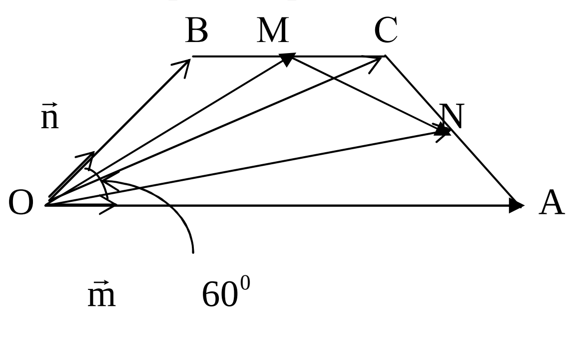
Координатами орта вектора являются направляющие косинуса.

Если два вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ заданы в декартовых прямоугольных координат $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$, $\alpha\vec{a} = (\alpha x_1)\vec{i} + (\alpha y_1)\vec{j} + (\alpha z_1)\vec{k}$.

Условие коллинеарности векторов имеет вид $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Примеры решения задач

Задача 1. В равнобедренной трапеции OACB угол $BOA = \pi/3, OB = BC = CA = 2$, $M\,N$ - середина сторон BC и AC. Выразить векторы $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MN}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы направлений $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.



Решение. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$. Так как $\overrightarrow{OB} = 2\vec{n}, \overrightarrow{BM} = \vec{m}, \overrightarrow{OM} = 2\vec{n} + \vec{m}$. Найдем вектор $\overrightarrow{AC}$. Из треугольника OCA $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, а так как $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$, а $\overrightarrow{OA} = 4\vec{m}$, то $\overrightarrow{AC} = 2\vec{n} + 2\vec{m} - 4\vec{m}$, вектор $\overrightarrow{AC} = 2(\vec{n} - \vec{m})$. Найдем $\overrightarrow{ON}$ из треугольника ONC $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{NC}$, а так как $\overrightarrow{OC}=2(\vec{n}+\vec{m})$, $\overrightarrow{NC}=\vec{n}-\vec{m}$, $\overrightarrow{ON}=\vec{n}+3\vec{m}$.

Из треугольника OMN $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=-2\vec{n}-\vec{m}+\vec{n}+3\vec{m}=-\vec{n}+2\vec{m}$.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, приложены к общей точке. Найти орт биссектрисы угла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Диагональ четырехугольника совпадает с биссектрисой, если этот четырехугольник – ромб (квадрат). Найдя $\overrightarrow{a^0}$ и $\overrightarrow{b^0}$, получим угол с одинаковыми по длине сторонами, равными единице. Таким образом, вектор $\vec{c}=\overrightarrow{a^0}+\overrightarrow{b^0}$ направлен по биссектрисе угла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$|\vec{a}|=\sqrt{4+9+36}=7$, $\overrightarrow{a^0}=\left(\frac{2}{7};-\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right)$, $|\vec{b}|=\sqrt{1+4+4}=3$, $\overrightarrow{b^0}=\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$,

$$\vec{c}=\overrightarrow{a^0}+\overrightarrow{b^0}=\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{3},\ -\frac{3}{7}+\frac{2}{3},\frac{6}{7}-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{1}{21},\frac{5}{21},\frac{4}{21}\right).$$

Найдем длину вектора $\vec{c}$ $|\vec{c}|=\sqrt{\left(\frac{1}{21}\right)^2+\left(\frac{5}{21}\right)^2+\left(\frac{4}{21}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{21}}$, тогда орт биссектрисы равен $\vec{c}^{\,0}=\frac{\bar{c}}{|\vec{c}|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{42}},\frac{5}{\sqrt{42}},\frac{4}{\sqrt{42}}\right)$.

Задача 3. Разложить вектор $\vec{S}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по трем некомпланарным векторам: $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{r}=2\vec{b}+3\vec{c}$.

Решение. $\vec{S}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}$. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}+\beta\vec{a}-\beta\vec{b}+2\gamma\vec{b}+3\gamma\vec{c}$.

Приравняем коэффициенты справа и слева:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1,\\ \alpha-\beta+2\gamma=1,\\ -2\alpha+3\gamma=1,\end{cases}\ \text{тогда}\ \alpha=\frac{2}{5};\ \beta=\frac{3}{5};\ \gamma=\frac{3}{5}\ \text{и}\ \vec{S}=\frac{2}{5}\vec{p}+\frac{3}{5}\vec{q}+\frac{3}{5}\vec{r}.$$

Задачи

1. Построить вектор $\vec{a}-2\vec{b}$ по данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. В треугольнике OAB даны векторы $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Найти векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$, где M – середина стороны AB.

3. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, проверить на чертеже справедливость тождества $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}+\vec{b}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.

4. В равнобочной трапеции ABCD известно нижнее основание $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, боковая сторона $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и угол между ними $\angle A=\pi/3$. Разложить по $\vec{a}$ и $\vec{b}$ все векторы, составляющие остальные стороны и диагонали трапеции.

5. Даны модуль вектора $|\vec{a}| = 2$ и углы $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 120^0$. Вычислить проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

6. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \{12, -15, -16\}$.

7. Вектор составляет с осями OX и OZ углы $\alpha = 120^0$ и $\gamma = 45^0$. Какой угол он составляет с осью OY?

8. Даны $\vec{a}\{3, -4, 5\}$, $\vec{b}\{-1, 0, -2\}$. Найти $\vec{c} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$, $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

9. Даны $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ и $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Вычислить $|\vec{a} - \vec{b}|$.

10. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 120^0$, причем $|\vec{a}| = 3$ и $|\vec{b}| = 5$. Определить $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

11. Даны четыре вектора: $\vec{a} = \{2, 1, 0\}$, $\vec{b} = \{1, -1, 2\}$, $\vec{c} = \{2, 2, -1\}$ и $\vec{d} = \{3, 7, -7\}$. Определить разложение каждого из этих четырех векторов, принимая в качестве базиса три остальных.

12. Даны точки $A(-1, 5, -10)$, $B(5, -7, 8)$ и $D(5, -4, 2)$. Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны; установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну сторону или в противоположные.

13. Найти орт вектора $\vec{a}\{6, -2, -3\}$.

14. Два вектора $\vec{a} = \{2, -3, 6\}$ и $\vec{b} = \{-1, 2, -2\}$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\vec{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при условии, что $|\vec{c}| = 3\sqrt{42}$.

15. Исследовать на линейную зависимость систему векторов $\vec{a}\{1, 0, -1\}$, $\vec{b}\{1, -1, 1\}$, $\vec{c}\{1, -3, -1\}$.

16. Доказать, что векторы $\vec{a}\{2, 2, 3\}$, $\vec{b}\{1, 2, 3\}$, $\vec{c}\{1, 1, 1\}$ линейно независимы и разложить по ним вектор $\vec{d}\{3, 0, -2\}$.

Домашнее задание

1. Определить точку N, с которой совпадает конец вектора $\vec{a} = \{3, -1, 4\}$, если его начало совпадает с точкой M (1, 2,- 3).

2. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями координат острые углы α, β, γ при $\alpha = 45^0$ и $\gamma = 60^0$. Найти его координаты, если $|\vec{a}| = 3$.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 60^0$, причем $|\vec{a}| = 5$ и $|\vec{b}| = 8$. Определить $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

4. Точка O является центром масс треугольника ABC. Доказать, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$.

5. Три силы $\vec{M}, \vec{N}$ и $\vec{P}$, приложенные к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Определить величину их равнодействующей $\vec{R}$, если известно, что $|\vec{M}| = 2$ Н, $|\vec{N}| = 10$ Н и $|\vec{P}| = 11$ Н.

6. Найти орт вектора $\vec{a} = \{3, 4, -12\}$.

7. Векторы $\overrightarrow{AB} = \{2, 6, -4\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{4, 2, -2\}$ совпадают со сторонами треугольника ABC. Определить координаты векторов, приложенных к вершинам треугольника и совпадающих с его медианами AM, BN, CP.

8. Даны вершины треугольника: $A(1, -1, -3)$, $B(2, 1, -2)$ и $C(-5, 2, -6)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

9. Зная векторы, служащие сторонами треугольника $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, найти векторы, соответственно коллинеарные биссектрисам углов этого треугольника.

10. На плоскости даны четыре точки: $A(1, -2)$, $B(2, 1)$, $C(3, 2)$ и $D(-2, 3)$. Определить разложение векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$, принимая в качестве базиса векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

11. Даны три вектора: $\vec{p} = \{3, -2, 1\}$, $\vec{q} = \{-1, 1, -2\}$, $\vec{r} = \{2, 1, -3\}$. Найти разложение вектора $\vec{c} = \{11, -6, 5\}$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

Ответы к задачам

4. $\overrightarrow{BC} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{|\vec{b} - \vec{a}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \frac{|\vec{a} - \vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$.

5. $\left(\sqrt{2}, 1, -2\right)$. 6. $\cos\alpha = \frac{12}{25}$; $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$.

7. 60^0 или 120^0. 8. $\vec{c} = (1, -8, 0)$, $\vec{d} = (11, -12, 19)$.

9. 22. 10. $\sqrt{19}$, 7.

11. $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{d}$, $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}$, $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$.

13. $\vec{a} = \left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$. 14. $\vec{c} = (-3, 15, 12)$. 16. $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$.

Ответы к домашнему заданию

1. $N(4{,}1{,}1)$. 2. $\vec{a}=\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. 3. $\sqrt{129}$, 7.

5. $|\vec{R}|=15H$. 6. $\vec{a}^0=\left(\frac{3}{12},\ \frac{4}{13},\ -\frac{12}{13}\right)$. 7. $\overrightarrow{AM}=(3,4,-3)$, $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$.

8. $\frac{3}{4}\sqrt{10}$.

9. $\vec{p}_1=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}-\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\vec{q}_1=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$, $\vec{r}_1=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{p}_2=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\vec{q}_2=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$, $\vec{r}_2=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$,

где $\vec{p}_1,\vec{q}_1,\vec{r}_1$ имеют направление внутренних углов A, B и C $\vec{p}_2$, $\vec{q}_2$, $\vec{r}_2$ имеют направления биссектрис одноименных внешних углов треугольника.

10. $\overrightarrow{AD}=11\overrightarrow{AB}-7\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}=10\overrightarrow{AB}-7\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}=11\overrightarrow{AB}-8\overrightarrow{AC}$,
$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\underline{CD}=32\overrightarrow{AB}-22\overrightarrow{AC}$. 11. $\vec{c}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$.

Занятие 2
Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$; $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$ (переместительное);
2) $\left(\alpha\vec{a},\vec{b}\right)=\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ (сочетательное относительно числового множителя);
3) $\left(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$ (распределительное относительно суммы векторов).

Если $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, то $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$.

Длина вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.

Физический смысл скалярного поизведения: если вектор $\vec{F}$ представляет силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}$, то работа A этой силы определяется равенством $A=\left(\vec{F},\vec{S}\right)$.

Примеры решения задач

Задача 1. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ таковы, что $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1,\ (\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = 60^0$.

Решение. Диагонали параллелограмма есть векторы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$. Вычислим длину вектора $\vec{c}$:

$|\vec{c}| = |\,(5\vec{m} + 2\vec{n}\,)| = \sqrt{(5\vec{m} + 2\vec{n})^2} = \sqrt{25(\overline{m},\vec{m}) + 20(\vec{m},\vec{n}) + 4(\vec{n},\vec{n})} = \sqrt{29 + 10 + 4} = \sqrt{43}$.

Аналогично вычисляется длина вектора $\vec{d}$.

Задача 2. Найдите вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (-1, 2,\ 2\,)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{b}, \vec{a}) = -2$.

Решение. Обозначим вектор $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тогда из условий задачи

$$\begin{cases} -b_1 + 2b_2 + 2b_3 = -2 \\ -b_1 = \dfrac{b_2}{2} = \dfrac{b_3}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad b_2 = -2b_1;\ b_3 = -2b_1;\ -9b_1 = -2;\ b_1 = 2/9,$$

тогда $b_2 = b_3 = -4/9$. Итак: $\vec{b} = (2/9, -4/9,\ -4/9\,)$.

Задача 3. Найти проекцию вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ на направление вектора $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$.

Решение. $\vec{b}^{\,0} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. По формуле проекции вектора на ось будет иметь место равенство

$$\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{u} = (\vec{u}, \vec{e}) = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 4. Даны векторы: $\vec{a} = (3, -3, -2)$, $\vec{b} = (-4, 1, 0)$, $\vec{c} = (-1, -2, -2)$, $\vec{d} = (-6, 6, 4)$.

Проверить, есть ли среди них коллинеарные. Найти $|\vec{a}\,|$, $|\vec{b}|$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

Решение. Условие коллинеарности имеет вид $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \dfrac{x_3}{y_3}$. Этому условию удовлетворяют векторы $\vec{a}$ и $\vec{d}$. Следовательно, они коллинеарны. Найдем длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 9 + 4} = \sqrt{22}$, $|\vec{b}| = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$.

Угол между векторами определяется по формуле $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Тогда $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{-12 - 3}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{17}} = \dfrac{-15}{\sqrt{374}}$, $\qquad (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \arccos\left(\dfrac{-15}{\sqrt{374}}\right)$.

Используя формулу $\text{пр}_{\vec b}\,\vec a = \dfrac{(\vec a, \vec b)}{|\vec b|}$, получим $\text{пр}_{\vec b}\,\vec a = \dfrac{-15}{\sqrt{17}}$.

Задача 5. На материальную точку действуют силы $\vec f_1 = -\vec j,\ \vec f_2 = -\vec i,\ \vec f_3 = -\vec k$. Найти работу равнодействующей этих сил $\vec R$ при перемещении точки из положения $A(2,-1,0)$ в положение $B(4,1,-1)$.

Решение. Найдем силу $\vec R$ и вектор перемещения $\vec R = \vec f_1 + \vec f_2 + \vec f_3 = -\vec i - \vec j - \vec k$. $\vec S = \overrightarrow{AB} = 2\vec i + 2\vec j - \vec k$, тогда искомая работа $A = (\vec R, \vec S) = -2 - 2 + 1 = -3$.

Задачи

1. Векторы $\vec a$ и $\vec b$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\vec c$ образует с ними углы $\pi/3$. Зная, что $|\vec a| = |\vec b| = 2,\ |\vec c| = 1$, найти: 1) $(2\vec a - \vec b)\cdot(\vec c - \vec a)$; 2) $(\vec a + \vec b + \vec c)^2$.

2. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec a = 5\vec p + 2\vec q$ и $\vec b = \vec p - 3\vec q$, если известно, что $|\vec p| = 2\sqrt{2},\ |\vec q| = 3$ и $(\widehat{\vec p, \vec q}) = \pi/4$.

3. Доказать, что вектор $\vec p = \vec b(\vec a, \vec c) - \vec c(\vec a, \vec b)$ перпендикулярен к вектору $\vec a$.

4. Зная, что $|\vec a| = 2,\ |\vec b| = 5$ и $(\widehat{\vec a, \vec b}) = 2\pi/3$, определить, при каком значении коэффициента α векторы $\vec p = \alpha\vec a + 17\vec b$ и $\vec q = 3\vec a - \vec b$ окажутся перпендикулярными.

5. Даны вершины четырехугольника: $A(1,2,3),\ B(7,3,2),\ C(-3,0,6),\ D(9,2,4)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

6. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec a\{2,1,0\}$ и $\vec b\{0,-1,1\}$.

7. Даны силы $\vec f_1 = \vec i - \vec j + \vec k$ и $f_2 = 2\vec i + \vec j + 3\vec k$. Найти работу их равнодействующей при перемещении точки из начала координат в точку $M(2,-1,-1)$.

8. Даны вершины треугольника: $A(4,1,0),\ B(2,2,1)$ и $C(6,3,1)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

9. Найти вектор $\vec u$, перпендикулярный векторам $\vec a = \vec i + \vec k$ и $\vec b = 2\vec j - \vec k$, если известно, что его проекция на вектор $\vec c = \vec i + 2\vec j + 2\vec k$ равна единице.

10. Сила, определяемая вектором $\vec R = \{1,-8,-7\}$, разложена по трем направлениям, одно из которых задано вектором $\vec a = 2\vec i + 2\vec j + \vec k$. Найти составляющую силы $\vec R$ в направлении вектора $\vec a$.

11. Даны вершины треугольника: $A(-1,-2,4),\ B(-4,-2,0)$ и $C(3,-2,8)$. Найти его внутренний угол при вершине A и внешний угол при вершине B.

12. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(-3,-2,0),\ B(3,-3,1)$ и $C(5,0,2)$. Найти его четвертую вершину D и угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

13. На оси OZ найти точку, равноудаленную от точек $A(-4, 1, 7)$ и $B(3, 5, -2)$.

14. Доказать, что треугольник с вершинами $A_1(3, -1, 6)$, $A_2(-1, 7, -2)$ и $A_3(1, -3, 2)$ прямоугольный.

Домашнее задание

1. Вычислить скалярное произведение двух векторов $(\vec{p}, \vec{q})$, зная их разложение по трем единичным взаимно перпендикулярным векторам $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{p} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$; $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b} - 5\vec{c}$.

2. Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, зная, что $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – взаимно перпендикулярные орты.

3. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60^0. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ и $|\vec{c}| = 6$, определить модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

4. Доказать, что вектор $\vec{p} = \vec{b} - \dfrac{\vec{a}(\vec{a}, \vec{b})}{\vec{a}^2}$ перпендикулярен к вектору $\vec{a}$.

5. Даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC. Найти разложение вектора, приложенного к вершине B этого треугольника и совпадающего с его высотой BD по базису $\vec{b}, \vec{c}$.

6. Вычислить угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - единичные взаимно перпендикулярные векторы.

7. Даны силы $\vec{M} = \{3, -4, 2\}$, $\vec{N} = \{2, 3, -5\}$ и $\vec{P} = \{-3, -2, 4\}$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1(5, 3, -7)$ в положение $M_2(4, -1, -4)$.

8. Даны вершины треугольника $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ и $C(3, -2, 1)$. Определить его внутренний угол при вершине B.

9. Вычислив внутренние углы треугольника с вершинами $A(1, 2, 1)$, $B(3, -1, 7)$, $C(7, 4, -2)$, убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

10. Найти вектор $\vec{u}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}\{-2, 0, 1\}$, $\vec{b}\{1, 2, 3\}$ и $(\vec{u}, \vec{c}) = 3$, где $\vec{c}\{1, -1, 0\}$.

11. Найти вектор $\vec{u}$, коллинеарный вектору $\vec{a}\{1, 2, 3\}$ и удовлетворяющий условию $(\vec{u}, \vec{c}) = 5$, где $\vec{c}\{-1, 0, 1\}$.

12. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = \{5, 2, 5\}$ на ось вектора $\vec{b} = \{2, -1, 2\}$.

13. Даны векторы $\vec{a} = \{1, -3, 4\}$, $\vec{b} = \{3, -4, 2\}$ и $\vec{c} = \{-1, 1, 4\}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

14. Даны точки $M(-5, 7, -6)$ и $N(7, -9, 9)$. Вычислить проекцию вектора $\vec{a}=\{1, -3, 1\}$ на ось вектора $\overrightarrow{MN}$.

Ответы к задачам

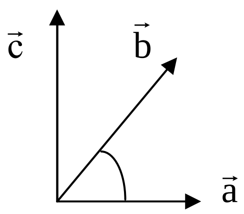
1) -7, 13. 2) 15, $\sqrt{593}$. 4) $\alpha = 40$. 6) $\arccos 1/\sqrt{5}$. 7) 2. 8) -1/3.
9) $(-2/3,\ 3/4,\ 3/2)$. 10) $(-14/3, -14/3, -7/3)$. 11) $90^0, \text{arcrcc}\ \varphi_2 = -1/\sqrt{2}$.
12) $\varphi = 120^0$, $D(-1,1,1)$. 13) $(0,0,14/9)$.

Ответы к домашнему заданию

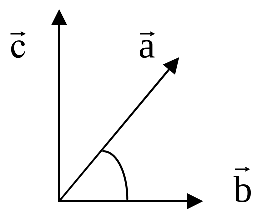
1) 9. 2) 5. 3) 10. 5) $\dfrac{(\vec{b},\vec{c})}{|\vec{c}|^2}\vec{c}-\vec{b}$. 6) $\pi/4$. 7) 13. 8) $\pi/4$.
10) $\vec{u} = (5/2, 5, 15/2)$. 12) 6. 13) 5. 14) 3.

Занятие 3
Векторое произведения векторов. Смешанное произведение векторов

Определение1. Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется правой (левой) если, находясь внутри телесного угла, образованного приведенными к общему началу векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и от него к $\vec{c}$, човершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке)



Тройка правая



Тройка левая

Определение 2. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $[\vec{a},\vec{b}]$, длина и направление которого определяются условиями:

1. $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{a}$, $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{b}$.
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка векторов.

Свойства векторного произведения

1. $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ (свойство антиперестановочности сомножителей);

2. $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=-[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$ (распределительное относительно суммы векторов);

3. $[\alpha\vec{a},\vec{b}]=\alpha[\vec{a},\vec{b}]$ (сочетательное относиельно числового множителя);

4. $[\vec{a},\vec{b}]=0 \Leftrightarrow \vec{a}\,\|\,\vec{b}$ (равенство нулю векторного произведения означает коллинеарность векторов);

5. $\vec{M}=[\vec{d},\vec{F}]$, т. е. момент сил равен векторному произведению силы на плечо.

Если вектор $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, то $[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$.

Определение 3. Смешанным произведением $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ трех векторов называется число, определяемое следующим образом: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$. Если векторы заданы своими координатами: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \sim \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения

1. Необходимым и достаточным условием компланарности векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ является равенство $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$.

2. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$: $V=|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти координаты векторного произведения $[(2\vec{a}-3\vec{b}),(2\vec{a}-4\vec{b})]$, если $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

Решение. Найдем $2\vec{a}-3\vec{b}=(0,1,1)$ и $2\vec{a}-4\vec{b}=(-2,2,0)$. Векторное произведение, по определению, равно $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$.

Задача 2. Силы $\vec{F}_1 = -2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{F}_2 = 3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ приложены к точке $A(3,\ 4,\ -1)$. Вычислить величину момента равнодействующей этих сил $\vec{R}$ относительно точки $B(1,\ 3,\ 0)$.

Решение. Найдем силу $\vec{R}$ и плечо $\vec{d}$: $\vec{R} = \vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{d} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Момент сил $\vec{M}$ вычисляется по формуле

$\vec{M} = \left[\vec{R}, \vec{d}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - a\vec{j} + 7\vec{k}$, а его модуль $\left|\vec{M}\right| = \sqrt{64 + 81 + 49} = \sqrt{194}$.

Задача 3. Даны координаты вершин параллелепипеда: $A(1,2,3)$, $B(0,1,2)$, $C(1,1,3)$, $D(0,0,3)$. Найти объем параллелепипеда, его высоту, опущенную из вершины C, угол между вектором AD и гранью, в которой лежат векторы AB и AC.

Решение. По определению, объем параллелепипеда равен смешанному произведению векторов, на которых он построен. Найдем эти векторы:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,-1), \quad \overrightarrow{AC} = (0,-1,0), \quad \overrightarrow{AD} = (-1,-2,0).$$

Объем этого параллелепипеда $V = \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1.$

С другой стороны, объем параллелепипеда $V = S_{осн} \cdot h$, $S_{осн}$ - это площадь параллелограмма: $S = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$.

$S_{осн} = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}\right\| = \left|-\vec{i} - \vec{k}\right| = \sqrt{2}$, тогда высота $h = \dfrac{v}{S_{осн}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Угол между вектором и гранью φ найдем по формуле

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \arccos \cdot \frac{\left|\left(\overrightarrow{AD}, \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right| \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|}.$$

так как вектор $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ перпендикулярен грани, в которой лежат векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Угол между этим вектором и вектором $\overrightarrow{AD}$ находим по известной формуле

$\cos\varphi = \dfrac{\left|\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\right|}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$. Очевидно, что искомый угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$.

Итак: $\psi = \dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Задача 4. Проверить, лежат ли в одной плоскости точки $A(0,0,1)$, $B(2,-1,3)$, $C(1,2,-2)$, $D(3,-4,8)$. Найти линейную зависимость вектора $\overrightarrow{AB}$ от $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, если это возможно.

Решение. Найдем три вектора: $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$.

$\vec{a}=(2,-1,2)$, $\vec{b}=(1,2,-3)$, $\vec{c}=(3,-4,7)$.

Три вектора лежат в одной плоскости, если они компланарны, т. е. их смешанное произведение равно нулю: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix}=0$. Следовательно, эти три вектора линейно зависимы. Найдем линейную зависимость $\overrightarrow{AB}$ от $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$: $\vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix},\ \begin{cases} \alpha+3\beta=2 \\ 2\alpha-4\beta=-1 \\ -3\alpha+7\beta=2, \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим $\alpha=\beta=1/2$, т.е. $\vec{a}=1/2\vec{b}+1/2\vec{c}$.

Задачи

1. $|\vec{a}_1|=1$, $|\vec{a}_2|=2$ и $(\widehat{\vec{a}_1,\vec{a}_2})=2\pi/3$. Вычислить: а) $\left|[\vec{a}_1,\vec{a}_2]\right|$; б) $\left|[2\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_1+2\vec{a}_2]\right|$; в) $\left|[\vec{a}_1+3\vec{a}_2,3\vec{a}_1-\vec{a}_2]\right|$.

2. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\pi/4$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$.

3. Заданы векторы $\vec{a}_1(3,-1,2)$ и $\vec{a}_2(1,2,-1)$. Найти координаты векторов: а) $[\vec{a}_1,\ \vec{a}_2]$; б) $[2\vec{a}_1+\vec{a}_2;\ \vec{a}_2]$; в) $[2\vec{a}_1-\vec{a}_2;\ 2\vec{a}_1+\vec{a}_2]$.

4. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$ и $C(4,3,2)$.

5. В треугольнике с вершинами $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ и $C(1,3,-1)$ найти высоту $h=\left|\overrightarrow{BD}\right|$.

6. Найти вектор $[\vec{a},\vec{a}+\vec{b}]+[\vec{a},[\vec{a},\vec{b}]]$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют следующие координаты:
$\vec{a}(2,1,-3)$, $\vec{b}(1,-1,1)$.

7. Сила $\vec{F}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ приложена к точке $A(4,-2,3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3,2,-1)$.

8. Установить, образуют ли векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ базис в множестве всех вектров, если а) $\vec{a}_1(2,3,-1)$, $\vec{a}_2(1,-1,3)$, $\vec{a}_3(1,9,-11)$; б) $\vec{a}_1(3,-2,1)$, $\vec{a}_2(2,1,2)$, $\vec{a}_3(3,-1,-2)$.

9. Вычислить объем тетраэдра OABC, если $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{i} + 5\vec{k}$.

10. В тетраэдре с вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 2)$, $C(2, 2, 2)$ и $D(3, 4, -3)$ вычислить высоту $h = \left|\overrightarrow{DE}\right|$.

11. Проверить, компланарны ли данные векторы:

а) $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $c = 14i - 13j + 7k$;

б) $a = 2i + j - 3k$, $b = 3i - 2j + 2k$, $c = i - 4j + k$.

12. Доказать, что четыре точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

13. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра ABCD , если известно, что она лежит на оси Oy, а объем тетраэдра равен V:

а) $A(-1, 10, 0)$, $B(0, 5, 2)$, $C(6, 32, 2)$, $V = 29$;

б) $A(0, 1, 1)$, $B(4, 3, -3)$, $C(2, -1, 1)$, $V = 2$.

Домашнее задание

1. Упростить выражение $\left[(2\vec{a} + \vec{b}), (\vec{c} - \vec{a})\right] + \left[(\vec{b} + \vec{c}), (\vec{a} + \vec{b})\right]$.

2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - единичные векторы, угол между которыми равен $\pi/3$.

3. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Найти вектор $\vec{u} = \left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \left[\vec{a}, \vec{c}\right]\right]$.

4. Дан треугольник с вершинами $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 2, 1)$. Найти его площадь.

5. Даны силы $\vec{M} = \{2, -1, -3\}$, $\vec{N} = \{3, 2, -1\}$ и $\vec{P} = \{-4, 1, 3\}$, приложенные к точке $C(-1, 4, -2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2, 3, -1)$.

6. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах:

1) $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$ и $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, где $\vec{p}, \vec{q}$ и $\vec{r}$ - взаимно перпендикулярные орты;

2) $\vec{a} = 3\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 1/2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 135^0$.

7. Доказать, что точки $A(1, 0, 7)$, $B(-1, -1, 2)$, $C(2, -2, 2)$, $D(0, 1, 9)$ лежат в одной плоскости.

8. Даны вершины тетраэдра $O(-5, -4, 8)$, $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины O на грань ABC.

9. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная,

что $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, вычислить $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

10. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30^0. Зная, что $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=3$, вычислить $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

11. Даны векторы $\vec{a}=\{1, -1, 3\}$, $\vec{b}=\{-2, 2, 1\}$, $\vec{c}=\{3, -2, 5\}$. Вычислить $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

12. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если

1) $\vec{a}=\{2, 3, -1\}$, $\vec{b}=\{1, -1, 3\}$, $\vec{c}=\{1, 9, -11\}$;

2) $\vec{a}=\{3, -2, 1\}$, $\vec{b}=\{2, 1, 2\}$, $\vec{c}=\{3, -1, -2\}$;

3) $\vec{a}=\{2, -1, 2\}$, $\vec{b}=\{1, 2, -3\}$, $\vec{c}=\{3, -4, 7\}$.

13. Доказать, что точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

14. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$ и $D(4, 1, 3)$.

15. Даны вершины тетраэдра $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$. Найти его высоту, опущенную из вершины D.

16. Объем тетраэдра $V=5$, три его вершины находятся в точках $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

Ответы к задачам

1) $\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 10\sqrt{3}$. 2) $50\sqrt{2}$. 3) (-3, 5, 7), (-6, 10, 14), (-12, 20, 28).

4) $2\sqrt{6}$. 5) 5. 6) (-20, 7, -11). 8) Нет, да. 9) 17/2. 10) $3\sqrt{2}$. 11) Да, нет.

13) (0, 0, 0), (0, 1, 0).

Ответы к домашнему заданию

1) $[\vec{a},\vec{c}]$. 2) $3\sqrt{3}/2$. 3) $-42\vec{a}$. 4) $\sqrt{22}$. 5) $\sqrt{66}, \frac{1}{\sqrt{66}}, -\frac{4}{\sqrt{66}}, -\frac{7}{\sqrt{66}}$. 6) 0. 8) 11.

9) 24. 10) ± 27. 11) -7. 12) Да, нет, да. 14) 3. 15) 11. 16) (0, 8, 0), (0, -7, 0).

Типовой расчет

Задача 1

1. По сторонам OA и OB прямоугольника OACB отложены единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Выразить через $\vec{i}$ и $\vec{j}$ векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{BA}$, если $OA = 3$, $OB = 4$.

2. Найти вектор $\vec{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\vec{a} = 7\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, если $|\vec{x}| = 5 \cdot \sqrt{6}$.

3. Найти вектор $\vec{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\vec{x}| = 2\sqrt{3}$.

4. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между которыми составляет 120^0. Построить вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - 1{,}5\vec{b}$ и определить его модуль, если $|\vec{a}| = 3$ и $|\vec{b}| = 4$.

5. В трапеции OACB $BC = OA/3$, BC / OA. Разложить геометрически и аналитически вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ по векторам $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

6. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{j}$ острый угол и имеющий длину $|\vec{x}| = 15$.

7. Найти вектор $\vec{x}$, образующий с ортом $\vec{j}$ угол 60^0, с ортом $\vec{k}$ - угол 120^0, если $|\vec{x}| = 5\sqrt{2}$.

8. Даны три вершины параллелограмма ABCD: $A(3,-4,7)$, $B(-5,3,-2)$ и $C(1,2,-3)$. Найти его четвертую вершину D, противоположную B.

9. На оси ординат найти точку M, равноудаленную от точек $A(1,-4,7)$ и $B(5,6,-5)$.

10. На оси абсцисс найти точку M, расстояние которой от точки $A(3,\,-3)$ равно пяти.

11. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2,\,0,\,2)$ и $D(5,\,-2,\,0)$ делится на три равные части.

12. Вектор составляет с осями OY и OZ углы 60^0 и 120^0. Какой угол он составляет с осью OX?

13. Даны три вершины параллелограмма: $A(1,\,-2,\,3)$, $B(3,\,2,\,1)$, $C(6,\,4,\,4)$. Найти его четвертую вершину D.

14. Вектор $\overrightarrow{OM}$ составляет с осью OX угол $\pi/4$, а с осью OY угол $\pi/3$, $|\overrightarrow{OM}| = 6$. Определить координаты точки M, если её ордината Z отрицательна, и выразить вектор $\overrightarrow{OM}$ через орты $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$.

15. Найти вектор $\vec{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\vec{x}| = 6\sqrt{3}$.

16. Найти вектор $\vec{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, если $|\vec{x}| = 4\sqrt{3}$.

17. На оси ординат найти точку M, равноудаленную от точек $A(1, 2, 3)$ и $B(-1, -3, 4)$.

18. Даны три вектора: $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(4, 5, 6)$, $\vec{c}(7, 8, 8)$. Найти разложение вектора $\vec{n}(-1, -4, 1)$ по базису $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

19. Составляют ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ базис в пространстве и каковы координаты вектора $\vec{p}$ в этом базисе. $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(0, 1, 2)$, $\vec{c}(1, 3, 6)$, $\vec{p}(2, 1, 2)$.

20. Составляют ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ базис в пространстве и каковы координаты вектора $\vec{p}$ в этом базисе. $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(-1, 0, 1)$, $\vec{c}(0, 2, 5)$, $\vec{p}(0, 1, 3)$.

21. Даны четыре вектора: $\vec{a}(1, 1, 1)$, $\vec{b}(0,1, 2)$, $\vec{c}(1, 2,3)$, $\vec{d}(-1,3, 2)$. Можно ли любые три из них принять за базис?

22. Найти вектор $\vec{x}$, образующий с ортом $\vec{i}$ угол $\pi/4$, с ортом $\vec{j}$ угол $\pi/6$, если $|\vec{x}| = 2\sqrt{3}$.

23. Найти линейную зависимость между векторами $\vec{a}(2, 0, 1)$, $\vec{b}(0,1, 2)$, $\vec{c}(2,1,4)$, $\vec{d}(0,1, 2)$.

24. Являются ли векторы $\vec{a}(-1,2, 0)$, $\vec{b}(0,-1, 3)$, $\vec{c}(-1, 1,3)$ компланарными?

25. Даны вершины треугольника: $A(1,-1, -3)$, $B(2,1, -2)$ и $C(-5, 2,-6)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

26. $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{BM}$ - медианы треугольника ABC. Выразить через $\vec{p} = \overrightarrow{AK}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{BM}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$.

27. В параллелограмме ABCD обозначены $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразить через a и b векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$, где M – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

28. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CN} = \beta\overrightarrow{CM}$. Полагая $\overrightarrow{AB} = \alpha$ и $\overrightarrow{AC} = b$, выразить $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

29. В ромбе ABCD даны диагонали $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Разложить по этим двум векторам все векторы, совпадающие со сторонами ромба: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

30. На трех некомпланарных векторах: $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$ и $\overrightarrow{AA'} = \vec{r}$ - построен параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Выразить через $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ векторы, совпадающие со всеми остальными ребрами, диагоналями и диагоналями граней этого параллелепипеда.

Задача 2

Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти: а) длину ребра A_2A_3, б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, в) проекцию вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ на вектор $\overrightarrow{A_3A_4}$.

1.	$A_1(1,-3,4)$	$A_2(-3,2,-3)$	$A_3(-3,-3,3)$	$A_4(-2,0,-4)$
2.	$A_1(1,-1,6)$	$A_2(4,5,-3)$	$A_3(-1,3,0)$	$A_4(6,1,5)$
3.	$A_1(1,1,1)$	$A_2(3,4,0)$	$A_3(-1,5,6)$	$A_4(4,0,5)$
4.	$A_1(0,0,0)$	$A_2(5,2,0)$	$A_3(2,5,0)$	$A_4(1,2,4)$
5.	$A_1(7,1,2)$	$A_2(-5,3,-2)$	$A_3(3,3,5)$	$A_4(4,5,-1)$
6.	$A_1(-2,3,-2)$	$A_2(2,-3,2)$	$A_3(2,2,0)$	$A_4(1,5,5)$
7.	$A_1(3,1,1)$	$A_2(1,4,1)$	$A_3(1,1,7)$	$A_4(3,4,-1)$
8.	$A_1(4,-3,-2)$	$A_2(2,2,3)$	$A_3(2,-2,-3)$	$A_4(-1,-2,3)$
9.	$A_1(5,1,0)$	$A_2(7,0,1)$	$A_3(2,1,4)$	$A_4(5,5,3)$
10.	$A_1(4,2,-1)$	$A_2(3,0,4)$	$A_3(0,0,4)$	$A_4(5-1,-3)$
11.	$A_1(3,1,4)$	$A_2(-1,6,1)$	$A_3(-1,1,6)$	$A_4(0,4,-1)$
12.	$A_1(3,3,9)$	$A_2(6,9,1)$	$A_3(1,7,3)$	$A_4(8,5,8)$
13.	$A_1(3,5,4)$	$A_2(5,8,3)$	$A_3(1,9,9)$	$A_4(6,4,8)$
14.	$A_1(2,4,3)$	$A_2(7,6,3)$	$A_3(4,9,3)$	$A_4(3,6,7)$
15.	$A_1(9,5,5)$	$A_2(-3,7,1)$	$A_3(5,7,8)$	$A_4(6,2,9)$
16.	$A_1(0,7,1)$	$A_2(4,1,5)$	$A_3(4,6,3)$	$A_4(3,9,8)$
17.	$A_1(5,5,4)$	$A_2(3,8,4)$	$A_3(3,5,10)$	$A_4(5,8,2)$
18.	$A_1(6,1,1)$	$A_2(4,6,6)$	$A_3(4,2,1)$	$A_4(1,2,6)$
19.	$A_1(7,5,3)$	$A_2(9,4,4)$	$A_3(4,5,7)$	$A_4(7,9,6)$
20.	$A_1(6,6,2)$	$A_2(5,4,7)$	$A_3(2,4,7)$	$A_4(7,3,0)$
21.	$A_1(4,0,0)$	$A_2(-2,1,2)$	$A_3(1,3,2)$	$A_4(3,2,7)$
22.	$A_1(-2,1,2)$	$A_2(4,0,0)$	$A_3(3,2,7)$	$A_4(1,3,2)$
23.	$A_1(1,3,2)$	$A_2(3,2,7)$	$A_3(4,0,0)$	$A_4(-2,1,2)$
24.	$A_1(3,1,-2)$	$A_2(1,-2,1)$	$A_3(-2,1,0)$	$A_4(2,2,5)$
25.	$A_1(1,-1,6)$	$A_2(4,5,-2)$	$A_3(-1,3,0)$	$A_4(6,1,5)$
26.	$A_1(1,-3,2,1)$	$A_2(3,2,-1)$	$A_3(1,1,-1,0)$	$A_4(0,1,0,0)$
27.	$A_1(2,-2,3,1)$	$A_2(1,-1,-1,0)$	$A_3(0,-1,-1,1)$	$A_4(2,1,1,1)$
28.	$A_1(0,0,1,3)$	$A_2(3,-3,1,2)$	$A_3(0,1,2,4)$	$A_4(1,1,2,1)$
29.	$A_1(1,1,2,1)$	$A_2(3,1,2,0)$	$A_3(1,1,4,1)$	$A_4(1,0,1,1)$
30.	$A_1(0,0,0,1)$	$A_2(1,1,1,0)$	$A_3(-1,-1,0,1)$	$A_4(1,2,1,0)$

Задача 3

1. Даны вершины четырехугольника: $A(1, 1, -4)$, $B(-5, 3, -5)$, $C(-3, 1, 2)$, $D(4, 0, 1)$. Доказать, что его диагонали $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ взаимно перпендикулярны.

2. Даны три вектора: $\vec{a} = \vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$. Вычислить проекцию вектора $(\vec{b} + \vec{c})$ на вектор $\vec{a}$.

3. Даны три вектора: $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Вычислить проекцию вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ на вектор $\vec{c}$.

4. Даны три вектора силы: $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{c} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$. Найти работу, совершаемую равнодействующей этих сил при перемещении точки ее приложения из точки $M(3, -4, 2)$ в точку $N(2, 3, -5)$.

5. Даны три вектора: $\vec{a}(1, -3, 4)$, $\vec{b}(3, -4, 2)$, $\vec{c}(-1, 1, 4)$. Вычислить $\text{пр}_{(\vec{b}+\vec{c})}\vec{a}$.

6. Найти угол между биссектрисами углов XOZ и YOZ.

7. Найти проекцию вектора $\vec{a}(2, -3, 4)$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

8. Даны силы $\vec{f}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{f}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Найти работу их равнодействующей при перемещении точки из начала координат в точку $A(2, -1, -1)$.

9. Даны вершины четырехугольника: $A(-2, 3, -4)$, $B(3, 2, 5)$, $C(1, -1, 2)$, $D(3, 2, -4)$. Проверить, будут ли его диагонали взаимно перпендикулярны?

10. Найти проекцию вектора $\vec{j} = (\sqrt{2}, -3, -5)$ на ось, составляющую с координатными осями OX, OZ углы $\alpha = 45^0, \gamma = 60^0$, а с осью OY – острый угол β.

11. Найти угол между биссектрисами углов XOY и YOZ.

12. Проекции перемещения движущей точки на оси координат равны $S_x = 2$, $S_y = 1$, $S_z = -2$. Проекции движущей силы $\vec{F}$ на оси координат равны $F_x = 5$; $F_\gamma = 4$; $F_z = 3$. Вычислить работу силы $\vec{F}$ и угол между силой $\vec{F}$ и перемещением $\vec{S}$.

13. Даны точки: $A(-2, 3, -4)$, $B(3, 2, 5)$, $C(1, -1, 2)$, $D(3, 2, -4)$. Найти $\text{пр}_{(\overline{AC}+\overline{DB})}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$.

14. Найти проекцию вектора $\vec{S}(4, -3, 2)$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

15. К одной и той же точке приложены силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, действующие под углом 120^0, причем $|\vec{P}| = 7$ и $|\vec{Q}| = 4$. Найти равнодействующую сил $\vec{R}$.

16. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F}(6, -2, 1)$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(3, 4, -2)$ в положение $B(4, -2, -3)$.

17. Даны силы $f_1 = 5\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$, $f_2 = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$, $f_3 = 12\vec{i} - \vec{j} + 15\vec{k}$. Найти вели-

чину и направление равнодействующей силы $\vec{R}$ и работу, которую она совершает, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}(2, -5, -7)$.

18. Силы $\vec{f}_1 = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{f}_2 = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ приложены к одной точке. Найти работу, которую производит равнодействующая этих сил при прямолинейном перемещении из точки $M_1(5, 3, -7)$ в точку $M_2(4, -1, -4)$.

19. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти проекцию вектора $(\vec{a} + \vec{c})$ на вектор $(\vec{b} + \vec{c})$.

20. Даны силы $\vec{F}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{F}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{F}_3 = -5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно и равномерно, перемещается из положения $K(-1, 3, -7)$ в положение $B(2, -1, 5)$.

21. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{f}(3, -5, 2)$, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}(2, -5, -7)$.

22. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(2, 1, 0)$ и $\vec{b}(0, -1, 1)$.

23. Даны силы $\vec{f}_1(3, -4, 2)$, $\vec{f}_2(2, 3, -5)$, $\vec{f}_3(-3, -2, 4)$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $C(5, 3, -7)$ в положение $B(4, -1, 4)$.

24. Даны векторы $\vec{a}(1, -1, 2)$ и $\vec{b}(2, -2, 1)$. Найти проекцию вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ на направление вектора $\vec{b}$.

25. На материальную точку действуют силы $\vec{f}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{f}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{f}_3 = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Найти работу равнодействующий этих сил $\vec{R}$ при перемещении точки из положения $A(2, -1, 0)$ в положение $B(4, 1, -1)$.

26. Найти проекцию вектора $\vec{a} = 10\vec{m} + 2\vec{n}$ на ось, имеющую направление вектора $\vec{b} = 5\vec{m} - 12\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - взаимно перпендикулярные орты. Вычислить углы между осью проекций и единичными векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

27. На оси абсцисс найти точку М, расстояние от которой до точки $A(3, -3)$ равно пяти.

28. На оси ординат найти точку М, равноудаленную от точек $A(1, -4, 7)$ и $B(5, 6, -5)$.

29. Даны вершины треугольника: $A(3, -1, 5)$, $B(4, 2, -5)$ и $C(-4, 0, 3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины А.

30. Треугольник задан координатами своих вершин $A(3, -2, 1)$, $B(3, 1, 5)$, $C(4, 0, 3)$.Вычислить расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.

Задача 4

1. Даны три вектора: $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям $(\vec{x},\vec{a})=-5$, $(\vec{x},\vec{b})=-11$, $(\vec{x},\vec{c})=20$.

2. Дан вектор $\vec{b}(1,0,1)$. Найти вектор $\vec{c}$ единичной длины, перпендикулярный оси OZ и образующий с вектором $\vec{b}$ угол $\pi/4$.

3. Даны два вектора: $\vec{a}(1,1,1)$, $\vec{b}(1,0,0)$. Найти вектор $\vec{c}$ единичной длины, перпендикулярный вектору $\vec{a}$, образующий с вектором $\vec{b}$ угол $\pi/3$ и с осью OY тупой угол.

4. В плоскости XOZ найти вектор $\vec{a}$, перпендикулярный вектору $\vec{b}(4,12,-3)$ и имеющий одинаковую с ним длину.

5. В плоскости XOZ найти вектор $\vec{p}$, перпендикулярный вектору $\vec{q}(5,-3,4)$ и имеющий одинаковую с ним длину.

6. Вектор $\vec{p}$, коллинеарный вектору $\vec{a}(3,-4,-12)$, образует с осью OY острый угол. Найти координаты вектора $\vec{p}$, если $|\vec{p}|=39$.

7. Вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}(6,-8,-7,5)$, образует острый угол с осью OZ. Зная, что $|\vec{x}|=50$, найти его координаты.

8. Даны три вектора: $\vec{a}(4,3,-2)$, $\vec{b}(6,5,1)$, $\vec{c}(2,-3,0)$. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный вектору $\vec{c}$ и удовлетворяющий условиям $(\vec{a},\vec{x})=4$ и $(\vec{b},\vec{x})=35$.

9. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}$, если известно, что $(\vec{x},(2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}))=9$.

10. Даны три вектора: $\vec{a}(1,1,1)$, $\vec{b}(8,4,1)$, $\vec{c}(2,2,1)$. Найти вектор $\vec{d}$, образующий с осью OY острый угол, а с вершинами $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равные углы, если $|\vec{d}|=1$, $\vec{d}\perp\vec{a}$.

11. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}(2,1-1)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{x}\cdot\vec{a})=3$.

12. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=18\vec{i}-22\vec{j}-5\vec{k}$, образует с осью OY тупой угол. Найти его координаты, зная, что $|\vec{x}|=14$.

13. Даны два вектора $\vec{a}(4,0,3)$ и $\vec{b}(11,10,2)$. Найти третий вектор, длина которого равна единице, и известно, что он составляет с осью OY острый угол и перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

14. Даны два вектора: $\vec{a}(3,-1,5)$ и $\vec{b}(1,2,-3)$. Найти вектор $\vec{x}$ при условии, что он перпендикулярен к оси OZ и удовлетворяет условиям: $(\vec{x},\vec{a})=9$ и $(\vec{x},\vec{b})=-4$.

15. Даны два вектора: $\vec{a}(8,4,1)$ и $\vec{b}(2,-2,1)$. Найти третий вектор $\vec{d}$, такой, что $|\vec{d}|=1$, $\vec{d}\perp\vec{a}$, $\vec{d}\perp\vec{b}$.

16. Найти вектор $\vec{x}$, такой, что $|\vec{x}|=1,\ \vec{x}\perp\vec{a},\ \ \vec{a}=(1,\ 1,\ 1),\ \left(\vec{x},\left(\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}\right)\right)=0$.

17. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}(2,3,-1)$ и $\vec{b}(1,-2,3)$ и удовлетворяет условию $\left(\vec{x}\left(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)\right)=-6$.

18. Даны два вектора: $\vec{a}(11,10,2)$ и $\vec{b}(4,0,3)$. Найти вектор $\vec{c}$, такой, что $|\vec{c}|=1,\ \vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$ и угол между вектором $\vec{c}$ и осью OY – тупой.

19. Даны векторы $\vec{a}(1,0,0)$ и $\vec{b}(1,1,1)$. Найти такой вектор $\vec{c}$, что $|\vec{c}|=1,\ \vec{c}\perp\vec{b},\ (\widehat{\vec{c},\ \vec{a}})=\pi/3$ и угол между вектором и осью OY – острый.

20. В плоскости YOZ найти вектор $\vec{m}$, перпендикулярный вектору $\vec{n}(12,-3,4)$ имеющий одинаковую с ним длину.

21. Даны три вектора $\vec{a}(8,4,1),\ \vec{b}(2,2,1),\ \vec{c}(1,1,1)$. Найти вектор $\vec{d}$ единичной длины, образующий с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равные углы, перпендикулярный вектору $\vec{c}$ и направленный так, что образует угол с осью OY тупой угол.

22. В плоскости XOY найти вектор $\vec{p}$, перпендикулярный вектору $\vec{q}(5,-3,4)$ и имеющий одинаковую : $\vec{a}(0,1,1)$ и $\vec{b}(1,1,0)$. Найти вектор $\vec{c}$ единичной длины, перпендикулярный к вектору $\vec{a}$, образующий с вектором $\vec{b}$ угол $\pi/4$ и с осью OZ тупой угол.

23. Даны два вектора: $\vec{a}(0,1,1)$ и $\vec{b}(1,1,0)$. Найти вектор $\vec{c}$ единичной длины, перпендикулярный к вектору $\vec{a}$, образующий с вектором $\vec{b}$ угол $\pi/4$ и с осью OZ тупой угол.

24. Даны три вектора: $\vec{a}(3,-2,4),\ \vec{b}(5,1,6),\ \vec{c}(-3,0,2)$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям $(\vec{a},\vec{x})=4,\ (\vec{b},\vec{x})=35,\ (\vec{c},\vec{x})=0$.

25. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}$, если $\text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{x}=1$, где $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

26. Найти длину вектора $\vec{a}=3\vec{m}-4\vec{n}$, зная, что, $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - взаимно перпендикулярные орты.

27. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}|=2\sqrt{2},\ |\vec{q}|=3$ и $(\widehat{\vec{p}\vec{q}})=\pi/4$.

28. К одной и той же точке приложены две силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, действующие под углом 120^0, причем $|\vec{P}|=7$ и $|\vec{Q}|=4$. Найти величину равнодействующей силы $\vec{R}$.

29. Найти равнодействующую пяти компланарных сил, равных по величине и приложенных к одной и той же точке, зная, что углы между каждыми двумя последовательными силами равны 72^0.

30. Вычислить угол между векторами $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Задача 5

1. Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам: $\overrightarrow{AB} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = -7\vec{a} + 2\vec{b}$. Вычислить длину медианы AM.

2. Найти проекцию вектора $\vec{a} = 10\vec{m} + 2\vec{n}$ на ось, имеющую направление вектора $\vec{\ell} = 3\vec{m} - 12\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - взаимно перпендикулярные орты. Вычислить углы между осью проекций и единичными векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют, угол $\varphi = \pi/6$, зная, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

4. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$- единичные векторы с углом между ними $\pi/3$.

5. Дан треугольник с вершинами $A(-1, 5, 1)$, $B(1, 1, -2)$, $C(-3, 3, 2)$. Определить его внешний угол при вершине C.

6. Зная векторы, образующие треугольник: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + 7\vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = -3\vec{a} - \vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярные орты - определить углы этого треугольника.

7. Даны векторы: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, причем $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^0$. Определить угол между медианой $\overrightarrow{OM}$ треугольника AOB и стороной $\overrightarrow{OA}$.

8. Определить угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \pi/4$.

9. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, с углом между ними $\pi/6$.

10. Даны вершины четырехугольника: $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$, $D(-5, -5, 3)$. Доказать, что диагонали взаимно перпендикулярны.

11. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$- единичные векторы, угол между которыми $\pi/3$.

12. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

13. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{s}$ и $\vec{t}$, если известно, что векторы $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ и $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ взаимно перпендикулярны.

14. Даны вершины треугольника: $A(1, 2, 1)$, $B(3, -1, 7)$, $C(7, 4, -2)$. Используя скалярное произведение, убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

15. Даны вершины треугольника: $A(3, 2, -3)$, $B(5, 1, -1)$, $C(1, -2, 1)$. Определить его внешний угол при вершине A.

16. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{m}-2\vec{n}$, $\vec{b}=3\vec{m}-\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, угол между которыми $\pi/3$.

17. Вычислить угол между векторами $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - единичные взаимно перпендикулярные векторы.

18.Зная, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$ и $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{2}{3}\pi$, определить, при каком значении коэффициента α векторы $\vec{p}=\alpha\vec{a}+17\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{d}-\vec{b}$ окажутся перпендикулярными.

19. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{q}|=-3$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/4$.

20. Дан треугольник $A(-3,-2,1)$, $B(3,0,2)$ и $C(1,2,5)$. Найти его внутренний угол φ_1 при вершине A и внешний угол φ_2 при вершине B.

21. Какой угол в треугольнике с вершинами $A(1,2,3)$, $B(4,-1,3)$, $C(5,4,-4)$ прямой?

22. Дан вектор $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы с углом между ними 120^0. Найти $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{m}})$, $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{n}})$.

23. Найти угол между векторами $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол 120^0.

24. Даны вершины четырехугольника $A(1,2,3)$, $B(7,3,2)$, $C(-3,0,6)$, $D(9,2,4)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

25. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, угол между которыми 60^0.

26. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(-3,5,6)$, $B(1,-5,7)$, $C(8,-3,-1)$ и $D(4,7,-2)$ - квадрат.

27. Найти косинус угла φ между диагоналями (AC) и (BD) параллелограмма, если заданы три его вершины $A(2,1,3)$, $B(5,2,-1)$, $C(-3,3,-3)$.

28. Вычислить работу силы $\vec{F}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ при перемещении материальной точки из положения A(-1, 2, 0) в положение B (2, 1, 3).

29. Даны векторы $\vec{a}(1,1)$ и $\vec{b}(1,-1)$. Найти косинус угла между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$, удовлетворяющими системе уравнений $2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$, $\vec{x}+2\vec{y}=\vec{b}$.

30. Векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$.

Задача 6

1. Треугольник ABC – равнобедренный, $AB = BC$, $AC = 6$, BD - высота, $\vec{e}$ - единичный вектор в направлении AC. Найти скалярные произведения $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{e}$, $\overrightarrow{CB} \cdot \vec{e}$.

2. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно 8 и 9, а угол между ними 150^0. Найти скалярные квадраты векторов и их скалярное произведение.

3. Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, зная, что $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - взаимно перпендикулярные орты.

4. Упростить выражение $|\vec{a}|^2 + 3(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 2(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 1$, если $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{c} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, где $|\vec{m}|^2 = 4$, $|n|^2 = 1$, $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \pi/2$.

5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 2/3\pi$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить $((3\vec{a} + 2\vec{b}), (\vec{a} - 2\vec{b}))$.

6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 2/3\pi$. Зная, что $|\vec{a}| = 11$ и $|\vec{b}| = 2$, вычислить $((2\vec{a} + 3\vec{b}), (2\vec{a} - \vec{b}))$.

7. Дан равносторонний треугольник ABC, длина сторон которого равна единице. Вычислить выражение $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

8. В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC катет равен 5 см. Найти скалярное произведение $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$.

9. Даны точки $A(-1, 3, -7)$, $B(2, -1, 5)$ и $C(0, 1, -5)$. Вычислить $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) \cdot (2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$.

10. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\pi/3$. Зная, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 1$, найти $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$.

11. Вычислить значение выражения $3|\vec{m}|^2 - 2(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) + 4|\vec{n}|^2$, если $|\vec{m}| = 1/3$, $|\vec{n}| = 6$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \pi/3$.

12. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\pi/2$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить $((3\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 3\vec{c}))$.

13.Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60^0. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 6$, определитель модуля вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

14. Найти модуль вектора $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, угол между которыми равен $\pi/3$.

15. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\pi/3$. Зная, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$, найти $((2\vec{a} - \vec{b}), (\vec{c} - \vec{a}))$.

16. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Зная, что

$|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=1,\ |\vec{c}|=4$, вычислить $(\vec{a}\cdot\vec{b})+(\vec{b}\cdot\vec{c})+(\vec{c}\cdot\vec{a})$.

17. В равнобедренном треугольнике ABC $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=10,\ \overrightarrow{AC}=8$, BD- высота. Найти скалярное произведение $\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$.

18. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4$, вычислить $\left(\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right),\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\right)$.

19. Треугольник ABC – равносторонний, со стороной, равной шести. BD - высота. Найти скалярные произведения $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right),\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DB}\right),\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)$.

20. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\pi/3$. Зная, что $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4$, найти длину вектора $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$.

21. Даны: $|\vec{a}|=12,\ |\vec{b}|=20,\ |\vec{a}+\vec{b}|=25$. Вычислить $|\vec{a}-\vec{b}|$.

22. Даны три вектора: $\vec{a}(3,-2),\ \vec{b}(-5,-1),\ \vec{c}(0,4)$. Найти:
$2\left(\vec{a},\vec{b}\right)\cdot\vec{c}-3\vec{b}^2\cdot\vec{a}+\left(\vec{a},\vec{c}\right)\cdot\vec{b}$.

23. ABCDEF-правильный шестиугольник со стороной, равной четырем. Найти $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$.

24. В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC проведены медианы AN и BM из вершин острых углов. Вычислить угол φ между ними.

25. Даны три вектора: $\vec{a}(3,-2),\ \vec{b}(-5,1),\ \vec{c}(0,4)$. Найти
$3\vec{a}^2-4\left(\vec{a}\vec{b}\right)+5\left(\vec{b}\vec{c}\right)-6\left(\vec{b}\vec{c}\right)-2\vec{c}^2$.

26. Даны точки A(2, 2) и B(5, -2). На оси абсцисс найти такую точку M, чтобы $\widehat{AMB}=\pi/2$.

27. Вычислить $\text{пр}_{\vec{a}+\vec{b}}(2\vec{a}-\vec{b})$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ и $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=120^0$.

28. Известно, что $\overrightarrow{AB}=2\vec{e}_1-6\vec{e}_2$ и $\overrightarrow{AC}=3\vec{e}_1+\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ - взаимно перпендикулярные орты. Определить углы треугольника ABC.

29. Найти угол, образованный единичными векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, если известно, что векторы $\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ и $\vec{b}=5\vec{e}_1-4\vec{e}_2$ перпендикулярны.

30. Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

Задача 7

1. Даны вершины треугольника $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$. Вычислить высоту, опущенную из вершины B на сторону AC.

2. Даны точки $A(1, 2, 0)$, $B(1, 0, 3)$ и $C(5, 4, 6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

3. Найти площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\vec{m}-\vec{n}$ и $4\vec{m}-5\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол $\pi/4$.

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}=2\vec{i}+3\vec{j}$ и $\vec{q}=\vec{i}-4\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - взаимно перпендикулярные орты.

5. Построить векторы $\vec{a}=3\vec{k}-2\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$. Вычислить модули вектора $\vec{c}$ и площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Вычислить диагонали и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{k}-\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

7. Построить треугольник с вершинами $A(1,-2,8)$, $B(0,0,4)$, $C(6,2,0)$. Вычислить его площадь и высоту BD.

8. Даны $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$, $(\vec{a},\vec{b})=12$. Вычислить $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$.

9. Сила $\vec{p}=\{2, 2, 9\}$ приложена к точке $A(4, 2, -3)$. Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки $C(2, 4, 0)$.

10. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$, $C(4, 5, -2)$.

11. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=2\pi/3$. Зная, что $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, вычислить

а) $\left[(2\vec{a}+\vec{b}),(\vec{a}+2\vec{b})\right]^2$; б) $\left[(\vec{a}+3\vec{b}),(3\vec{a}-\vec{b})\right]^2$.

12. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, вычислить:

а) $\left|\left[(\vec{a}+\vec{b}),(\vec{a}-\vec{b})\right]\right|$; б) $\left|\left[(3\vec{a}-\vec{b}),(\vec{a}-2\vec{b})\right]\right|$.

13. Даны три силы $\vec{F}_1=\{2,-2,3\}$, $\vec{F}_2=\{1,3,4\}$, $\vec{F}_3=\{-3,5,2\}$, приложенные к точке $M_1(3,1,2)$. Найти момент равнодействующей этих сил относительно точки $M_2(1,-2,3)$.

14. Найти площадь параллелограмма и его высоту, если известно, что диагоналями параллелограмма служат векторы $\vec{a}=3\vec{n}-\vec{n}$, $\vec{b}=2\vec{n}+4\vec{m}$, где $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=\pi/3$.

15. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{m}=3\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{n}=\vec{p}+2\vec{q}$, где $|\vec{p}|=|\vec{q}|=2$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\pi/6$.

16. Найти высоту треугольника, построенного на векторах $\vec{p}=2\vec{m}-\vec{n}$ и $\vec{q}=\vec{m}-4\vec{n}$, где $|\vec{m}|=|\vec{n}|=2$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=120^0$.

17. Вычислить $\left|\left[\left(5\vec{a}-\vec{b}\right),\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right]\right|$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$, $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4$.

18. Найти площадь и высоту треугольника, построенного на векторах $\vec{m}=3\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}$, где $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\ \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=120^0$.

19. Вычислить площадь и высоту параллелограмма, если его диагоналями служат векторы $2\vec{m}-\vec{n}$ и $4\vec{m}-5\vec{n}$, где $|\vec{m}|=2,\ |\vec{n}|=3,\ \left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=60^0$.

20. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\pi/3$. Зная, что $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2, |\vec{c}|=1$, найти $\left[\left(2\vec{a}-\vec{b}\right),\left(\vec{c}-\vec{b}\right)\right]$.

21. Вычислить момент равнодействующей двух сил $\vec{p}=(1,2,0)$ и $\vec{q}=(-1,0,1)$, приложенных к точке $A(0,2,0)$, относительно начала координат.

22. Даны точки $A(3,-2,3)$, $B(2,3,-1)$ и $C(4,1,2)$. Найти координаты векторного произведения $\left[\left(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA}\right),\overrightarrow{CB}\right]$.

23. Сила $\vec{F}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ приложена к точке $M(2,-1)$. Найти величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

24. Сила $\vec{p}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ приложена к точке $M(1,2,3)$. Найти величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки $A(3,2,-2)$.

25. Зная две стороны треугольника $\overrightarrow{AB}=3\vec{p}-4\vec{q}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{p}+5\vec{q}$, вычислить длину его высоту $\left|\overrightarrow{CD}\right|$ при условии, что $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - взаимно перпендикулярные орты.

26. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{m}-3\vec{n}$, где $\vec{m}=5, \vec{n}=3$ и $(\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/6$.

27. Зная две стороны треугольника $\overrightarrow{AB}=3\vec{p}-4\vec{q}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{p}+5\vec{q}$, вычислить длину его высоты $\overrightarrow{CD}$ при условии, что $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - перпендикулярные друг другу орты.

28. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на данных векторах: $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$ и $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}+\vec{p}$, где $\vec{m},\vec{n}$ и $\vec{p}$ - взаимно перпендикулярные орты.

29. Даны силы: $\vec{F}_1(2,-1,-3)$, $\vec{F}_2(3,2,-1)$ и $\vec{F}_3(-4,1,3)$, приложенные к точке $A(-1,4,2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $O(2,3,-1)$.

30. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\vec{e}_1-\vec{e}_2$ и $4\vec{e}_1-5\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ - единичные векторы и $(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_2})=\pi/4$.

Задача 8

1. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ такие, что $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=30^0$.

2. Даны три силы, $\vec{F}_1(1, 3, 4)$, $\vec{F}_2=(2, -2, 3)$, $\vec{F}_3=(-3, 5, 2)$, приложенные к точке $B(3, 1, 2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(1, -2, 3)$.

3. Даны точки $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$ и $C(3, 2, 1)$. Найти координаты векторных произведений: а) $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right]$, б) $\left[\left(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA}\right), \overrightarrow{BC}\right]$.

4. Сила $\vec{F}=(3, 2, -4)$ приложена к точке $A(2, -1, 1)$. Определить момент этой силы относительно начала координат, а также направляющие косинусы момента этой силы.

5. Сила $\vec{F}=(2, -4, 5)$ приложена к точке $M_0(4, -2, 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $A(3, 2, -1)$ и направляющие косинуса этого момента.

6. Построить параллелограмм на векторах $\vec{a}=2\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$, вычислить его площадь и высоту.

7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\pi/6$. Зная, что $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=5$, вычислить $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|$.

8. Даны три силы $\vec{F}_1=(2, -1, 3)$, $\vec{F}_2=(3, 2, -1)$, $\vec{F}_3=(-4, 1, 3)$, приложенные к точке $C(-1, 4, -2)$. Определить величину и направляющие косинусы равнодействующей этих сил относительно точки $A(2, 3, -1)$.

9. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 45^0. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{n}=3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$.

10. Даны $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$, $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|=72$. Вычислить $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

11. Зная векторы, совпадающие со сторонами треугольника $\overrightarrow{AB}=(2, 1, -2)$ и $\overrightarrow{BC}=(3, 2, 6)$, вычислить площадь этого треугольника.

12. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и удовлетворяющий условию $(\vec{x}, \vec{a})=3$.

13. Векторы $\vec{p}$ и $\vec{n}$ составляют угол 120^0. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{p}-4\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{n}$, если $|\vec{p}|=|\vec{n}|=1$.

14. Найти силы $\vec{F}_1=(1, -1, -1)$, $\vec{F}_2=(-2, 3, 1)$, $\vec{F}_3=(3, -1, -2)$, приложенные к точке $A(3, 4, 5)$. Найти величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(0, -1, 2)$.

15. Упростить $\left(2\vec{i}, \left[\vec{j}, \vec{k}\right]\right)+\left(3\vec{j}, \left[\vec{i}, \vec{k}\right]\right)+\left(4\vec{k}, \left[\vec{i}, \vec{j}\right]\right)$.

16. Сила $\vec{Q}=(3,-2,4)$ приложена к точке $A(10,-5,10)$. Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

17. Даны три силы $\vec{P}=(-1,3,2)$, $\vec{Q}=(2,-3,4)$, $\vec{R}=(-3,12,6)$, приложенные к точке $M_1(0,2,4)$. Найти момент равнодействующей этих сил относительно точки $M_2(-1,2,1)$.

18. Найти координаты векторного произведения: $\left[\left(2\vec{a}-\vec{b}\right),\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]$, если $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

19. Упростить выражение $\left[\vec{i},\left(\vec{j}+\vec{k}\right)\right]-\left[\vec{j},\left(\vec{i}+\vec{k}\right)\right]+\left[\vec{k},\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)\right]$.

20. Даны силы $\vec{P}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{Q}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, приложенные к точке $A(2,-1,-1)$. Найти величину момента равнодействующей этих сил относительно начала координат.

21. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол в 45^0. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{n}=3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$, и его высоту.

22. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{n}=3\vec{a}-\vec{b}$, где $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=120^0$.

23. Вычислить площадь параллелограмма, если его диагонали $2\vec{m}+\vec{n}$ и $4\vec{m}-5\vec{n}$, где $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=60^0$.

24. Упростить $\left(2\vec{i},\left[\vec{j},\vec{k}\right]\right)+\left(8\vec{j},\left[\vec{i},\vec{k}\right]\right)+\left(4\vec{k},\left[\vec{i},\vec{j}\right]\right)$.

25. Сила $\vec{p}=3\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$ приложена к точке $A(5,-1,4)$. Определить момент этой силы относительно точки $B(4,3,0)$ и орт вектора $\overrightarrow{AB}$.

26. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $a_1(4,-2,-3)$ и $a_2(0,1,3)$, образует с ортом $\vec{j}$ тупой угол и $|\vec{x}|=26$.

27. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если он перпендикулярен векторам $\vec{a}_1(2,-3,1)$ и $\vec{a}_2(1,-2,3)$, а также удовлетворяет условию $\left(x,(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})\right)=10$.

28. Вектор $\vec{m}$, перпендикулярный к оси OZ и к вектору $\vec{a}=(8,-15,3)$, образует острый угол с осью OX. Зная, что $|\vec{m}|=51$, найти его координаты.

29. Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}_1(2,3,-1)$ и $\vec{a}_2(1,-2,3)$ и удовлетворяет условию $\left(\vec{x},(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\right)=-6$. Найти координаты $\vec{x}$.

30. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}=(2,-3,1)$ и $\vec{b}=(1,-2,3)$ и удовлетворяет условию $\left(\vec{x},(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})\right)=10$.

Задача 9

Даны координаты точек A, B, C, D. Найти: а) объем пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) высоту пирамиды, опущенную из вершины C; в) высоту треугольника ABD, опущенную из вершины B; г) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$; д) угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и гранью, в которой лежат векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

1.	$A(2, 3, 1)$	$B(-5, -4, 8)$	$C(6, 3, 7)$	$D(4, 1, -2)$
2.	$A(2, -1, 1)$	$B(4, 1, 3)$	$C(5, 5, 4)$	$D(3, 2, -6)$
3.	$A(2, 0, 0)$	$B(0, 3, 0)$	$C(0, 0, 6)$	$D(2, 3, 8)$
4.	$A(3, 4, 0)$	$B(0, -3, 1)$	$C(0, 2, 5)$	$D(1, 2, 0)$
5.	$A(5, 2, 0)$	$B(2, 5, 0)$	$C(1, 2, 4)$	$D(0, 1, 2)$
7.	$A(1, -3, 1)$	$B(2, 1, -3)$	$C(1, 2, 1)$	$D(2, 2, 1)$
8.	$A(2, -1, 3)$	$B(1, 4, 2)$	$C(3, 1, -1)$	$D(3, -1, 0)$
9.	$A(5, 1, 1)$	$B(-7, 3, -3)$	$C(1, 3, 4)$	$D(2, 5, -2)$
10.	$A(3, 3, -4)$	$B(2, -4, 3)$	$C(-3, 7, -1)$	$D(5, 3, 4)$
11.	$A(-5, -4, 8)$	$B(6, 3, 7)$	$C(4, 1, -2)$	$D(2, 3, 1)$
12.	$A(4, 0, 0)$	$B(-2, 1, 2)$	$C(1, 3, 2)$	$D(3, 2, 7)$
13.	$A(2, 2, 1)$	$B(4, 2, 5)$	$C(3, 0, 3)$	$D(-2, 4, 0)$
14.	$A(-2, 1, 2)$	$B(4, 0, 0)$	$C(3, 2, 7)$	$D(1, 3, 2)$
15.	$A(1, 3, 2)$	$B(3, 2, 7)$	$C(4, 0, 0)$	$D(-2, 1, 2)$
16.	$A(10, -5, 10)$	$B(-11, -2, 10)$	$C(-2, -14, 5)$	$D(1, 2, 0)$
17.	$A(3, 1, -2)$	$B(1, -2, 1)$	$C(-2, 1, 0)$	$D(2, 2, 5)$
18.	$A(1, -3, 1)$	$B(-3, 2, -3)$	$C(-3, -3, 3)$	$D(-2, 0, 4)$
19.	$A(3, 1, 1)$	$B(1, 4, 1)$	$C(1, 1, 7)$	$D(3, 4, -1)$
20.	$A(2, 1, 5)$	$B(2, -1, 4)$	$C(-2, 2, 5)$	$D(4, 2, -3)$
21.	$A(1, 1, 1)$	$B(3, 4, 0)$	$C(-1, 5, 6)$	$D(4, 0, 5)$
22.	$A(3, 2, 6)$	$B(1, 5, -4)$	$C(4, 7, -5)$	$D(0, 0, 1)$
23.	$A(4, 2, -1)$	$B(3, 0, 4)$	$C(0, 0, 4)$	$D(5, -1, -3)$
24.	$A(1, -3, 1)$	$B(-3, 2, -3)$	$C(-3, -3, 3)$	$D(-2, 0, -4)$
25.	$A(4, 2, -1)$	$B(3, 0, 4)$	$C(0, 0, 4)$	$D(5, -1, -3)$
26.	$A(3, 2, 1)$	$B(1, 2, -1)$	$C(1, -2, 3)$	$D(1, 3, 5)$
27.	$A(1, 3, -3)$	$B(4, 0, 2)$	$C(1, 1, -1)$	$D(4, 4, 0)$
28.	$A(2, 3, 0)$	$B(3, 0, -2)$	$C(7, 1, 3)$	$D(1, -1, 1)$
29.	$A(1, 1, 4)$	$B(-1, 2, 3)$	$C(1, 1, 2)$	$D(0, -1, 1)$

30.	$A(3,1,-1)$	$B(-1,-2,4)$	$C(7,0,-5)$	$D(1,\ 2,-1)$

Задача 10

Проверить, лежат ли в одной плоскости точки A, B, C, D, и найти линейную зависимость вектора $\overrightarrow{AB}$ от $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, если это возможно.

1.	$A(2,3,2)$	$B(1,2,6)$	$C(0,3,2)$	$D(3,4,-2)$
2.	$A(1,1,0)$	$B(1,-1,0)$	$C(0,0,1)$	$D(2,2,-1)$
3.	$A(1,2,3)$	$B(1,-1,0)$	$C(0,0,1)$	$D(5,10,11)$
4.	$A(0,0,1)$	$B(2,1,0)$	$C(3,1,1)$	$D(6,3,-2)$
5.	$A(2,1,0)$	$B(-1,-3,-1)$	$C(0,1,-1)$	$D(5,5,1)$
6.	$A(2,-2,1)$	$B(3,-1,0)$	$C(3,2,4)$	$D(4,0,-1)$
7.	$A(1,2,3)$	$B(-1,-2,-3)$	$C(0,0,1)$	$D(2,4,6)$
8.	$A(1,1,0)$	$B(2,-1,1)$	$C(-1,2,-1)$	$D(3,-3,2)$
9.	$A(2,1,1)$	$B(-1,2,-1)$	$C(2,1,-1)$	$D(5,\ 0,3)$
10.	$A(1,1,3)$	$B(2,0,4)$	$C(3,1,2)$	$D(4,-2,6)$
11.	$A(1,3,2)$	$B(1,2,3)$	$C(3,2,1)$	$D(5,1,0)$
12.	$A(-1,\ 2,3)$	$B(2,3,-1)$	$C(-1,-2,-3)$	$D(5,4,-5)$
13.	$A(3,2,4)$	$B(0,3,2)$	$C(1,2,6)$	$D(6,1,6)$
14.	$A(1,2,6)$	$B(0,3,2)$	$C(3,2,4)$	$D(2,1,10)$
15.	$A(0,3,2)$	$B(3,2,4)$	$C(2,3,2)$	$D(6,1,6)$
16.	$A(1,1,4)$	$B(0,1,0)$	$C(2,0,4)$	$D(2,0,4)$
17.	$A(1,3,3)$	$B(-1,0,0)$	$C(1,0,-1)$	$D(1,2,2)$
18.	$A(3,-1,0)$	$B(0,0,1)$	$C(1,0,1)$	$D(3,\ 1,-1)$
19.	$A(1,1,2)$	$B(2,3,1)$	$C(3,1,-1)$	$D(4,7,-1)$
20.	$A(1,1,-2)$	$B(3,1,-1)$	$C(-2,3,1)$	$D(3,1,-1)$
21.	$A(1,3,4)$	$B(2,3,4)$	$C(-1,2,-3)$	$D(5,3,4)$
22.	$A(0,0,1)$	$B(1,1,0)$	$C(2,2,0)$	$D(4,4,-3)$
23.	$A(2,1,1)$	$B(2,4,0)$	$C(4,2,2)$	$D(2,-8,4)$
24.	$A(-1,2,-2)$	$B(-1,0,3)$	$C(-2,0,6)$	$D(-1,4,-8)$
25.	$A(1,3,-2)$	$B(2,0,1)$	$C(-3,0,4)$	$D(3,-3,4)$
26.	$A(1,2,-1)$	$B(3,1,5)$	$C(4,3,4)$	$D(5,0,11)$
27.	$A(1,1,3)$	$B(4,0,2)$	$C(5,1,5)$	$D(7,-1,1)$
28.	$A(1,1,2)$	$B(3,0,3)$	$C(4,1,5)$	$D(7,-2,5)$
29.	$A(1,-3,-2)$	$B(3,3,4)$	$C(4,0,2)$	$D(5,9,10)$
30.	$A(2,1,1)$	$B(4,1,5)$	$C(6,2,6)$	$D(6,1,9)$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ильин В. А., Позднях Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1971.

2. Цубербиллер О. Н. Задачи и управжнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1966.

3. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. – М: Наука, 1987.

4. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Физматгиз, 1963.

5. Сборник задач по математике для втузов. / Под ред. А. В.Ефимова и Б. П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. Ч. 1.

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01
Подписано в печать 25.02.03. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 2,25 Уч.-изд. л. 2,25
Тираж 500 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г.Омск, пр-т Мира,11
Типография ОмГТУ