Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ № 1 – 5
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Для дистанционного обучения студентов-заочников

Омск – 2005

Составители: Веснина Алла Александровна, доцент,
Стругова Татьяна Михайловна, ст. преподаватель.

Печатается по решению редакционно-издательского отдела Омского государственного технического университета.

Контрольная работа № 1
“МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ”

ЗАДАНИЕ 1. Вычислить определители:

1.	а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.
2.	а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.
3.	а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.
4.	а) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.
5.	а) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.
6.	а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$.
7.	а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$.

8.	а) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.
9.	а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.
10.	а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.
11.	а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.
12.	а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$.
13.	а) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.
14.	а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.
15.	а) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

16.	а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;	б) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$;	в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;	г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & -2 \\ 1 & -3 & -7 & 6 \end{vmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 2. Умножить матрицы:

1.	а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.
2.	а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
3.	а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;
4.	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
5.	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6.	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
7.	а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.
8.	а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

9.	а) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -7\\ 1 & 4\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 3\\ 10 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & -4 & 1\\ -25 & 9 & -2\\ 15 & -5 & 1\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
10.	а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 5 & 8\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}11 & -4 & 1\\ -25 & 9 & -2\\ 15 & -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 3\\ 10 & 5 & 1\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$.
11.	а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.
12.	а) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ -4 & 3 & -5\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.
13.	а) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 7 & 1\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.
14.	а) $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -3 & 2 & 0\\ 4 & -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}$.
15.	а) $\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 7\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}$.
16.	а) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$;	в) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 3. Найти обратные матрицы для матриц:

1. а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.	**2.** а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
3. а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.	**4.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
5. а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.	**6.** а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
7. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.	**8.** а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
9. а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.	**10.** а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
11. а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.	**12.** а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
13. а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.	**14.** а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
15. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.	**16.** а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 4. Найти ранг матрицы двумя способами:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$	**2.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$	**3.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$	**5.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$	**6.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$
7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$	**8.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$	**9.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$
10. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$	**11.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$	**12.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$
13. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$	**14.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$	**15.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$
16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$		

Образец выполнения контрольной работы № 1
“МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ”

1) Вычислить определители

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$

Решение. Этот определитель вычислим по правилу диагоналей. Приписываем справа к определителю первый и второй столбцы. Перемножаем элементы, стоящие на главной диагонали и складываем это произведение с аналогичными произведениями элементов, стоящих на диагоналях, параллельных главной. Затем к произведению элементов, стоящих на побочной диагонали, прибавляем аналогичные произведения элементов, стоящих на диагоналях, параллельных побочной. Затем от первой суммы вычитаем вторую. Это и будет искомый определитель.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= (1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8) - (3\cdot 5\cdot 7 + 1\cdot 6\cdot 8 + 2\cdot 4\cdot 9) =$$

$$= (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) = 225 - 225 = 0$$

Ответ: $\Delta = 0$.

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$

Решение. Решение найдем разложением по первому столбцу, но сначала с помощью свойств определителя сделаем нули в этом столбце везде кроме элемента, равного минус единице.

Для этого элементы **второй** строки умножим на два и прибавим к соответствующим элементам **первой** строки; элементы **второй** строки прибавим к соответствующим элементам **третьей** строки; элементы **второй** строки умножим на два и прибавим к соответствующим элементам **четвертой** строки. Эти действия записываем так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} (2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & 7 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 7 \end{vmatrix}.$$

Разложив определитель 4-го порядка по 1-му столбцу, свели его вычисление к нахождению одного определителя 3-го порядка, который можно вычислить по правилу диагоналей, разобранному выше. Можно дальше применить свойства определителя и свести этот определитель к одному определителю 2-го порядка. Продолжаем делать нули теперь уже во второй строке, умножая элементы третьего столбца на (-4) и прибавляя к первому и второму столбцам:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16 & -17 & \cancel{5} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ -20 & -21 & \cancel{7} \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -16 & -17 \\ -20 & -21 \end{vmatrix} = -(16\cdot 21 - 20\cdot 17) = -(336-340) = 4.$$

(-4)

(-4)

Ответ: $\Delta = 4$.

2) Умножить матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} (1) & [2] \\ (3) & [4] \\ (5) & [6] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1) & (2) \\ [3] & [4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)\cdot(1) + & [2]\cdot[3] & (1)\cdot(2)+ & [2]\cdot[4] \\ (3)\cdot(1)+ & [4]\cdot[3] & (3)\cdot(2)+ & [4]\cdot[4] \\ (5)\cdot(1)+ & [6]\cdot[3] & (5)\cdot(2)+ & [6]\cdot[4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}.$$

3х2 2х2 3х2

Решение. Произведение матриц получили, умножая элементы строк первой матрицы на соответствующие элементы столбцов второй матрицы и складывая их.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}$.

3) Найти обратные матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала находим $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$; $\Delta \neq 0$, значит, существует матрица A^{-1}. Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \underset{(+)}{(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 4 \end{vmatrix} = 4; \qquad A_{21} = \underset{(-)}{(-1)^{2+1}}\begin{vmatrix} \cancel{1} & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{4} \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{12} = \underset{(-)}{(-1)^{1+2}}\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{4} \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{22} = \underset{(+)}{(-1)^{2+2}} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1; \qquad A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

4) Найти двумя способами ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$

Решение.

<u>1 способ.</u> Метод окаймляющих миноров. Находим любой минор второго порядка, отличный от нуля, например $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(2) - (2)(-1) = -2 + 2 = 0$, поэтому выписываем другой определитель $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5\cdot 8 - 1\cdot 1 = 40 - 1 = 39 \neq 0$. Нашелся определитель второго порядка, отличный от нуля, значит ранг A $rA \geq 2$. Теперь найдем определитель третьего порядка, окаймляющий найденный $\Delta_2 \neq 0$.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = (1-)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Берем другой определитель, окаймляющий $\Delta_2 \neq 0$:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 0\text{, как и предыдущий.}$$

Больше окаймляющих миноров третьего порядка для $\Delta_2 \neq 0$ нет, поэтому ранг A, равный наивысшему порядку минора, отличного от нуля, равен двум.

2 способ. **Метод элементарных преобразований.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} (-2)(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} (-2) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили 2-е нулевые строки. Поэтому ранг A равен 2 (очевидно минор второго порядка $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$).

Ответ: $r\,A = 2$.

Контрольная работа № 2
“СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ”

ЗАДАНИЕ 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

1.	а) $\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$.
2.	а) $\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 7 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$.
3.	а) $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + z = -1 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$.
4.	а) $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y - 4z = 12 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x - y - z = -1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$.
5.	а) $\begin{cases} x + 3y + 3z = 11 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y - z = 1 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x - 2z = 11 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y + 4z = -1 \end{cases}$.

6.	а) $\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 4x+2y+5z=5 \\ 3x+4y+7z=2 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 2x+6y+z=2 \\ 4x+8y-z=2 \end{cases}$.
7.	а) $\begin{cases} 2x+4y+z=4 \\ 3x+6y+2z=4 \\ 4x-y-3z=1 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 4x+y+4z=9 \\ 3x+5y+2z=10 \end{cases}$.
8.	а) $\begin{cases} 3x-3y+2z=2 \\ 4x-5y+2z=1 \\ 5x-6y+4z=3 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x+2y-4z=8 \\ 2x+4y-5z=11 \\ 4x-3y+2z=1 \end{cases}$.
9.	а) $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$.
10.	а) $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$.
11.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22 \\ 2x-5y+4z=4 \end{cases}$.
12.	а) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=5 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=-2 \end{cases}$.
13.	а) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x+y+2z=6 \\ 3x-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.
14.	а) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x+3y-z=-3 \\ 4x+y+3z=9 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.

15.	а) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2; \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x-4y+z=3 \\ x-5y+3z=-1. \\ x-y+z=1 \end{cases}$
16.	а) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=3; \\ x-y+2z=5 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 5x+y+3z=14. \\ 2x+y+2z=5 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

1.	а) $\begin{cases} x+y-z=3 \\ x+y+z=1; \\ x+y=2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ -x+4y+z=3 \\ 3x+y-13z=-6 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} x+y-z=3 \\ x+y+z=1; \\ x+y=1 \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2x+7y+3z+t=6 \\ 3x+5y+2z+2t=4. \\ 9x+4y+z+7t=2 \end{cases}$
2.	а) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 4x-11y+10z=5 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x-3y+5z+7t=1 \\ 4x-6y+2z+3t=2 \\ 2x-3y-11z-15t=1 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=3; \\ 3x+6y+9z=2 \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{cases}$;
3.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2; \\ 3x+6y+9z=3 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+4y+6z=3; \\ 3x+y-z=1 \end{cases}$	г) $\begin{cases} x+2y+3z-t=1 \\ 3x+2y+z-t=1. \\ 5x+5y+2z=2 \end{cases}$

4.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ 5x+y-z=7 \end{cases}$;	г) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases}$.
5.	а) $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+3y-z=3 \\ 4x-y+z=11 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=-2 \\ 3x+4y+3z=0 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=10 \end{cases}$;	г) $\begin{cases} x+2y+3z+4t=5 \\ x-y+z-t=1 \end{cases}$.
6.	а) $\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ 3x+y-13z=-6 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3 \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-3y+4z=2 \\ 11x-12y+17z=3 \end{cases}$;	г) $\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{cases}$.
7.	а) $\begin{cases} x+2y-6z=5 \\ 2x-y+3z=-7 \\ 5x+5y-15z=8 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} 2x-y+3z=9 \\ 3x-5y+z=-4 \\ 4x-7y+z=5 \end{cases}$;	г) $\begin{cases} x+2y+3z+4t=5 \\ x-y+z-t=1 \end{cases}$.
8.	а) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 4x-11y+10z=5 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 11x+17y+6z-39u=1 \\ 2x-3y-5z-u=0 \\ x+32y+31z-34u=1 \end{cases}$;

8. в) $\begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2 \\ 7x-4y+3t=5 \\ 5x+7y-4z-6t=3 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y-3z=13 \\ 3x-2y+4z=-15 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$.

9. а) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+3y-z=1 \\ 3x+4y-z=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ x-2y+z-t=-1 \\ x-2y+z+5t=5 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2 \\ 7x-4y+z+3t=5 \\ 5x+7y-4z-6t=3 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x-y-3z=13 \\ 2x+y-z=0 \\ 3x-2y+4z=-15 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$.

10. а) $\begin{cases} 2x-y+3z=-7 \\ x+2y-6z=-1 \\ -x+5y-15z=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x-3y+2z=5 \\ 3x-y+4z=7 \\ 5x-7y+8z=1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x-y+3z-7t=5 \\ 6x-3y+z-4t=7 \\ 4x-2y+14z-31t=18 \end{cases}$.

11. а) $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 3x+2y-4z=2 \\ 5x-2y+2z=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-11y+4z=13 \\ 2x-10y+5z=1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 9x-3y+5z+6t=4 \\ 6x-2y+3z+t=5 \\ 3x-y+3z+14t=-8 \end{cases}$.

12. а) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ 2x-y+5z=12 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-7y+6z=4 \\ x+12y-11z=-7 \\ 3x-2y+z=1 \\ 8x+y-3z=-1 \end{cases}$;

12.	в) $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 2x-y-z=-6 \\ 3x-4y+3z=0 \end{cases}$;	г) $\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 2x+6y+z=2 \\ 4x+8y-z=2 \\ 3x+9y+3z=6 \end{cases}$.
13.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3 \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} x+2y-2z=5 \\ 2x-y-3z=4 \\ 3x+y-5z=1 \end{cases}$;	г) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=-2 \\ 3x+4y+3z=0 \end{cases}$.
14.	а) $\begin{cases} 3x+2y+z=-1 \\ 7x+6y+5z=5 \\ 5x+4y+3z=2 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x-3y+5z+7t=1 \\ 4x-6y+2z+3t=2 \\ 2x-3y-11z-15t=1 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} x-y+3z=0 \\ 2x-7y+5z=1 \\ 3x-8y+8z=5 \end{cases}$;	г) $\begin{cases} x+2y+3z+4t=5 \\ x-y+z-t=1 \end{cases}$.
15.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ 2x-y+5z=12 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+3z-t=1 \\ 3x+2y+z-t=1 \\ 5x+5y+2z=2 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} x+2y+2z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 3x+y+4z=1 \end{cases}$;	г) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$.
16.	а) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+3y-z=1 \\ 3x+4y-z=5 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases}$;
	в) $\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 2x-y-2z=-4 \\ 3x+y-4z=1 \end{cases}$;	г) $\begin{cases} 9x-3y+5z+6t=4 \\ 6x-2y+3z+t=5 \\ 3x-y+3z+14t=-8 \end{cases}$.

Задание 3. Решить системы однородных уравнений:

1.	а) $\begin{cases} 3x+4y+2z=0 \\ x-y+4z=0 \\ 5x+2y+10z=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+2y-z=0 \\ 2x+5y+3z=0 \\ 4x+3y=0 \end{cases}$.
2.	а) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 3x+6y+9z=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x-y+3z-t=0 \\ 2x+2y-z+2t=0 \\ 2x-7y+5z-t=0 \end{cases}$.
3.	а) $\begin{cases} x+2y+z+t=0 \\ 2x+5y+z+5t=0 \\ 3x+8y+z+9t=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.
4.	а) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-y+2z=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+2y-3z=0 \\ 3x+z=0 \\ 5x+2y-2z=0 \end{cases}$.
5.	а) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 4x+4y-4z=0 \\ 5x+5y-5z=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x-y+z+t=0 \\ x+3y-z-2t=0 \\ 3x-y-4z-t=0 \end{cases}$.
6.	а) $\begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ 2x+3y-5z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 4x-3y+z-t=0 \\ 2x+y+3z-5t=0 \\ x-2y-2z+3t=0 \end{cases}$.
7.	а) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \\ 4x-11y+10z=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 3x+5y+4z=0 \\ 3x-2y-4z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \end{cases}$.
8.	а) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \\ 5x-7y+8z=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t=0 \\ 6x-4y+4z+3t=0 \\ 9x-6y+3z+2t=0 \end{cases}$.
9.	а) $\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ x-y+z=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x-y+3z+14t=0 \\ 6x-2y+3z+t=0 \\ 9x-3y+5z+6t=0 \end{cases}$.

10.	а) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+z-t=0 \\ x-12y+4z+2t=0 \\ 3x-5y+3z+t=0 \end{cases}$.
11.	а) $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+2y-5z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+2y+z+t=0 \\ x+y+2z-t=0 \\ 2x+y+z-2t=0 \end{cases}$.
12.	а) $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ x+2y+9z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ x+y+3z=0 \\ 2x+2y+4z=0 \end{cases}$.
13.	а) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 5x-y+2z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x+5y+4z+3t=0 \\ 2x-y+2z-t=0 \\ 5x+3y+8z+t=0 \end{cases}$.
14.	а) $\begin{cases} 2x+y-4z=0 \\ 3x+5y-7z=0 \\ 4x-5y-6z=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x-2y-4z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \\ 5x+8y-3z=0 \\ 3x+y-6z=0 \end{cases}$.
15.	а) $\begin{cases} 3x+5y+2z=0 \\ 4x+7y+5z=0 \\ x+y-4z=0 \\ 2x+9y+6z=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ 2x-2y+4z=0 \\ 5x-5y+10z=0 \end{cases}$.
16.	а) $\begin{cases} 2x-4y+5z+3t=0 \\ 3x-6y+4z+2t=0 \\ 4x-8y+17z+11t=0 \end{cases}$;	б) $\begin{cases} 3x+2y+z=0 \\ 2x+5y+3z=0 \\ 3x+4y+2z=0 \end{cases}$.

Образец выполнения контрольной работы № 2
“СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ”

1) Решить систему матричным способом: $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y-z=1. \\ x-2y=-3 \end{cases}$

Решение. Пусть $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Тогда данную систему можно записать в виде матричного уравнения $AX=B$. Решаем его, домножая слева на обратную матрицу: $A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow EX=A^{-1}B$. Отсюда получаем решение $X=A^{-1}B$. Найдем сначала A^{-1}.

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=3\underset{(-)}{(-1)^{2+1}}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=3(-1)(0-(-2))=-6.$$

($\Delta_A \neq 0$, значит $A^{-1}\ \exists$).

$$A_{11}=\underset{(+)}{(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=0-2=-2$$

$$A_{21}=\underset{(-)}{(-1)^{2+1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=-(0-(-2))=-2$$

$$A_{31}=\underset{(+)}{(-1)^{3+1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1-1=0$$

$$A_{12}=\underset{(-)}{\left(-1\right)^{2+2}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-\left(0-\left(-1\right)\right)=-1,$$

$$A_{22}=\underset{(+)}{\left(-1\right)^{1+2}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0-1=-1$$

$$A_{32} = \underset{(-)}{(-1)^{3+2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-2) = 3, \qquad A_{13} = \underset{(+)}{(-1)^{1+3}}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4-1 = -5,$$

$$A_{23} = \underset{(-)}{(-1)^{2+3}}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+1) = 1 \qquad A_{33} = \underset{(+)}{(-1)^{3+3}}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2 = 3$$

Составляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Найдем

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 2\cdot 1 + 0\cdot(+3) \\ 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-3)(-3) \\ 5\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + (-3)(-3) \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

т. е. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Проверка. Подставим найденное решение в исходную систему: $1-2+3=2$ (истина), $2\cdot 1+2-3=1$ (истина), $1-2\cdot 2=-3$ (истина).

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \\ z = 3 \end{cases}$

2) Решить систему методом Крамера.

Возьмем эту же систему и решим её с помощью определителей.

$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1, \\ x - 2y = -3 \end{cases}$ запишем определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6$ (найден выше).

Заменим в Δ столбец коэффициентов при x на столбец правых частей

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3\underset{(-)}{(-1)^{2+1}} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-)(0+2) = -6 .$$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при y на столбец правых частей

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1\underset{(+)}{(-1)^{1+3}} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 3 = -12$$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при z на столбец правых частей

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} (-2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = (-1)\ \underset{(-)}{(-1)^{1+2}} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 3 = -18 .$$

По формулам Крамера получаем решение $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-6}{-6} = 1 \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-12}{-6} = 2 . \\ z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = \dfrac{-18}{-6} = 3 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 . \\ z = 3 \end{cases}$

3) Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$

Выписываем расширенную матрицу $B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{array} \right)$ и с помощью элементарных преобразований приводим ее или к треугольному виду, или к виду трапеции (как получится).

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\2&1&-1&1\\1&-2&0&-3\end{array}\right)\begin{array}{l}(-2)\quad(-1)\\ \\ \\ \end{array}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&3&-3&-3\\0&-1&-1&-5\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&-1&-1&-5\\0&3&-3&-3\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (3)\\ \\ \end{array}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&-1&-1&-5\\0&0&-6&-18\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :(-1)\\ :(-6)\end{array}\Rightarrow\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&y&z\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&1&1&5\\0&0&1&3\end{array}\right)\end{array}.\ \ rA=3,\ rB=3\ \Rightarrow\ r=3.$$

Так как число неизвестных $n=3$ и равно рангу системы, система имеет единственное решение. По полученной матрице восстанавливаем систему уравнений. Идя снизу вверх, получаем это решение: $\begin{cases}x-y+z=2\\ y+z=5\\ z=3\end{cases}$.

Из последнего уравнения $z=3$, с помощью второго находим $y=5-z=5-3=2$. Подставляя в первое уравнение найденные $y=2$ и $z=3$, находим $x=2+y-z=2+2-3=4-3=1$.

Ответ: $\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=3\end{cases}$.

б) $\begin{cases}x-y+z=2\\ 2x+y-z=1\\ x+2y-2z=1\end{cases}$

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\2&1&-1&1\\1&2&-2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}(-2)\quad(-1)\\ \\ \\ \end{array}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&3&-3&-3\\0&3&-3&-1\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (-1)\\ \\ \end{array}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&3&-3&-3\\0&0&0&2\end{array}\right)$$

$rA=2,\ rB=3$. Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли система несовместна (т. е. не имеет решения). Выпишем уравнение, соответствующее последней строке полученной матрицы: $0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=2$, что невозможно.

Ответ: система не имеет решения.

в) $\begin{cases} 3x-2y+z=-1 \\ -2x+y-2z=2 \\ x-y-z=1 \end{cases}$

Записываем расширенную матрицу:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)(2)\ \ (-3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) : (\text{-}1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$r\,A = r\,B = 2$. Отсюда следует, что система совместна.

Число неизвестных $n=3>r=2$. Следовательно, система имеет бесконечное множество решений: $n-r=3-2=1$. Отсюда система имеет одну свободную переменную, пусть это будет z, тогда x, y – базисные (базисных неизвестных столько, каков ранг системы, т. е. сколько ненулевых строк остается в последней матрице).

Запишем систему, соответствующую полученной матрице: $\begin{cases} x-y-z=1 \\ y+4z=-4 \\ z=z \end{cases}$.

Следовательно, идя снизу вверх, выражаем базисные неизвестные через свободную z. Из второго уравнения выражаем $y=-4-4z$, из первого уравнения

$x=y+z+1=(-4-4z)+z+1=-4-4z+z+1=-3-3z.$

Общее решение: $\begin{cases} x=-3-3z \\ y=-4-4z \\ z=z \end{cases}$.

Из общего решения можно получить любое частное решение. Пусть $z=-2$, тогда получим частное решение: $x=-3-3(-2)=-3+6=3;\quad y=-4-4(-2)=-4+8=4.$

Частное решение: $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=-2 \end{cases}$.

Выполним проверку общего решения. Для этого подставим найденные выражения x, y, z в уравнения исходной системы:

1) $3(-3-3z)-2(-4-4z)+z=-1$

$-\underline{9}-\underline{\underline{9z}}+\underline{8}+\underline{\underline{8z}}+\underline{\underline{z}}=-1 \qquad -1=-1 \quad \left(\text{истина}\right)$

2) $-2(-3-3z)+(-4-4z)-2z=2$

$\underline{6}+\underline{\underline{6z}}-\underline{4}-\underline{\underline{4z}}-\underline{\underline{2z}}=2 \qquad 2=2 \quad (\text{истина})$

3) $(-3-3z)-(-4-4z)-z=1$

$\underline{-3}-\underline{\underline{3z}}+\underline{4}+\underline{\underline{4z}}-\underline{\underline{z}}=1 \qquad 1=1 \quad (\text{истина})$

Ответ: $\begin{cases} x=-3-3z \\ y=-4-4z. \\ z=z \end{cases}$

Контрольная работа № 3
"ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ"

ЗАДАНИЕ 1. Построить графики функций путем сдвигов и деформаций:

1.	$y=\dfrac{1}{x+2}-3.$	**2.**	$y=(x-1)^3+7.$	**3.**	$y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-1.$
4.	$y=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x.$	**5.**	$y=8\cdot 2^x-2.$	**6.**	$y=\lg(x+2)-\dfrac{1}{2}.$
7.	$y=\log_3(x-2)+1.$	**8.**	$y=\lg(-x)-2.$	**9.**	$y=-2\cos 2x.$
10.	$y=2\,\mathrm{arctg}\ 2x.$	**11.**	$y=-\arcsin x+\dfrac{\pi}{3}.$	**12.**	$y=\sin(x-3)+1.$
13.	$y=\mathrm{tg}(x-1)+1.$	**14.**	$y=\dfrac{1}{x-1}+2.$	**15.**	$y=(x+1)^3-3.$
16.	$y=2^{x-3}+1.$				

ЗАДАНИЕ 2. Построить графики функций, заданных несколькими аналитическими выражениями:

1.	$f(x)=\begin{cases} \sin x, & \text{при } \lvert x\rvert \le \pi, \\ 0, & \text{при } \lvert x\rvert > \pi. \end{cases}$	**2.**	$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } \lvert x\rvert > 2, \\ 1, & \text{при } 1<\lvert x\rvert \le 2, \\ -x^2+2, & \text{при } \lvert x\rvert < 1. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{если } -\pi\le x\le 0,\\ 2, & \text{если } 0<x<1,\\ \dfrac{1}{x}, & \text{если } 1\le x\le 4.\end{cases}$	**4.** $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & \text{если } 0\le x<1,\\ e^{x}, & \text{если } 1\le x\le 2,\\ e, & \text{если } x>2.\end{cases}$
5. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{если } x\le 0,\\ 0, & \text{если } 0<x\le 2,\\ x-2, & \text{если } x>2.\end{cases}$	**6.** $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{если } x\le 1,\\ \dfrac{2}{x-1}, & \text{если } x>1.\end{cases}$
7. $f(x)=\begin{cases}x-3, & \text{если } x<0,\\ x+1, & \text{если } 0\le x<4,\\ 3+\sqrt{x}, & \text{если } x>4.\end{cases}$	**8.** $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{если } x\le 1,\\ 2x, & \text{если } 1<x\le 3,\\ x+2, & \text{если } x>3.\end{cases}$
9. $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{если } x\le 0,\\ x^2, & \text{если } 0<x\le 2,\\ x+1, & \text{если } x>2.\end{cases}$	**10.** $f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{если } -3\le x\le 1,\\ 2x, & \text{если } 1<x\le 2,\\ 4-x, & \text{если } 2<x\le 3.\end{cases}$
11. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{3}, & \text{если } x\le 0,\\ \sin x, & \text{если } 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ x-\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$	**12.** $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{если } x\le 0,\\ \operatorname{tg} x, & \text{если } 0<x<\dfrac{\pi}{4},\\ 1, & \text{если } x\ge \dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$
13. $f(x)=\begin{cases}2x^2, & \text{если } x\le 0,\\ \cos x, & \text{если } 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ x-\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$	**14.** $f(x)=\begin{cases}2x+5, & \text{если } x<-1,\\ \dfrac{1}{x}, & \text{если } x\ge -1.\end{cases}$
15. $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{если } x\le 0,\\ x, & \text{если } 0<x<2,\\ 2x-2, & \text{если } x\ge 2.\end{cases}$	**16.** $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{если } x\le 0,\\ 2x, & \text{если } 0<x\le 1,\\ x, & \text{если } x>1.\end{cases}$

ЗАДАНИЕ 3. Построить графики функций, заданных параметрически:

1. $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{a^3}{t^2 + a^2} \end{cases}.$	**2.** $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$
3. $\begin{cases} x = 2a\cos^2 t \\ y = a\sin 2t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi.$	**4.** $\begin{cases} x = a\sin 2t \\ y = 2a\sin^2 t \end{cases}, \ 0 \le t \le \pi.$
5. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = 4 - t^2 \end{cases}.$	**6.** $\begin{cases} x = \dfrac{t^6}{6} \\ y = 2 - \dfrac{t^4}{4} \end{cases}.$
7. $\begin{cases} x = 2\sin^3 t \\ 3\cos^2 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$	**8.** $\begin{cases} x = t^2 - 2t + 1 \\ y = t - 1 \end{cases}.$
9. $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}.$	**10.** $\begin{cases} x = 3 - t^2 \\ y = t^3 \end{cases}.$
11. $\begin{cases} x = t + 2 \\ y + t^2 + 4t + 5 \end{cases}.$	**12.** $\begin{cases} x = 1 + \sin^2 t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$
13. $\begin{cases} x = 2 - 4\sin^2 t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$	**14.** $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t - 1 \end{cases}.$
15. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = 2 + t^2 \end{cases}.$	**16.** $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t_3 \end{cases}.$

ЗАДАНИЕ 4. Построить графики функций в полярных координатах:

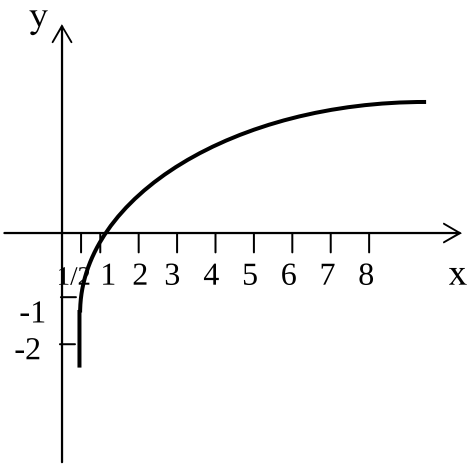
1. $\rho = \sin 2\varphi.$	**2.** $\rho = a\cos 3\varphi$.	**3.** $\rho = a\sin 3\varphi.$
4. $\rho = a\,(1 - \cos\varphi).$	**5.** $\rho = a\,(1 + \sin\varphi).$	**6.** $\rho = a\,(1 - \sin\varphi).$
7. $\rho = a\,\varphi.$	**8.** $\rho = -\dfrac{\varphi}{\pi}.$	**9.** $\rho = \dfrac{a}{\varphi}.$
10. $\rho = -\dfrac{\pi}{\varphi}.$	**11.** $\rho = 1 + \cos 2\varphi.$	**12.** $\rho = 2\sin^2 2\varphi.$

13. $\rho = 3\cos^2 2\varphi$.	**14.** $\rho = \sin\varphi + \cos\varphi$.	**15.** $\rho = \dfrac{3}{2+\sin\varphi}$.
16. $\rho = \dfrac{1}{2+\cos\varphi}$.		

Образец выполнения контрольной работы № 3
“ ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ”

1) Построить график функции путем сдвигов и деформаций $y = \log_2(1-x) - 2$

1. Строим график функции $y = \log_2 x$ (рис. 1)



x	$y = \log_2 x$
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

Рис. 1

2. Симметрично отображаем этот график относительно оси OY и получаем график функции $y = \log_2(-x)$ (на рис. 2 – сплошная линия).

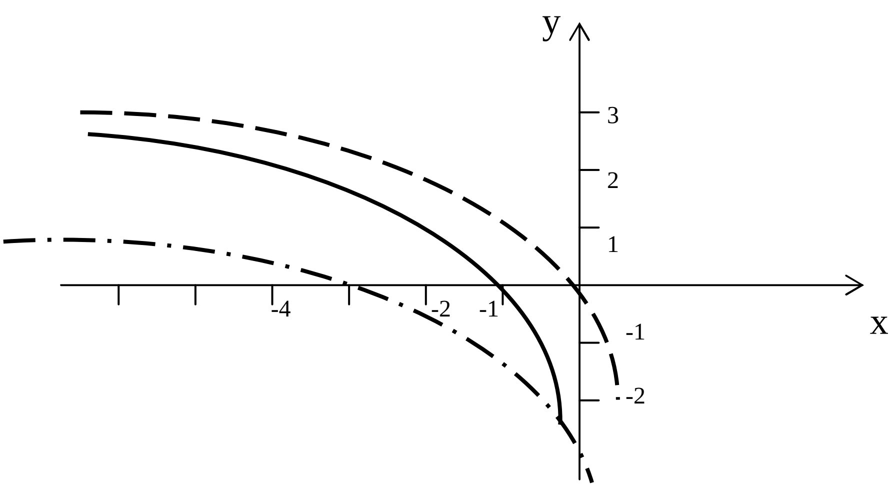


Рис. 2

3. Сдвигаем этот график на одну единицу вправо и получаем график функции $y = \log_2(1 - x)$ (рис. 2, пунктирная линия).

4. Сдвигаем этот график на две единицы вниз и получаем график функции $y = \log_2(1 - x) - 2$ (рис. 2, штрих-пунктирная линия), что и будет графиком данной функции.

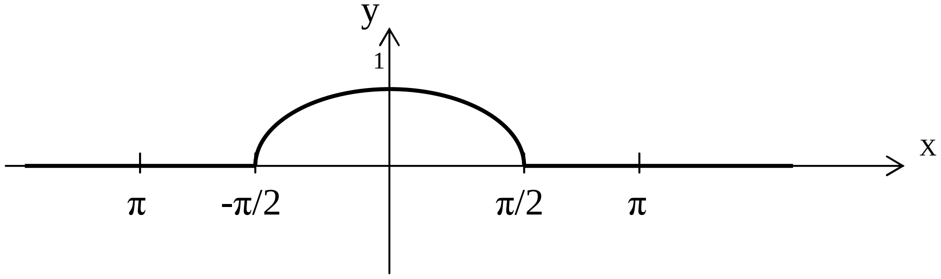
2)Построить график функции, заданной несколькими аналитическими выражениями:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{при} \quad |x| \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при} \quad |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Запишем данную функцию по интервалам возрастания аргумента x:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Графиком $f(x)$ при $x \in \left(-\infty, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ будет часть оси OX , при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ – часть косинусоиды, затем при $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \infty\right)$ снова часть оси OX



3) Построить график функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = t-1 \\ y = t^2 - 2t + 2 \end{cases}$.

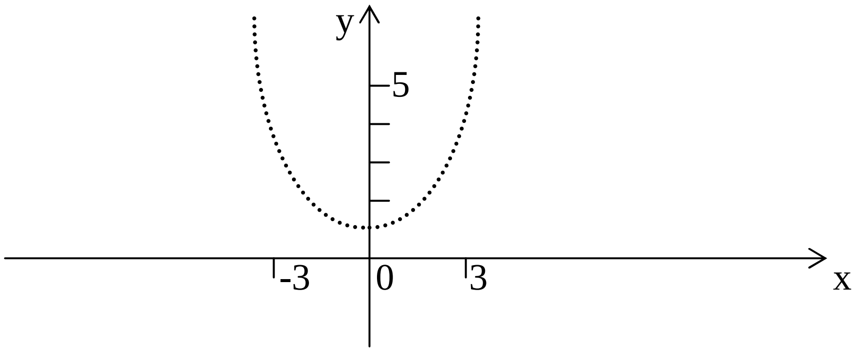
График функции, который надо построить, проходит через точки с координатами $\left(x(t),\ y(t)\right)$. Чтобы найти координаты этих точек $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, составим таблицу связи аргумента t и координат точек $(x,\ y)$ в зависимости от t.

t	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	5	2	1	2	5	10

$(x = t-1)$

$y = t^2 - 2t + 2$

Для построения графика берем две последние строки таблицы и отмечаем на координатной плоскости точки (-3, 10), (-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5), (3, 10), координаты которых находятся в столбцах.

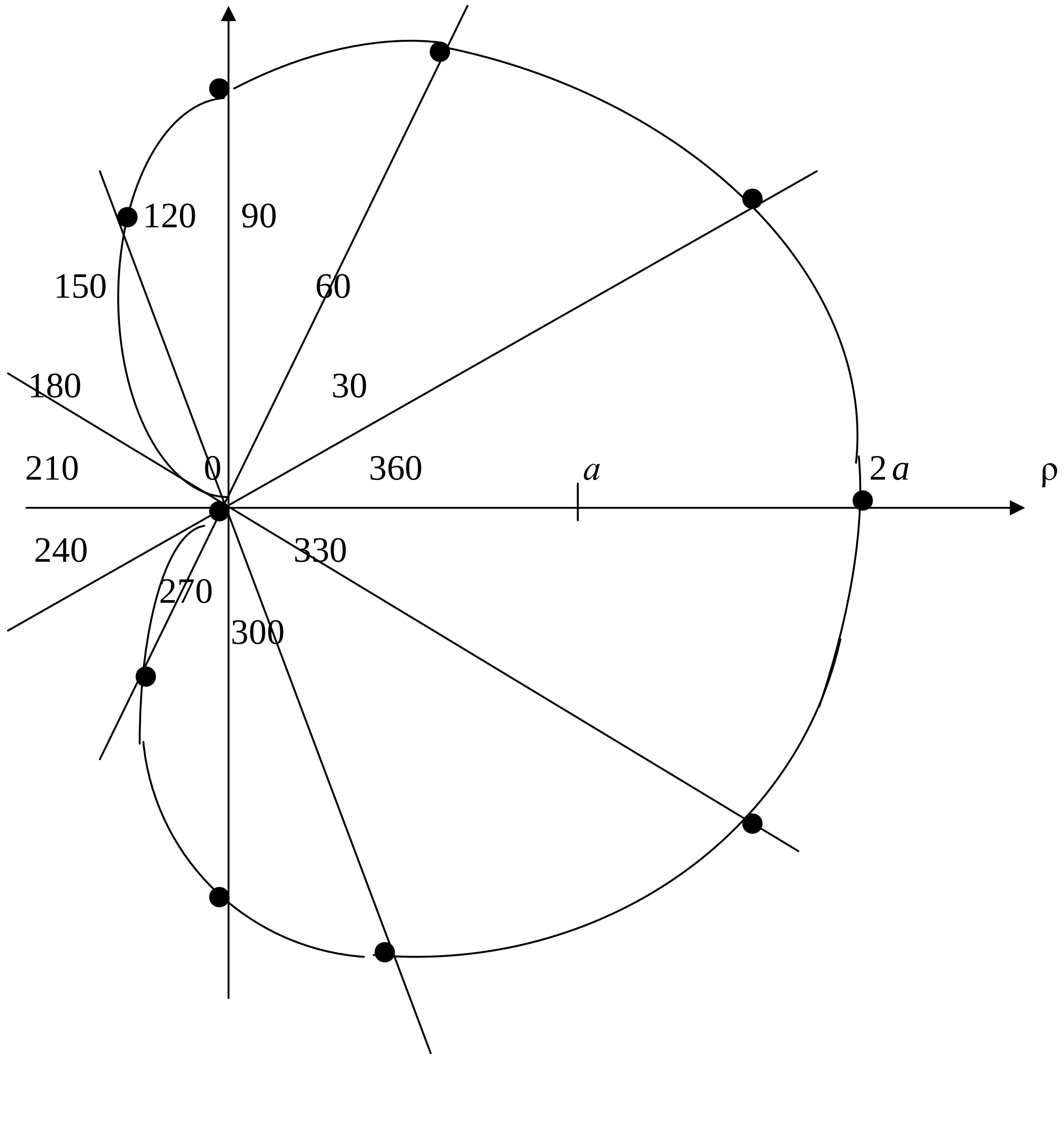


Затем соединяем полученные точки кривой (в данном случае получилась парабола вида $y = x^2$, центр которой смещен по оси OY на единицу вверх, т. е. уравнение имеет вид $y = x^2 + 1$).

4) Построить график функции, заданной в полярной системе координат: $\rho = a\left(1+\cos\varphi\right)$. Здесь a выступает в роли масштаба. На полярной оси откладываем вместо единиц a, $2a$, $3a$ и т. д. Заносим в таблицу значения ρ, вычисленные для углов $\varphi \in \left[0,\ 360^\circ\right]$ $\left(\text{удобнее } \dfrac{\rho}{a}\right)$.

φ°	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
$\dfrac{\rho}{a}$	2	1,9	1,5	1	0,5	0,1	0	0,1	0,5	1	1,5	1,9	2

На полярной оси откладываем ρ и проводим окружность этого радиуса. Проводим луч под углом φ и находим точку пересечения этой окружности и этого луча. Сначала строим точку $(\rho, \varphi) = (2a, 0)$ так: на оси $O\rho$ откладываем отрезок длиной $2a$, это и будет искомая точка. Затем строим точку $(\rho, \varphi) = (1{,}9a;\ 30^\circ)$ так: на оси $O\rho$ откладываем отрезок длиной $1{,}9a$, проводим окружность этого радиуса, строим луч под углом 30° и находим точку их пересечения, это и будет искомая точка и т. д.



Контрольная работа № 4

"ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ"

ЗАДАНИЕ 1. Вычислить пределы функций:

1. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+5x-1}{x+5}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x^2-2x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-1}{x-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{3x^2+x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{x^3+2x-5}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{6x+1}-1}{3x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\sin x}{4(1-\cos x)^2}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\mathrm{tg}3x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\sin 2x}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x-5}\right)^{\frac{2x+3}{5}}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x+4}$.

2. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-5}{2x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{2x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x}{x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{7x^2+3}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x-1}{3x^3+2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{x^3}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,2x}{\sin 15x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\arcsin 2x}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{x+1}{3}}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

3. 1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-5x+1}{x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{x^2+x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x}{x-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$; 5) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x-2}{2x^2+x-5}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+1}{2x^2+x}$; 8) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$;

10) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$; 11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; 12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 7x}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{3x}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{10}{x}\right)^x$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{x^2}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+2}\right)^x$;

4. 1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2+2x+1}{2x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2+2x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2+x+3}{(x-3)^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$; 5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+3x+1}{4x^3+x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x+1}{2x^2+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$;

10) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$; 11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg} x}$; 12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x+4}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

5. 1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x+5}{2x^2+x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{5x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x+1}{x-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+5x+6}{2x^2+3x-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{3+2x-x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+x+1}{x^3+2}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{3x^3+x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to-2-0}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

5.
10) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{4}}{x^2}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,2x}{3x}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{2x+1}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+5}\right)^{x+1}$.

6.
1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x}{2x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x+3}{x-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2+5x-3}{4x^2-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{5x^2+9x-44}{2x^2+5x-12}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+x+1}{3x^2+5}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+7}{x^3+2x+3}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,3x}{5x}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{2x+3}\right)^x$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

7.
1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2+x-3}{2x^2+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+1}{(x-3)^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+x+1}{2x^2+5}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+1}{x^2+5x+6}$; 8) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$;

10) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{18+x^2}-3\sqrt{2x+9}}{x+3}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}$;

7.	13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$;	14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^x$;	15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$;
	16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x+3}\right)^x$.		

8.	1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}$;	2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+7x}$;	3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+x+1}{(x-3)^2}$;
	4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$;	5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$;	6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+7}{2x^2+x+1}$;
	7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^2+x+1}$;	8) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$;	9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$;
	10) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$;	11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+5}-x\right)$;	12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{5x}$;
	13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$;	14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^x$;	15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x$;
	16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x+4}\right)^{x^2}$.		

9.	1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$;	2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$;	3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x+1}{x-3}$;
	4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$;	5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$;	6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2+x+3}{x^2+5x+7}$;
	7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+7x+1}{3x^2+5x}$;	8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;	9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$;
	10) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;	11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x \operatorname{tg} 2x}$;	12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{5}}{x}$;
	13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$;	14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$;	15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^x$;
	16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.		

10. 1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x+8}{2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{3x^2+5x+8}$; 3) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^3-8}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2+x+4}{x^2+x+7}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{7x^3+8x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{7x+1}-1}{5x}$; 11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$; 12) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{arctg} 3x}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

11. 1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{7x^2-x-4}{2x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{x^2+3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-7x}{x-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$; 5) $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3+3x+4}{4x^3+x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x+1}{x^2-7x}$; 8) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$; 9) $\lim\limits_{x\to-4}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{8}{16-x^2}\right)$;

10) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; 11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{x^3}$; 12) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{5x}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{3x}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^x$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

12. 1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^3+7x+4}{x^2+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+5x+4}{x-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$; 5) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^3+4x^2}{x^2+x-12}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+7}{4x^2+x}$;

12. 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+x+3}{2x^2+5}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; 11) $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\frac{x}{4}}{x^3}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{x}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+4}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{x+1}$.

13. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x+5}{x+7}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^2+x+5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x}{x-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+2x^2-x}{5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+7x+4}{x^2+x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+8x+4}{2x^2+3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^3}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{2x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin x}{4(1-\cos x)^2}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{x}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{x+1}$.

14. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x+7}{2x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+x+5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+7x}{(x-3)^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{x^2-7x+12}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+5}{6x^2+7x}$; 8) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{9-x^2}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$;

14. 10) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\ \sin x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{ctg} 3x$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos\dfrac{x}{2}}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+1}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

15. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x+7}{x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x+7}{(x-3)^3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{16-x^2}{x^3-64}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+8}{-5x^3+2x^2+x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^2-5x+6}$; 8) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$;

10) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x\cdot \operatorname{ctg} 3x$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{x}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

16. 1) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-19x+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{2x^3+x^2+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-5x+4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$; 5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^3+2x+12}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+4}{5x^3+x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+5}{7x^3+2x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+3}-x\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{3x}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 13x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$;

16.	13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{1-\cos 5x}$;	14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$;	15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$;	
	16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.			

ЗАДАНИЕ 2. Исследовать на непрерывность и построить графики функций:

1.	1) $f(x)=\begin{cases}-2(x+1), & x\le -1\\ (x+1)^3, & -1<x<0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$;	2) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ -(x-1)^2, & 0<x<2\\ x-3, & x\ge 2\end{cases}$;
	3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$;	4) $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$.
2.	1) $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x<0\\ x^2+1, & 0\le x<1\\ 0, & x\ge 1\end{cases}$;	2) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\\ \dfrac{\pi}{2}, & x>\pi\end{cases}$;
	3) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$;	4) $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$.
3.	1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x, & 0\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$;	2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0\\ 0, & 0<x\le 2\\ x-2, & x>2\end{cases}$;
	3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$;	4) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}$.
4.	1) $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1\\ 4-2x, & 1<x<2{,}5\\ 2x-7, & 2{,}5\le x<+\infty\end{cases}$;	2) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$;
	3) $f(x)=\dfrac{1+x^3}{1+x}$;	4) $f(x)=1-2^{\frac{1}{x}}$.

5.	1) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1 \\ 2x-1, & 1<x\le 3 \\ x+2, & x>3 \end{cases}$;	2) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$;
	3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$;	4) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.
6.	1) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2 \\ -x+4, & x>2 \end{cases}$;	2) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ x, & x\ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$;
	3) $f(x)=\dfrac{4}{(x-1)^2}$;	4) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$.
7.	1) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1 \\ x^2+1, & -1<x\le 1 \\ -x+3, & x>1 \end{cases}$;	2) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg} x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$;
	3) $f(x)=\dfrac{4}{x-2}$;	4) $f(x)=9^{\frac{1}{x+3}}$.
8.	1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<1 \\ x, & 1\le x<2 \\ 3, & x>2 \end{cases}$;	2) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$;
	3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$;	4) $f(x)=5^{\frac{2}{x+5}}$.
9.	1) $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x<1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$;	2) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x<\dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x\ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$;
	3) $f(x)=\dfrac{1}{(x-5)^2}$;	4) $f(x)=3^{\frac{1}{x+1}}$.

10.	1) $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x<2 \\ 2x, & x\ge 2 \end{cases}$; 3) $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$;	2) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2}, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$; 4) $f(x)=2^{\frac{1}{x-2}}$.
11.	1) $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le -1 \\ \dfrac{2}{x-1}, & x>-1 \end{cases}$; 3) $f(x)=\dfrac{6}{(x-3)^2}$;	2) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$; 4) $f(x)=4^{\frac{1}{x-3}}$.
12.	1) $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0 \\ x, & 0<x\le 1 \\ 2, & x>1 \end{cases}$; 3) $f(x)=\dfrac{8}{x+4}$;	2) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0 \\ x, & 0\le x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$; 4) $f(x)=5^{\frac{1}{1-x}}$.
13.	1) $f(x)=\begin{cases} 2x+5, & x<-1 \\ \dfrac{1}{x}, & x\ge -1 \end{cases}$; 3) $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$;	2) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$; 4) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$.
14.	1) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1 \\ 2x, & 1<x\le 3 \\ x+2, & x>3 \end{cases}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$;	2) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$; 4) $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}$.
15.	1) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2, & x\le 2 \\ x, & x>2 \end{cases}$;	2) $f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$;

15.	3) $f(x)=\dfrac{4}{4-x^2}$;	4) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.
16.	1) $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le -1 \\ \dfrac{2}{x-1}, & x>-1 \end{cases}$;	2) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \cos x, & x>0 \end{cases}$;
	3) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$;	4) $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$.

Образец выполнения контрольной работы № 4
“ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ”

Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+1}{x^2+2x+3}$. Подставляем $x=1$, получаем $\dfrac{1-5+1}{1+2+3}=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$.

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-1}$.

Подставляем $x=-1$, получаем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Чтобы избавиться от такой неопределенности, следует и в числителе, и в знаменателе выделить “ноль”, т. е. множители, которые и дают нули. В данном примере (x+1) обращается в ноль при $x=-1$, его и будем выделять, чтобы потом сократить.

1. $x^2-1=(x-1)\underline{(x+1)}$;

2. $x^2-5x-6=0$ (находим корни этого уравнения):

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{5\pm 7}{2}\ \Rightarrow\ \begin{matrix} x_1=6 \\ x_2=-1 \end{matrix}\quad\Rightarrow\quad x^2-5x-6=(x-6)\underline{(x+1)};$$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-6)\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-6}{x-1}$.

Подставляем $x = -1$ и получаем $\frac{-1-6}{-1-1} = \frac{7}{2}$.

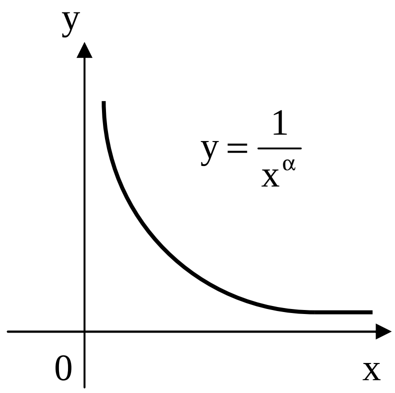
Ответ: $\frac{7}{2}$.

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x - 1}{4x^3 + 2x + 5}$.

При подстановке $x = \infty$ получаем неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы избавиться от такой неопределенности, следует и в числителе, и в знаменателе вынести за скобки наивысшую степень x.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x - 1}{4x^3 + 2x + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^3}(1 - 4\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}} + 3\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} - \overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^3}}})}{\cancel{x^3}(4 + 2\underset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} + \underset{0}{\cancel{\frac{5}{x^3}}})} = \frac{1}{4}.$$

При нахождении этого предела использовано: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^\alpha} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$ при $\alpha > 0$.



Получили в ответе отношение коэффициентов при старших степенях x .

Ответ: $\frac{1}{4}$.

4) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{2 - \sqrt{1-x}}{x+3} = \left| \frac{2 - \sqrt{1-(-3)}}{-3+3} = \frac{0}{0} \right|$.

Для решения следует воспользоваться формулой сокращенного умножения $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Домножим числитель и знаменатель на $2 + \sqrt{1-x}$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to-3}\frac{\left(2-\sqrt{1-x}\right)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}{(x+3)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{2^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{(x+3)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{4-(1-x)}{(x+3)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{\cancel{3+x}}{\cancel{(x+3)}\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=\left|\frac{1}{2+\sqrt{1-(-3)}}\right|=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)=|\infty-\infty|.$

Для решения применяем тот же прием, что и выше: домножаем числитель и знаменатель на сумму этих корней, чтобы получить разность квадратов:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2-2x}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2x+1}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x-3-\left(\cancel{x^2}-2x+1\right)}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-4}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}}=4\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2-2x+1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Как и в примере 3), вынесем за скобки x в первой степени, причем

$$\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{x^2\left(1+2\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}=x\sqrt{1+2\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}},$$

тогда

$$4\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(1-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{1+2\underset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}}-\underset{0}{\cancel{\frac{3}{x^2}}}}+\sqrt{1-2\underset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}}+\underset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}}}\right)}=4\frac{1}{1+1}=2$$

Ответ: 2.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 15x}{\operatorname{tg} 13x}$.

Применяем первый замечательный предел: $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$.

Получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 15x\cdot 15x\cdot 13x\cdot\cos 13x}{15x\cdot 13x\cdot\sin 13x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{15x}{13x}=\dfrac{15}{13}$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-2}\right)^{2x}$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{3x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(3+\dfrac{4}{x}\right)}{x\left(3-\dfrac{2}{x}\right)}=\dfrac{3}{3}=1,$ имеем неопределенность $(1)^{\infty}$.

Применяем второй замечательный предел: $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$. Выделяем в основании степени “единицу” так: прибавляем 1 и вычитаем 1.

$$\frac{3x+4}{3x-2}+1-1=1+\overbrace{\frac{3x+4}{3x-2}-1}^{3x-2}=1+\frac{\cancel{3x}+4-\cancel{3x}+2}{3x-2}=1+\frac{6}{3x-2}\quad .$$

В данном случае $u=\dfrac{6}{3x-2}$, т. е. $\dfrac{1}{u}=\dfrac{3x-2}{6}$,

поэтому $$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{6}}=e.$$

Подставляем это в пример:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{3x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\boxed{\left(1+\frac{6}{3x-2}\right)^{\cancel{\frac{3x-2}{6}}}}}_{e}{}^{\cdot\frac{6}{3x-2}\cdot 2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6}{3x-2}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{12x}{3x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{3x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}}=e^{\frac{12}{3}}=e^{4}.$$

Ответ: e^4.

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{4x-3}\right)^{2x}$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+4}{4x-3}=\frac{3}{4}<1$, получаем показательную функцию с основанием меньше единицы в бесконечно большой степени, которая стремится к нулю.

Ответ: 0.

9) Исследовать на непрерывность и построить график функции:

1. $f(x)=\begin{cases} x, & x<-1, \\ x^2+1, & -1\le x\le 2, \\ 7-x, & x>2. \end{cases}$

Для исследования функции на непрерывность воспользуемся тем, что функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если выполняются равенства

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0). \qquad (1)$$

Все элементарные функции, входящие в данную функцию, непрерывны на своих интервалах, поэтому проверять непрерывность будем в точках «склеивания».

$\underline{x=-1}$:

$\lim\limits_{\substack{x\to-1-0 \\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0} x=-1,$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1+0 \\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0}(x^2+1)=(-1)^2+1=2,$

$f(-1)=(-1)^2+1=2$

Сравниваем эти три числа и видим, что первое равенство в (1) не выполняется. Следовательно, $x=-1$ – точка разрыва I-го рода, причем неустранимого (т. е. скачок).

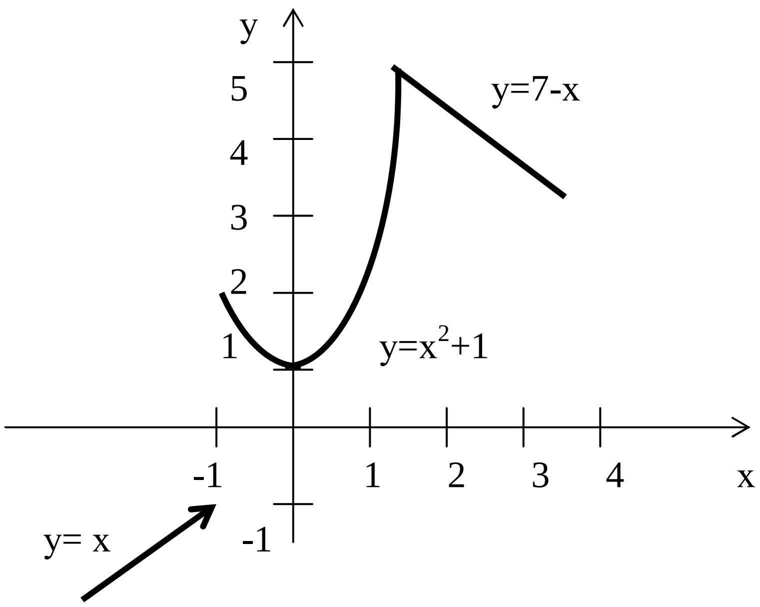
$\underline{x=2}$:

$\lim\limits_{\substack{x\to2-0 \\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{x\to2-0}(x^2+1)=2^2+1=5,$

$\lim\limits_{\substack{x\to2-0 \\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{x\to2-0}(7-x)=7-2=5,$

$f(2)=2^2+1=5$.

Сравниваем эти три числа и видим, что все равенства в (1) выполняются. Следовательно, в точке $x = 2$ данная функция непрерывна.



На графике функции на конце прямой $y = x$ в точке (-1, -1) ставим стрелку, так как функция $f(x) = x$ при x, строго меньшем (–1), а при $x = -1$ значение функции $f(x)$, вычисляется уже по другой формуле: $x^2 + 1$. Причем в точках непрерывности никаких стрелок не ставится.

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

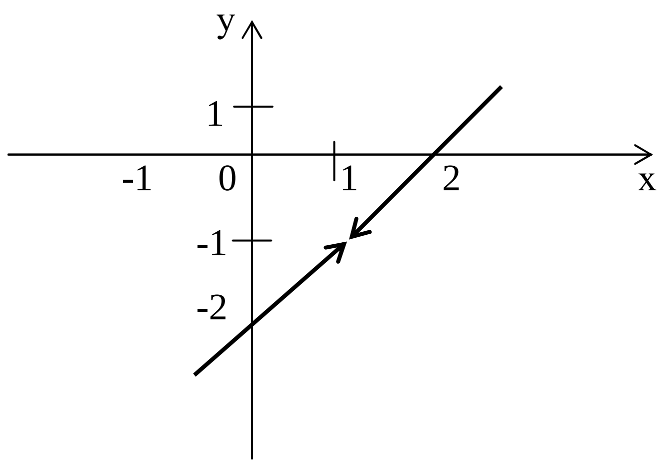
О.Д.З. $x \neq 1$.

Так как $x = 1$ не входит в область допустимых значений (О.Д.З.) функции, то точка $x = 1$ является точкой разрыва данной функции. Выясним с помощью односторонних пределов, разрыв какого рода терпит функция в этой точке.

$$\lim_{\substack{x\to 1-0 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1-0 \\ x<1}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1-0}(x-2) = 1 - 2 = -1;$$

$$\lim_{\substack{x\to 1+0 \\ x>1}} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1+0}(x-2) = 1 - 2 = -1.$$

Получили, что в (1) первое равенство выполняется, а функция $f(1)$ не существует, т.е. второе равенство не выполняется. Следовательно, $x = 1$ – точка разрыва I рода, причем устранимого. На графике выкалывается точка (1, -1) стрелками, так как $x = 1$ не входит в О.Д.З.



3. $f(x)=1-2^{\frac{1}{x+3}}$

О.Д.З. $x\neq -3$. Значит $x=-3$ – точка разрыва.

Определяем тип разрыва функции в этой точке. Для этого опять находим левый и правый пределы при $x\to -3$.

Левый предел

$$\lim_{\substack{x\to -3-0\\ x<-3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -3-0\\ x<-3}}\left(1-2^{\frac{1}{x+3}}\right)=\left|\begin{array}{l} x+3\to -0 \\ \text{т.к. }\ x<-3\end{array}\Rightarrow \frac{1}{x+3}\to -\infty \Rightarrow\right.$$

$$\left.\Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}}\to 0 \Rightarrow 1-2^{\frac{1}{x+3}}\to (1-0)=1\right| =1.$$

Правый предел

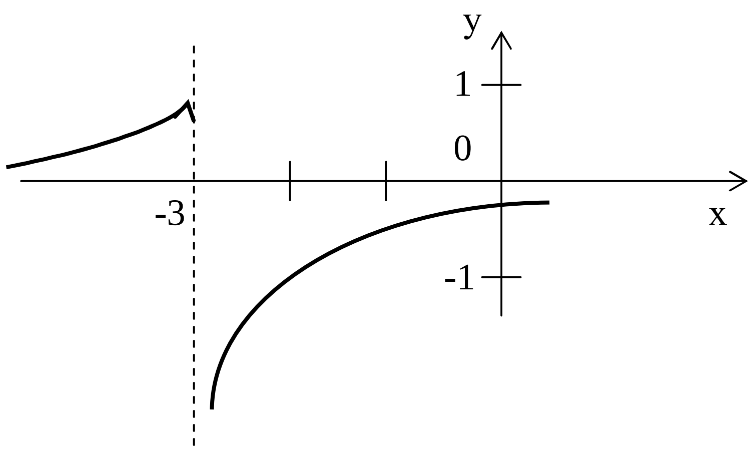
$$\lim_{\substack{x\to -3+0\\ x>-3}} f(x)=\lim_{\substack{x-3+0\\ x>-3}}\left(1-2^{\frac{1}{x+3}}\right)=\left|\begin{array}{l} x+3\to +0 \\ \text{т.к. }\ x>-3\end{array}\Rightarrow \frac{1}{x+3}\to +\infty \Rightarrow\right.$$

$$\left.\Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}}\to \infty \Rightarrow 1-2^{\frac{1}{x+3}}=(1-\infty)=-\infty\right| =-\infty.$$

Получился бесконечный предел, поэтому $x=-3$ – точка разрыва II-го рода.
Исследуем поведение функции при $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1-2^{\frac{1}{x+3}}\right)=\left|x+3\to\infty \Rightarrow \frac{1}{x+3}\to 0 \Rightarrow\right.$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}} \to 1 \Rightarrow 1-2^{\frac{1}{x+3}} \to (1-1)=0 \Big| = 0.$$



Контрольная работа № 5
"ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ"

Найти производные функций:

1.	1) $y=e^{\sin x}x^5+\lg(5x+1)$;	2) $y=\dfrac{\cos^2 3x}{2x+3}-\arcsin 2x$;	3) $y=\sqrt{3x^2+1}+2^{\operatorname{tg} x}$;
	4) $y=\operatorname{ctg}^2 8x-2x^3+1$;	5) $y=\operatorname{arctg}^3(\cos x)$;	6) $y=3^{x^2}\sin 3x$;
	7) $y=\dfrac{\arccos 2x}{x}-8\sqrt{x}+2x$;	8) $y=\lg(\sin 2x)+\cos 3x$;	9) $y=3^{\ln x}\operatorname{arcctg} 2x$;
	10) $y=\ln^2\dfrac{1}{x}$.		

2.	1) $y=e^{\cos x}x^3+\lg(2x^2+3x)$;	2) $y=\dfrac{\sin^2 5x}{x+3}-\arccos 8x$;	3) $y=\sqrt{7x^2+5}+3^{\operatorname{ctg} x}$;
	4) $y=\operatorname{tg}^2 7x+3x^2+8$;	5) $y=\operatorname{arcctg}^2(\sin x)$;	6) $y=5^{x^3}\cos 8x$;
	7) $y=\dfrac{\arcsin 3x}{x^2}+\sqrt[3]{x}-1$;	8) $y=\ln\cos 3x-\sin 2x$;	9) $y=2^{\ln x}\operatorname{arctg} 3x$;
	10) $y=\ln^3\dfrac{1}{x}$.		

3. 1) $y=e^{\operatorname{tg} x}\cdot x^4-\lg(3x^3+5)$; 2) $y=\dfrac{\sin^3 3x}{2x+5}-\arcsin(3x+1)$; 3) $y=\sqrt{2x+3}-4^{\operatorname{tg} x}$;

4) $y=\operatorname{ctg}^3 2x+4x^2+5$; 5) $y=\operatorname{arctg}^2(\sin x)$; 6) $y=4^{x^5}\cos 2x$;

7) $y=\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}-\sqrt{x}+2$; 8) $y=\ln\sin 3x+\operatorname{tg} 8x$; 9) $y=2^{\lg x}\arccos 3x$;

10) $y=\ln^5\dfrac{1}{x}$.

4. 1) $y=e^{\operatorname{ctg} x}x^7-\lg(2x^2+8x)$; 2) $y=\dfrac{\cos^3 2x}{5x+1}+\arcsin(2x+5)$; 3) $y=\sqrt{2x^2+1}+2^{\operatorname{ctg} x}$;

4) $y=\operatorname{tg}^2 3x-3x-4$; 5) $y=\operatorname{arcctg}^2(\cos x)$; 6) $y=2^{x^2}\sin 3x$;

7) $y=\dfrac{\arcsin 2x}{x}-\sqrt{x}+5$; 8) $y=\lg\cos 2x-\operatorname{ctg} 3x$; 9) $y=4^{\ln x}\arcsin 2x$;

10) $y=\ln^4\dfrac{1}{x}$.

5. 1) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\cos 2x}+2^x$; 2) $y=\arcsin^2(e^x)+x^3$; 3) $y=\operatorname{tg}^3 x\cdot\dfrac{1}{x}$;

4) $y=\operatorname{arctg}^2 3x+2x^4+1$; 5) $y=\ln^2\dfrac{\sin 3x}{x}$; 6) $y=\operatorname{ctg} 3x\cdot\ln x$;

7) $y=\sqrt[3]{3x^5+7}+\arccos 2x$; 8) $y=\dfrac{\sin e^x}{x^2}+2x^2+5x$; 9) $y=\arcsin(5x+3)\cdot e^{2x}$;

10) $y=\sin(\ln x)$.

6. 1) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sin 3x}+3^x$; 2) $y=\arccos^2 5x+e^{x^2}$; 3) $y=\operatorname{ctg}^3 x\cdot\dfrac{2}{x}$;

4) $y=\operatorname{arctg}^2 5x+3x^3+8x$; 5) $y=\ln^2\dfrac{\cos 2x}{x}$; 6) $y=\operatorname{tg} 2x\cdot\ln 2x$;

7) $y=\sqrt{2x+5}+\arcsin 3x$; 8) $y=\dfrac{\cos e^x}{x^3}+5x^3+4$; 9) $y=\arccos(3x+5)\cdot e^x$;

10) $y=\cos(\ln x)$.

7. 1) $y=\arcsin^2 5^x+\sqrt{x+2}$; 2) $y=\mathrm{tg}^3(\sin 2x)+2^x$; 3) $y=\dfrac{\cos 8x}{x^5}-\arccos 3x$;

4) $y=\ln^3(\sin 8x)+\mathrm{ctg}\ 2x$; 5) $y=\sin 3x\cdot\lg 7x^2$; 6) $y=\mathrm{arctg}^2\,3x$;

7) $y=2^{\sin x}+x^2+4$; 8) $y=\sin^3 7x^2$; 9) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}+8x$;

10) $y=\dfrac{\cos 3x}{4}-\arccos 7x$.

8. 1) $y=\arccos^2 7^x+\sqrt{3x+1}$; 2) $y=\mathrm{ctg}^2(\cos 2x)+7^x$; 3) $y=\dfrac{\sin 3x}{x^2}-\arcsin 4x$;

4) $y=\ln^2(\cos 2x)+\mathrm{tg}\ 3x$; 5) $y=\cos 3x\cdot\lg 8x$; 6) $y=\mathrm{arcctg}^2\,8x$;

7) $y=3^{\cos x}+x^3+8x-1$; 8) $y=\cos^2\ 8x^3$; 9) $y=\dfrac{x^3}{\sin x}+\ln 5x$;

10) $y=\dfrac{\sin 2x}{3}-\arcsin 5x^2$.

9. 1) $y=\ln^3\sqrt{\sin x}$; 2) $y=\dfrac{\mathrm{tg}\ 2x}{3x}+\arcsin x^2$; 3) $y=\cos^2\ \lg 5x$;

4) $y=\sin 3x\cdot\mathrm{arctg}\ \dfrac{1}{x}$; 5) $y=\mathrm{arctg}\ 5^x-8x+5$; 6) $y=2^{x^2+\sin x}$;

7) $y=\arccos^2 5x+\ln 3x$; 8) $y=\cos^2\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$; 9) $y=\mathrm{arctg}\ (\sin 8x)$;

10) $y=\mathrm{ctg}\ \dfrac{x^2}{4}-\sin x$.

10. 1) $y=\ln^2\sqrt{\cos x}$; 2) $y=\dfrac{\mathrm{ctg}\ 3x}{7x^2}+\arccos 2x$; 3) $y=\sin^2(\lg 3x)$;

4) $y=\cos 2x\cdot\arccos\dfrac{1}{x}$; 5) $y=\mathrm{arctg}\ 7^{x^2}-3x+5$; 6) $y=\arcsin(\cos 2x)$;

7) $y=7^{\sin 3x+5x}$; 8) $y=\sin^3\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$; 9) $y=\mathrm{arcctg}\ (\cos 5x)$;

10) $y=\mathrm{tg}\ \dfrac{x^3}{3}-\cos x$.

11.

1) $y=\sqrt{\dfrac{\cos 2x}{x}}+\ln 8x$; 2) $y=\arcsin 2x\cdot \mathrm{tg}\,(7x+3)$; 3) $y=\sin^8(\sin 3x)$;

4) $y=3^{x^2+\mathrm{tg}\,x}-x^3$; 5) $y=\cos 3x+\sqrt{x^5+3}$; 6) $y=\ln^2\dfrac{1}{x}$;

7) $y=\mathrm{arctg}\,2^x+x^2-7x$; 8) $y=\dfrac{\sin 2x}{x^4}-x^7+2x$; 9) $y=\mathrm{arctg}^2\,3x$;

10) $y=3^{x^2}\cdot\cos 7x$.

12.

1) $y=\sqrt{\dfrac{\sin 3x}{x}}\cdot\ln 7x$; 2) $y=\arccos 3x\cdot \mathrm{ctg}(3x+7)$; 3) $y=\cos^5(\ln 7x)$;

4) $y=2^{x^3+\mathrm{ctg}\,x}-x^5$; 5) $y=\sin 2x+\sqrt{x^3+7}$; 6) $y=\ln^3\dfrac{1}{x}$;

7) $y=\mathrm{arcctg}\,3^x+7x+5$; 8) $y=\dfrac{\cos 3x}{x^3}-x^8+5x^3$; 9) $y=\mathrm{arcctg}^3\,2x$;

10) $y=5^{x^3}\sin 3x$.

13.

1) $y=\ln^2(\cos 3x)+x^3$; 2) $y=\sin 4x\cdot 2^{x^2}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\mathrm{tg}\,2x}+3x^3$;

4) $y=\mathrm{arctg}^2(\ln x)$; 5) $y=\cos(\arcsin 2x)$; 6) $y=5^{x^3+\mathrm{ctg}\,x}$;

7) $y=x^7\ln\dfrac{1}{x}$; 8) $y=\cos^2 3x+\dfrac{x^2}{\sin x}$; 9) $y=\ln^3 2^x+x^3$;

10) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{\cos x}}$.

14.

1) $y=\ln^2(\sin 3x)+x^8-7$; 2) $y=\cos 3x\cdot 4^{x^3}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\mathrm{ctg}\,x}+8x^2+5$;

4) $y=\mathrm{arcctg}^3(\ln x)$; 5) $y=\sin(\arccos 2x)$; 6) $y=7^{x^2+\cos 2x}$;

7) $y=x^4\cdot\ln\dfrac{1}{x}$; 8) $y=\sin^3 2x+\dfrac{x}{\cos 2x}$; 9) $y=\ln^2(5^x)+x^7$;

10) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{\sin 5x}}$.

15. 1) $y = 5^{x^2+\cos 2x}$; 2) $y = \ln^5 \dfrac{\sin x}{x^4} + 8x^2$; 3) $y = \arcsin^2 8x + 3$;

4) $y = \operatorname{arctg} 3x \cdot \cos\dfrac{1}{x}$; 5) $y = \dfrac{\sqrt{x+4}}{\sin 8x} + 2^x$; 6) $y = \arccos^2 5x$;

7) $y = \operatorname{tg} x \cdot \lg 2x$; 8) $y = \ln\dfrac{\cos x}{x^5} - 7x^2$; 9) $y = \sin^2(\ln x)$;

10) $y = \operatorname{ctg}(\sin 2x) - 7x + 5$.

16. 1) $y = 7^{x^3+\sin 7x}$; 2) $y = \ln^2 \dfrac{\cos x}{x^2} - 7x^2$; 3) $y = \arccos^2 3x$;

4) $y = \operatorname{arcctg} 7x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$; 5) $y = \dfrac{\sqrt{x-7}}{\cos 2x} - 7^x$; 6) $y = \arcsin^3 3x$;

7) $y = \operatorname{ctg} x \cdot \ln 3x$; 8) $y = \ln\dfrac{\sin x}{x^3} - 2x^2 + 3$; 9) $y = \cos^2(\ln x)$;

10) $y = \operatorname{tg}(\cos 3x) - 7x^2 + 5x$.

Образец выполнения контрольной работы № 5
“ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ”

Найти производные функций:

1) $y = e^{x^3-5x^2+4x+12}$.

$y' = (e^{x^3-5x^2+4x+12})'$.

Можно представить данную функцию как $y = e^u$, где $u = x^3 - 5x^2 + 4x + 12$.

Зная, что $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$, получим

$$e^{x^3-5x^2+4x+12}\left(x^3 - 5x^2 + 4x + 12\right)' = e^{x^3-5x^2+4x+12}\left(3x^2 - 10x + 4\right).$$

Ответ: $y' = \left(3x^2 - 10x + 4\right) e^{x^3-5x^2+4x+12}$.

2) $y = \operatorname{tg}^3 5x$.

$$y' = \left[\left(\operatorname{tg} 5x\right)^3\right]'.$$

Можно представить $y = u^3$, где $u = \operatorname{tg} 5x$. Причем $\left(u^3\right)' = 3u^2 \cdot u'$, в результате получим $3\left(\operatorname{tg} 5x\right)^2 \cdot \left(\operatorname{tg} 5x\right)' = 3\operatorname{tg}^2 5x \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 = 15\operatorname{tg}^2 5x \frac{1}{\cos^2 5x}$.

Ответ: $y' = 15 \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\cos^2 5x}$.

3) $y = 3x \ln x$.

$$y' = 3\left(x \cdot \ln x\right)'.$$

После подстановок $\left(u \cdot v\right)' = u'v + v'u$; $\left(c \cdot u\right)' = cu'$ получим

$$y' = 3\left[\left(x\right)' \cdot \ln x + x\left(\ln x\right)'\right] = 3\left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = 3\left(\ln x + 1\right).$$

Ответ: $y' = 3\left(\ln x + 1\right)$.

4) $y = \frac{x^2 - 3 + 1}{2x}$.

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x^2 - 3x + 1\right)' x - \left(x\right)' \left(x^2 - 3x + 1\right)}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left(2x - 3\right)x - \left(x^2 - 3x + 1\right)}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{2x^2 - 3x - x^2 + 3x - 1}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{x^2 - 1}{x^2},$$ если воспользоваться правилом $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Ответ: $y' = \frac{x^2 - 1}{2x^2}$.

Библиографический список

1. Гурский Е. И., Ершова В. В. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Минск: Высш. шк., 1965. – 184 с.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980, 1984. –120 с.

3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980. – 270 с.

4. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики. – М.: Высш.шк., 1978. – Т.1. – 384 с.

5. Щипачев В. С. Основы высшей математики. – М.: Высш.шк., 1998. – 200 с.

6. Элементы линейной алгебры / Сост.: Ю. Ф. Стругов, Г. А. Троценко, Е. М. Назарук. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 1998. – 36 с.

7. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986. – 240 с.

8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

9. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1985.

10. Предел и непрерывность / Сост.: Л. В. Бельгарт, Н. И. Николаева. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2000. – 36 с.

11. Сборник задач и упражнений по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – М.: Высш.шк., 1973. – 576 с.

12. Иванов-Мусатов О.С. Начала математического анализа. – М.: Наука, 1988.

13. Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.: Высш.шк., 1985.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор Г. М. Кляут
Сводный темплан 2005 г.
ИД 06039 от 12.10.01
Подписано в печать 18.04.05. Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 3,75. Уч.-изд. л. 3,75.
Тираж 100 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ