Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические указания для дистанционного обучения
студентов 1-2 курсов
экономических и технических специальностей

Омск-2005

Составители: Веснина Алла Александровна, доцент,
Хаустова Нина Михайловна, ст. преподаватель.

Печатается по решению редакционно-издательского отдела Омского государственного технического университета.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Комплексными числами называются числа вида $z = x + i\,y$, где $i^2 = -1$, x, y – действительные числа, $x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть, $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа.

По определению, два комплексных числа: $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ – равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексное число $\overline{z}$ называется сопряженным комплексному числу z , если $\operatorname{Re} \overline{z} = \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} \overline{z} = -\operatorname{Im} z$. Другими словами, если $z = x + i\,y$, то $\overline{z} = x - i\,y$.

Всякому комплексному числу $x + i\,y$ можно поставить в соответствие единственную точку плоскости $M(x,\ y)$ и обратно, всякую точку $M(x,\ y)$ плоскости XOY можно рассматривать как геометрический образ единственного комплексного числа $x + i\,y$.

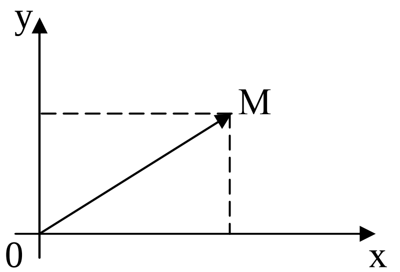


Рисунок 1

Для сокращения вместо “точка, соответствующая комплексному числу $x + i\,y$”, говорят просто “точка $x + i\,y$”. При этом множество всех действительных чисел изображается точками оси абсцисс, которая поэтому называется действительной осью, множество чисто мнимых чисел $i\,y$ точками оси ординат, называемой мнимой осью. Заметим, что одна точка мнимой оси, а именно начало координат, изображает действительное число нуль. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется комплексной плоскостью.

В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением числа $x + i\,y$ радиус-вектор точки $M(x, y)$ – $\overrightarrow{OM}\ \{x, y\}$.

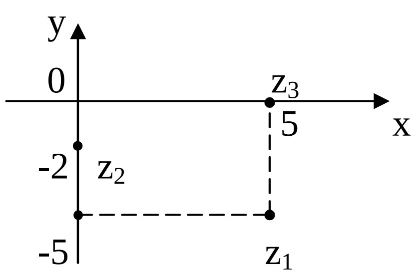


Рисунок 2

Пример 1. Построить точки $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 5$.

В дальнейшем, наряду с представлением комплексных чисел в декартовых координатах, полезно иметь их представление в обобщенных полярных координатах.

Рассмотрим число $x + i\,y$, которому на плоскости соответствует точка $M(x, y)$. Ее координаты в полярной системе координат (ρ, φ) .

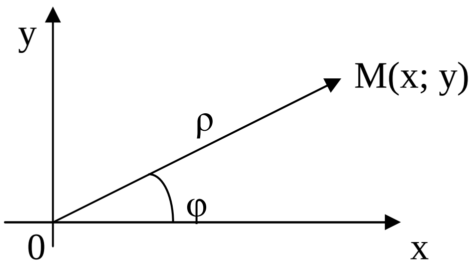


Рисунок 3

Тогда $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$.

$$z = x + i\,y = \rho\cos\varphi + i\,\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Полярный радиус $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ называется *модулем* комплексного числа и обозначается $|z| = \rho$.

Полярный угол φ называется *аргументом* комплексного числа и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Тогда

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i\sin \operatorname{Arg} z).$$

Эта форма называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Модуль комплексного числа определяется однозначно: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π. Главным значением аргумента называется значение, заключенное в интервале $(-\pi, \pi]$. Обозначается оно $\arg z$. Таким образом, $-\pi < \arg z \le \pi$.

Очевидно, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

Главное значение аргумента определяется однозначно.

Так как $\operatorname{tg} \arg z = \dfrac{y}{x}$,

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } (x, y) \in \text{I, IV четвертям,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если } (x, y) \in \text{II четверти,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{если } (x, y) \in \text{III четверти.} \end{cases}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа будет иметь вид

$$z = |z|\left(\cos(\arg z + 2k\pi) + i\sin(\arg z + 2k\pi)\right).$$

Пример 2. Написать в тригонометрической форме комплексное число $z = 1 + i$.

Решение. $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = -1$,

$$\arg z = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi.$$

$$z = \sqrt{2}\,\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\,\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\,\pi\right)\right).$$

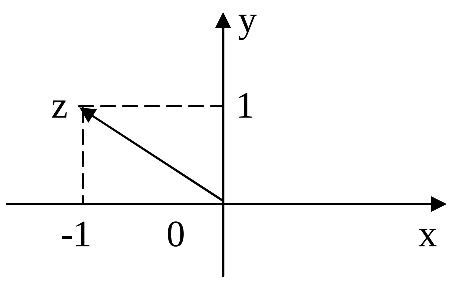


Рисунок 4

Пусть $z = x + i\,y = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$. Используя формулу Эйлера $\cos\varphi + i \sin\varphi = e^{i\varphi}$, получаем так называемую *показательную форму* записи комплексного числа:

$$z = |z|\, e^{i \operatorname{Arg} z}.$$

Пример 3. Представить в показательной форме комплексное число $z = -1 - i$.

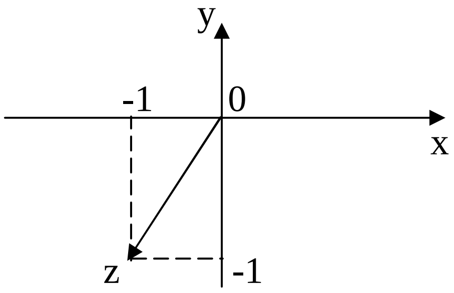


Рисунок 5

Решение

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = 1,$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi,$$

$$-1 - i = \sqrt{2}\, e^{-\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i}.$$

Пример 4. Вычислить $e^{\pi i}$.

Решение. По формуле Эйлера $e^{\pi i} = \cos\pi + i \sin\pi = -1$.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМ

Сложение и умножение комплексных чисел производится по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов с учетом $i \cdot i = -1$. При записи результата следует отделить действительную часть от мнимой, т. е. собрать отдельно члены, содержащие множитель i, и члены, не содержащие множитель i:

$$(x_1 + i\,y_1) + (x_2 + i\,y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + i\,y_1)\cdot(x_2 + i\,y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2),$$

$$(x_1 + i\,y_1) - (x_2 + i\,y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

В частности, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Операции сложения и вычитания сводятся к сложению и вычитанию векторов, изображающих эти числа. Отсюда расстояние между точками $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

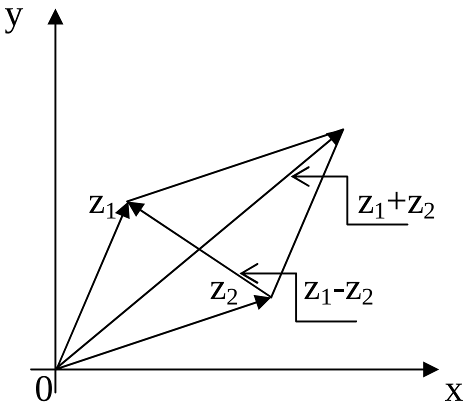


Рисунок 6

Пример 5. $|z-z_0|=R$ – уравнение окружности с центром в точке z_0 и радиусом равным R.

Деление на комплексное число, отличное от нуля, определяется как действие, обратное умноже- нию. Для представления частного в виде

$$\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$$

следует провести простые преобразования, показанные на следующем примере.

Пример 6. $\dfrac{3-i}{1+2i}=\dfrac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{3-6i-i-2}{1+4}=\dfrac{1-7i}{5}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{7}{5}i.$

Для модуля и аргумента произведения и частного справедливы следующие утверждения:

1. $|z_1 \cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, $\operatorname{Arg} z_1 \cdot z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$.

Пример 7. Найти модуль и аргумент произведения $z \cdot i$.

Решение. $|z \cdot i| = |z|$, $\operatorname{Arg} z \cdot i = \operatorname{Arg} z + \left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$.

Таким образом, умножение на i соответствует повороту вектора z на угол $\dfrac{\pi}{2}$;

2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\operatorname{Arg}\dfrac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$.

Пусть $z=|z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$.

Тогда $z^2 = z \cdot z = |z|^2(\cos 2\operatorname{Arg} z + i \sin 2 \operatorname{Arg} z)$.

Можно доказать методом полной математической индукции, что для любого целого $n>0: z^n = |z|^n(\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z)$ (формула Муавра). Формула справедлива и для целых отрицательных n.

Пример 8. Вычислить $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$.

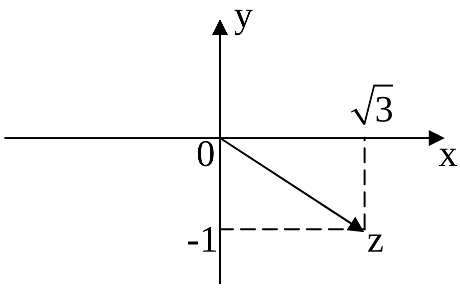


Рисунок 7

Решение

$$\left|\sqrt{3}-i\right| = \sqrt{3+1} = 2,$$

$$\arg\left(\sqrt{3}-i\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6},$$

$$\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right),$$

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^5 = 2^5\left(\cos\left(-\frac{5}{6}\pi+10k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi+10k\pi\right)\right)=$$

$$=32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right) = -16\sqrt{3}-16i\,.$$

Корнем n-й степени из комплексного числа называется такое число w, для которого $w^n = z$.

Используя формулу Муавра, получим

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \operatorname{Arg} w = \frac{\operatorname{Arg} z}{n} = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Для других значений k аргументы будут отличаться от полученных на число кратное 2π, и, следовательно, получатся значения корня, совпадающие с рассмотренными. Итак, корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Пример 9. Найти все значения $\sqrt[3]{-8}$ и построить их.

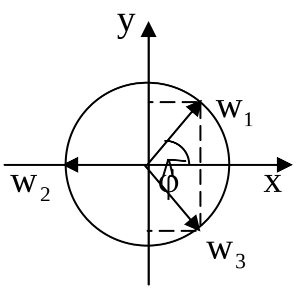


Рисунок 8

Решение. $|-8| = 8, \quad \arg(-8) = \pi,$

$$-8 = 8\left(\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)\right),$$

$$\sqrt[3]{-8} = 2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right),$$

$$k=0,\quad w_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3},$$

$$k=1,\quad w_2=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=2(-1+i\cdot 0)=-2,$$

$$k=2,\quad w_3=2\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}.$$

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Говорят, что на множестве M точек плоскости z задана функция $w=f(z)$, если указан закон, по которому каждой точке z из M ставится в соответствие определенная точка или совокупность точек w.

В первом случае функция $f(z)$ называется однозначной, во втором – многозначной. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, под функцией будем понимать однозначную функцию.

Если положить $z=x+iy$ и $w=u+iv$, то задание функции комплексного переменного $w=f(z)$ будет равносильным заданию двух функций двух действительных переменных: $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$.

Функции комплексного переменного e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ определяются как суммы следующих рядов, сходящихся на всей комплексной плоскости:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots;\qquad \operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=\frac{z}{1!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots;$$

$$\sin z=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots;\qquad \operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots;$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots.$$

На действительной оси $(z=x)$ эти функции совпадают с соответствующими элементарными функциями действительного переменного.

Для функции комплексного переменного справедлива *формула Эйлера*:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z.$$

Из этой формулы следует, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

$$\operatorname{ch} iz = \cos z; \qquad \cos iz = \operatorname{ch} z;$$

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z; \qquad \sin iz = i \operatorname{sh} z.$$

Остаются справедливыми при комплексных значениях аргумента все тригонометрические тождества.

Основное свойство показательной функции $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ также сохраняется. В частности,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Функции $z^{1/n}$ (n – целое положительное число), $\ln z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{atctg} z$ определяются как обратные функции по отношению к z^n, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ и являются многозначными функциями.

Можно показать, что

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

В этом выражении при каждом фиксированном k получаем однозначные функции, которые называются ветвями, $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ называется главной ветвью функции $\operatorname{Ln} z$.

$$\operatorname{Arc}\sin z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right);$$

$$\operatorname{Arc}\cos z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right);$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}, \quad z \neq \pm i.$$

Степень с комплексным основанием $A\,(A \neq 0)$ и комплексным показателем B определяется равенством

$$A^B = e^{B \operatorname{Ln} A}.$$

Пример 1. Вычислить значения функций:

а) $w = e^z$ в точке $z_0 = -2 + \frac{\pi}{3} i$.

Решение $e^{-2+\frac{\pi}{3}i} = e^{-2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right) = e^{-2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2}e^{-2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-2}.$

б) $w = \cos z$ в точке $z_0 = 2 + i$.

Решение $$\cos(2+i) = \frac{e^{i(2+i)} + e^{-i(2+i)}}{2} = \frac{e^{-1+2i} + e^{1-2i}}{2} =$$

$$= \frac{e^{-1}(\cos 2 + i \sin 2) + e^{1}(\cos 2 - i \sin 2)}{2} =$$

$$= \cos 2 \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} + i \sin 2 \frac{e^{-1} - e^{1}}{2} = \cos 2 \cdot \operatorname{ch} 1 - i \sin 2 \cdot \operatorname{sh} 1.$$

Или, учитывая, что $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$, получим

$$\cos(2+i) = \cos 2 \cdot \cos i - \sin 2 \cdot \sin i = \cos 2 \cdot \operatorname{ch} 1 - i \sin 2 \cdot \operatorname{sh} 1.$$

в) $w = \operatorname{Ln} z$ в точке $z_0 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Решение

$$\operatorname{Ln} \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) = \ln\sqrt{2+2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right).$$

Пример 2. Вычислить i^{i+1}.

Решение

$$i^{i+1} = e^{(i+1)\operatorname{Ln} i} = e^{(i+1)\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = i\, e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}.$$

Условимся откладывать значения z на одной комплексной плоскости, а значения $w = f(z)$ – на другой. Тогда однозначную функцию комплексного переменного можно рассматривать как отображение множества M плоскости z на множество N плоскости w. Если при этом двум различным точкам M всегда соответствуют различные точки N, то такое отображение называется взаимно однозначным или однолистным в M.

Пример 3. При отображении $w = 3z + i$ найти образ линии $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Решение. Так как $w = u(x, y) + i v(x, y)$, исключим x, y из системы:

$$\begin{cases} u = u(x,\ y), \\ v = v(x,\ y), \\ f(x,\ y) = 0, \end{cases}$$

где $f(x,\ y) = 0$ – уравнение линии в плоскости z.

Найдем искомую зависимость, связывающую u и v.

$$w = 3z + i = 3x + 3i\ y + i = 3x + i(3y + 1).$$

$$\begin{cases} u = 3x, \\ v = 3y + 1, \\ x^2 + y^2 - 2x = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{u}{3}, \\ y = \dfrac{v-1}{3}, \\ x^2 + y^2 - 2x = 0. \end{cases} \qquad \frac{u^2}{9} + \frac{(v-1)^2}{9} - 2\frac{u}{3} = 0.$$

Преобразуя уравнение $\dfrac{u^2}{9} + \dfrac{(v-1)^2}{9} - 2\dfrac{u}{3} = 0$, получим

$$(u-3)^2 + (v-1)^2 = 9\ .$$

Таким образом, окружность $(x-1)^2 + y^2 = 1$ в плоскости z отображается в окружность $(u-3)^2 + (v-1)^2 = 9$ в плоскости w.

Пример 4. При отображении $w = z^2$ найти образ полярной сетки полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Решение

1. Найдем образы полуокружностей (рис. 8):

$$\begin{cases} r = |z| = c, \\ 0 < \arg z < \pi. \end{cases}$$

$$|w| = |z|^2 = c^2, \quad \arg w = 2\arg z, \quad 0 < \arg w < 2\pi.$$

Образы-окружности $|w| = c^2$ с удаленной точкой $\left(c^2,\ 0\right)$.

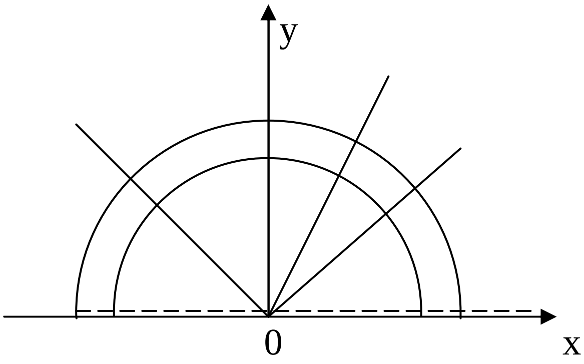


Рисунок 8

2. Найдем образы лучей (рис. 9)

$$\begin{cases} \varphi = \arg z = c, \quad 0 < c < \pi, \\ 0 < |z| < \infty. \end{cases}$$

$$|w| = |z|^2, \quad 0 < |w| < \infty, \quad \arg w = 2\arg z = 2c.$$

Образы-лучи с удаленной точкой $|w| = 0$.

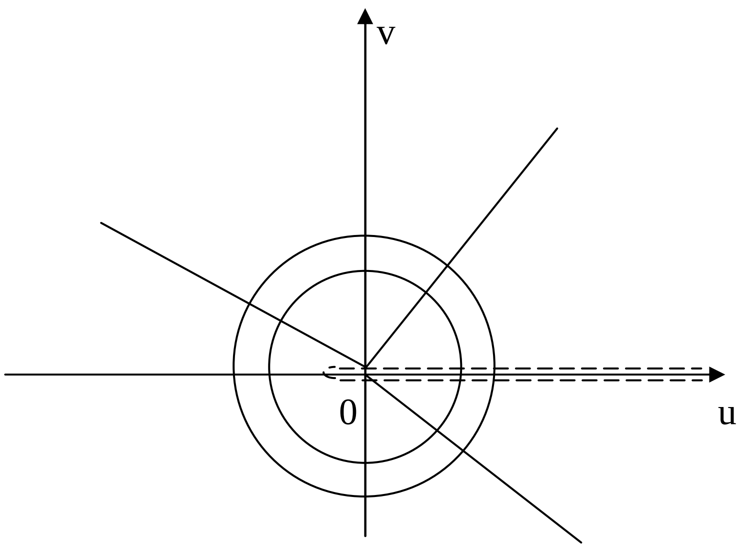


Рисунок 9

Следовательно, образом полярной сетки полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ является полярная сетка плоскости $u0v$ с разрезом вдоль положительной полуоси $0u$ (рис. 9).

Задачи

1.1. Вычислить значения функций:

а) $w = e^z$ в точках $z_1 = \pi(1-i)$, $z_2 = 2+2i$, $z_3 = 1+\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)i$, где k – целое число;

б) $w=\sin z$ в точках $z_1=2+3i,\ z_2=i$;

в) $w=\mathrm{ctg}\, z$ в точках $z_1=1+\pi i,\ z_2=-\dfrac{\pi}{2}i$;

г) $w=\mathrm{ch}\, z$ в точках $z_1=1+2i,\ z_2=-2+i$;

д) $w=\mathrm{Ln}\, z$ в точках $z_1=-1,\ z_2=i,\ z_3=2-3i$;

е) $w=\mathrm{Arc}\sin z$ в точках $z_1=i,\ \ z_2=\dfrac{1}{2}$.

1.2. Вычислить $(1-i)^{3-3i}$, 3^i.

1.3. Вычислить $\cos\dfrac{i}{2}$, подсчитав действительную и мнимую части с точностью до 0,0001.

1.4. Вычислить действительные и мнимые части функций: а) e^{z^2}; б) z^{3+i}; в) $z^2 \sin z$.

1.5. Решить уравнение: $\cos z = 2$.

1.6. Доказать тождества:

а) $\mathrm{ch}(z+\pi i)=-\mathrm{ch}\, z$; б) $\mathrm{tg}\, 2z=\dfrac{2\mathrm{tg}\, z}{1-\mathrm{tg}^2 z}$.

1.7. Построить на комплексной плоскости образы точки $z_0=2+i$ при отображениях: а) $w=3z+i$; б) $w=\dfrac{16}{z}$; в) $w=\dfrac{z}{z+i}$.

1.8. При отображении $w=z^2$ найти образ линии $|z|=3$.

1.9. При отображении $w=z^2$ найти образ прямоугольной сетки полуплоскости $\mathrm{Im}\, z>0$.

1.10. При отображении, осуществляемом функцией Жуковского $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, найти образ линии $\arg z=\dfrac{\pi}{3},\ 0<|z|<1$.

Задачи для самостоятельного решения

1.11. Вычислить значения функций:

а) $w=e^z$ в точках $z_1=i\dfrac{\pi}{2},\ z_2=2+3i$;

б) $w=\cos z$ в точках $z_1=3+i$, $z_2=2+\frac{\pi}{2}i$;

в) $w=\operatorname{tg} z$ в точках $z_1=1+\pi i$, $z_2=2-i$;

г) $w=\operatorname{sh} z$ в точках $z_1=3-2i$, $z_2=1+i$;

д) $w=\operatorname{Ln} z$ в точках $z_1=i^i$, $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$;

е) $w=\operatorname{Arccos} z$ в точках $z_1=2$, $z_2=0$.

1.12. Вычислить 1^{-i}, $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{i+1}$.

1.13. Вычислить $\sin i$, подсчитав действительную и мнимую части с точностью до $0{,}0001$.

1.14. Вычислить действительные и мнимые части функций: а) $e^{5\,i\,z-1}$; б) z^3+5z-1; в) $\sin(z\,i-1)$.

1.15. Доказать тождества:

а) $\operatorname{sh}(z_1+z_2)=\operatorname{sh} z_1\cdot\operatorname{ch} z_2+\operatorname{ch} z_1\cdot\operatorname{sh} z_2$;

б) $\operatorname{ch}(z_1+z_2)=\operatorname{ch} z_1\cdot\operatorname{ch} z_2+\operatorname{sh} z_1\cdot\operatorname{sh} z_2$.

1.16. При отображении $w=3z+i$ найти образ линии $y=2x+3$.

1.17. При отображении $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ найти образ линии $|z|=3$.

1.18. При отображении $w=z^2$ найти прообраз прямоугольной сетки плоскости w с разрезом вдоль положительного направления действительной оси.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Комплексное число w_0 называется *пределом* функции $f(z)$ при z, стремящемся к z_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что как только $|z-z_0|<\delta\to|w-w_0|<\varepsilon$.

Отсюда следует, что если $w=f(z)=u(x,\ y)+i\,v(x,\ y)$ и $w_0=u_0+i\,v_0$, то

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,\ y)=u_0;\qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (x,\ y)=v_0.$$

Верно и обратное утверждение.

Функция $w=f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0).$$

Производной функции комплексного переменного $w=f(z)$ называется

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Функция, имеющая производную в точке z_0, называется дифференцируемой в этой точке.

Для дифференцируемости функции комплексного переменного $w=f(z)=$ $=u(x,\ y)+i\,v(x,\ y)$ в данной точке необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,\ y)$ и $v(x,\ y)$ были дифференцируемы в данной точке и удовлетворяли в этой точке условиям *Коши-Римана*:

$$\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial y}; \qquad \frac{\partial v(x,\ y)}{\partial x}=-\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}.$$

При этом $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

Так как основные свойства предельного перехода сохраняются, сохраняются основные правила дифференцирования.

Функция $w=f(z)$ называется *аналитической* в области D, если она дифференцируема в каждой точке области D. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в точке z, $z\neq\infty$, если она аналитична в некоторой ее окрестности.

Элементарные функции в области определения аналитичны и для них справедливы основные формулы дифференцирования; для многозначных функций производные определяются для каждой ветви в отдельности.

Пример 5

Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции $3z^2-i\,z$.

Решение

$$w=3z^2-i\,z=3(x+i\,y)^2-i(x+i\,y)=$$

$$=3(x^2-y^2)+6i\,x\,y-i\,x+y.$$

$$\begin{cases} u(x,\ y) = 3\left(x^2 - y^2\right) + y, \\ v(x,\ y) = 6x\ y - x. \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 6x, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = 6x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 - 6y, & -\dfrac{\partial v}{\partial x} = 1 - 6y. \end{array}$$

Условия Коши-Римана выполняются на всей плоскости, значит, функция дифференцируема на всей плоскости, и ее производная

$$w' = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 6x + i\left(6y - 1\right) = 6\left(x + i\ y\right) - i = 6z - i.$$

Пример 6

Показать, что при $z \neq 0$ функция $f(z) = z \operatorname{Re} z$ не имеет производных.

Решение

$$f(z) = z \operatorname{Re} z = (x + i\ y)x = x^2 + i\ x\ y.$$

$$\begin{cases} u(x,\ y) = x^2, \\ v(x,\ y) = x\ y. \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x, \quad \text{равны только при } x = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -y, \ \text{равны только при } y = 0.$$

Условия Коши-Римана не выполняются ни в одной точке, кроме $z = 0$.

Замечание. $f(z) = z \operatorname{Re} z$ в точке $z = 0$ дифференцируема, но не аналитична в ней, т. к. она не аналитична в окрестности этой точки.

Функция двух действительных переменных $u = u(x,\ y)$, имеющая в области D непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, называется *гармонической* в области D.

Действительная и мнимая части аналитической в односвязной области D функции $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ являются гармоническими функциями в области D. Для всякой гармонической в односвязной области функции $u(x, y)$ существует функция $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$, аналитичная в области D. Ее мнимая часть $v(x, y)$ называется функцией, гармонически сопряженной с функцией $u(x, y)$. Аналогично для всякой гармонической в односвязной области D функции $v(x, y)$ существует функция $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$, аналитическая в области D.

Пример 7

Найти аналитическую функцию $w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, если

$$u(x, y) = 2e^x \cos y, \quad f(0) = 2.$$

Решение. Функция $u = 2e^x \cos y$ является гармонической. Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^x \cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \sin y;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2e^x \cos y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2e^x \cos y - 2e^x \cos y = 0.$$

Из условий Коши-Римана следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \cos y.$$

Тогда $$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = 2e^x \sin y\, dx + 2e^x \cos y\, dy.$$

$$v(x,y) - v(x_0, y_0) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} dv = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial v(x, y_0)}{\partial x} dx + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy.$$

Так как $f(0) = 2, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad u(x_0, y_0) = 2, \quad v(x_0, y_0) = 0.$

$$v(x, y) = \int\limits_0^x 2e^x \sin 0\, dx + \int\limits_0^y 2e^x \cos y\, dy = 2e^x \sin y \Big|_0^y = 2e^x \sin y.$$

$$f(z) = 2e^x \cos y + i\, 2e^x \sin y = 2e^z.$$

Если аналитическая в области D функция $f(z)$ отображает эту область на область D_1 плоскости w, причем всюду в области D: $f'(z) \neq 0$, то $|f'(z)|$ равен *коэффициенту растяжения,* происходящему при этом отображении в точке z, а $\arg f'(z)$ равен *углу поворота* каждой из гладких линий, проходящих через точку z, при том же отображении.

Пример 8. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w=\dfrac{1}{z}$ в точке $z_0 = 3i$.

Решение. Коэффициент растяжения

$$\rho=\left|f'(z)\right|_{|z=z_0}=\left|-\frac{1}{z^2}\right|_{|z=3\,i}=\left|-\frac{1}{(3\;\; i)^2}\right|=\frac{1}{9};$$

угол поворота $$\varphi=\arg\, f'(z)_{|z=z_0}=\arg\left(-\frac{1}{z^2}\right)_{|z=3\,i}=\arg\frac{1}{9}=0.$$

Задачи

2.1. Проверить выполнение условий Коши-Римана для следующих функций:

а) $f(z)=z^3$; б) $f(z)=e^{z^2}$; в) $f(z)=\ln z$.

2.2. Показать, что при $z\neq 0$ функция $f(z)=|z|^2$ не имеет производных.

2.3. Будет ли дифференцируемой функция $f(z)=i\,\overline{z}$?

2.4. Найти область, в которой функция $f(z)=\left|x^2-y^2\right|+2i\,|x\;y|$ будет аналитической.

2.5. Определить вещественные функции $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ так, чтобы функция $f(z)=\varphi(y)+i\,\psi(x)$ была дифференцируемой.

2.6. Найти аналитическую функцию $w=f(z)=u(x,\,y)+i\,v(x,\,y)$, если

а) $u=x^2-y^2+x\;y$, $f(0)=0$;

б) $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(2)=0$;

в) $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $(x>0)$, $f(1)=1$.

2.7. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w=f(z)$ в точке $z=z_0$: а) $w=\dfrac{z+2}{z-i}$, $z_0=2i$; б) $w=e^z$, $z_0=i$.

2.8. Найти линии равного растяжения и линии равного угла поворота для отображений: а) $w=z^3$; б) $w=e^z$.

2.9. Выяснить геометрический смысл производной линейной функции $w = a\,z + b$. При отображениях $w = 2z + 3i$ и $w = (1+i)z$ найти образ квадрата: $x = 0,\quad x = 1,\quad y = 0,\quad y = 1.$

Задачи для самостоятельного решения

2.10. Будет ли дифференцируемой функция $f(z) = x^2 + y^2 - 2\,i\,x\,y$?

2.11. Показать, что функция $f(z) = \left(x^3 - 3x\,y^2\right) + i\left(3x^2\,y - y^3\right)$ дифференцируема и найти ее производную.

2.12. При каком значении λ функция $f(z) = y + \lambda\,x\,i$ дифференцируема?

2.13. При каком значении a функция $f(z) = a\,\overline{z}$ дифференцируема?

2.14. Найти аналитическую функцию $w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, если

а) $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$; б) $v = x^3 + 6x^2\,y - 3x\,y^2 - 2y^3,\quad f(0) = 0$; в) $v = \sin x\,\operatorname{sh} y$.

2.15. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = f(z)$:

а) $w = z^2$ в точках $z_1 = i,\quad z_2 = 1 + i,\quad z_3 = 2$;

б) $w = e^z$ в точках $z_1 = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{4},\quad z_2 = -1 - i\dfrac{\pi}{2}$.

ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Интеграл от непрерывной функции комплексного переменного z $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ вдоль кусочно-гладкой дуги AB вычисляется по формуле

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz = \int\limits_{AB} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{AB} v\,dx + u\,dy \cdot$$

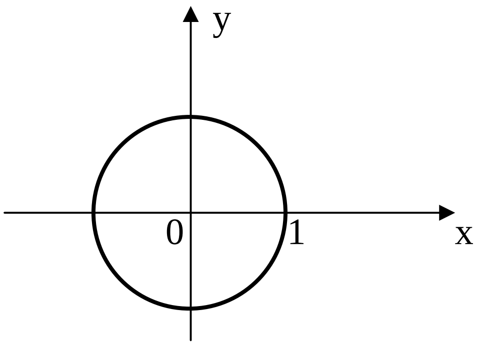
Или, если $x = x(t),\quad y = y(t)$, т. е. $z = x(t) + i\,y(t),\quad z = z(t),\quad t_1 \le t \le t_2$ – параметрические уравнения дуги AB, $A \sim t_1$, $B \sim t_2$, то

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(z(t)\right) z'(t)\,dt.$$

Пример 9. Вычислить $\int\limits_C (2z+1)\,\overline{z}\,dz$, если C – окружность $|z|=1$.

Решение. $$\int\limits_C (2z+1)\,\overline{z}\,dz=\int\limits_C (2x+2iy+1)(x-iy)(dx+i\,dy)=$$

$$=\int\limits_C \left[\left(2x^2+2y^2+x\right)+i\left(-2xy+2xy-y\right)\right]\cdot(dx+i\,dy)=\int\limits_C \left(2x^2+2y^2+x\right)dx+$$



$$+y\,dy+i\int\limits_C \left(2x^2+2y^2+x\right)dy-y\,dx.$$

Для вычисления полученных криволинейных интегралов используем параметрические уравнения окружности $x=\cos t,\quad y=\sin t$ (рис. 11).

Рисунок 11

Тогда $$\int\limits_0^{2\pi} -(2+\cos t)\sin t\;dt+\sin t\;\cos t\;dt+$$

$$+i\int\limits_0^{2\pi}(2+\cos t)\cos t\;dt+\sin t\;\sin t\;dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(-2\sin t-\cos t\;\sin t+\sin t\;\cos t)\,dt+$$

$$+i\int\limits_0^{2\pi}\left(2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=$$

$$=2\cos t\Big|_0^{2\pi}+i\;2\sin t\Big|_0^{2\pi}+i\;t\Big|_0^{2\pi}=2\pi\,i.$$

Иначе, уравнением окружности будет

$z=z(t)=x(t)+i\;y(t)=\cos t+i\sin t=e^{i\,t},\quad 0\le t\le 2\pi$.

Тогда $\overline{z}=e^{-i\,t},\quad dz=i\,e^{i\,t}\,dt$.

$$\int\limits_C (2z+1)\,\overline{z}\,dz = \int\limits_0^{2\pi} \left(2e^{it}+1\right) e^{-it}\, i\, e^{it}\, dt = i\left[\frac{2e^{it}}{i}+t\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D, то значение интеграла $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$, взятого вдоль произвольной кусочно-гладкой дуги AB, принадлежащей области D, не зависит от дуги AB, а определяется лишь положениями начальной и конечной точек этой дуги, и вычисление интеграла производится по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt = \Phi(z) - \Phi(z_0),$$

где $\Phi(z)$ – какая-нибудь первообразная функция по отношению к $f(z)$.

Для нахождения первообразной функции по отношению к аналитической функции $f(z)$ применяются обычные формулы интегрирования.

Пример 10. Вычислить $\int\limits_0^{\ln 2} z\, e^z\, dz$.

Решение. $u = z,\ du = dz,\quad dv = e^z\, dz,\quad v = e^z$.

$$\int\limits_0^{\ln 2} z\, e^z\, dz = z\, e^z\Big|_0^{\ln 2} - \int\limits_0^{\ln 2} e^z\, dz = \ln 2\cdot 2 - e^z\Big|_0^{\ln 2} = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1.$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где AB – верхняя половина окружности с центром O единичного радиуса; направление обхода положительное $\left(\sqrt{z}\right.$ – главное значение корня, получаемое из общей формулы при $\left.k=0\right)$.

Решение. $\int\limits_{AB} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_1^{-1} = 2\sqrt{-1} - 2\sqrt{1}$.

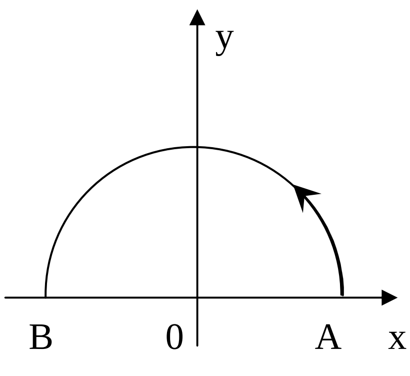


Рисунок 12

$$\sqrt{-1} = \sqrt{1\left(\cos(\pi+2k\pi) + i\,\sin(\pi+2k\pi)\right)} =$$

$$= 1\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right),$$

$$k = 0, 1.$$

При $k=0,\quad \sqrt{-1} = i$.

$$\sqrt{1} = \sqrt{1(\cos k\pi + i \sin 2k\pi)} = 1\left(\cos\frac{2k\pi}{2} + i \sin\frac{2k\pi}{2}\right), \quad k = 0, 1.$$

При $k = 0$, $\sqrt{1} = 1$: $\int\limits_{AB} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2(i-1)$.

Основная теорема Коши для односвязной области. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то интеграл от этой функции вдоль всякого кусочно-гладкого замкнутого контура C, лежащего в D, равен нулю.

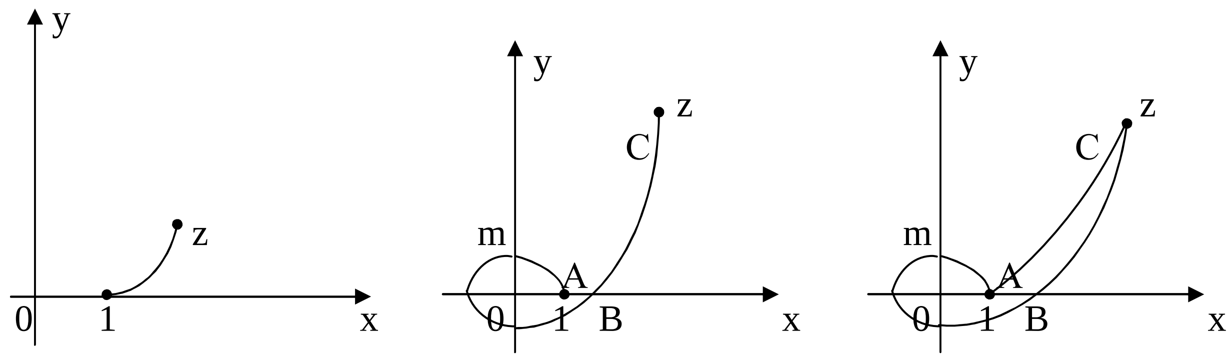
Пусть C – простой (несамопересекающийся) кусочно-гладкий замкнутый контур, C_1, C_2, ..., C_n – простые кусочно-гладкие замкнутые контуры, лежащие внутри C, но вне друг друга. Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области, лежащей между контуром C и контурами C_1, C_2, ..., C_n, и на этих контурах, то

$$\int\limits_{C} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k} f(z)\,dz \cdot$$

(*основная теорема Коши для многосвязной области*).

Пример 12. Найти значение интеграла $\int\limits_{1}^{z} \frac{dz}{z}$, если путь интегрирования не проходит через начало координат.

Решение. Если путь интегрирования не обходит начало координат (рис. 13а), то $\int\limits_{1}^{z} \frac{dz}{z} = \ln z \Big|_{1}^{z} = \ln z - \ln 1 = \ln z$.



а) б) в)

Рисунок 13

Пусть путь интегрирования обходит один раз нулевую точку в положительном направлении (рис. 13б). Тогда (рис. 13в)

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \int_{AmB} \frac{dz}{z} + \int_{BC} \frac{dz}{z} = \int_{AmB} \frac{dz}{z} + \int_{BA} \frac{dz}{z} + \int_{AC} \frac{dz}{z} \quad \text{(рис. 13в);}$$

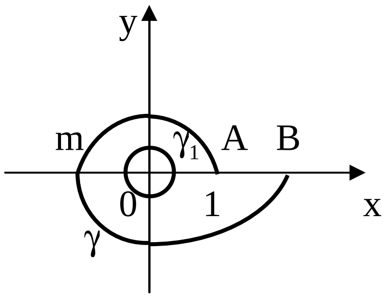


Рисунок 14

$$\int_{AC} \frac{dz}{z} = \ln z; \quad \int_{AmB} \frac{dz}{z} + \int_{BA} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \quad \text{(рис.14);}$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}, \text{ где } \gamma_1 \text{ – окружность } |z| = r < 1,$$

т. к. в области между двумя контурами γ и γ_1 функция $1/z$ аналитическая.

Вычислим $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}$.

$$\gamma_1 : z = r\,e^{i\varphi}, \quad dz = r\,i\,e^{i\varphi}\,d\varphi; \qquad \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{r\,i\,e^{i\varphi}\,d\varphi}{r\,e^{i\varphi}} = 2\pi\,i.$$

Тогда $\displaystyle\int_1^z \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} + \ln z = \ln z + 2\pi\,i.$

Если путь интегрирования делает n оборотов в положительном (или отрицательном) направлении около нулевой точки, то, очевидно, к значению $\ln z$ прибавляется (или отнимается) число $2n\pi\,i$. Таким образом, при всяком $z \neq 0$

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \ln z + 2n\pi\,i.$$

Если функция $f(z)$ аналитична в области, лежащей внутри простого кусочно-гладкого замкнутого контура C и на этом контуре, то для любой точки z_0, лежащей внутри C, справедливы формулы

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} \quad \text{(\textit{формула Коши}),}$$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}},\quad n=1,2,\ldots$$ (*обобщенная формула Коши*).

Пример 13. Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{e^{2z}}{z-\pi i}dz$,

где 1) $C_1:|z|=4$; 2) $C_2:|z+i|=1$.

Решение. 1) $f(z)=e^{2z}$ аналитична в круге $|z|\le 4$. Используя формулу Коши, получаем

$$\int\limits_{C_1}\frac{e^{2z}}{z-\pi i}dz=2\pi i e^{2z}\Big|_{z=\pi i}=2\pi i e^{2\pi i}=$$

$$=2\pi i(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=2\pi i\cdot$$

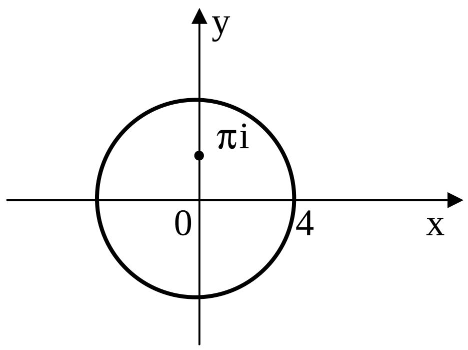


Рисунок 15

2) Так как $f(z)=\frac{e^{2z}}{z-\pi i}$ аналитична внутри области, ограниченной окружностью $|z+i|=1$, то по теореме Коши

$$\int\limits_{C_2}\frac{e^{2z}}{z-\pi i}dz=0.$$

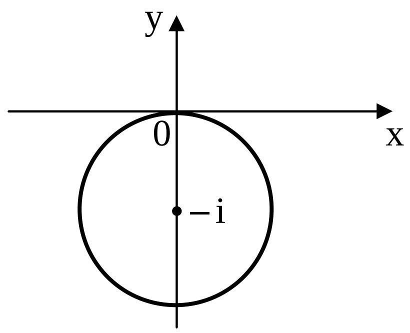


Рисунок 16

Пример 14. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)}dz$.

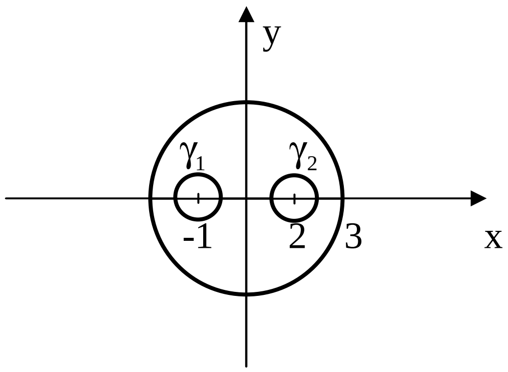


Рисунок 17

Решение. Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)}$ аналитична везде, кроме точек $z=-1$ и $z=2$.

Функция $f(z)$ будет аналитической в трехсвязной области, являющейся кругом, ограниченным окружностью $|z|=3$, из которого вырезаны два круга: $|z+1|<r$; $|z-2|<r$, где $r>0$ – достаточно малая величина (рис. 17).

Следовательно, по теореме Коши для многосвязной области

$$\oint\limits_{|z|=3} f(z)\,dz=\oint\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz+\oint\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Для вычисления интеграла по контуру γ_1 применим обобщенную формулу Коши, где $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-2}$ аналитична внутри контура γ_1.

$$\oint\limits_{\gamma_1} \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)}dz=\oint\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{\cos z}{z-2}}{(z+1)^2}dz=2\pi i\left(\frac{\cos z}{z-2}\right)'\Bigg|_{z=-1}=$$

$$=2\pi i\frac{-\sin z(z-2)-\cos z}{(z-2)^2}\Bigg|_{z=-1}=2\pi i\frac{-3\sin 1-\cos 1}{9}.$$

Для вычисления интеграла по контуру γ_2 применим формулу Коши, где $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z+1)^2}$ аналитична внутри контура γ_2:

$$\oint\limits_{\gamma_2} \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)}dz=\oint\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{\cos z}{(z+1)^2}}{z-2}dz=2\pi i\frac{\cos z}{(z+1)^2}\Bigg|_{z=2}=2\pi i\frac{\cos 2}{9},$$

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)}dz=2\pi i\frac{-3\sin 1-\cos 1}{9}+2\pi i\frac{\cos 2}{9}.$$

Задачи

3.1. Вычислить $\int\limits_C \operatorname{Re} z\, dz$, где C – дуга параболы $y = 2x^2$ от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + 2i$.

3.2. Вычислить $\int\limits_{AB} [(y+1) - xi]dz$, где AB – прямолинейный отрезок, соединяющий точки $z_A = 1$ и $z_B = -i$.

3.3. Вычислить $\int\limits_{AB} |z|\, dz$ по левой полуокружности с центром в точке $z = 0$ и радиусом $r = 1$, если $z_A = -i$, $z_B = i$.

3.4. Вычислить $\int\limits_C \frac{z}{\bar{z}} dz$, где C – граница области $1 < |z| < 2$, $\operatorname{Im} z > 0$.

3.5. Вычислить $\int\limits_C \left(i z^2 - 2z\right) dz$, где C – произвольная линия, соединяющая точки $z_1 = i$, $z_2 = 1$.

3.6. Вычислить $\int\limits_i^{1+i} z\, dz$.

3.7. Вычислить $\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$ по следующим контурам:

а) по полуокружности $|z| = 1$, $y \geq 0$ ($\sqrt{z}$ – ветвь, получаемая из общей формулы при $k = 1$);

б) по полуокружности $|z| = 1$, $y \leq 0$ $(k = 0)$.

3.8. Вычислить $\int\limits_C \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz$, где C: $|z - 1| = 1$.

3.9. Вычислить $\int\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^3 + 4z}$.

3.10. Вычислить $\int\limits_C \frac{z^2 + 1}{\left(z^2 + 4\right)^2} dz$, где а) $C_1 : |z - i| = 2$; б) $C_2 : |z + i| = 2$.

3.11. Вычислить $\int\limits_C \frac{dz}{z^2}$, где C – окружность $(x-4)^2+(y-3)^2=1$.

3.12. Вычислить $\int\limits_C \frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)}dz$, где C – окружность $|z|=2$.

3.13. Вычислить $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+1)^3}dz$.

Задачи для самостоятельного решения

3.14. Вычислить $\int\limits_C \operatorname{Re} z\, dz$, где C – отрезок прямой, соединяющей точки z_1 и z_2.

3.15. Вычислить $\int\limits_{AB} (x^2+y^2\, i)\, dz$, где AB – прямолинейный отрезок, соединяющий точки $z_A=1+i$, $z_B=2+3i$.

3.16. Вычислить $\int\limits_C (y+x\, i)\, dz$, где C – ломаная линия OAB с вершинами в точках $z_0=0$, $z_A=i$, $z_B=1+i$.

3.17. Вычислить $\int\limits_C \operatorname{Im} z\, dz$ по следующим линиям: а) C_1 – отрезок действительной оси от точки $z_1=3$ до точки $z_2=-3$; б) C_2 – полуокружность $|z|=3$, $0\le \arg z\le\pi$.

3.18. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin z\, dz$.

3.19. Вычислить $\int\limits_C (z-1)\cos z\, dz$ по произвольной линии, соединяющей точки $z_1=-\frac{\pi}{2}$, $z_2=\frac{\pi}{2}$.

3.20. Какие значения может иметь интеграл $\int_1^2 \frac{dz}{z}$, если за пути интегрирования принимать любые пути, вдоль которых подынтегральная функция непрерывна?

3.21. Вычислить $\int_C \frac{dz}{z^2+9}$, где $C:\ |z-2i|=2$.

3.22. Вычислить $\int_{|z|=2} \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)}dz$.

3.23. Вычислить $\int_C \frac{e^z}{(z+2)^4}dz$, где C – эллипс $\frac{(x+2)^2}{4}+y^2=1$.

3.24. Вычислить $\int_C \frac{dz}{z-4}$, где C – эллипс $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=2\sin t. \end{cases}$

3.25. Вычислить $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$, если

а) точка 0 лежит внутри, а точка 1 – вне контура C;

б) точка 1 лежит внутри, а точка 0 – вне контура C;

в) обе точки 0 и 1 лежат внутри контура C.

РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

Если $f(z)$ – аналитическая функция в круге $|z-a|<R,\ 0\le R<+\infty$, то она разлагается в этом круге в *ряд Тейлора*:

$$f(z)=A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\ldots \quad \text{или} \quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(z-a)^n,$$

где $$A_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \quad n=0,1,2,\ldots .$$

(C – любая окружность с центром a, лежащая внутри круга $|z-a|<R$).

Если $f(z)$ – аналитическая функция внутри кольца $r < |z-a| < R$, $0 \le r < R+\infty$, то она разлагается в этом кольце в *ряд Лорана*:

$$f(z) = \ldots + \frac{A_{-3}}{(z-a)^3} + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{-1}}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots$$

или
$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n,$$

где
$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$\big($C – любая окружность с центром a, лежащая внутри кольца $r < |z-a| < R\big)$.

Ряд $\frac{A_{-1}}{z-a} + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{-3}}{(z-a)^3} + \ldots$ называется главной частью ряда Лорана, а ряд $A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + A_3(z-a)^3 + \ldots$ называется правильной частью ряда Лорана.

Разложения в ряд Тейлора и Лорана единственны.

Пример 15. Написать разложение функции $f(z)$ по степеням z в области D в ряд Тейлора или Лорана:

а) $f(z) = \frac{1}{3-z}$, $D\{|z| > 3\}$; б) $f(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$, $D\{|z| < 1\}$;

в) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2i)}$, $D\{1 < |z| < 2\}$.

Решение. а) Степенной ряд функции $f(z) = \frac{1}{3-z}$ в области $|z| > 3$ является рядом Лорана, т. к. рассматриваемая область аналитичности этой функции есть кольцо $3 < |z| < \infty$.

Представим функцию $f(z)$ в виде $f(z) = \frac{1}{3-z} = -\frac{1/z}{1-3/z}$.

В окрестности точки $z=\infty$ выполняется неравенство $|3/z|<1$, поэтому дробь $\frac{1/z}{1-3/z}$ можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a_1=1/z$ и знаменателем $q=3/z$.

$$f(z)=-\left(\frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{3^2}{z^3}+\ldots+\frac{3^n}{z^{n+1}}+\ldots\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}.$$

б) Степенной ряд функции $f(z)=\frac{1}{(z+i)^2}$ в области $|z|<1$ является рядом Тейлора, т. к. рассматриваемая область аналитичности функции есть круг.

Определим коэффициенты ряда Тейлора:

$$f(z)=(z+i)^{-2};\quad f'(z)=-2(z+i)^{-3};\quad f''(z)=(-2)(-3)(z+i)^{-4};\quad \ldots;$$

$$f^{(n)}(z)=(-1)^n\,(n+1)!\,(z+i)^{-(n+2)};\ \ldots.$$

$$f^{(n)}(z)\Big|_{z=0}=(-1)^n(n+1)!\ i^{-(n+2)}=(-1)^n(n+1)!\,\frac{i^{n+2}}{i^{n+2}\cdot i^{n+2}}=-i^n(n+1)!.$$

Ряд Тейлора для функции $f(z)=\frac{1}{(z+i)^2}$ в области $|z|<1$ будет иметь вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!\,i^{n+2}\,z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,i^2\,i^n\,z^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)i^n\,z^n.$$

в) Степенной ряд функции $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2i)}$ в области $1<|z|<2$ является рядом Лорана, т. к. рассматриваемая область аналитичности этой функции есть кольцо: $1<|r|<2$.

Разложим функцию $f(z)$ на простейшие дроби:

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2i)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2i},\qquad A=\frac{1+2i}{5},\qquad B=\frac{4-2i}{5},$$

приняв во внимание, что при $1<|z|<2$, можем записать

$$f(z)=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2i}=A\frac{1/z}{1+1/z}+B\frac{1/2i}{1+z/2i}.$$

Следовательно,

$$f(z)=A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}+B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\frac{z^n}{i^{n+1}},\ \text{ где }\ A=\frac{1+2i}{5},\quad B=\frac{4-2i}{5}.$$

Пример 16. Разложить в ряд Лорана или Тейлора функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z-3)^2}$ в окрестности точек а) $z_0=-1$; б) $z_0=3$.

Решение. а) В окрестности точки $z_0=-1$ данная функция разлагается в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{4-(z+1)}=-\frac{1/4}{1-(z+1)/4}.$$

Последняя дробь есть сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии в области $\left|\dfrac{z+1}{4}\right|<1$, т. е. $|z+1|<4$; $a_1=-\dfrac{1}{4}$; $q=\dfrac{z+1}{4}$.

$$\frac{1}{z-3}=-\left(\frac{1}{4}+\frac{z+1}{4^2}+\frac{(z+1)^2}{4^3}+\ldots\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{4^n};$$

$$\left(\frac{1}{z-3}\right)'=\left(-\frac{1}{4}-\frac{z+1}{4^2}-\frac{(z+1)^2}{4^3}-\ldots\right)';\quad \frac{1}{(z-3)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^{n+1}}(z+1)^{n-1}.$$

б) В окрестности точки $z_0=3$ функция разлагается в ряд Лорана. Функция уже представлена в виде отрицательной степени $(z-3)$. Так как разложение в ряд Лорана единственно, $\dfrac{1}{(z-3)^2}$ есть разложение функции в ряд Лорана.

Если $f(a)=0$, то точка a называется *нулем* функции. Если в разложении функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a

$$A_0=A_1=\ldots=A_{m-1}=0,\qquad A_m\neq 0$$

и, следовательно, ряд Тейлора имеет вид

$$f(z)=A_m(z-a)^m+A_{m+1}(z-a)^{m+1}+\ldots,$$

то точка a называется *нулем* функции $f(z)$ m-го *порядка* или m-й *кратности*.

Из определения следует, что если точка a – нуль m-го порядка, то

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0, \qquad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Для того чтобы точка a была нулем функции $f(z)$ m-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности точки a имело место равенство

$$f(z) = \varphi(z)(z-a)^m,$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая функция в точке a, $\varphi(a) \neq 0$.

Пример 17. Определить нули функции $f(z) = \cos z$ и их порядок.

Решение. $z = \frac{\pi}{2} + k\pi\left(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$ – нули 1-го порядка, т. к.

$$\left(\cos z\right)' = -\sin z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} \neq 0.$$

Пример 18. Определить нули функции $f(z) = \dfrac{\left(z^2+1\right)\left(z^2-3z+2\right)^2}{z+1}$ и их порядок.

Решение. $z = \pm i$ – нули 1-го порядка; $z = 1$, $z = 2$ – нули 2-го порядка. Точка a, $a \neq \infty$, в которой нарушается аналитичность функции $f(z)$, является для этой функции *особой точкой*. Особая точка a называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность $0 < |z-a| < R$, в которой функция аналитична.

Если разложение функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки a в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

1) не содержит отрицательных степеней $z-a$, то точка a называется *устранимой* особой точкой;

2) содержит конечное число членов с отрицательными степенями $z-a$, то точка a называется *полюсом* функции $f(z)$;

3) содержит бесчисленное множество членов с отрицательными степенями $z-a$, то точка a называется *существенно особой* точкой функции $f(z)$.

Для того чтобы изолированная особая точка a была устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы при стремлении z к a функция $f(z)$ имела соответственно конечный предел, бесконечный предел или не имела предела (ни конечного, ни бесконечного).

Если a – устранимая особая точка $f(z)$, то после доопределения функции $f(z)$ в этой точке по непрерывности $\left(f(a)=\lim\limits_{z\to a} f(z)\right)$ функция становится аналитичной в точке a.

Если a – полюс $f(z)$, то в окрестности точки a

$$f(z)=\frac{A_{-m}}{(z-a)^m}+\ldots+\frac{A_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty} A_n(z-a)^n,$$

где $A_{-m}\neq 0$.

Число m называется *порядком полюса*. Полюс 1-го порядка называется *простым полюсом*.

Для того чтобы точка a была полюсом $f(z)$ m-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности точки a имело место равенство

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая функция в точке a, $\varphi(a)\neq 0$.

Если функция $f(z)$ аналитична в окрестности $\left(|z|>r\right)$ *бесконечно удаленной точки*, то точка $a=\infty$ называется *изолированной особой точкой* $f(z)$. При этом точка $a=\infty$ называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, полюсом или существенно особой точкой, если разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $a=\infty$

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} A_n z^n$$

соответственно не содержит положительных степеней z, содержит конечное число положительных степеней z или содержит бесконечное множество положительных степеней z.

Подстановка $z=\frac{1}{\xi}$ сводит изучение функции в окрестности точки $a=\infty$ к изучению функции в окрестности точки $a=0$.

Пример 19. Определить характер точки $z_0=0$ для функции $f(z)=\frac{\sin z}{z}$.

Решение. $z_0=0$ – особая точка функции $\frac{\sin z}{z}$. Для выяснения ее характера разложим функцию $\frac{\sin z}{z}$ в ряд Лорана в области $0<|z|<\infty$.

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3\ !}+\frac{z^5}{5\ !}-\ldots,\qquad 0\le|z|<\infty;$$

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots,\qquad 0<|z|<\infty.$$

Так как разложение не содержит отрицательных степеней z, то точка $z_0=a$ – устранимая особая точка.

Пример 20. Найти особые точки функции $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$ и выяснить их характер.

Решение. Точка $z_0=1$ – особая точка. Для выяснения ее характера разложим функцию $e^{\frac{z}{1-z}}$ в ряд Лорана в области $0<|z\ -1|<\infty$.

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\ ,\qquad 0\le|z|<\infty;$$

$$e^{-\frac{1}{z-1}}=1-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!\,(z-1)^2}-\frac{1}{3!\,(z-1)^3}+\ldots,\quad 0<|z-1|<\infty;$$

$$e^{\frac{z}{1-z}}=e^{\frac{z-1+1}{1-z}}=e^{-1}\ e^{-\frac{1}{z-1}}=\frac{e^{-1}}{1}-\frac{e^{-1}}{z-1}+\frac{e^{-1}}{2!\,(z-1)^2}-\frac{e^{-1}}{3!\,(z-1)^3}+\ldots,\quad 0<|z-1|<\infty.$$

$z_0=1$ – существенно особая точка.

Выясним характер особой точки $z=\infty$. Для этого, положив $z=\frac{1}{\xi}$, получим $f\left(\frac{1}{\xi}\right)=e^{\frac{1/\xi}{1-1/\xi}}=e^{\frac{1}{\xi-1}}$, причем точка $\xi=0$ для этой функции является правильной.

Разложим функцию $\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=e^{\frac{1}{\xi-1}}$ в области $|\xi|<1$ в ряд Тейлора:

$$\varphi(0)=e^{-1},\qquad \varphi'(0)=\left[e^{\frac{1}{\xi-1}}\ \frac{-1}{(\xi-1)^2}\right]\Bigg|_{\xi=0}=-e^{-1};$$

$$\varphi''(0)=\left[e^{\frac{1}{\xi-1}}\ \frac{1}{(\xi-1)^4}+e^{\frac{1}{\xi-1}}\ \frac{2}{(\xi-1)^3}\right]\Bigg|_{\xi=0}=-e^{-1};\ \ldots .$$

Отсюда $$\varphi(\xi)=e^{-1}+\frac{-e^{-1}\,\xi}{1!}+\frac{-e^{-1}\,\xi^2}{2!}+\ldots,$$

т. е. $$f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}=e^{-1}-\frac{e^{-1}}{z}-\frac{e^{-1}}{2!\,z^2}+\ldots,\qquad |z|>1.$$

Следовательно, точка $z=\infty$ – устранимая особая точка.

Если $a=\infty$ – устранимая особая точка функции $f(z)$, то говорят, что она аналитична в бесконечности и принимают $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A_0$.

Если функция $f(z)$ аналитична в бесконечно удаленной точке и $f(\infty)=0$, то точка $z=\infty$ называется нулем m-го порядка функции $f(z)$, если

$$A_0=A_{-1}=\ldots=A_{-(m-1)}=0,\qquad A_{-m}\neq 0.$$

Пример 21. Найти особые точки функции $f(z)=\dfrac{1}{z^3\left(z^2+4\right)^2}$, выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности.

Решение. $\dfrac{1}{z^3\left(z^2+4\right)^2}=\dfrac{1}{z^3(z+2i)^2(z-2i)^2}$.

$z=0$ – полюс 3-го порядка; $z=\pm 2i$ – полюсы 2-го порядка; $z=\pm\infty$ – нуль 7-го порядка.

Задачи

4.1. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=\dfrac{1}{2z-5}$ по степеням z в окрестности точки $z_0=0$.

4.2. Написать разложение функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ по степеням z в области D в ряд Лорана или Тейлора: а) $D_1\{|z|<1\}$; б) $D_2\{1<|z|<2\}$; в) $D_3\{|z|>2\}$.

4.3. Разложить в ряд Тейлора или Лорана функцию $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^2(z-2)}$ в окрестности точек: а) $z_0=3$; б) $z_0=-1$; в) $z_0=2$.

4.4. Зная разложение $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$, $|z| < 1$, найти разложение по степеням z функции $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ при $|z| < 1$.

4.5. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$ в кольце $1 < |z| < 2$ и в окрестности точки $z_0 = 2$ (в последнем случае надлежит определить окрестность, в которой разложение имеет место).

4.6. Найти порядки нулей данных функций:

а) $\dfrac{z^2+9}{z^4}$; б) $z \sin z$; в) $\left(1-e^z\right)\left(z^2-4\right)^3$; г) $\dfrac{\sin^3 z}{z}$.

4.7. Определить характер точек следующих функций:

а) $\dfrac{1}{z\left(z^2+1\right)^2}$; $z_0 = 0$; $z_0 = \pm i$; $z_0 = \infty$;

б) $\dfrac{e^z}{z\left(1-e^{-z}\right)}$; $z_0 = 0$; $z_0 = 2k\,\pi\, i$ $\left(k = \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots\right)$;

в) $\dfrac{\sin \ z}{\left(z+\pi\right)\left(z^2-1\right)}$; $z_0 = -\pi$; $z_0 = \pm 1$;

г) $\dfrac{z+1}{z^7 - 8z^5 + 16z^3}$; $z_0 = \pm 2$; $z_0 = 0$;

д) $e^{\frac{1}{2-z}}$; $z_0 = 2$;

е) $\dfrac{2z^2-1}{z^5\left(z^2+9\right)^3}$; $z_0 = 0$; $z_0 = \pm 3i$.

4.8. Найти особые точки функций, выяснить их характер и исследовать поведение функций на бесконечности: а) $e^{z-\frac{1}{z}}$; б) $\dfrac{z^5}{(1-z)^2}$.

Задачи для самостоятельного решения

4.9. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)=\dfrac{1}{2z-5}$ в окрестности точки $z_0=\infty$.

4.10. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)=z^3\,e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z_0=0$.

4.11. Разложить в ряд Лорана z функцию $f(z)=\dfrac{1+z}{(z+3)^2(z-2i)}$ по степеням z в области D $\{2<|z|<3\}$.

4.12. Разложить в ряд Тейлора или Лорана функцию $f(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$ в окрестности точек: а) $z_0=i$; б) $z_0=\infty$.

4.13. Найти порядки нулей функций:

а) $\left(z^2+4\right)^2$; б) $\operatorname{ctg}^2 z$; в) $\left(z^2+2z+1\right)^3$; г) $\cos 2z$.

4.14. Определить характер точек z_0 следующих функций:

а) $\sin\dfrac{1}{z}$; $z_0=0$;

б) $\dfrac{z^5+3z+1}{(z-1)^2\left(z^2+4\right)}$; $z_0=1$; $z_0=\pm 2i$;

в) $\dfrac{\sin z}{z^2+1}+\dfrac{e^z}{z+i}$; $z_0=\pm i$;

г) $e^{\frac{1}{z}}+\cos z$; $z_0=0$;

д) $\dfrac{\operatorname{ctg} z}{z^2}$; $z_0=0$; $z_0=k\pi$ $(k=\pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$.

4.15. Найти особые точки функций, выяснить их характер и исследовать поведение функций на бесконечности: а) $\dfrac{\cos z}{z^2}$; б) $z\,e^{\frac{1}{z}}$.

ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Вычетом функции $f(z)$ относительно конечной изолированной особой точки a называется число, обозначаемое $\operatorname*{Res}_a f(z)$ и определяемое равенством $\operatorname*{Res}_a f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)\,dz$, где C – любая окружность с центром a, внутри которой

a – единственная особая точка; $\operatorname*{Res}_{a} f(z) = A_{-1}$. Здесь A_{-1} – коэффициент при $\dfrac{1}{z-a}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a.

Если a – устранимая особая точка $f(z)$, то $\operatorname*{Res}_{a} f(z) = 0$.

Если a – простой полюс $f(z)$, то $\operatorname*{Res}_{a} f(z) = \lim\limits_{z\to a} f(z)(z-a)$.

Если $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны в точке a, $f_1(a) \neq 0$, $f_2(a) = 0$, $f_2'(a) \neq 0$ (т. е. a – простой полюс $f(z)$), то

$$\operatorname*{Res}_{a} f(z) = \operatorname*{Res}_{a} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}.$$

Если a – полюс m-го порядка для $f(z)$, то

$$\operatorname*{Res}_{a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)(z-a)^m\right].$$

Пример 22. Определить вычеты функции $f(z) = \dfrac{z^3+1}{(z+2)^2(z-3)}$ относительно точек $z_1 = -2$, $z_2 = 3$.

Решение.
$$\operatorname*{Res}_{-2} \frac{z^3+1}{(z+2)^2(z-3)} = \lim_{z\to -2}\left[\frac{\left(z^2+1\right)\left(z+2\right)^2}{\left(z+2\right)^2\left(z-3\right)}\right]' =$$

$$= \lim_{z\to -2} \frac{3z^2\left(z-3\right)-\left(z^3+1\right)}{\left(z-3\right)^2} = -\frac{53}{25}.$$

$$\operatorname*{Res}_{3} \frac{z^3+1}{(z+2)^2(z-3)} = \lim_{z\to 3} \frac{\left(z-3\right)\left(z^3+1\right)}{\left(z+2\right)^2\left(z-3\right)} = \lim_{z\to 3} \frac{z^3+1}{\left(z+2\right)^2} = \frac{28}{25}$$

или
$$\operatorname*{Res}_{3} \frac{z^3+1}{(z+2)^2(z-3)} = \left.\frac{z^3+1}{\left[\left(z+2\right)^2\left(z-3\right)\right]'}\right|_{z=3} =$$

$$= \left.\frac{z^3+1}{2\left(z+2\right)\left(z-3\right)+\left(z+2\right)^2}\right|_{z=3} = \frac{28}{25}.$$

Пример 23. Определить вычет функции $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$ относительно особой точки $z_0=1$.

Решение. Точка $z_0=1$ – существенно особая точка (см. пример 20).
Ряд Лорана для функции $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$ в области $0<|z-1|<\infty$ имеет вид

$$e^{\frac{z}{1-z}}=\frac{e^{-1}}{1}-\frac{e^{-1}}{z-1}+\frac{e^{-1}}{2!(z-1)^2}-\frac{e^{-1}}{3!(z-1)^3}+\dots;$$

$$\operatorname*{Res}_{1} e^{\frac{z}{1-z}}=A_{-1}=-e^{-1}=-\frac{1}{e}.$$

Основная теорема о вычетах. Если функция $f(z)$ аналитична на простом замкнутом контуре C и внутри него, за исключением конечного числа особых точек a_1, a_2, ..., a_n, лежащих внутри C, то

$$\int f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{a_k} f(z).$$

Пример 24. Вычислить $\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\,dz$.

Решение. Функция $f(z)=\frac{e^z}{z}$ имеет одну особую изолированную точку $z=0$ (полюс 1-го порядка), лежащую в области $|z|\le 1$. Значит,

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\,dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{0} f(z)=2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{e^z\cdot z}{z}=2\pi i.$$

Пример 25. Вычислить $\int\limits_{C}\frac{dz}{z^5-z^3}$, где C – окружность $|z|=3$.

Решение. $\frac{1}{z^5-z^3}=\frac{1}{z^3(z-1)(z+1)}$.

$z=0$ – полюс 3-го порядка, $z=\pm 1$ – полюсы 1-го порядка, лежащие внутри контура интегрирования, тогда

$$\int\limits_C \frac{dz}{z^5 - z^3} = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_0 \frac{1}{z^5 - z^3} + \operatorname*{Res}_1 \frac{1}{z^5 - z^3} + \operatorname*{Res}_{-1} \frac{1}{z^5 - z^3}\right];$$

$$\operatorname*{Res}_0 \frac{1}{z^5 - z^3} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{z^5 - z^3}\cdot z^3\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{z^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{6z^2 + 2}{\left(z^2 - 1\right)^3} = -1;$$

$$\operatorname*{Res}_1 \frac{1}{z^5 - z^3} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z^5 - z^3}(z - 1) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z^4 + z^3} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname*{Res}_{-1} \frac{1}{z^5 - z^3} = \lim_{z\to -1}\frac{1}{z^5 - z^3}(z + 1) = \lim_{z\to -1}\frac{1}{z^4 - z^3} = \frac{1}{2}.$$

$$\int\limits_C \frac{dz}{z^5 - z^3} = 2\pi i\left[-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = 0.$$

Пример 26. Вычислить $\int\limits_{|z|=r} \sin\frac{1}{z}\,dz$.

Решение. $z = 0$ – существенно особая точка, т. к. $\lim\limits_{z\to 0}\sin\frac{1}{z}$ не существует.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, \qquad 0 \le z < \infty;$$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3\,3!} + \frac{1}{z^5\,5!} - \ldots\ , \qquad 0 < z < \infty;$$

$$\operatorname*{Res}_0 \sin\frac{1}{z} = 1;$$

$$\int\limits_{|z|=r} \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_0 \sin\frac{1}{z} = 2\pi i.$$

Вычетом относительно *бесконечно удаленной* изолированной особой точки функции $f(z)$ называется обозначаемое $\operatorname*{Res}_\infty f(z)$ число, равное

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} f(z)\, dz\,,$$

где C – любая окружность с центром в точке O, содержащая внутри себя все особые точки $f(z)$, кроме точки $z = \infty$, и контур C обходится по часовой стрелке $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = -A_{-1}$, где A_{-1} – коэффициент при $\dfrac{1}{z}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

Если функция $f(z)$ аналитична в расширенной комплексной плоскости всюду, за исключением конечного числа особых точек, то сумма вычетов функции $f(z)$ относительно всех ее особых точек равна нулю.

Пусть функция $f(z)$ есть функция аналитическая всюду в верхней полуплоскости, включая действительную ось, за исключением конечного числа особых точек a_1, a_2, ..., a_n, лежащих в верхней полуплоскости. Кроме того, бесконечно удаленная точка есть нуль не ниже второго порядка для функции $f(z)$, т. е. $f(\infty) = 0, \quad f'(\infty) = 0$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{a_k} f(z).$$

Пример 27. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+25\right)\left(9x^2+1\right)}$.

Решение. $f(z) = \dfrac{1}{\left(x^2+25\right)\left(9x^2+1\right)}$ удовлетворяет всем условиям сформулированной теоремы.

$z = 5\,i, \quad z = \dfrac{1}{3}\,i$ – простые полюсы, лежащие в верхней полуплоскости.

Тогда
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+25\right)\left(9x^2+1\right)} = 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{5\,i} \frac{1}{\left(z^2+25\right)\left(9z^2+1\right)} + \right.$$

$$\left. + \operatorname*{Res}_{\frac{1}{3} i} \frac{1}{\left(z^2+25\right)\left(9z^2+1\right)} \right] = 2\pi i \left[\frac{-1}{10\,i \cdot 224} + \frac{3}{\left(-\dfrac{1}{9} + 25\right) \cdot 9 \cdot 2\,i} \right] = \frac{\pi}{80}.$$

Если функция $f(z)=e^{itz}F(z)$ $(t>0)$, причем $F(z)$ аналитична всюду в верхней полуплоскости, включая действительную ось, за исключением конечного числа особых точек a_1, a_2, ..., a_n, лежащих в верхней полуплоскости, кроме того, бесконечно удаленная точка является нулем функции $F(z)$, т. е. $F(\infty)=0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{a_k} f(z).$$

Пример 28. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx$.

Решение

$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\ \sin x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ \sin x}{x^2+1}\,dx$, т. к. подынтегральная функция четная.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ \sin x}{x^2+1}\,dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ e^{ix}}{x^2+1}\,dx.$$

Функция $\dfrac{z\,e^{iz}}{z^2+1}$ удовлетворяет условиям сформулированной выше теоремы. $z=i$ – полюс 1-го порядка, лежащий в верхней полуплоскости. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ e^{ix}}{x^2+1}\,dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{i} \frac{z\ e^{iz}}{z^2+1} = i\frac{\pi}{e};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ \sin x}{x^2+1}\,dx = \operatorname{Im} i\frac{\pi}{e} = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x\ \sin x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Задачи

5.1. Вычислить вычеты следующих функций относительно их конечных особых точек:

а) $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$, б) $\dfrac{1}{z^2-2z+5}$, в) $\dfrac{\cos z}{z^3(z+4)}$, г) $\operatorname{tg} z$, д) $e^{\frac{1}{z+2}}$.

5.2. Вычислить с помощью вычетов следующие интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=2} \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+9)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z^3}{4z^4+1}dz$,

в) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=5} \frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{(z-1)(z+3)^2}dz$, г) $\displaystyle\int\limits_{C} z\sin\frac{1}{z^2}dz$, где C – прямоугольник с вершинами $(1+i)$, $(1-2i)$, $(-1+i)$, $(-1-2i)$.

5.3. Вычислить с помощью вычетов следующие несобственные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$; б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; в) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^4}dx$.

Задачи для самостоятельного решения

5.4. Вычислить вычеты следующих функций относительно их конечных особых точек:

а) $\dfrac{1}{(z+2)^2\cdot z^3}$, б) $\dfrac{1}{z-z^3}$, в) $\dfrac{1}{\sin z}$, г) $e^{\frac{1}{z}}$.

5.5. Вычислить с помощью вычетов следующие интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{5}{2}}\frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+4)(z^2-9)}dz$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz$,

в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z+1)^2(z-i)}dz$, г) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} z^n\, e^{\frac{2}{z}}\,dz$, где n – целое число.

5.6. Вычислить с помощью вычетов следующие несобственные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$, б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$, в) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$.

Ответы

1.1. а) $-e^{\pi}, \quad e^2(\cos 2 + i\sin 2), \quad ie;$ **б)** $\sin 2\ \mathrm{ch}\,3 + i\cos 2\ \mathrm{sh}\,3,\ i\,\mathrm{sh}\,1;$

в) $\dfrac{\sin 2 - i\,\mathrm{sh}\,2\pi}{2\left(\sin^2 1 + \mathrm{sh}^2\pi\right)}, \quad i\,\mathrm{cth}\dfrac{\pi}{2};$ **г)** $\mathrm{ch}\,1\cos 2 + i\,\mathrm{sh}\,1\sin 2, \quad \mathrm{ch}\,2\cos 1 - i\,\mathrm{sh}\,2\sin 1;$

д) $i(\pi + 2k\pi),\ i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ \ln\sqrt{13} + i\left(-\mathrm{arctg}\dfrac{3}{2} + 2k\pi\right),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

е) $-i\ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2k\pi, \quad -i\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) + \pi(2k+1),$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi.$

1.2. $e^{3\ln\sqrt{2} + 3\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}\left[\cos\left(-3\ln\sqrt{2} + 3\left(-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right) + \right.$

$\left. + i\sin\left(-3\ln\sqrt{2} + 3\left(-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)\right],$

$e^{-2k\pi}\left[\cos(\ln 3) + i\sin(\ln 3)\right],\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ .$

1.3. 1,1276.

1.4. а) $\mathrm{Re}\, e^{z^2} = e^{x^2 - y^2}\cos 2xy, \quad \mathrm{Im}\, e^{z^2} = e^{x^2 - y^2}\sin 2xy;$

б) $\mathrm{Re}\, z^{3+i} = \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}\ e^{-\arg z + 2k\pi}\cos\left[\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + 3\arg z\right],$

$\mathrm{Im}\, z^{3+i} = \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}\ e^{-\arg z + 2k\pi}\sin\left[\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + 3\arg z\right];$

в) $\mathrm{Re}\left(z^2\sin z\right) = \left(x^2 - y^2\right)\sin x\ \mathrm{ch}\,y - 2xy\cos x\ \mathrm{sh}\,y,$

$\mathrm{Im}\left(z^2\sin z\right) = \left(x^2 - y^2\right)\cos x\ \mathrm{sh}\,y + 2xy\sin x\ \mathrm{ch}\,y.$

1.5. $z = \pm i\ln\left(2 + \sqrt{3}\right) + 2k\pi.$ **1.8.** $w = 9e^{2\varphi i}.$

1.9. Образом являются два семейства парабол с общим фокусом в начале координат и с осями, совпадающими с действительной осью.

1.10. $4u^2 - \frac{4v^2}{3} = 1, \quad \frac{1}{2} < u < \infty, \quad -\infty < v < 0.$

1.11. а) $i, \ e^2(\cos 3 + i\sin 3)$; **б)** $\cos 3 \ \mathrm{ch}\,1 - i\sin 3 \ \mathrm{sh}\,1, \ \ \cos 2 \ \mathrm{ch}\frac{\pi}{2} - i\sin 2 \ \mathrm{sh}\frac{\pi}{2}$;

в) $\frac{\sin 2 + i \ \mathrm{sh}\, 2\pi}{2\left(\mathrm{ch}^2\pi - \sin^2 1\right)}, \quad \frac{\sin 4 - i \ \mathrm{sh}\, 2}{2\left(\mathrm{ch}^2 1 - \sin^2 2\right)}$;

г) $\mathrm{sh}\,3 \ \cos 2 - i \ \mathrm{ch}\,3 \ \sin 2, \ \ \mathrm{sh}\,1 \ \cos 1 + i \ \mathrm{ch}\,1 \ \sin 1$;

д) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\,2k\pi, \quad i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$; **е)** $\pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + 2k\pi, \quad \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$

1.12. $e^{2k\pi}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi}.$ **1.13.** $1{,}1752\,i.$

1.14. а) $\mathrm{Re}\, e^{5iz-1} = e^{-5y-1}\cos 5x, \quad \mathrm{Im}\, e^{5iz-1} = e^{-5y-1}\sin 5x$;

б) $\mathrm{Re}\left(z^3 + 5z - 1\right) = x^3 - 3x\,y^2 + 5x - 1, \quad \mathrm{Im}\left(z^3 + 5z - 1\right) = 3x^2y - y^3 + 5y$;

в) $\mathrm{Re}\ \sin(zi - 1) = -\sin(y+1)\ \mathrm{ch}\,x, \quad \mathrm{Im}\ \sin(zi-1) = \cos(y+1)\ \mathrm{sh}\,x.$

1.16. $v = 2u + 10.$ **1.17.** $\frac{9u^2}{25} + \frac{9v^2}{16} = 1.$

1.18. Прообразом являются два семейства равнобочных гипербол. У одного семейства асимптоты есть биссектрисы координатных углов, а у другого асимптотами служат оси OX и OY.

2.3. Нет.

2.4. Функция аналитическая при $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, \ \pi < \arg z < \frac{5}{4}\pi \left\{f(z) = z^2\right\}$

и при $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{4}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi < \arg z < \frac{7}{4}\pi \left\{f(z) = -z^2\right\}.$

2.5. $\varphi(y) = a\,y + C_1$, $\quad \psi(x) = -a\,x + C_2$, $\quad f(z) = Az + C$, $\quad A = -a\,i$, $\quad C = C_1 + i\,C_2$.

2.6. а) $f(z) = \frac{z^2}{2}(2 - i)$; **б)** $\frac{1}{2} - \frac{1}{z}$; **в)** $f(z) = \ln z + 1$.

2.7. а) $\sqrt{5}$; $\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; **б)** 1; 1.

2.8. а) $\left|\frac{dw}{dz}\right| = 3r^2 = \text{const}$, $\quad \arg\left(\frac{dw}{dz}\right) = 2\varphi = \text{const}$;

б) $\left|\frac{dw}{dz}\right| = e^x = \text{const}$, $\quad x = \text{const}$, $\quad \arg\left(\frac{dw}{dz}\right) = y = \text{const}$.

2.9. $|w'| = |a|$, $\quad \arg w' = \arg a$; $\quad u = 0$, $\quad u = 2$, $\quad v = 3$, $\quad v = 5$;

$u = v$, $\quad u + v = 2$, $\quad v - u = 2$, $\quad v = -u$.

2.10. Нет. **2.11.** $f'(z) = 3z^2$. **2.12.** $\lambda = -1$, $\quad f(z) = -i\,z$. **2.13.** $a = 0$.

2.14. а) $f(z) = 2\ln z + C$; **б)** $f(z) = z^3(2 + i)$; **в)** $f(z) = -\cos z + C$.

2.15. а) $\rho = 2$, $\quad \varphi = \frac{\pi}{2}$; $\quad \rho = 2\sqrt{2}$, $\quad \varphi = \frac{\pi}{4}$; $\quad \rho = 4$, $\quad \varphi = 0$;

б) $\rho = 2$, $\quad \varphi = \frac{\pi}{4}$; $\quad \rho = \frac{1}{e}$, $\quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$.

3.1. $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\,i$. **3.2.** -1. **3.3.** $2i$. **3.4.** $\frac{4}{3}$. **3.5.** $\frac{1}{3}i - \frac{7}{3}$.

3.6. $\frac{1}{2} + i$. **3.7. а)** $2(1 - i)$; **б)** $-2(1 + i)$. **3.8.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$.

3.9. 0. **3.10. а)** $\frac{5}{16}\pi$; **б)** $-\frac{5}{16}\pi$. **3.11.** 0. **3.12.** $4\pi i$.

3.13. $\pi i\,e^{-1}$. **3.14.** $\frac{(z_2 - z_1)(x_1 + x_2)}{2}$. **3.15.** $-\frac{19}{3} + 9i$.

3.16. $1 + i$. **3.17. а)** 0; **б)** $-\frac{9}{2}\pi$. **3.18.** $1 + i\,\operatorname{sh} 1$. **3.19.** -2.

3.20. $\ln 2 + i\, 2\pi n.$ **3.21.** $\frac{\pi}{3}.$ **3.22.** $-\frac{2}{3}\pi i.$ **3.23.** $\frac{\pi i}{3e^2}.$

3.24. $0.$ **3.25. а)** $1;$ **б)** $-\frac{e}{2};$ **в)** $1-\frac{e}{2}.$

4.1. $f(z) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} z^{n-1}}{5^n}.$

4.2. а) $f(z) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}+1\right)z^n;$ **б)** $f(z) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}};$

в) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}-1}{z^n}.$

4.3. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{A(n+1)}{4^{n+2}} + \frac{B}{4^{n+1}} + C\right](z-3)^n;$

б) $\frac{A}{(z+1)^2} + \frac{B}{z+1} - C\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}};$

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{A(n+1)}{3^{n+2}} + \frac{B}{3^{n+1}}\right](z-2)^n + \frac{C}{z-2},$ где $A=\frac{1}{3},$ $B=-\frac{2}{9},$ $C=\frac{2}{9}.$

4.4. $\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots + n z^{n-1} + \ldots \qquad (|z|<1).$

4.5. $f(z) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{z^{2n}} - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ при $1<|z|<2;$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n \quad \text{при } 0<|z-2|<\sqrt{5}.$$

4.6. а) $z=\pm 3i$ – нули 1-го порядка;

б) $z=0$ – нуль 2-го порядка; $z=k\pi,\ k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ – нули 1-го порядка;

в) $z=\pm 2$ – нули 3-го порядка; $z=2k\pi i,\ \ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$ – нули 1-го порядка;

г) $z=k\pi,\ k=\pm 1, \pm 2, \dots$ – нули 3-го порядка.

4.7. а) $z=0$ – полюс 1-го порядка; $z=\pm i$ – полюсы 2-го порядка; $z=\infty$ – нуль 5-го порядка;

б) $z=0$ – полюс 2-го порядка; $z=2k\pi i,\ \ k=\pm 1,\ \pm 2,\ \dots$ – полюсы 1-го порядка;

в) $z=-\pi$ – устранимая особая точка; $z=\pm 1$ – полюсы 1-го порядка;

г) $z=\pm 2$ – полюсы 2-го порядка; $z=0$ – полюс 2-го порядка;

д) $z=2$ – существенно особая точка;

е) $z=0$ – полюс 5-го порядка; $z=\pm 3i$ – полюсы 3-го порядка.

4.8. а) $z=0$ – существенно особая точка; $z=\infty$ – существенно особая точка;

б) $z=1$ – полюс 2-го порядка; $z=\infty$ – полюс 3-го порядка.

4.9. $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^{n+1}}{2^n\,z^n}$.

4.10. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n\,!}\cdot\dfrac{1}{z^{n-3}}$.

4.11. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{A(n+1)}{3^{n+2}}+\dfrac{B}{3^{n+1}}\right]z^n+C\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n\,i^n}{z^{n+1}}$,

где $A=\dfrac{6-4i}{13}$, $B=\dfrac{-29+2i}{169}$, $C=-B$.

4.12. а) $f(z)=\dfrac{1}{2\ (z-i)}-\dfrac{i}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-i)^n}{(2i)^n}$; **б)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{2n+1}}$.

4.13. а) $z=\pm 2i$ – нули 2-го порядка;

б) $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$ – нули 2-го порядка;

в) $z=-1$ – нуль 6-го порядка; **г)** $z=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$ – нуль 1-го порядка.

4.14. а) $z=0$ – существенно особая точка;

б) $z=1$ – полюс 2-го порядка, $z=\pm 2i$ – простые полюсы;

в) $z=\pm i$ – полюсы 1-го порядка; **г)** $z=0$ – существенно особая точка;

д) $z=0$ –полюс 3-го порядка; $z=k\pi$, $k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ – полюсы 1-го порядка.

4.15. а) $z=0$ – полюс 2-го порядка, $z=\infty$ – существенно особая точка;

б) $z=0$ – существенно особая точка, $z=\infty$ – полюс 1-го порядка.

5.1. а) $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=0,\quad \operatorname*{Res}_{1} f(z)=1;$ **б)** $\operatorname*{Res}_{1+2i} f(z)=-\frac{i}{4},\quad \operatorname*{Res}_{1-2i} f(z)=\frac{i}{4};$

в) $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=-\frac{7}{64};$ **г)** $\operatorname*{Res}_{\frac{\pi}{2}} f(z)=-1;$ **д)** $\operatorname*{Res}_{-2} f(z)=1.$

5.2. а) $\frac{\pi i}{25};$ **б)** $\frac{\pi i}{2};$ **в)** $\frac{\pi^2 i}{4};$ **г)** $2\pi i.$

5.3. а) $\frac{\pi}{60};$ **б)** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2};$ **в)** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5.4. а) $\operatorname*{Res}_{-2} f(z)=-\frac{3}{16},\quad \operatorname*{Res}_{0} f(z)=\frac{3}{16};$

б) $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=1,\quad \operatorname*{Res}_{-1} f(z)=-\frac{1}{2},\quad \operatorname*{Res}_{1} f(z)=-\frac{1}{2};$

в) $\operatorname*{Res}_{k\pi} f(z)=(-1)^k;$ **г)** $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=1.$

5.5. а) $-i\frac{\pi\sin 2}{13};$ **б)** $-\frac{2\pi i}{9};$ **в)** $\pi\left[\sin 1-\cos 1+i\left(\operatorname{sh} 1-\cos 1\right)\right];$

г) $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, если $n\ge -1$ и 0, если $n<-1$.

5.6. а) $-\frac{\pi}{27};$ **б)** $\frac{\pi}{2};$ **в)** $\frac{\pi}{2e^4}\ (2\cos 2+\sin 2).$

Типовой расчет

Задача 1

Выполнить указанные действия:

1. $(i)^{43}+\frac{2}{2+3i}$;

2. $(2-4i)^{2}+\frac{4+2i}{i}$;

3. $(i)^{12}+\frac{2+i}{3-i}$;

4. $\frac{3-4i}{4+3i}+3+(i)^{17}$;

5. $\frac{2i+7}{2+i}+(i)^{7}$;

6. $(i)^{22}+\frac{7+5i}{1-2i}$;

7. $\frac{7-5i}{1-2i}+i(1-i)$;

8. $\frac{7-2i}{2+i}+(i)^{11}$;

9. $\frac{5}{1+2i}+(i)^{18}$;

10. $\frac{1+i}{1-i}+(i)^{4}$;

11. $-\ \frac{12}{5\quad i}+i(2+i)^{2}$;

12. $(i)^{23}-\frac{17-6i}{3-\quad 4i}$;

13. $\frac{4}{1+\sqrt{3}\,i}+\frac{\sqrt{3}}{i}$;

14. $(3i+2)\cdot(-i)^{9}+\frac{i+1}{i-1}$;

15. $(1+2i)\cdot(i)^{21}+\frac{5-i}{i}$;

16. $(0,2-0,3i)\cdot(0,5+0,6i)+(i)^{26}$;

17. $\left(3+\sqrt{3}\,i\right)\cdot\left(3-\sqrt{3}\,i\right)+(i)^{33}$;

18. $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$;

19. $(i)^{37}+\frac{7+5i}{1-2i}$;

20. $(i)^{25}-\frac{3-4i}{4-3i}$;

21. $\frac{32}{1+3\sqrt{3}\,i}-\frac{3\sqrt{7}}{2i}$;

22. $\frac{1-i^{2}}{(1+i)^{2}}+3+i$;

23. $(i)^{44}-\frac{1-i}{i}$;

24. $\left(-0,5-0,5\sqrt{3}\,i\right)^{2}+0,5\sqrt{3}\,(i)^{35}$;

25. $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}\,\mathrm{i}}{2}\right)^4$;

26. $\left(2-\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)^2+\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$;

27. $(\mathrm{i})^{17}+\dfrac{2\mathrm{i}}{(3-\mathrm{i})}$;

28. $\dfrac{(2-\mathrm{i})}{3+\mathrm{i}}\cdot\left(1+\mathrm{i}^6\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)^2$;

29. $\dfrac{(\mathrm{i})^{13}\cdot(\mathrm{i}-1)}{2+\mathrm{i}}+1$;

30. $(\mathrm{i})^{15}+\dfrac{6(\mathrm{i}+1)^2}{2-\mathrm{i}}$.

Задача 2

Представить комплексное число в тригонометрической форме:

1. $1+\mathrm{i}$;

2. $1-\mathrm{i}$;

3. $-1+\mathrm{i}$;

4. $-1-\mathrm{i}$;

5. $-2\mathrm{i}$;

6. $3-3\mathrm{i}$;

7. $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$;

8. $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$;

9. $\sqrt{3}+\mathrm{i}$;

10. $0,5+0,5\sqrt{3}\mathrm{i}$;

11. $-\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i}$;

12. $3\sqrt{3}-3\mathrm{i}$;

13. $0,5-0,5\mathrm{i}$;

14. $4\mathrm{i}$;

15. $-0,7+0,7\mathrm{i}$;

16. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$;

17. $-2+2\mathrm{i}$;

18. $3\mathrm{i}$;

19. $-1,2$;

20. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$;

21. $-\sqrt{2}-\sqrt{6}\mathrm{i}$;

22. $\sqrt{3}-\mathrm{i}$;

23. $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+2\,\mathrm{i}$;

24. $-5\mathrm{i}$;

25. $3-3\sqrt{3}\mathrm{i}$;

26. $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$;

27. $-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\mathrm{i}$;

28. $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$;

29. $-8\mathrm{i}$;

30. $-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$.

Задача 3

Вычислить корень:

1. $\sqrt[3]{-2-2i}$; **2.** $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$; **3.** $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$;

4. $\sqrt[5]{i-1}$; **5.** $\sqrt[3]{-\sqrt{2}-\sqrt{6}i}$; **6.** $\sqrt{7+7i}$;

7. $\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{3}}i}$; **8.** $\sqrt[3]{3i-\sqrt{3}}$; **9.** $\sqrt{-1,2-1,2i}$;

10. $\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i}$; **11.** $\sqrt[4]{1-i}$;

Решить уравнение:

12. $z^2+2-2i=0$; **13.** $z^4-1+\sqrt{3}i=0$; **14.** $z^5+1+i=0$;

15. $z^3-\sqrt{2}+\sqrt{6}i=0$; **16.** $z^4-\sqrt{2}+\sqrt{2}i=0$; **17.** $z^4+1+\sqrt{3}i=0$;

18. $z^6-\sqrt{3}-i=0$; **19.** $z^2-7+7i=0$; **20.** $z^4-1-\frac{1}{\sqrt{3}}i=0$;

21. $z^3+3i-\sqrt{3}=0$; **22.** $z^3-\sqrt{2}-\sqrt{6}i=0$; **23.** $z^4-\sqrt{3}i+1=0$;

24. $z^3+1+\sqrt{3}i=0$; **25.** $z^3-\sqrt{6}+\sqrt{2}i=0$; **26.** $z^3-\sqrt{3}i-3=0$;

27. $z^4-\sqrt{3}+i=0$; **28.** $z^3-i=0$; **29.** $z^3-8i=0$;

30. $z^3-\frac{i}{8}=0.$

Задача 4

Представить число в показательной форме:

1. $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; **2.** $1-\sqrt{3}i$; **3.** $3+3\sqrt{3}i$;

4. $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$; **5.** $-10-10i$; **6.** $2+2i$;

7. $3-3\sqrt{3}\,i$;

8. $2-2i$;

9. $\frac{7}{2}+\frac{7}{2\sqrt{3}}i$;

10. $-5+5i$;

11. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

12. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$;

13. $1+\sqrt{3}\,i$;

14. $4i$;

15. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i$;

16. $-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i$;

17. $1-i$;

18. $2i$;

19. $-\sqrt{3}+i$;

20. -2;

21. i;

22. $1+i$;

23. $-1+i$;

24. $-1-i$;

25. $\sqrt{3}+i$;

26. $-2i$;

27. $3-3i$;

28. $-3i$;

29. $2+2i$;

30. $2-2\sqrt{3}\,i$.

Задача 5

Определить и построить множество точек, удовлетворяющих данным уравнениям или неравенствам:

1. $\operatorname{Re} z \geq -2$;

2. $-\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$;

3. $|z-i| < 2$;

4. $\operatorname{Im} z \geq \frac{1}{2}$;

5. $1 \leq |z-2| \leq 3$;

6. $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$;

7. $1 < |z-i| < 2$;

8. $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$;

9. $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Im} z$;

10. $|z+2+i| \geq 2$;

11. $0 < \operatorname{Im} z < 3$;

12. $\operatorname{Im} z = 2$;

13. $\arg z = -\frac{\pi}{4}$;

14. $|z+2-i| = 4$;

15. $\operatorname{Re} z = -2$;

16. $|z+2+i| = 4$;

17. $\operatorname{Im} z = -4$;

18. $|z+2-i| = 16$;

19. $\operatorname{Re} z = 2$; **20.** $|z-2+i| = 4$; **21.** $|z-2-i| = 4$;

22. $\arg z = \dfrac{\pi}{8}$; **23.** $|z-1+2i| = 4$; **24.** $\arg z = \dfrac{2\pi}{3}$;

25. $|z| = 4$; **26.** $\arg z = \dfrac{3\pi}{4}$; **27.** $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$;

28. $\operatorname{Re} z < 5$; **29.** $|z+i| = 2$; **30.** $\operatorname{Im} z > 3$.

Задача 6

Найти действительную и мнимую части:

1. $\cos(2+i)$; **2.** $(-1)^{i}$; **3.** $\sin(2i-1)$;

4. $(i)^{i+1}$; **5.** $\operatorname{tg} 2i$; **6.** $(2)^{-i}$;

7. $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$; **8.** $\cos(2-i)$; **9.** $(-1)^{-i}$;

10. $\operatorname{tg}(-2i)$; **11.** $(1+i)^{i}$; **12.** $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{i-1}{\sqrt{2}}\right)$;

13. $\sin(1+2i)$; **14.** 2^{i}; **15.** $\cos(1-2i)$;

16. $(1-i)^{-i}$; **17.** $\sin(-1-2i)$; **18.** $(i-1)^{i}$;

19. $\cos(-1+2i)$; **20.** $\sin(1-2i)$; **21.** $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}{2}\right)$;

22. $\sin(2-i)$; **23.** $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^{2i}$; **24.** $\cos(-2-i)$;

25. $\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^{1+i}$; **26.** $\sin(2+i)$; **27.** $\left(\sqrt{3}-i\right)^{i}$;

28. $\sin(-2+2i)$; **29.** $2^{-1-\sqrt{3}i}$; **30.** $\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right)$.

Задача 7

Найти аналитическую функцию $f(z)=u+i\,v$ по следующим данным, если $z=x+i\,y$:

1. $u=x^3-3x\,y^2, \quad f(0)=i$;

2. $u=x^2-y^2+2x, \; f(i)=-1+2i$;

3. $u=2e^x\cos y, \quad f(0)=2$;

4. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \quad x>0, \quad f(1)=0$;

5. $u=x^2-y^2+5x$;

6. $v=4-2y$;

7. $u=\dfrac{y}{y^2+x^2}$;

8. $u=3+x^2-y^2$;

9. $v=x^2-y^2+2$;

10. $v=e^x\sin y$;

11. $u=x^2-y^2+x\,y, \quad f(0)=0$;

12. $u=x^3-3x\,y^2, \quad f(0)=0$;

13. $u=\dfrac{y}{y^2+x^2}, \quad f(2)=0$;

14. $v=e^x\cos y, \quad f(0)=1$;

15. $u=x^2-y^2+11, \; f(0)=11-7i$;

16. $u=2x^3-6x\,y^2, \quad f(0)=0$;

17. $v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \quad f(1)=1$;

18. $v=2x\,y+5y, \quad f(0)=0$;

19. $u=x^2-y^2, \quad f(0)=0$;

20. $v=e^x\cos y, \quad f(0)=i$;

21. $u=x+\dfrac{x}{x^2+y^2}, \quad f(1)=2$;

22. $u=x^2-y^2+5x, \; f(0)=0$;

23. $v=6x^2y-2y^3-x^3+3x\,y^2$,
$f(0)=0$;

24. $u=-2x\,y, \quad f(0)=0$;

25. $u=-e^x\sin y, \quad f(0)=i$;

26. $u=\ln\left(x^2+y^2\right)$;

27. $u=e^{-y}\cos x$;

28. $v=3x^2y-y^3, \quad f(0)=1$;

29. $u=y-2x\,y$;

30. $v=2x\,y+y, \quad f(0)=0$.

Задача 8

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_{AB} (z+\bar{z})\,dz$; AB – отрезок, $A=2i$, $B=4$.

2. $\int\limits_{AB} z\operatorname{Re} z\,dz$; AB – часть параболы $y=x^2$, $A(0;0)$, $B(1;1)$.

3. $\int\limits_{C} z\cdot\bar{z}\,dz$; $C:\ y=\sqrt{1-x^2}$ между точками $(-1;1)$.

4. $\int\limits_{AB} z\operatorname{Im} z\,dz$; AB – часть параболы $y^2=2x$, $A=0$, $B=2+2i$.

5. $\int\limits_{C} \operatorname{Re} z\,dz$; C – ломаная MNK, $M(0;0)$, $N(2,0)$, $K(2,1)$.

6. $\int\limits_{C} \operatorname{Im} z\,dz$; C – ломаная OMK, $O(0;0)$, $M(1;1)$, $K(2;0)$.

7. $\int\limits_{C} (z+2\bar{z})\,dz$; C – ломаная OMK, $O(0;0)$, $M(-1;1)$, $K(-1;0)$.

8. $\int\limits_{C} |z|\,dz$; $C:\ y=\sqrt{1-x^2}$ между точками $(-1;1)$.

9. $\int\limits_{C} (\bar{z})^2\,dz$; $C:\ x^2-y^2=1$ между точками $(1;1)$ и $(2;\sqrt{3})$.

10. $\int\limits_{C} \operatorname{Re} z\sin(\operatorname{Re} z)\,dz$; $C:\ y=x$ между точками $(0;0)$ и $(1;1)$.

11. $\int\limits_{C} i\operatorname{Im}|z^2|\,dz$; C – часть окружности $|z|=1$, расположенная в IV четверти.

12. $\int\limits_{C} z^2\operatorname{Re} z\,dz$; C – отрезок прямой $x=\frac{1}{2}y$ между точками $(0;0)$ и $(-1;-2)$.

13. $\int\limits_{C} (\operatorname{Im} z^2)\,dz$; C – часть эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ от $A(-2;0)$ до $B(0;3)$.

14. $\int\limits_{C} (z-\bar{z})\,dz$; C – часть окружности $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \end{cases}$ $-\frac{\pi}{2}\le t\le 0$ от точки $(-a;0)$ до $(0;a)$.

15. $\int\limits_C \operatorname{Im}(\overline{z})\,dz$; C – циклоида $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

16. $\int\limits_C i \operatorname{Re} z\,dz$; C – часть эллипса $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $-\frac{\pi}{2} \le t \le 0$.

17. $\int\limits_C i\, z \cdot \overline{z}\,dz$; C – $x = \sqrt{1 - y^2}$ от точки $(0; -1)$ до $(0; 1)$.

18. $\int\limits_C \overline{z} \operatorname{Im} z\,dz$; C – $y = -\sqrt{1 - x^2}$ от точки $(1; 0)$ до $(1; 0)$.

19. $\int\limits_C (2z - 7\overline{z})\,dz$; C – ломаная OMK, $O(0; 0)$, $M(1; -1)$, $K(0; -2)$.

20. $\int\limits_C i\,|z|\,dz$; C – $x = \sqrt{1 - y^2}$ от точки $(0; -1)$ до $(-1; 0)$.

21. $\int\limits_C \operatorname{Im} z\,dz$; C – часть параболы $y = x^2$ от точки 0 до $(1 + i)$.

22. $\int\limits_C \operatorname{Re} z\,dz$; C – часть параболы $y = \frac{1}{4}x^2$ от точки 0 до $(2 + i)$.

23. $\int\limits_C |z|\,dz$; C – полуокружность $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$ (начало в точке $z = 1$).

24. $\int\limits_C i \operatorname{Im} z\,dz$; C – циклоида $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

25. $\int\limits_C \operatorname{Im}(z^2)\,dz$; C –часть параболы $y^2 = -4x$ от точки $(-1; -2)$ до точки $(-1; 2)$.

26. $\int\limits_C (\operatorname{Re} z)^2\,dz$; C – часть гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ от точки $(1; 0)$ до точки

$(2; \sqrt{3})$.

27. $\int\limits_C i\sin(\operatorname{Im} z)\,dz$; C – отрезок прямой $y=-x$ от точки $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ до точки $(-\pi;\pi)$.

28. $\int\limits_C (\operatorname{Re} z)^2\,dz$; $C:\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}\quad -\pi \le t \le -\dfrac{\pi}{2}.$

29. $\int\limits_C \overline{z}^2\,dz$; $AB:\{y=x^2,\quad z_A=0,\quad z_B=1+i\}$.

30. $\int\limits_C |z|\,\overline{z}\,dz$; $L:\{|z|=4,\quad \operatorname{Re} z\ge 0\}$ от точки $(0;-2)$ до точки $(0;2)$.

Задача 9

Вычислить интегралы, используя теорему Коши или формулу Коши для замкнутого контура:

1. $\oint\limits_C \dfrac{z^2}{(z-2)^3}\,dz,\quad C:|z|=4;$

2. $\oint\limits_C \dfrac{z^3}{(z-2)^2}\,dz,\quad C:|z|=3;$

3. $\oint\limits_C \dfrac{\sin z}{z^2-7z+10}\,dz,\quad C:|z|=4;$

4. $\oint\limits_C \dfrac{\cos z}{(z-i)^2}\,dz,\quad C:|z|=2;$

5. $\oint\limits_C \dfrac{e^z}{\left(z-\dfrac{\pi}{2}i\right)^5}\,dz,\quad C:|z-3i|=2;$

6. $\oint\limits_C \dfrac{e^{zi}}{\left(z-\dfrac{\pi}{2}i\right)^2}\,dz,\quad C:|z-1|=2;$

7. $\oint\limits_C \dfrac{dz}{z^2+9},\ C:|z-2i|=3;$

8. $\oint\limits_C \dfrac{dz}{\left(z^2+9\right)^2},\ C:|z-2i|=2;$

9. $\oint\limits_C \dfrac{\operatorname{sh} z}{\left(z-\dfrac{\pi}{2}i\right)^3}\,dz,\ C:|z|=2;$

10. $\oint\limits_C \dfrac{e^z\,dz}{(z+2)^4},\quad C:\dfrac{(x+2)^2}{4}+y^2=1;$

11. $\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{z^2+9}$, $C: |z-i| = 5$;

12. $\int\limits_C \frac{\sin z}{z^2+9}$, $C: |z+i| = 2{,}5$;

13. $\int\limits_C \frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2}$, $C: |z| = 4$;

14. $\int\limits_C \frac{e^{zi}\,dz}{z^2+4}$, $C: |z| = 2{,}5$;

15. $\int\limits_C \frac{z\,e^{\pi z}\,dz}{(z-i)^2}$, $C: |z+1| = 3$;

16. $\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{z\,(\pi i - z)^2}$, $C: |z| = 4$;

17. $\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{z\,(1-z)^2}$, $C: |z-1| = 0{,}7$;

18. $\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{z\,(1-z)}$, $C: |z| = 2{,}5$;

19. $\int\limits_C \frac{dz}{z\,(1-z)^4}$, $C: |z-3| = 2{,}5$;

20. $\int\limits_C \frac{z-1}{z^2+4}dz$, $C: |z| = 3$;

21. $\int\limits_C \frac{e^{zi}\,dz}{\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)}$, $C: |z-1| = 3$;

22. $\int\limits_C \frac{\sin^2 z}{(z-1)^2}\,dz$, $C: |z| = 2$;

23. $\int\limits_C \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^5}\,dz$, $C: |z| = 4$;

24. $\int\limits_C \frac{\cos \pi z}{(2z+1)^2}\,dz$, $C: |z| = 1$**;**

25. $\int\limits_C \frac{z^3}{z^2+1}\,dz$, $|z-i| = 2{,}5$**;**

26. $\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{\left(z^2+2z+1\right)^2}$, $|z| = 2$**;**

27. $\int\limits_{|z|} \frac{e^z\,dz}{z(z+2)^2}$**;**

28. $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z\left(z^2+1\right)}$**;**

29. $\int\limits_{|z-3|=\frac{1}{2}} \frac{e^z\,dz}{\sin z}$**;**

30. $\int\limits_{|z+1|=2} \frac{\sin^2 z - 3}{z^2+2\pi z}\,dz$**.**

Задача 10

Разложить функцию в ряд Лорана в указанном кольце:

1. $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}, \quad 2<|z|<3;$

2. $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}, \quad 3<|z|<\infty;$

3. $\dfrac{1}{z^2+z}, \quad 0<|z|<1;$

4. $\dfrac{1}{z^2+z}, \quad 1<|z|<\infty;$

5. $\dfrac{1}{(z+2)(1+z)}, \quad 2<|z|<\infty;$

6. $\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}, \quad 1<|z|<2;$

7. $\dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}, \quad 1<|z|<2;$

8. $\dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}, \quad |z|<1;$

9. $\dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}, \quad 2<|z|<\infty;$

10. $\dfrac{2}{z^2-1}, \quad 1<|z+2|<3;$

11. $\dfrac{z}{z^2-3z+2}, \quad 1<|z|<2;$

12. $e^{z+\frac{1}{z}}, \quad 0<|z|<\infty;$

13. $\dfrac{z+1}{z^2+z-2}, \quad 1<|z|<2;$

14. $\dfrac{z+1}{z^2+z-2}, \quad |z|>2;$

15. $\dfrac{z}{(z^2+1)(z-3)}, \quad 1<|z|<3;$

16. $\dfrac{z}{z^3-2z^2+z-2}, \quad 1<|z|<2;$

17. $z^3 \cos\dfrac{1}{z}, \quad 0<|z|<\infty;$

18. $z^5 e^{\frac{1}{z}}, \quad 0<|z|<\infty;$

19. $\dfrac{1}{z-z^3}, \quad 0<|z|<1;$

20. $\dfrac{z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1}, \quad 0<|z|<\infty;$

21. $\dfrac{1}{z^2+2z-8}, \quad 1<|z+2|<4;$

22. $\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}, \quad 2<|z-1|<\infty;$

23. $\dfrac{z^5}{\left(z^2-4\right)^2}, \quad 2<|z|<\infty;$

24. $\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}, \quad 1<|z|<2;$

25. $\dfrac{1+\cos z}{z^4}, \quad 0<|z|<\infty;$

26. $z^4 \cos\dfrac{1}{z}, \quad 0<|z|<\infty;$

27. $\dfrac{z-2}{z(z+1)(2z-1)}, \quad 0<|z|<\dfrac{1}{2};$

28. $\dfrac{1}{(z+2)(z-3)}, \quad 2<|z|<3;$

29. $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}, \quad 0<|z-1|<3;$

30. $\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}, \quad 1<|z|<3.$

Задача 11

Найти особые точки функции $w=f(z)$ и выяснить их характер:

1. $\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^3};$

2. $\dfrac{z+1}{z^7-8z^5+16z^3};$

3. $\dfrac{\cos z}{z-\dfrac{\pi}{2}};$

4. $\dfrac{1}{\left(z^2+9\right)^2};$

5. $\dfrac{\sin z}{z-\pi};$

6. $\dfrac{1}{\sin z};$

7. $\dfrac{z^2+1}{z-1};$

8. $\dfrac{z-1}{\cos z};$

9. $\dfrac{\cos z}{z-i};$

10. $\operatorname{tg} z;$

11. $\dfrac{1}{\cos^2 z};$

12. $\dfrac{z-1}{z^2+1};$

13. $\dfrac{z}{\operatorname{tg} z};$

14. $\dfrac{z+1}{z^3+4z};$

15. $\dfrac{z^3}{\sin^4 z}$, внутри окружности $|z|=1;$

16. $\dfrac{z^2+1}{(z-i)^2\left(z^2+4\right)};$

17. $\dfrac{1}{z-z^3};$

18. $\dfrac{1}{z\left(z^2+4\right)^2};$

19. $\dfrac{e^z}{1+z^2};$

20. $\dfrac{1}{\left(z^2+4\right)^2};$

21. $\dfrac{z^4}{1+z^4};$

22. $\dfrac{1}{\sin^3 z};$

23. $\dfrac{z^2+1}{e^z};$

24. $\dfrac{z+5}{\left(z^2-3z+2\right)^2\left(z^2+1\right)};$

25. $\dfrac{z^5}{(1-z)^2};$

26. $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 z};$

27. $\dfrac{z^2}{\sin^3 z \cos z}$ в круге $|z|\le 1;$

28. $\dfrac{z+4}{2z^2+z^3-z^4};$

29. $\dfrac{z+2}{z+z^2-2z^3};$

30. $\dfrac{z-2}{2z^3+z^2-z}.$

Задача 12

Найти вычеты относительно особых точек:

1. $w=\dfrac{1}{\left(z^2+9\right)^2}$ внутри $|z-3i|=1;$

2. $w=\dfrac{1}{\left(z^2+9\right)^2}$ внутри $|z+3i|=1;$

3. $w=\dfrac{z^3}{\sin^4 z}$ внутри $|z|=1;$

4. $w=\dfrac{1}{z^3-z^5}$ для $|z|\le\dfrac{1}{2};$

5. $w=\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$ для $|z-i|\le 1;$

6. $w=\dfrac{1}{z^3-z^5}$ внутри $0{,}5\le|z|\le 1{,}5;$

7. $w=\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$ для $|z+i|\le 1;$

8. $w=\dfrac{e^z}{z^2\left(z^2+9\right)}$ для $|z|\le 1;$

9. $w=\dfrac{e^z}{z^2\left(z^2+9\right)}$ для $|z-3i|\le 1;$

10. $w=\dfrac{e^z}{z^2\left(z^2+9\right)}$ для $|z+3i|\le 1;$

11. $w=\dfrac{\cos z}{z-\dfrac{\pi}{2}};$

12. $w=\dfrac{z^2+1}{z-1};$

13. $w=\dfrac{\cos z}{\left(z^2+2z+1\right)^2};$

14. $w=\dfrac{\sin 2z}{\left(z+1\right)^3};$

15. $w=\operatorname{tg} z;$

16. $w=\dfrac{z+1}{z^3+4z};$

17. $w=\sin z\cdot\sin\dfrac{1}{z};$

18. $w=\cos\dfrac{1}{z-2};$

19. $w=\dfrac{z-1}{z^2+1};$

20. $w=\dfrac{z^2-1}{z-18};$

21. $w=\dfrac{1}{z\left(1-z^2\right)};$

22. $w=\dfrac{z^2+z+1}{z^2\left(z-1\right)};$

23. $w=\dfrac{1}{\sin z};$

24. $w=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^3};$

25. $w = \sin\frac{z}{z+1}$;

26. $w = \frac{z^2+4z-1}{z+3}$;

27. $w = \frac{e^{2z}-z}{z^2}$;

28. $w = \frac{z-\sin z}{z^4}$;

29. $w = \frac{1-\cos z^2}{z^2}$;

30. $w = \frac{e^z+1}{z(z-1)}$.

Задача 13

Вычислить интеграл с помощью вычетов:

1. $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}dz$;

2. $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^3-z^5}$;

3. $\int\limits_{|z+i|=1} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}dz$;

4. $\int\limits_{|z+i|=0,7} \frac{dz}{z(1+z^2)}$;

5. $\int\limits_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{e^{iz}}{z(z-\pi)}dz$;

6. $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz$;

7. $\int\limits_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}dz$;

8. $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{\left(z-\frac{\pi}{4}i\right)}dz$;

9. $\int\limits_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)^2}$;

10. $\int\limits_{|z|=3} \frac{z-1}{z^2+4}dz$;

11. $\int\limits_{|z|=2} \operatorname{tg} z\, dz$;

12. $\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(1+z)^2(z+2)}$;

13. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}dz;$ **14.** $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sin z};$

15. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-1}{z^2+1}dz;$ **16.** $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3}{\sin z}dz;$

17. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz;$ **18.** $\displaystyle\oint\limits_{|z|=r} \sin\frac{1}{z}\,dz;$

19. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3}{2z^4+1}dz;$ **20.** $\displaystyle\oint\limits_{x^2+y^2=2x} \frac{dz}{z^4+1};$

21. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}dz;$ **22.** $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \operatorname{ctg} z\,dz;$

23. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2\,dz}{\sin^3 z\,\cos z};$ **24.** $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^4+2z^2+1}dz;$

25. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}dz;$ **26.** $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2};$

27. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=\frac{1}{2}} \frac{e^z\,dz}{\sin z};$ **28.** $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2} \frac{2z(z-1)\,dz}{\sin z};$

29. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^4+2z^2+3}{2z^6}\,dz;$ **30.** $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)}\,dz.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Арамович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1968. 41 с.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 19685. 464 с.

3. Ефимов А. В. Математический анализ (специальные разделы). Общие функциональные ряды и их приложение. М.: Высш. школа, 1980. 279 с.

4. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1981. 302 с.

5. Лаврентьев М. А., Шабаш Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

6. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1979. 320 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор Г. М. Кляут
Сводный темплан 2005 г.
ИД 06039 от 12.10.01
Подписано в печать 20.04.05 Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 4,25 Уч.-изд. л. 4,25
Тираж 300 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

ДЛЯ ЗАМЕТОК