

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ № 6 – 10
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ**

Для дистанционного обучения студентов-заочников

Омск-2005

Составители: Веснина Алла Александровна, доцент,
Стругова Татьяна Михайловна, ст. преподаватель.

Печатается по решению редакционно-издательского отдела Омского государственного технического университета.

Редактор Г. М. Кляут
Сводный темплан 2005
ИД 06039 от 12.10.01

Подписано в печать 20.04.05 Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 3,5 Уч.-изд. л. 3,5
Тираж 300 экз. Заказ 419

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

Контрольная работа № 6

“ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ”

ЗАДАНИЕ 1. Исследовать на экстремум:

1. 1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$;	2) $y = x^2 - 2\ln x + 3$.
2. 1) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$;	2) $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{16}$.
3. 1) $y = x^3 - 6x^2 + 5$;	2) $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}$.
4. 1) $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 9$;	2) $y = \frac{1}{x} + x$.
5. 1) $y = \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x}$;	2) $y = x^4 - 2x^2$.
6. 1) $y = x^2(x - 12)^2$;	2) $y = (1 + x)e^x$.
7. 1) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 7$;	2) $y = \frac{1}{1 + x^2}$.
8. 1) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$;	2) $y = x^2(1 - x)$.
9. 1) $y = 80x - x^5 - 80$;	2) $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$.
10. 1) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$;	2) $y = \frac{x^2}{x - 2}$.
11. 1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$;	2) $y = \frac{3 - x^2}{x + 2}$.
12. 1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x$;	2) $y = x + \frac{1}{x}$.
13. 1) $y = x^4 - 2x^2 + 6$;	2) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$.
14. 1) $y = 17 - 3x^2 + \frac{1}{2}x^4$;	2) $y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$.
15. 1) $y = x^2(x - 2)^2$;	2) $y = \frac{x^3}{3} + x^2$.
16. 1) $y = (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2$;	2) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$.

ЗАДАНИЕ 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1.	$y = 72x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 1$ на отрезке $[0; 1]$.
2.	$y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2; 2]$.
3.	$y = 2 - 2x^2 + x^4$ на отрезке $[0; 3]$.
4.	$y = \sin 2x - x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
5.	$y = (x - 1) \cdot \sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[0; 2]$.
6.	$y = x - 2\sqrt{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{9}; 4\right]$.
7.	$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$ на отрезке $[1; 3]$.
8.	$y = \sin x - 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.
9.	$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ на отрезке $[0; 4]$.
10.	$y = x^3 - 7,5x^2 + 18x + 1$ на отрезке $[0; 4]$.
11.	$y = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 1$ на отрезке $[0; 2]$.
12.	$y = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $[0; 3]$.
13.	$y = 15 + 4x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$.
14.	$y = 3x - x^3$ на отрезке $[-2; 3]$.
15.	$y = 3x - x^3$ на отрезке $[0; 3]$.
16.	$y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $[0; 2]$.

ЗАДАНИЕ 3

1.	При каких размерах коробка (без крышки), изготовленная из квадратного листа картона, со стороной a , имеет наибольшую вместимость?
2.	Среди всех прямоугольников, имеющих данный периметр $2a$, найти тот, площадь которого наибольшая.
3.	Кусок проволоки данной длины ℓ согнуть в виде прямоугольника так, чтобы площадь последнего была наибольшей.
4.	Число 50 записать в виде суммы двух чисел, сумма кубов которых наименьшая.

5.	Записать число 625 в виде произведения двух положительных чисел так, чтобы сумма их квадратов была наименьшая.
6.	Из всех прямоугольников, площадь которых равна 9 см^2 , найти прямоугольник с наименьшим периметром.
7.	Из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых в основании лежит квадрат и площадь полной поверхности равна 600 см^2 , найти параллелепипед наибольшего объема.
8.	Из всех прямоугольников с периметром P найти прямоугольник с наименьшей диагональю.
9.	Из всех равнобедренных треугольников с периметром P найти треугольник с наибольшей площадью.
10.	Из всех прямоугольных треугольников, у которых сумма одного катета и гипотенузы равна ℓ , найти треугольник с наибольшей площадью.
11.	Найти размеры открытого сверху цилиндрического бака данного объема 64 л, при которых на его изготовление пойдет минимальное количество жести.
12.	Окно магазина имеет форму прямоугольника, заканчивающегося полукругом. Периметр фигуры равен 15 м. При каком размере полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света?
13.	Образующая конического сосуда равна 25 см. Какой должна быть его высота, чтобы вместимость сосуда была наибольшей.
14.	Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиусом r .
15.	Решеткой длиной 120 м нужно огородить площадку наибольшей площади. Найти размеры этой площадки.
16.	Разложить число 10 на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

ЗАДАНИЕ 4. Найти точки перегиба функции:

1. $y = \frac{x^3}{6} - x^2.$	2. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5.$	3. $y = \frac{5x}{2 + x^2}.$
4. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2.$	5. $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}.$	6. $y = \frac{x}{x^2 - 1}.$
7. $y = \frac{1}{x} + 4x^2.$	8. $y = \frac{1}{x^2 + 3}.$	9. $y = \frac{x^3}{x - 1}.$

10. $y = \frac{x}{1+x^2}$.	11. $y = \frac{x}{x^2-4}$.	12. $y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$.
13. $y = \frac{6x}{1+x^2}$.	14. $y = \frac{x+1}{x^2}$.	15. $y = x e^x$.
16. $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$.		

ЗАДАНИЕ 5. Найти асимптоты графика функции:

1. $y = \frac{x^2+1}{x}$.	2. $y = \frac{x^3}{1-x^2}$.	3. $y = \frac{2x^2-3x+5}{5x}$.
4. $y = \frac{x^2}{x+4}$.	5. $y = \frac{1}{x^2-4x+5}$.	6. $y = \frac{1}{1-x^2}$.
7. $y = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.	8. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.	9. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.
10. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.	11. $y = \frac{x^4}{x^3-1}$.	12. $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.
13. $y = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.	14. $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$.	15. $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$.
16. $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$.		

ЗАДАНИЕ 6. Исследовать функцию и построить ее график:

1. $y = \frac{x^3}{x^2-3}$.	2. $y = x^3 - 3x$.	3. $y = \frac{3x}{4+x^2}$.	4. $y = \frac{1}{1-x^2}$.
5. $y = \frac{x}{x^2-1}$.	6. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.	7. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.	8. $y = \frac{x^3}{x-1}$.
9. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$.	10. $y = x e^{-x}$.	11. $y = \frac{1}{x^2+3}$.	12. $y = \frac{x}{x^2-4}$.
13. $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$.	14. $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$.	15. $y = \frac{8}{x^2-4}$.	16. $y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$.

Образец выполнения контрольной работы № 6
“ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ”

1) Исследовать на экстремум функцию $y = x^2(1-x)^2$.

Решение. Найдем точки, подозрительные на экстремум. Для этого возьмем производную y' и приравняем ее нулю.

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^2(1-x)^2 \right)' = (x^2)'(1-x)^2 + x^2 \left((1-x)^2 \right)' = \\ &= 2x(1-x)^2 + x^2 \cdot 2(1-x)(-1) = 2x(1-x)^2 - 2x^2(1-x) = \\ &= 2x(1-x)[1-x-x] = 2x(1-x)(1-2x) = 2x(x-1)(2x-1). \end{aligned}$$

$$y' = 0 \text{ при } x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{1}{2}.$$

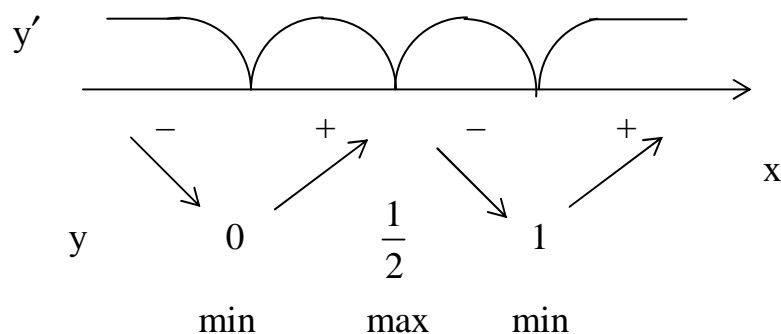


Рисунок 1

$$y_{\min}(0) = 0, \quad y_{\min}(1) = 0, \quad y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

На тех интервалах, где $y' < 0$, функция убывает; где $y' > 0$, функция возрастает. Поэтому интервалы возрастания функции $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $(1, \infty)$, интервалы убывания функции: $(-\infty, 0)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

По рисунку 1 видно, что в точках $x = 0$ и $x = 1$ функция принимает свои минимальные значения, а при $x = \frac{1}{2}$ — максимальное. Найдем эти значения:

Ответ: $y_{\min}(0) = y_{\min}(1) = 0, \quad y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}.$

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ на отрезке $[-2, 0]$.

Решение. Так как свои наименьшее и наибольшее значения непрерывная на отрезке функция может принимать либо на концах этого отрезка, либо в точках экстремума, входящих в этот отрезок, то находим значения исследуемой функции во всех этих точках и среди них выбираем наибольшее и наименьшее значения:

$$y(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 5 = -8 - 12 + 18 + 5 = 3;$$

$$y(0) = 5;$$

$$y' = (x^3 - 3x^2 - 9x + 5)' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3).$$

$$y' = 0 \text{ при } x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2},$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1.$$

Найдем значение функции только при $x = -1$. Так как $3 \notin [-2, 0]$, то

$$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = -1 - 3 + 9 + 5 = 10.$$

Выбираем наибольшее значение функции из найденных трех чисел – это 10. Теперь наименьшее – это 3.

Ответ: $y_{\max}(-1) = 10, \quad y_{\min}(-2) = 3.$

3) Найти точки перегиба функции $y = x \cdot e^{-x}$.

Решение. Так как точками перегиба являются те точки из области допустимых значений, где вторая производная y'' меняет знак, сначала найдем y' , затем y'' и приравняем y'' к нулю:

$$y' = (xe^{-x})' = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x};$$

$$y'' = (y')' = (e^{-x} - xe^{-x})' = -e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x}) = -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x - 2).$$

$y'' = 0$ при $x = 2$, т. к. $e^{-x} > 0$ для всех x .

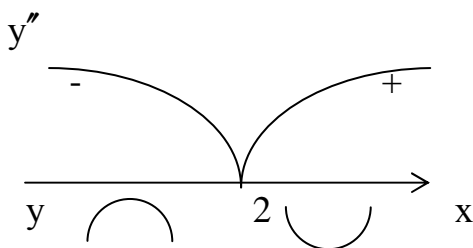


Рисунок 2

Так как в точке $x = 2$ y'' изменила знак, то функция y изменила выпуклость на вогнутость, т. е. $x = 2$ – точка перегиба функции (рис. 2).

Ответ: $x = 2$ – точка перегиба.

4) Найти асимптоты графика $y = \frac{2x^2}{x+1}$.

Так как вертикальную асимптоту имеет функция с разрывом 2-го рода в точке $x = x_0$, сначала найдем точки разрыва и исследуем поведение функции в их окрестностях.

О.Д.З. $x \neq -1$.

Значит, $x = -1$ – точка разрыва, так как функция в этой точке не определена.

Найдем предел слева и предел справа функции $y = \frac{2x^2}{x+1}$ при подходе к точке $x = -1$. Выясним, разрыв какого рода терпит данная функция в этой точке.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1-0 \\ x < -1}} \frac{2x^2}{x+1} = \left| \begin{array}{l} x+1 \rightarrow -0 \\ \frac{1}{x+1} \rightarrow -\infty \end{array} \right| = -\infty. \text{ Предел слева равен } -\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1+0 \\ x > -1}} \frac{2x^2}{x+1} = \left| \begin{array}{l} x+1 \rightarrow +0 \\ \frac{1}{x+1} \rightarrow +\infty \end{array} \right| = +\infty. \text{ Предел справа равен } +\infty.$$

Так как односторонние пределы бесконечны, то в точке $x = -1$ разрыв 2-го рода, поэтому уравнением вертикальной асимптоты будет $x = -1$.

Функция также может иметь или не иметь наклонные асимптоты. Если они есть, то их уравнение запишем в виде $y = kx + b$,

где
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Найдем правую наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x+1} : x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$$

Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(x+1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow k = 2.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x+1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 - 2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$$

Применяем правило Лопиталья: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-2x)'}{(x+1)'} = -2 \Rightarrow b = -2$.

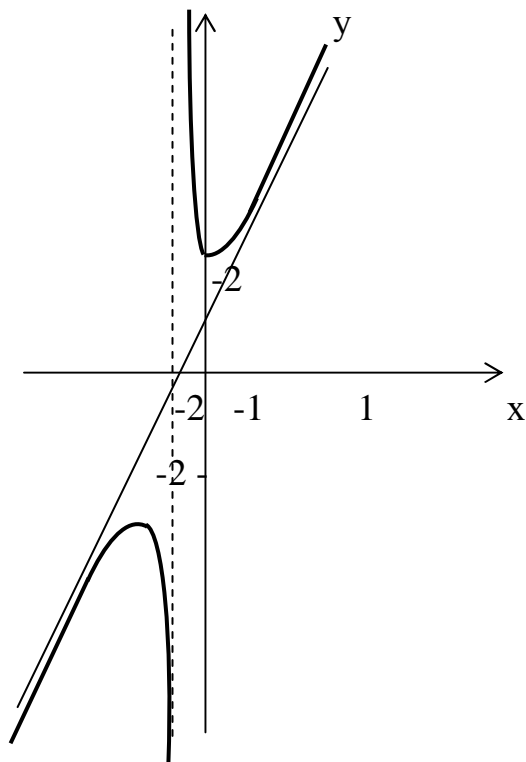


Рисунок 3

Подставляем в уравнение асимптоты $y = kx + b$ и получаем уравнение правой асимптоты $y = 2x - 2$.

Найдем левую асимптоту при $x \rightarrow -\infty$. Повторяя все предыдущие действия, как и для $x \rightarrow +\infty$, получаем уравнение левой асимптоты: $y = 2x - 2$ (рис. 3)

Ответ: Вертикальная асимптота $x = -1$. Наклонная асимптота $y = 2x - 2$.

5) Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{2(x^2 + 1)}$ и построить ее график.

Исследование функции будем проводить по плану.

1. Найдем О.Д.З. и, если есть асимптоты О.Д.З., x – любое. Следовательно, нет точек разрыва, поэтому вертикальных асимптот нет.

2. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат, исследуем функцию на четность, тригонометрические функции – на периодичность. Пусть $x = 0$, тогда $y = 0$. Проверим четность функции:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{2((-x)^2 + 1)} = \frac{-x^3}{2(x^2 + 1)} = -y(x).$$

Значит, данная функция нечетная, и ее график симметричен относительно начала координат.

3. Исследуем монотонность функции с помощью y' .

$$y' = \left(\frac{x^3}{2(x^2+1)} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2(x^2+1) - 2x \cdot x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

$$y' = 0 \text{ при } x = 0$$

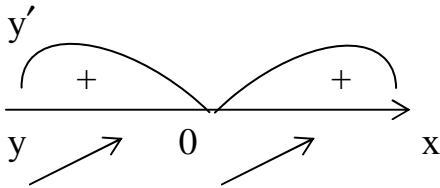


Рисунок 4

Получаем, что функция $y = \frac{x^3}{2(x^2+1)}$ всюду возрастающая, не имеющая точек экстремума, так как нет ни одной точки, в которой y' равен нулю или бесконечности (рис. 4).

4. С помощью y'' находим точки перегиба.

$$y'' = (y')' = \frac{1}{2} \left(\frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} \right)' = \frac{1}{2} \frac{(4x^3 + 6x)(x^2+1)^2 - 2(x^2+1) \cdot 2x(x^4 + 3x^2)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2x(2x^2+3)(x^2+1)^2 - 2x(x^2+1)(2x^4+6x^2)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1)(2x^2+3)(x^2+1) - (2x^4+6x^2)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= x \frac{2x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 3 - 2x^4 - 6x^2}{(x^2+1)^3} = x \frac{3 - x^2}{(x^2+1)^3}.$$

$$y'' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } 3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

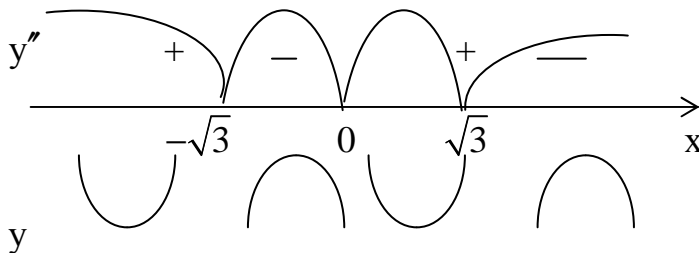


Рисунок 5

Все точки, в которых $y'' = 0$, являются точками перегиба, так как в них y'' меняет знак на противоположный (рис. 5).

Найдем значения функции в этих точках:

$$y(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{2((-\sqrt{3})^2 + 1)} = \frac{-3\sqrt{3}}{2 \cdot 4} \approx -0,65, \quad y(0) = 0, \quad y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx +0,65.$$

5. Найдем наклонные асимптоты, если они есть: $y = kx + b$.

Сначала $x \rightarrow +\infty$, тогда $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2(x^2 + 1)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$.

По правилу Лопиталья: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{2(x^2 + 1)'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$.

Теперь найдем $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2(x^2 + 1)} - \frac{x^2 + 1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{2(x^2 + 1)} =$
 $= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(x^2 + 1)'} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \Rightarrow b = 0.$

Получаем $y = \frac{x}{2}$ – уравнение правой асимптоты. Повторяя прежние рассуждения уже при $x \rightarrow -\infty$, получим уравнение левой асимптоты: $y = \frac{x}{2}$.

6. Строим график функции, начертив сначала все асимптоты, отметив точки экстремума, точки перегиба и точки пересечения с осями координат (рис. 6).

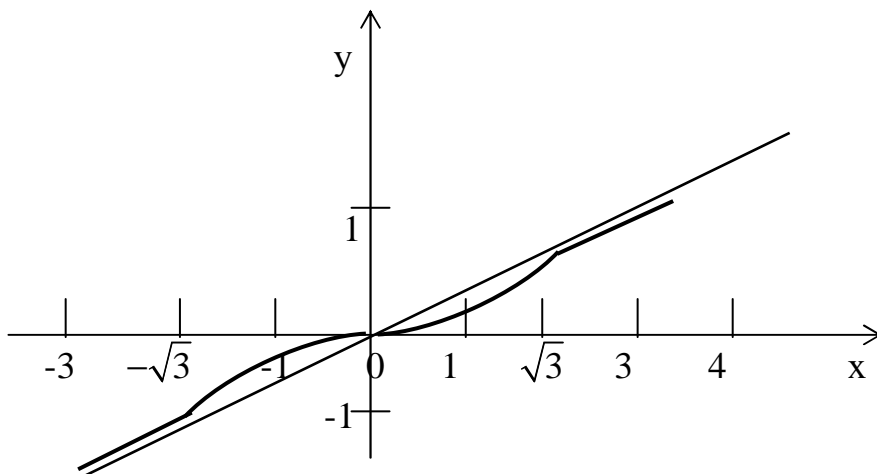


Рисунок 6

Контрольная работа № 7
“ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ”

ЗАДАНИЕ 1а. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции:

1. $z = 2^{xy} + \sin(2xy)$.	2. $z = e^{xy} + \ln(x + \ln y)$.
3. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.	4. $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{y}$.
5. $z = 2^{xy^3} + \arcsin x$.	6. $z = \ln(x^2 + y^2 + xy)$.
7. $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$.	8. $z = \arccos \sqrt{x^2 + y^2}$.
9. $z = x^y + \operatorname{arctg}(x+y)$.	10. $z = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.
11. $z = \ln \sin(x^2 + y)$.	12. $z = 3^{xy} + \sin(x^2 + y^2)$.
13. $z = e^{\frac{x}{y}} + \ln(x^2 + xy)$.	14. $z = \cos \ln xy$.
15. $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.	16. $z = \operatorname{tg} \ln(x^2 + y^2)$.

ЗАДАНИЕ № 1 б. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции:

1. $z = \arcsin \frac{x+y}{xy}$.	2. $z = \sin(x+y) + \operatorname{tg}(x^2y)$.
3. $z = \ln(x^2 + 3y^2 + xy)$.	4. $z = \operatorname{tg} \frac{x}{y} \cdot \sin \frac{y}{x}$.
5. $z = \ln \frac{xy}{5x+y}$.	6. $z = \cos x^3 + \sin y^3 - xy$.
7. $z = x^y + y^x$.	8. $z = \sin \ln \frac{x}{y}$.
9. $z = \ln \cos(xy)$.	10. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

11. $z = \operatorname{arccctg} \frac{y}{x}$.	12. $z = \operatorname{arccctg} \frac{x}{y}$.
13. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.	14. $z = \frac{2x + y}{x - 3y}$.
15. $z = e^{2x+y} + \sqrt{x^2 + y^2}$.	16. $z = \arcsin x y$.

ЗАДАНИЕ 2. Показать, что

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = \ln(x^2 + y)$.
2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = \sqrt{2xy + y^2}$
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = x^y$.
4. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.
5. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
6. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = e^x (x \cos y - y \sin y)$
7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$.
8. $x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) = y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z = x e^{-\frac{y}{x}}$.
9. $2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ для функции $z = 2 \cos^2 \left(x - \frac{y}{2} \right)$.
10. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = \ln(x^2 + y^2)$.

11.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = e^x \cdot \cos y$.
12.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$ для функции $z = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$.
13.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.
14.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$ для функции $z = \ln(e^x + e^y)$.
15.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}$.
16.	$2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x - y}$ для функции $z = \frac{x y}{x - y}$.

ЗАДАНИЕ 3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1. $\frac{4}{1,03^2 + 2,97^2}$.	2. $\operatorname{arctg} \frac{0,96}{1,05}$.	3. $\frac{2,05^2}{2,05^2 + 3,01^2}$.
4. $1,03^{0,98}$.	5. $0,97^{1,05}$.	6. $3,09 \cdot e^{0,09}$.
7. $\sqrt{1,05^3 + 1,98^3}$.	8. $\sqrt{4,05^2 + 2,93^2}$.	9. $2,003^2 \cdot 3,004^3$.
10. $1,02^3 \cdot 0,97^2$.	11. $\ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$.	12. $1,04^{2,02}$.
13. $\sqrt{4,02^2 + 3,03^2}$.	14. $1,02^{3,01}$.	15. $0,98^{2,02}$.
16. $2,01 \cdot e^{1,02}$.		

ЗАДАНИЕ 4. Исследовать на экстремум:

1. $z = x^2 + y^2 - 6x + 8y - 2$.	2. $z = x^2 + x y + y^2 - 2x - y$.
3. $z = 2x - 2y - x^2 - y^2 + 6$.	4. $z = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3$.

5. $z = x^2 - 8x - 10y + xy + y^2 + 17.$	6. $z = 4x + 5y - x^2 - xy - y^2 + 4.$
7. $z = 3x + 9y - x^2 - xy - y^2 - 4.$	8. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$
9. $z = 13y + 11x - xy - x^2 - y^2 + 5.$	10. $z = 6x - 8y - x^2 - y^2 - 17.$
11. $z = x^2 - 2x + 1 + 2y^2.$	12. $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1.$
13. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7.$	14. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$
15. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$	16. $z = 4x - 4y - x^2 - y^2.$

ЗАДАНИЕ 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в треугольнике со сторонами $y = x + 1, y = 0, x = 3.$
2. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ в треугольнике со сторонами $x + y + 1 = 0, y = 0, x = -3.$
3. $z = x^2 + xy - 2$ в замкнутой области, ограниченной $y = 4x^2 - 4$ и осью $OX.$
4. $z = y^2 - 2xy - x^2 + 4x - 3$ в треугольнике со сторонами $y = x + 1, x = 0, y = 2.$
5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ в треугольнике со сторонами $y = x + 2, y = 0, x = 2.$
6. $z = x^2 + 2xy - 10$ в замкнутой области, ограниченной $y = x^2 - 4$ и осью $OX.$
7. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$ в квадрате $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2.$
8. $z = 2x + y - xy$ в квадрате $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4.$
9. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{3}$ и $y = 3.$
10. $z = 1 + x + 2y$ в области, ограниченной прямыми $x = 0, y = 0, x + y = 1.$
11. $z = 1 + x + 2y$ в области, ограниченной прямыми $x = 0, y = 0, x - y = 1.$
12. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0, y = 0, x = 1, y = 2.$
13. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ в треугольнике со сторонами $x + y + 2 = 0, x = 0, y = 0.$

14.	$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$	в треугольнике со сторонами $x = 0, y = 0, x + y = 3$.
15.	$z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$	в треугольнике со сторонами $y = 2x, y = 2, x = 0$.
16.	$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$	в квадрате, ограниченном прямыми $x = -1, x = 1, y = -1, y = 1$.

ЗАДАНИЕ 6. Найти производную функции:

1.	$z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$	в точке (3; 1) в направлении от этой точки к точке (6; 5).
2.	$z = \operatorname{arctg} xy$	в точке (1; 1) в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.
3.	$z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$	в точке (2; 1) в направлении от этой точки к началу координат.
4.	$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$	в точке (1; 1) в направлении луча, образующего угол в 60° с осью OX.
5.	$z = \ln(e^x + e^y)$	в начале координат в направлении луча, образующего угол в 30° с осью OX.
6.	$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$	в точке (1; 3) по направлению вектора $\vec{e} = \{3; 4\}$.
7.	$z = x^2 - xy - 2y^2$	в точке (1; 2) в направлении, составляющем с осью OX угол в 60° .
8.	$z = 3x^4 + xy + y^2$	в точке (1; 2) в направлении вектора, образующего с осью OX угол в 45° .
9.	$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$	в точке (3; 1) по направлению вектора $\vec{e} = \{3; 4\}$.
10.	$z = \ln(e^x + e^y)$	в точке (1; 1) в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.
11.	$z = x^2 - 3xy + 5$	в точке (1; 2) в направлении от этой точки к точке (1; 1).
12.	$z = xy^2 + x^3 - xy$	в точке (1; 1) в направлении, образующем углы $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$.
13.	$z = 2xy^2 + y^3 + 3xy$	в точке (4; 1) в направлении от этой точки к точке (5; 1).
14.	$z = xy$	в точке (5; 1) в направлении от этой точки к точке (9; 4).

15. $z = x^2 y + x^3$ в точке (1; 1) по направлению вектора $\vec{e} = \{1; -1\}$.

16. $z = x^3 + 3x^2 y + 6x y + y^2$ в точке (1; 1) в направлении от этой точки к точке (2; 2).

ЗАДАНИЕ 7. Найти формулу вида $y = a x + b$ методом наименьших квадратов по данным опыта:

1. <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>3,2</td><td>4,2</td><td>2,7</td><td>0,7</td><td>1,2</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	3,2	4,2	2,7	0,7	1,2	2. <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>3,4</td><td>4,4</td><td>2,9</td><td>0,9</td><td>1,4</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	3,4	4,4	2,9	0,9	1,4
x	1	2	3	4	5																				
y	3,2	4,2	2,7	0,7	1,2																				
x	1	2	3	4	5																				
y	3,4	4,4	2,9	0,9	1,4																				
3. <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>3,6</td><td>4,6</td><td>3,1</td><td>1,1</td><td>1,6</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	3,6	4,6	3,1	1,1	1,6	4. <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>4,6</td><td>5</td><td>3,4</td><td>1,2</td><td>1,8</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	4,6	5	3,4	1,2	1,8
x	1	2	3	4	5																				
y	3,6	4,6	3,1	1,1	1,6																				
x	1	2	3	4	5																				
y	4,6	5	3,4	1,2	1,8																				
5. <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>5</td><td>3,5</td><td>1,5</td><td>2</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	4	5	3,5	1,5	2	6. <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>2,8</td><td>3,8</td><td>2,3</td><td>0,3</td><td>0,8</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	2,8	3,8	2,3	0,3	0,8
x	1	2	3	4	5																				
y	4	5	3,5	1,5	2																				
x	1	2	3	4	5																				
y	2,8	3,8	2,3	0,3	0,8																				
7. <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>4,1</td><td>5,1</td><td>3,6</td><td>1,6</td><td>2,1</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	4,1	5,1	3,6	1,6	2,1	8. <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>4,4</td><td>5,4</td><td>3,9</td><td>1,9</td><td>2,4</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	4,4	5,4	3,9	1,9	2,4
x	1	2	3	4	5																				
y	4,1	5,1	3,6	1,6	2,1																				
x	1	2	3	4	5																				
y	4,4	5,4	3,9	1,9	2,4																				
9. <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>4,6</td><td>5,6</td><td>4,1</td><td>2,1</td><td>2,6</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	4,6	5,6	4,1	2,1	2,6	10. <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>4,8</td><td>5,8</td><td>4,3</td><td>2,3</td><td>2,8</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	4,8	5,8	4,3	2,3	2,8
x	1	2	3	4	5																				
y	4,6	5,6	4,1	2,1	2,6																				
x	1	2	3	4	5																				
y	4,8	5,8	4,3	2,3	2,8																				
11. <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>3</td><td>4</td><td>2,5</td><td>0,5</td><td>1</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	3	4	2,5	0,5	1	12. <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>3,7</td><td>4,7</td><td>3,2</td><td>1,2</td><td>1,7</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	3,7	4,7	3,2	1,2	1,7
x	1	2	3	4	5																				
y	3	4	2,5	0,5	1																				
x	1	2	3	4	5																				
y	3,7	4,7	3,2	1,2	1,7																				
13. <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>2,9</td><td>3,9</td><td>2,4</td><td>0,4</td><td>0,9</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	2,9	3,9	2,4	0,4	0,9	14. <table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>3,1</td><td>4,1</td><td>2,6</td><td>0,6</td><td>1,1</td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	y	3,1	4,1	2,6	0,6	1,1
x	1	2	3	4	5																				
y	2,9	3,9	2,4	0,4	0,9																				
x	1	2	3	4	5																				
y	3,1	4,1	2,6	0,6	1,1																				

15.

x	1	2	3	4	5
y	2,5	3,5	2,0	0	0,5

16.

x	1	2	3	4	5
y	2,6	3,6	2,1	0,1	0,6

**Образец выполнения контрольной работы № 7
“ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ”**

1) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = e^{xy} - \cos \frac{x}{y}$.

Решение $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{xy} - \cos \frac{x}{y} \right)'_x$. Считаем переменную “y” постоянной величиной.

$$\left(e^{xy} \right)'_x - \left(\cos \frac{x}{y} \right)'_x = e^{xy} (xy)'_x + \sin \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{x}{y} \right)'_x =$$

$$= e^{xy} \cdot y(x)'_x + \sin \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} (x)'_x = ye^{xy} + \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} \left(\text{т.к. } (x)'_x = 1 \right).$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{xy} - \cos \frac{x}{y} \right)'_y$. Считаем переменную “x” постоянной величиной.

$$\left(e^{xy} \right)'_y - \left(\cos \frac{x}{y} \right)'_y = e^{xy} \cdot x(y)'_y + \sin \frac{x}{y} \cdot x \left(\frac{1}{y} \right)'_y =$$

$$= x \cdot e^{xy} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} \left(\text{т.к. } (y)'_y = 1; \left(\frac{1}{y} \right)'_y = (y^{-1})'_y = -y^{-2} = -\frac{1}{y^2} \right).$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} + \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y}; \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y}$.

2) Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ при $z = \ln \frac{x+y}{y}$.

Решение. Сначала найдем первые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln \frac{x+y}{y} \right)'_x = \frac{1}{x+y} \left(\frac{x+y}{y} \right)'_x = \frac{y}{x+y} \cdot \frac{1}{y} (x+y)'_x = \frac{1}{x+y}, \quad (\text{т.к. } (x+y)'_x = 1+0=1);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\ln \frac{x+y}{y} \right)'_y = \frac{1}{x+y} \left(\frac{x+y}{y} \right)'_y = \frac{y}{x+y} \cdot \frac{(x+y)'_y \cdot y - (y)'_y (x+y)}{y^2} = \\ &= \frac{y}{x+y} \cdot \frac{1 \cdot y - 1 \cdot (x+y)}{y^2} = \frac{1}{x+y} \cdot \frac{y-x-y}{y} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{x+y} = -\frac{x}{y(x+y)}. \end{aligned}$$

Теперь находим смешанные вторые частные производные и сравниваем их.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{y(x+y)} \right) = -\frac{1}{y} \left(\frac{x}{x+y} \right)'_x = \\ &= -\frac{1}{y} \cdot \frac{(x)'_x (x+y) - (x+y)'_x \cdot x}{(x+y)^2} = -\frac{1}{y} \cdot \frac{1 \cdot (x+y) - 1 \cdot x}{(x+y)^2} = \\ &= -\frac{1}{y} \cdot \frac{x+y-x}{(x+y)^2} = -\frac{1}{y} \cdot \frac{y}{(x+y)^2} = -\frac{1}{(x+y)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x+y} \right) = \left((x+y)^{-1} \right)'_y = \\ &= -(x+y)^{-2} (x+y)'_y = -\frac{1}{(x+y)^2} (0+1) = -\frac{1}{(x+y)^2}. \end{aligned}$$

Видим, что смешанные производные равны, что и требовалось доказать.

3) Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{2,01^3 + 0,98^2}$.

Решение. Введем функцию двух переменных $z = \sqrt{x^3 + y^2}$. Так как $2,01 = 2 + 0,01$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,01$. Аналогично $y_0 = 1$, $\Delta y = -0,02$, т. к. $0,98 = 1 - 0,02$. Воспользуемся тем, что $\Delta z \approx dz$ при малых Δx и Δy .

Так как $\Delta z = z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0)$,

отсюда следует, что $z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = z(x_0, y_0) + \Delta z(x_0, y_0)$.

Заменим приращение функции Δz ее дифференциалом $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$,

где $dx \equiv \Delta x$, $dy \equiv \Delta y$.

Тогда $z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y$,

т. е. в данном случае $z(2 + 0,01, 1 - 0,02) \approx z(2, 1) + \frac{\partial z(2, 1)}{\partial x} 0,01 + \frac{\partial z(2, 1)}{\partial y} (-0,02)$.

Вычислим $z(2, 1) = \sqrt{2^3 + 1^2} = 3$. Найдем $\frac{\partial z(2, 1)}{\partial x}$. Для этого сначала найдем частную производную z по x в произвольной точке.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^3 + y^2} \right) = \left((x^3 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right)'_x = \frac{1}{2} (x^3 + y^2)^{-\frac{1}{2}} (x^3 + y^2)'_x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^2}} (3x^2 + 0) = \frac{3x^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^2}};$$

$$\frac{\partial z(2, 1)}{\partial x} = \frac{3(2)^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^3 + 1^2}} = \frac{3 \cdot 4^2}{2} \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

Теперь найдем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{x^3 + y^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^2}} (x^3 + y^2)'_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^2}} (0 + 2y) = \frac{y}{\sqrt{x^3 + y^2}};$$

$$\frac{\partial z(2, 1)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2^3 + 1^2}} = \frac{1}{3}.$$

Находим искомое значение корня

$$\sqrt{2,01^3 + 0,98^2} \approx 3 + 2 \cdot 0,01 + \frac{1}{3} \cdot (-0,02) \approx 3 + 0,02 - 0,0067 \approx 3,0133 .$$

Если найти $\sqrt{2,01^3 + 0,98^2}$ на калькуляторе, то получим $\approx 3,01347$. Различие только в четвертом знаке после запятой.

Ответ: $\sqrt{2,01^3 + 0,98^2} \approx 3,013$.

4) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - xy + 2x - 3y + 4$.

Решение. Найдем сначала стационарные точки, т. е. те точки, в которых частные производные одновременно равны нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x - y + 2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y - x - 3, \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ 2y - x - 3 = 0. \end{cases}$$

Изменим порядок во втором уравнении и приведем систему линейных уравнений к стандартному виду, чтобы ее можно было решить методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1)(-1) = 4 - 1 = 3,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = -4 + 3 = -1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-2)(-1) = 6 - 2 = 4, \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{3}.$$

Нашли одну стационарную точку, в которой $z'_x = z'_y = 0$, это точка $M_0\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Выясним с помощью вторых производных, есть ли в M_0 экстремум, и, если есть, какой.

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x - y + 2) = 2,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2y - x - 3) = 2,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2y - x - 3) = -1.$$

Составляем определитель $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)(-1) = 4 - 1 = 3 > 0$.

Так как $D > 0$, экстремум существует. Так как $A = 2 > 0$, в стационарной точке M_0 функция имеет минимум. Найдём его.

$$z_{\min} \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{4}{3} \right)^2 - \left(-\frac{1}{3} \right) \left(\frac{4}{3} \right) + 2 \left(-\frac{1}{3} \right) - 3 \cdot \frac{4}{3} + 4 = \frac{1}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} - 4 + 4 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $z_{\min} \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right) = \frac{5}{3}$.

5) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = 3x + 2y + y^2 - x^2 + xy \text{ в треугольнике со сторонами } x + y = 2, \quad x = 1, \quad y = 0.$$

Решение. Так как свои наибольшее и наименьшее значения непрерывная функция может иметь или в стационарной точке внутри рассматриваемой области или на границе этой области, задачу будем решать в два действия. Найдём стационарные точки и значения функции в тех из них, которые лежат в рассматриваемой области.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 - 2x + y = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 + 2y + x = 0, \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -2, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{y}{5} = 0,8, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{7}{5} = -1,4.$$

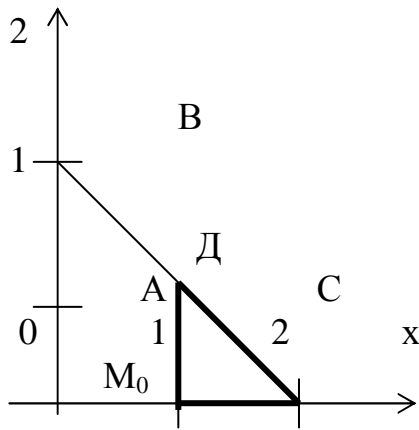


Рисунок 7

Точка $M_0(0,8; -1,4)$ не принадлежит треугольнику Д (рис. 7), поэтому значение функции в этой точке не вычисляем. Переходим ко второму действию. Треугольник Д ограничивают три прямые. Будем исследовать функцию на экстремум на каждой из них. Сначала найдем значения функции в вершинах треугольника.

$$z_A = z(1, 0) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0^2 - 1^2 + 1 \cdot 0 = 3 - 1 = 2,$$

$$z_B = z(1, 1) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 1 = 6,$$

$$z_C = z(2, 0) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0^2 - 2^2 + 2 \cdot 0 = 2.$$

Рассмотрим границу АВ: $x = 1$. Подставляя $x = 1$ в выражение функции, получим $z = 3 \cdot 1 + 2y + y^2 - 1^2 + 1 \cdot y = y^2 + 3y + 2$.

Получили задачу на экстремум для функции одной переменной. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = y^2 + 3y + 2$ на отрезке $[0, 1]$. Находим $z' = 2y + 3 = 0$: $z' = 0$ при $y = -\frac{3}{2}$, а это значение y не входит в рассматриваемый отрезок $[0, 1]$. На концах отрезка значения функции уже подсчитаны, это z_A и z_B .

Переходим к границе АС: $y = 0$. Подставляя $y = 0$ в выражение функции, получим $z = 3x + 2 \cdot 0 + 0^2 - x^2 + x \cdot 0 = 3x - x^2$.

Снова решаем задачу для функции одной переменной. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x - x^2$ на отрезке $[1, 2]$.

Находим $z' = 3 - 2x = 0$: $z' = 0$ при $x = \frac{3}{2} = 1,5$. Эта точка входит в отрезок $[1, 2]$. Поэтому вычислим значение функции в этой точке.

$$z\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25.$$

На концах отрезка значения функции подсчитаны заранее, это z_A и z_C .

Рассматриваем третью границу ВС: $x + y = 2$. Выразим $y = 2 - x$ и подставим в выражение функции:

$$z = 3x + 2(2 - x) + (2 - x)^2 - x^2 + x(2 - x) = 3x + 4 - 2x + 4 - 4x + x^2 - x^2 + 2x - x^2 = 8 - x - x^2.$$

Ищем наибольшее и наименьшее значения функции $z = 8 - x - x^2$ на отрезке $[1, 2]$.

Находим $z' = -1 - 2x$: $z' = 0$ при $x = -\frac{1}{2}$, а это значение x не входит в $[1, 2]$.

Теперь выбираем из найденных значений функции z наибольшее. Это значение равно 6 в точке $B(1, 1)$. А наименьшее значение принимается в двух точках: $A(1, 0)$ и $C(2, 0)$.

Ответ: $z_{\max}(1, 1) = 6$, $z_{\min}(1, 0) = z_{\min}(2, 0) = 2$.

б) Найти производную функции $z = 3x^2 - 4y^3 + 2xy^2 - 5x + 7y - 1$ в точке $A(0, 1)$ в направлении от этой точки к точке $B(4, 4)$.

Решение. Напишем формулу производной функции по направлению вектора \vec{n} .

$$\frac{\partial z}{\partial n} \Big|_A = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_A \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_A \cdot \cos \beta,$$

где $(\cos \alpha, \cos \beta) = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ – орт направления вектора \vec{n} .

Сначала найдем вектор \vec{n} , в направлении которого будем искать производную.

$\vec{n} = \overline{AB} = (4 - 0; 4 - 1) = (4; 3)$. Найдем длину \vec{n} . $|\vec{n}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Направляющие косинусы вектора \vec{n} совпадают с координатами орта \vec{n} , поэтому

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \beta = \frac{3}{5}.$$

Теперь найдем частные производные функции z .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (3x^2 - 4y^3 + 2xy^2 - 5x + 7y - 1)'_x = 6x + 2y^2 - 5,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_A = 6 \cdot 0 + 2 \cdot 1^2 - 5 = 2 - 5 = -3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (3x^2 - 4y^3 + 2xy^2 - 5x + 7y - 1)'_y = -12y^2 + 4xy + 7,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_A = -12 \cdot 1^2 + 4 \cdot 0 \cdot 1 + 7 = -12 + 7 = -5.$$

Все найденные значения подставляем в формулу производной по направлению:

$$\frac{\partial z}{\partial n} \Big|_A = (-3) \cdot \frac{4}{5} + (-5) \cdot \frac{3}{5} = \frac{-12-15}{5} = -\frac{27}{5}.$$

Вывод. Функция z убывает по направлению вектора \overline{AB} , так как полученная производная меньше нуля.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial n} \Big|_A = -\frac{27}{5}.$

7) Найти формулу вида $y = ax + b$ методом наименьших квадратов по данным опыта.

x	1	2	3	4	5
y	3,3	4,0	2,8	0,9	1,2

Решение. Нужно провести прямую $y = ax + b$ так, чтобы сумма квадратов расстояний от точек, данных в таблице, до искомой прямой была наименьшей. Для этого составляется функция S , которая зависит от двух переменных: a и b , и находится точка ее минимума.

$$S = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + (ax_3 + b - y_3)^2 + (ax_4 + b - y_4)^2 + (ax_5 + b - y_5)^2.$$

Это можно записать короче: $S = \sum_{i=1}^5 (ax_i + b - y_i)^2$. Находим стационарную точку.

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^5 x_i (ax_i + b - y_i) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^5 (ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Перепишем эти уравнения так, чтобы потом можно было решить полученную систему линейных уравнений относительно a и b методом Крамера.

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^5 x_i^2 + b \sum_{i=1}^5 x_i = \sum_{i=1}^5 x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^5 x_i + nb = \sum_{i=1}^5 y_i. \end{cases}$$

Найдем коэффициенты при a и b . Для этого составим таблицу.

i	x_i	x_i^2	y_i	$x_i \cdot y_i$
1	1	1	3,3	3,3
2	2	4	4,0	8,0
3	3	9	2,8	8,4
4	4	16	0,9	3,6
5	5	25	1,2	6,0
Σ	15	55	12,2	29,3

Подставляем полученные в результате суммирования нужные коэффициенты в систему:

$$\begin{cases} 55a + 15b = 29,3, \\ 15a + 5b = 12,2. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} = 50, \quad \Delta a = \begin{vmatrix} 29,3 & 15 \\ 12,2 & 5 \end{vmatrix} = -36,5, \quad \Delta b = \begin{vmatrix} 55 & 29,3 \\ 15 & 12,2 \end{vmatrix} = 231,5.$$

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{-36,5}{50} = -0,73, \quad b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{231,5}{50} = 4,63.$$

Ответ: $y = -0,73x + 4,63$.

Контрольная работа № 8 “НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ”

ЗАДАНИЕ. Вычислить неопределенные интегралы:

- | | | |
|---|--|--|
| 1. 1) $\int \frac{x^2 dx}{(3+2x^3)^2};$ | 2) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}};$ | 3) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx;$ |
| 4) $\int \frac{x^2 dx}{x^6+4};$ | 5) $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx;$ | 6) $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx;$ |
| 7) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx;$ | 8) $\int x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx;$ | 9) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3+1}};$ |
| 10) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$ | | |

2.

1) $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$;	2) $\int \frac{\ln x}{5x} dx$;	3) $\int \frac{x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
4) $\int \frac{x \, dx}{x^4+1}$;	5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$;	6) $\int \frac{5x-1}{x^2+4x-12} dx$;
7) $\int \ln(x^2+1) dx$;	8) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$;	9) $\int \frac{\sqrt{1+2x}}{x} dx$;
10) $\int x^3 \sqrt{x^2-9} \, dx$.		

3.

1) $\int \frac{x-2}{\sqrt{3-2x^2}} dx$;	2) $\int \operatorname{tg}^3 2x \cdot \sec^2 2x \, dx$;	3) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$;
4) $\int \frac{dx}{2x^2+9}$;	5) $\int \cos^5 \frac{x}{7} dx$;	6) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$;
7) $\int x^2 \operatorname{arctg} 2x \, dx$;	8) $\int \ln^2 x \, dx$;	9) $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{2-x}}$;
10) $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.		

4.

1) $\int 5x \sqrt{1-2x^2} \, dx$;	2) $\int \frac{2x^2 \, dx}{8x^3-7}$;	3) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx$;
4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$;	5) $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx$;	6) $\int \frac{x-7}{x^2+4x+13} dx$;
7) $\int x^2 \ln(1+x) \, dx$;	8) $\int \arccos x \, dx$;	9) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx$;
10) $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-16}}$.		

5. 1) $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{2\sin x + 1}}$; 2) $\int \frac{e^x + \sin x}{e^x - \cos x} \, dx$; 3) $\int \frac{2^{\arctg x}}{1+x^2} \, dx$;

4) $\int \frac{e^x \, dx}{e^{2x} + 4}$; 5) $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$; 6) $\int \frac{x-2}{x^2+x+1} \, dx$;

7) $\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx$; 8) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$; 9) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}} \, dx$;

10) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \, dx$.

6. 1) $\int \frac{x^2-4}{x-3} \, dx$; 2) $\int \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx$; 3) $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$;

4) $\int \frac{e^x \, dx}{\sqrt{25-16e^{2x}}}$; 5) $\int \operatorname{ctg}^4 x \, dx$; 6) $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+x-2}} \, dx$;

7) $\int x \ln(x^2+1) \, dx$; 8) $\int x^2 e^{2x} \, dx$; 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$;

10) $\int \sqrt{3-x^2} \, dx$.

7. 1) $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; 2) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}} \, dx$; 3) $\int x \sin x^2 \, dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$; 5) $\int \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^4 x \, dx$; 6) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2} \, dx$;

7) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$; 8) $\int x^2 \sin x \, dx$; 9) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x}}$;

10) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$.

8. 1) $\int \frac{(3-\sqrt{x})^3}{x^2} dx;$ 2) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5} dx;$ 3) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx;$
 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}};$ 5) $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx;$ 6) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx;$
 7) $\int x^2 \cdot e^{3x} dx;$ 8) $\int x \ln x dx;$ 9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}+1};$
 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

9. 1) $\int \frac{x^5+x+\sqrt[3]{x}}{x^2} dx;$ 2) $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+7}};$ 3) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x};$
 4) $\int \frac{4x dx}{\sqrt{1-x^4}};$ 5) $\int \operatorname{tg}^4 x dx;$ 6) $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1} dx;$
 7) $\int (2x+3) \ln x dx;$ 8) $\int x \cdot \cos x dx;$ 9) $\int \frac{x+1}{x \sqrt{x-2}} dx;$
 10) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

10. 1) $\int \frac{x dx}{2x^2-1};$ 2) $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}};$ 3) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{1+\cos^2 x}} dx;$
 4) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}};$ 5) $\int \sec^4 2x dx;$ 6) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx;$
 7) $\int x^2 \cos 6x dx;$ 8) $\int (2-x) \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx;$ 9) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}};$
 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$

11. 1) $\int \frac{\sqrt{2 + \ln x}}{x} dx$; 2) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$; 3) $\int \frac{1 + 3x}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx$;

4) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4 - e^{2x}}}$; 5) $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} dx$; 6) $\int \frac{2x - 3}{x^2 + 2x - 7} dx$;

7) $\int x^2 \cdot 5^{\frac{x}{2}} dx$; 8) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$; 9) $\int \frac{x + 1}{\sqrt[3]{2x + 1}} dx$;

10) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$.

12. 1) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3 + 2\cos x}}$; 2) $\int \frac{x}{e^{x^2}} dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$;

4) $\int \frac{3^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx$; 5) $\int \cos^5 x dx$; 6) $\int \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 5} dx$;

7) $\int x^2 \sin 4x dx$; 8) $\int x^4 \ln(x^2 + 1) dx$; 9) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x - 1}}$;

10) $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 + x^2}}$.

13. 1) $\int 2x \sqrt{x^2 + 4} dx$; 2) $\int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - 2)^3}}$; 3) $\int \frac{2 + \ln x}{2x} dx$;

4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{5 + x^6}}$; 5) $\int \sin^5 x dx$; 6) $\int \frac{3x - 6}{\sqrt{x^2 + 6x - 16}} dx$;

7) $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$; 8) $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx$; 9) $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$;

10) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^4} dx$.

14. 1) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$ 2) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x - 7}}{x} dx;$ 3) $\int x e^{x^2} dx;$
 4) $\int \frac{x^2 dx}{4+x^6};$ 5) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx;$ 6) $\int \frac{4x+3}{\sqrt{x^2-6x+4}} dx;$
 7) $\int \arcsin x dx;$ 8) $\int \frac{\ln x}{x^5} dx;$ 9) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+9}};$
 10) $\int \sqrt{4-x^2} dx.$

15. 1) $\int \frac{x dx}{e^{x^2-1}};$ 2) $\int \frac{dx}{x \sqrt{\ln x + 10}};$ 3) $\int (2x\sqrt{x} - 7x)^2 dx;$
 4) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}};$ 5) $\int \sin^2 x dx;$ 6) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+10x-21}} dx;$
 7) $\int x^2 \sin(3x+5) dx;$ 8) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx;$ 9) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}};$
 10) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}}.$

16. 1) $\int \frac{e^{3x} dx}{1-e^{3x}};$ 2) $\int \sqrt{2-\cos x} \cdot \sin x dx;$ 3) $\int \frac{1-\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$
 4) $\int \frac{(2x\sqrt{x}-3)^2}{x} dx;$ 5) $\int \cos^2 x dx;$ 6) $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+4x-12}} dx;$
 7) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx;$ 8) $\int x^3 \cdot \ln x dx;$ 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}};$
 10) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx.$

Образец выполнения контрольной работы № 8
“НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ”

Вычислить интегралы:

- 1) $I = \int \frac{x^2 dx}{(5 + 4x^3)^4}$. Делаем замену переменных. Так как x^2 – это почти производная x^3 , за t можно взять x^3 , а лучше $t = 5 + 4x^3$, тогда

$$dt = d(5 + 4x^3) = (5 + 4x^3)' dx = 12x^2 dx.$$

Выразим отсюда $x^2 dx = \frac{1}{12} dt$, получим

$$\int \frac{\frac{1}{12} dt}{t^4} = \frac{1}{12} \int \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{12} \int t^{-4} dt = \frac{1}{12} \cdot \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{t^3} + C = -\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{(5 + 4x^3)^3} + C.$$

Можно проверить, что интеграл найден верно. Для этого воспользуемся формулой $(F(x))' = f(x)$.

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{(5 + 4x^3)^3} + c \right)' &= -\frac{1}{36} \left((5 + 4x^3)^{-3} \right)' = \\ &= -\frac{1}{36} \cdot (-3)(5 + 4x^3)^{-4} (5 + 4x^3)' = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{(5 + 4x^3)^4} \cdot 12x^2 = \\ &= \frac{x^2}{(5 + 4x^3)^4} - \text{получили подынтегральную функцию.} \end{aligned}$$

Ответ: $I = -\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{(5 + 4x^3)^3} + C.$

- 2) В интеграле $I = \int \frac{3x dx}{\sqrt{4 - x^4}} = 3 \int \frac{x dx}{\sqrt{4 - (x^2)^2}}$ в числителе стоит почти производная от x^2 . Поэтому $t = x^2$ $dt = 2x dx$, $x dx = \frac{1}{2} dt$.

Тогда

$$3 \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{2^2 - t^2}} = \frac{3}{2} \arcsin \frac{t}{2} + C = \frac{3}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C.$$

Ответ: $I = \frac{3}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C.$

3) $I = \int x \ln x \, dx$. Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du, \quad u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = x \, dx, \quad v = \int dv = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}.$$

После подстановки получим

$$\ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Ответ: $I = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

4) Выделим в знаменателе интеграла $\int \frac{5x-3}{x^2+x+1} dx$ полный квадрат:

$$x^2 + x + 1 = \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] - \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = t^2 + \frac{3}{4},$$

где $t = x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = t - \frac{1}{2}, \quad dx = dt, \quad 5x - 3 = 5\left(t - \frac{1}{2}\right) - 3 = 5t - \frac{5}{2} - 3 = 5t - \frac{11}{2}.$

В конечном счете после подстановки получаем

$$\int \frac{\left(5t - \frac{11}{2}\right) dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = 5 \int \frac{t \, dt}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{11}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}}.$$

Найдем отдельно интегралы.

$$\int \frac{t \, dt}{t^2 + \frac{3}{4}}. \text{ После подстановки: } z = t^2 + \frac{3}{4}, \quad dz = 2t \cdot dt, \quad t \, dt = \frac{1}{2} dz \text{ получим}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \ln |z| = \frac{1}{2} \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{2} \ln (x^2 + x + 1),$$

$$\int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя найденные выражения в $\int \frac{5x-3}{x^2+x+1} dx$, получим

$$5 \cdot \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{11}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{5}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{11\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Ответ: $\frac{5}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{11\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

5) $\int \frac{\sqrt[4]{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} - 1} dx$. Делая подстановку: $t^4 = x + 1$, $4t^3 dt = dx$, $t = \sqrt[4]{x+1}$,
 $t^2 = \sqrt{x+1}$, получим $\int \frac{(t+2) \cdot 4t^3 dt}{t^2 - 1} = 4 \int \frac{t^4 + 2t^3}{t^2 - 1} dt = I.$

Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель так же, как число 231 на 8, столбиком,

$$\begin{array}{r} \underline{231} \bigg| 8 \\ \underline{16} \quad \bigg\{ 28 \\ \underline{71} \end{array} \quad \text{целая часть, результат записывается смешанной дробью:}$$

$$\frac{64}{7} \text{ — остаток} \qquad \frac{231}{8} = 28 \frac{7}{8} = 28 + \frac{7}{8}.$$

Аналогично делим многочлены.

$$\begin{array}{r} \underline{t^4 + 2t^3} \bigg| t^2 - 1 \\ \underline{t^4 - t^2} \quad \bigg\{ t^2 + 2t + 1 \\ \underline{2t^3 + t^2} \quad \text{целая часть} \\ \underline{2t^3 - 2t} \\ \underline{t^2 + 1t} \\ \underline{t^2 - 1} \\ (2t+1) \text{ — остаток} \end{array}$$

Берем степень t^4 , делим на t^2 , получаем t^2 . Затем t^2 умножаем на $(t^2 - 1)$, получаем $t^4 - t^2$ и отнимаем от $t^4 + 2t^3$. t^4 взаимно уничтожаются, $2t^3$ сносим вниз, $t^4 + 2t^3$, а $(-t^2)$ при вычитании становится $(+t^2)$. Затем $2t^3$ делим $t^4 + 2t^3$ на t^2 , получаем $2t$. Затем умножаем $2t$ на $(t^2 - 1)$, $t^4 + 2t^3$ получаем $2t^3 - 2t$ и это отнимаем и т. д.

Записываем результат деления: $\frac{t^4 + 2t^3}{t^2 - 1} = t^2 + 2t + 1 + \frac{2t+1}{t^2 - 1}$ и подставляем его

под знак интеграла $I = 4 \int \left(t^2 + 2t + 1 + \frac{2t+1}{t^2 - 1} \right) dt$. Последнее слагаемое представляет собой правильную дробь, которую можно разложить в сумму простейших дробей.

$$\frac{2t+1}{t^2-1} = \frac{t+1}{t-1}A + \frac{t-1}{t+1}B. \text{ Приравниваем числители дробей } 2t+1 = A(t+1) + B(t-1)$$

$$\begin{array}{l|l} t=1 & 3 = A \cdot 2 \Rightarrow A = \frac{3}{2} \\ t=-1 & -1 = B(-2) \Rightarrow B = \frac{1}{2} \end{array}, \quad \frac{2t+1}{t^2-1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} I = 4C &= \frac{4\sqrt[4]{(x+1)^3}}{3} + 4\sqrt{x+1} + 4\sqrt[4]{x+1} + 6\ln \left| \sqrt[4]{x+1} - 1 \right| + 2\ln \left| \sqrt[4]{x+1} + 1 \right| + C = \\ &= \frac{4}{3}\sqrt[4]{(x+1)^3} + 4\sqrt{x+1} + 4\sqrt[4]{x+1} + 2\ln \left| \left(\sqrt[4]{x+1} - 1 \right)^3 \cdot \left(\sqrt[4]{x+1} + 1 \right) \right| + C = \\ &= \frac{4}{3}\sqrt[4]{(x+1)^3} + 4\sqrt{x+1} + 4\sqrt[4]{x+1} + 2\ln \left| \left(\sqrt[4]{x+1} - 1 \right)^2 \left(\sqrt{x+1} - 1 \right) \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } I = \frac{4}{3}\sqrt[4]{(x+1)^3} + 4\sqrt{x+1} + 4\sqrt[4]{x+1} + 2\ln \left| \left(\sqrt[4]{x+1} - 1 \right)^2 \left(\sqrt{x+1} - 1 \right) \right| + C.$$

$$6) I = \int \sin^5 x \, dx = \int \sin^4 x (\sin x \, dx) = \int (\sin^2 x)^2 (-d(\cos x)) = -\int (1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x).$$

Делая подстановку: $t = \cos x$, $dt = -\sin x \, dx$, получим

$$\begin{aligned} -\int (1-t^2)^2 dt &= -\int (1-2t^2+t^4) dt = \int (2t^2-1-t^4) dt = \\ &= -t - \frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } I = \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

Так находятся интегралы, если есть хотя бы одна нечетная степень $\sin x$ и $\cos x$. В случае, если имеются только четные степени, интегралы находят с помощью понижения степени по формулам тригонометрии.

$$\begin{aligned}
7) I &= \int \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \\
&= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 + \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \\
&= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} + \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \frac{1}{8} \int (3 + 2 \cos 2x + \cos 4x) dx = \\
&= \frac{1}{8} \left(3x + 2 \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} \right) + C = \frac{1}{8} \left(3x + \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C.
\end{aligned}$$

Ответ: $I = \frac{1}{8} \left(3x + \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C.$

Контрольная работа № 9
“ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ”

ЗАДАНИЕ 1. Вычислить интегралы:

<p>1.</p> <p>1) $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$;</p> <p>2) $\int_0^1 x^2 e^x \, dx.$</p>	<p>2.</p> <p>1) $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2 + 3}} \, dx ;$</p> <p>2) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) \, dx.$</p>	<p>3.</p> <p>1) $\int_3^8 \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x}}$;</p> <p>2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx.$</p>
<p>4.</p> <p>1) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$;</p> <p>2) $\int_1^3 x \ln x \, dx.$</p>	<p>5.</p> <p>1) $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} \, dx ;$</p> <p>2) $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx.$</p>	<p>6.</p> <p>1) $\int_1^4 \frac{x \, dx}{\sqrt{2+4x}}$;</p> <p>2) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx.$</p>
<p>7.</p> <p>1) $\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2} \, dx ;$</p>	<p>8.</p> <p>1) $\int_1^9 x \cdot \sqrt[3]{1-x} \, dx ;$</p>	<p>9.</p> <p>1) $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} \, dx ;$</p>

7. 2) $\int_0^1 x e^{-x} dx.$	8. 2) $\int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx.$	9. 2) $\int_{\pi}^0 x \cdot \cos x dx.$
10. 1) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}};$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx.$	11. 1) $\int_0^5 x \sqrt{x+4} dx;$ 2) $\int_0^1 \ln(x+5) dx.$	12. 1) $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx;$ 2) $\int_0^1 x e^{-x} dx.$
13. 1) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx;$ 2) $\int_0^3 \ln(x+3) dx.$	14. 1) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+1}};$ 2) $\int_1^e \ln x dx.$	15. 1) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}};$ 2) $\int_1^2 x \ln(x+1) dx.$
16. 1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx;$ 2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx.$		

ЗАДАНИЕ 2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1. 1) $y = 6x - x^2, y = 0;$	2) $y^2 = x^3, x = 0, y = 4.$
2. 1) $y = x^2 + 4x, x - y + 4 = 0.$	2) $x y = 6, y = 7 - x.$
3. 1) $y = x^3, y = x;$	2) $y = x^2 - 6x + 10, y = x.$
4. 1) $y = x^3, y = 2x;$	2) $x^2 = 9y, x = 3y - 6.$
5. 1) $y^2 = 4x, y = x;$	2) $y = 2 - x^2, y^3 = x^2.$
6. 1) $y^2 = 4x, y = \frac{1}{4}x^2;$	2) $x = 2 - y - y^2, x = 0.$

7.	1) $3y = x^2, 3x = y^2;$	2) $y = 6x - x^2 - 5, y = 0.$
8.	1) $y = x^2 - 3x, y = 4 - 3x;$	2) $y = x^2 - 5x + 6, x = 0, y = 0.$
9.	1) $y = 2x - x^2, y = x;$	2) $y^2 = x^3, x = 0, y = 1.$
10.	1) $y = \frac{1}{2}x^2, y = 4 - x;$	2) $y^3 = x^2, y = 1.$
11.	1) $x = y^2, x = \frac{3}{4}y^2 + 1;$	2) $y = \ln x, x = e, y = 0.$
12.	1) $y = x^2, 2x - y + 3 = 0;$	2) $xy = 6, x = 1, x = e, y = 0.$
13.	1) $y = 4 - x^2, y = 0;$	2) $y^2 = 9x, y = 3x.$
14.	1) $y = \frac{1}{2}x^2, x + 2y - 6 = 0;$	2) $y = x^2, y^2 = x.$
15.	1) $4x = y^2, 4y = x^2;$	2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3, y = 1.$
16.	1) $y = x^2, y = x + 2;$	2) $x = 8y - y^2 - 7, x = 0.$

ЗАДАНИЕ 3. Найти объемы тел, образованных вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями:

1.	1) $xy = 5, y = 0, x = 1, x = 5;$	2) $y^2 = x^3, x = 1, y = 0.$
2.	1) $y = 9 - x^2, y = 0;$	2) $2x + 3y - 6 = 0, x = 0, y = 0.$
3.	1) $y = 2x - x^2, y = 0;$	2) $xy = 2, x = 2, x = 4.$
4.	1) $y = \sqrt{5 - x}, x = -5, y = 0;$	2) $y = x^2, 2x - y + 3 = 0.$
5.	1) $y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0;$	2) $y = x^2 - 9, y = 0.$
6.	1) $y = \ln x, y = 0, x = 1, x = 2;$	2) $y = 4x - x^2, y = 0.$
7.	1) $y = -x^2 + 8, y = x^2;$	2) $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0.$

8.	1) $2y^2 = x^3, x = 4;$	2) $y = e^x, x = 0, y = 0, x = 1.$
9.	1) $y^2 = 2x, x = 3, y = 0;$	2) $y^2 = x^3, y = 0, x = 1.$
10.	1) $y^2 = 2x, 2x = 3;$	2) $y = 8x - x^2, y = 0.$
11.	1) $y^2 = 9x, y = 3x;$	2) $xy = 1, x = 1, x = 5.$
12.	1) $y = \sin x, x = 0, x = \pi, y = 0;$	2) $y^2 = 4x, x = 4, y = 0.$
13.	1) $y = x^2 + 1, y = 0, x = -2, x = 2;$	2) $xy = 2, y = 0, x = 1, x = 2.$
14.	1) $xy = 4, 2x + y - 6 = 0;$	2) $y^2 = 2x, x^2 = 2y.$
15.	1) $y = 3x - x^2, y = 0;$	2) $xy = 1, y = 0, x = 1, x = 3.$
16.	1) $y = e^{2x}, y = 0, x = 0, x = 1;$	2) $5x + 3y - 15 = 0, y = 0, x = 0.$

**Образец выполнения контрольной работы № 9
“ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ”**

1) Вычислить интегралы.

а) $I = \int_2^{28} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 + 4}}$. Чтобы избавиться от кубического корня, заменим

$t^3 = x - 1$, тогда $t = \sqrt[3]{x-1}$, $t^2 = \sqrt[3]{(x-1)^2}$, $3t^2 dt = dx$, заменим пределы интегрирования $x = 2 \Rightarrow t = \sqrt[3]{2-1} = 1$, $x = 28 \Rightarrow t = \sqrt[3]{28-1} = 3$.

После подстановок получим

$$\int_1^3 \frac{t^2 \cdot 3t^2 dt}{t^2 + 4} = 3 \int_1^3 \frac{t^4 dt}{t^2 + 4}.$$

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Делим столбиком.

$$\frac{-t^4}{t^4 + 4t^2} \Big| \frac{t^2 + 4}{t^2 - 4} = \frac{-4t^2}{-4t^2 - 16} \Rightarrow \frac{t^4}{t^2 + 4} = t^2 - 4 + \frac{16}{t^2 + 4}.$$

$$\begin{aligned} I &= 3 \int_1^3 \left(t^2 - 4 + \frac{16}{t^2 + 2^2} \right) dt = 3 \left(\frac{t^3}{3} - 4t + 16 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right) \Big|_1^3 = \\ &= 3 \left[\left(\frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3 + 8 \operatorname{arctg} \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 4 \cdot 1 + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= 3 \left[9 - 12 + 8 \operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 - 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right] = 3 \left[\frac{2}{3} + 8 \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= 2 + 24 \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \approx 2 + 24(0,983 - 0,464) = 14,46. \end{aligned}$$

Ответ: $I = 2 + 24 \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right).$

б). Интеграл $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx$ находим по частям с помощью подстановок:

$$u = x, \quad du = dx, \quad dv = \cos x \, dx, \quad v = \int dv = \int \cos x \, dx = \sin x.$$

После преобразований получим

$$x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} - 0 \cdot \sin 0 \right) =$$

$$= -(-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Ответ: $I = \frac{\pi - 2}{2}.$

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 5x + 6$ и прямой $y = x + 1$.

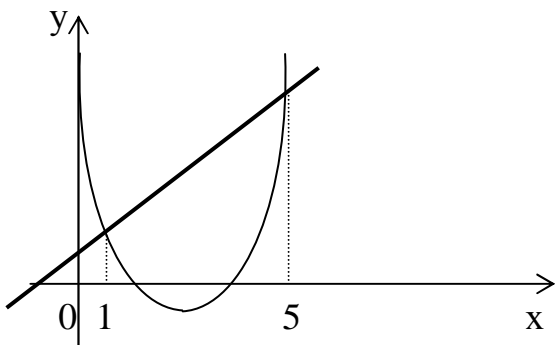


Рисунок 8

Найдем точки пересечения графиков этих линий (рис. 8):

$$x^2 - 5x + 6 = x + 1, \quad x^2 - 6x + 5 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2},$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5.$$

Так как $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$, то площадь данной фигуры

$$S = \int_1^5 [(x + 1) - (x^2 - 5x + 6)] dx = \int_1^5 (6x - 5 - x^2) dx = \left(6 \frac{x^2}{2} - 5x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^5 =$$

$$= \left(6 \cdot \frac{5^2}{2} - 5 \cdot 5 - \frac{5^3}{3} \right) - \left(6 \cdot \frac{1^2}{2} - 5 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} \right) = \left(75 - 25 - \frac{125}{3} \right) - \left(3 - 5 - \frac{1}{3} \right) =$$

$$= 50 - \frac{125}{3} + 2 + \frac{1}{3} = 52 - \frac{124}{3} = \frac{156 - 124}{3} = \frac{32}{3} = 10 \frac{2}{3}.$$

Ответ: $S = \frac{32}{3} \text{ м}^2$.

3) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2x$; $y = 3 - x^2$, $x = 0$ ($x \geq 0$).

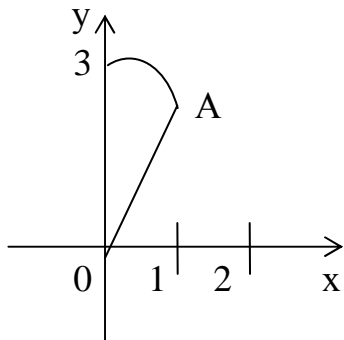


Рисунок 9

Найдем точки пересечения параболы $y = 3 - x^2$ и прямой $y = 2x$ (рис. 9).

$$2x = 3 - x^2,$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2},$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 1.$$

Выбираем, как дано, x больше нуля, значит, $x = 1$. Так как объем тела вращения $V = \pi \int_a^b y^2 dx$, а в данном случае $V = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx$, объем

$$V = \pi \int_0^1 \left[(3 - x^2)^2 - (2x)^2 \right] dx = \pi \int_0^1 (9 - 6x^2 + x^4 - 4x^2) dx = \pi \int_0^1 (9 - 10x^2 + x^4) dx =$$

$$= \pi \left[9x - 10 \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right] \Big|_0^1 = \pi \left(9 - \frac{10}{3} + \frac{1}{5} \right) = \pi \frac{135 - 50 + 3}{15} = \pi \frac{88}{15} \approx 18,43.$$

Ответ: $V \approx 18,43 \text{ см}^3$.

Контрольная работа № 10 “ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ”

ЗАДАНИЕ. Решить дифференциальные уравнения:

- 1.**
- | | |
|--|---|
| 1) $4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2x y^2 dx$; | 2) $x \sqrt{1+y^2} + y y' \sqrt{1+x^2} = 0$; |
| 3) $y' - \frac{y}{x} = x^2, y(1) = 1$; | 4) $y' - y \cdot \text{ctg } x = 2x \sin x$; |
| 5) $y y'' - (y')^2 = 0$; | 6) $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 4x - 17$; |
| 7) $y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x)$. | |

- 2.**
- | | |
|---|--|
| 1) $\sqrt{4+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$; | 2) $x \sqrt{3+y^2} dx + y \sqrt{2+x^2} dy = 0$; |
| 3) $y' + y \cdot \text{tg } x = \cos^2 x$; | 4) $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$; |
| 5) $y y'' + (y')^2 + 1 = 0$; | 6) $y'' - 3y' = x^2, y(0) = 1, y'(0) = -\frac{2}{7}$; |
| 7) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \cdot \sin 6x$. | |

3. 1) $\sqrt{3+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$; 2) $6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3x y^2 dx$;

3) $y' - \frac{1}{x+1} \cdot y = e^x (x+1)$; 4) $y' - \frac{y}{x} = x \sin x, y(\pi) = 2\pi$;

5) $x y'' - y' = 0$; 6) $y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x}$;

7) $y'' + 2y' = -2e^x (\sin x + \cos x)$.

4. 1) $(e^{2x} + 5) dy + y e^{2x} dx = 0$; 2) $y' y \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$;

3) $y' + \frac{y}{x} = \sin x$; 4) $y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = \frac{2}{7}$;

5) $3y \cdot y'' + (y')^2 = 0$; 6) $y'' - 6y' - 7y = 32e^{3x}$;

7) $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.

5. 1) $6x dx - 6y dy = 3x^2 y dy - 2x y^2 dx$; 2) $x \sqrt{5+y^2} dx + y \sqrt{4+x^2} dy = 0$;

3) $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, y(0) = 2$; 4) $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot e^x$;

5) $y y'' + (y')^2 = 0$; 6) $y'' - 2y' = 6x^2 - 10x + 12$;

7) $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.

6. 1) $y(4+e^x) dy - e^x dx = 0$; 2) $\sqrt{4-x^2} \cdot y' + x y^2 + x = 0$;

3) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, y(1) = 5$; 4) $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}$;

5) $2y y'' = 1 + (y')^2$; 6) $y'' - 4y' + 3y = x - 1$;

7) $y'' - 4y' + 8y = e^x (5\sin x - 3\cos x)$.

7. 1) $2x dx - 2y dy = x^2 y dy - 2x y^2 dx$; 2) $x \sqrt{4+y^2} dx + y \sqrt{1+x^2} dy = 0$;

3) $y' + \frac{2}{x} y = x^3$; 4) $y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2$, $y(0) = 2$;

5) $y'' x \ln x = y'$; 6) $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15$;

7) $y'' + 2y' = e^x (\sin x + \cos x)$.

8. 1) $(e^x + 8) dy - y e^x dx = 0$; 2) $6x dx - y dy = y x^2 dy - 3x y^2 dx$;

3) $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 3$; 4) $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2$;

5) $y y'' + 2(y')^2 = 0$; 6) $y'' - 2y' + y = e^x$;

7) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cdot \sin 3x$.

9. 1) $y \ln y + x y' = 0$; 2) $\sqrt{1-x^2} \cdot y' + x y^2 + x = 0$;

3) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 2$; 4) $y' + 2x y = x \cdot e^{-x^2} \cdot \sin x$;

5) $2x y'' = y'$; 6) $y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x}$;

7) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cdot \cos 4x$.

10. 1) $(1+e^x) y' = y e^x$; 2) $6x dx - 2y dy = 2y x^2 dy - 3x y^2 dx$;

3) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$; 4) $y' + y = \frac{1}{e^x}$, $y(0) = 1$;

5) $2(y')^2 = y''(y-1)$; 6) $y'' + 4y' - 5y = x$;

7) $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.

11. 1) $y(1 + \ln y) + x y' = 0$; 2) $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2} \cdot y \cdot y' = 0$;

3) $y' + \frac{y}{x} = x^2$; 4) $y' + 2x y = x e^{-x^2}$, $y(0) = 2$;

5) $(1+x^2) y'' - 2x y' = 0$; 6) $2y'' + y' - y = 2e^x$;

7) $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$.

12. 1) $(3+e^x)y y' = e^x$; 2) $x dx - y dy = y x^2 dy - x y^2 dx$;

3) $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}$, $y(0) = 4$; 4) $x y' - y = x^3$;

5) $2y y'' = (y')^2$; 6) $y'' - 3y' + 2y = e^x$;

7) $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$.

13. 1) $\sqrt{5+y^2} dx + 4(x^2 y + y) dy = 0$; 2) $(1+e^x) y y' = e^x$;

3) $y' + \frac{x}{1-x^2} \cdot y = 1$; 4) $y' - \frac{y}{x} = 2$, $y(1) = -1$;

5) $x y'' - y' = 0$; 6) $y'' - 2y' + 2y = 6e^{2x}$;

7) $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$.

14. 1) $3(x^2 y + y) dy + \sqrt{2+y^2} dx = 0$; 2) $2x dx - y dy = y x^2 dy - x y^2 dx$;

3) $y' - 4y = e^{2x}$; 4) $y' - \frac{x y}{x^2 + 1} = x$, $y(0) = 1$;

5) $y'' + 2y(y')^3 = 0$; 6) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$;

7) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cdot \sin 5x$.

15. 1) $\sqrt{5+y^2} + y' \cdot y\sqrt{1-x^2} = 0;$ 2) $2x + 2x y^2 + \sqrt{2-x^2} \cdot y' = 0;$

3) $y' + 2x y = x e^{-x^2}, y(0) = -2;$ 4) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x + 1}{x};$

5) $(1+x^2) y'' - 2x y' = 0;$ 6) $y'' - y' - 2y = e^{2x};$

7) $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x.$

16. 1) $(x y^2 + y^2) dx + (x^2 - x^2 y) dy = 0;$ 2) $x^2 y' + y = 0;$

3) $y' + 2y = 4x;$ 4) $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, y(0) = -3;$

5) $y'' \cdot \operatorname{tg} y = 2(y')^2;$ 6) $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2;$

7) $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x.$

**Образец выполнения контрольной работы № 10
“ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ”**

Решить дифференциальные уравнения:

1) $2x\sqrt{y^2-2} dx - x^2 y dy = 3y dy.$

Переносим второе слагаемое в правую часть и выносим $y dy$ за скобку:
 $2x\sqrt{y^2-2} dx = y(3+x^2)dy.$ Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Делим обе части уравнения на множители, «лишние» при дифференциалах. При dx «лишним», т. е. не зависящим от x , является $\sqrt{y^2-2}$, а при dy «лишним» будет $(3+x^2).$

$$\frac{2x\sqrt{y^2-2} dx}{\sqrt{y^2-2}(3+x^2)} = \frac{y(3+x^2)dy}{\sqrt{y^2-2}(3+x^2)} \Rightarrow \frac{2x dx}{3+x^2} = \frac{y dy}{\sqrt{y^2-2}}.$$

Теперь можно проинтегрировать, так левая часть зависит только от x , а правая зависит только от y :

$$\int \frac{2x dx}{3+x^2} = \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2-2}}.$$

Находим интегралы по отдельности.

$\int \frac{2x \, dx}{3+x^2}$. Делая подстановку $t = 3+x^2$, $dt = 2x \, dx$, получим

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + \ln c = \ln tc = \ln c(3+x^2).$$

$\int \frac{y \, dy}{\sqrt{y^2-2}}$. Делая подстановку $t = y^2 - 2$, $dt = 2y \, dy$, $\frac{dt}{2} = y \, dy$, получим

$$\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{y^2-2}.$$

Подставляем найденные интегралы в $\int \frac{2x \, dx}{3+x^2} = \int \frac{y \, dy}{\sqrt{y^2-2}}$ и получаем

$$\ln c(x^2+3) = \sqrt{y^2-2}.$$

Получили общий интеграл данного дифференциального уравнения. Можно его записать по-другому:

$$\ln(3+x^2) + c_1 = \sqrt{y^2-2} \Rightarrow \sqrt{y^2-2} - \ln(3+x^2) = c.$$

Ответ: $\sqrt{y^2-2} = \ln c(x^2+3)$.

$$2) \, y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x e^x}, \quad y(1) = 0.$$

Так как y и y' присутствуют в дифференциальном уравнении только в первых степенях, то это линейное ДУ. Так как даны начальные условия, после нахождения общего решения ДУ следует найти частное решение, удовлетворяющее этому начальному условию, т. е. решить так называемую задачу Коши.

Находим общее решение ДУ методом Бернулли, т. е. в виде $y = u \cdot v \Rightarrow \Rightarrow y' = u' v + v' u$. Подставляем в исходное уравнение: $u' v + v' u + \frac{u v}{x} = \frac{1}{x e^x}$.

Группируем первое и третье слагаемые и выносим за скобки v , получаем

$$v \left(u' + \frac{u}{x} \right) + v' u = \frac{1}{x e^x}.$$

Находим такую функцию $u = u(x)$, чтобы скобка была равна нулю.

$u' + \frac{u}{x} = 0$ – это ДУ с разделяющимися переменными. Заменяем $u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$, $du = -\frac{u}{x} dx$. Здесь «лишний» множитель u при dx , делим на не-

го обе части уравнения $\frac{du}{u} = -\frac{u}{u} \cdot \frac{dx}{x}$, $\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$, $\ln u = -\ln x \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln u = \ln x^{-1} \Rightarrow u = \frac{1}{x}$.

Нашли функцию u , при которой выражение в скобках равно нулю. Подставляя ем найденное u в $v \left(u' + \frac{u}{x} \right) + v' u = \frac{1}{x e^x}$, получаем $v \cdot 0 + v' \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x e^x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{v'}{x} = \frac{1}{x e^x}$. Умножаем обе части уравнения на x и получаем $v' = e^{-x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} e^{-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow dv = e^{-x} dx$. Интегрируем обе части уравнения: $\int dv = \int e^{-x} dx$, $v = -e^{-x} + c$.

Получили общее решение ДУ: $y = u \cdot v = \frac{1}{x} \cdot (c - e^{-x})$; $y = \frac{c}{x} - \frac{1}{x e^x}$ – общее решение.

Замечание. Здесь первое слагаемое $\frac{c}{x}$ является общим решением линейного однородного уравнения $y' + \frac{y}{x} = 0$, а второе слагаемое $\left(-\frac{1}{x e^x} \right)$ является частным решением исходного линейного неоднородного уравнения $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x e^x}$.

Сделаем проверку общего решения линейного однородного дифференциального уравнения $y_0 \cdot y_0 = \frac{c}{x} \Rightarrow y_0' = c(x^{-1})' = -\frac{c}{x^2}$. Подставляем в $y' + \frac{y}{x} = 0$, получаем $-\frac{c}{x^2} + \frac{c}{x \cdot x} = 0$, т. е. верное равенство $\Rightarrow y_0 = \frac{c}{x}$ – общее решение линейного однородного (с нулевой правой частью) дифференциального уравнения.

Теперь сделаем проверку частного решения

$$\tilde{y} = -\frac{1}{x e^x} = -x^{-1} e^{-x}, \quad \tilde{y}' = -\left(x^{-1} e^{-x} \right)' = -\left(-\frac{1}{x^2} e^{-x} - \frac{1}{x} e^{-x} \right) = \frac{1}{x^2} e^{-x} + \frac{1}{x} e^{-x}.$$

Подставляем в исходное ДУ $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x e^x}$:

$$\frac{1}{x^2 e^x} + \frac{1}{x e^x} + \left(-\frac{1}{x e^x}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x e^x}, \quad \frac{1}{x^2 e^x} + \frac{1}{x e^x} - \frac{1}{x^2 e^x} = \frac{1}{x e^x}.$$

Получили верное равенство, т. е. именно такая функция $y = -\frac{1}{x e^x}$ при прохождении через данное дифференциальное уравнение дала правую часть $\frac{1}{x e^x}$, что и доказывает, что найденное \tilde{y} является частным решением исходного дифференциального уравнения.

Теперь приступим к решению задачи Коши. Подставим данное начальное условие в полученное общее решение: $y = \frac{c}{x} - \frac{1}{x e^x}$, $y(1) = 0$, $0 = \frac{c}{1} - \frac{1}{1 \cdot e^1} \Rightarrow \Rightarrow 0 = c - \frac{1}{e} \Rightarrow c = \frac{1}{e} = 0$. Найденное c подставляем в общее решение:

$$y = \frac{1}{x e} - \frac{1}{x e^x} \text{ — решение задачи Коши.}$$

$$\text{Можно его записать по-другому } y = \frac{1}{x} (e^{-1} - e^{-x}).$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{1}{x} (e^{-1} - e^{-x}).$$

3) Решить ДУ, допускающие понижение порядка.

а) $x y''' + y'' = 1$. Это ДУ третьего порядка. В этом уравнении отсутствуют неизвестная функция $y = y(x)$ и ее первая производная y' . Понижаем порядок дифференциального уравнения заменой $y'' = z$, тогда $y''' = z'$. Исходное уравнение теперь запишется как $x z' + z = 1 \Rightarrow x z' = 1 - z$ — дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными.

$$x \frac{dz}{dx} = 1 - z \text{ — умножаем обе части уравнения на } dx. \text{ Получаем } x dz = (1 - z) dx.$$

Теперь обе части уравнения делим на $x(1 - z)$. Отсюда следует

$$\frac{dz}{1 - z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{1 - z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\ln|z| + \ln c_1 = \ln|x|, \quad \ln \frac{c_1}{z} = \ln|x| \Rightarrow \frac{c_1}{z} = x \Rightarrow z = \frac{c_1}{x}.$$

Подставляем $z = y''$, получаем $y'' = \frac{c_1}{x}$. Так как $y' = \int y'' dx$, производная

$$y' = \int \frac{c_1}{x} dx = c_1 \ln|x| + c_2.$$

Так как $y = \int y' dx$, $y = \int (c_1 \ln|x| + c_2) dx$. Найдем интеграл с помощью формулы интегрирования по частям: $\int u dv = u v - \int v du$: $\int \ln|x| dx$. Делая подстановку:

$$u = \ln|x|, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad dv = dx, \quad v = x, \text{ получаем}$$

$$x \ln|x| - \int x \frac{dx}{x} = x \ln|x| - \int dx = x \ln|x| - x.$$

$$y = c_1 \int \ln|x| dx + c_2 \int dx = c_1 (x \ln|x| - x) + c_2 x + c_3 =$$

$$= c_1 x \ln|x| - c_1 x + c_2 x + c_3 = c_1 x \ln|x| + (c_2 - c_1) x + c_3$$

Обозначим $(c_2 - c_1)$ другой константой, пусть это будет c_2 , тогда $y = c_1 x \ln|x| + c_2 x + c_3$.

Ответ: $y = c_1 x \ln|x| + c_2 x + c_3$.

Замечание. Так как исходное уравнение было 3-го порядка, то и найденная функция содержит три произвольные константы.

б) $y'' = 18y^3$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 3$.

В этом уравнении отсутствует аргумент x в явном виде, поэтому новым аргументом будем считать y , а новой функцией будем считать $p = y'$, причем

$$p = p(y), \text{ а } y = y(x), \text{ т.е. } p \rightarrow y \rightarrow x. \text{ Найдем } y'' = (y')'_x = (p)'_x = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p. \text{ Под-}$$

ставляем в исходное уравнение $p' \cdot p = 18y^3$. Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{dp}{dy} \cdot p = 18y^3 \mid \cdot dy \Rightarrow \int p \cdot dp = 18 \int y^3 dy \mid \cdot 2,$$

$$\int 2p dy = 9 \int 4y^3 dy,$$

$$p^2 = 9y^4 + c_1.$$

Целесообразно здесь подставить начальные данные и найти c_1 . Учитывая $p = y'$, т. е. $p(-1) = 3$, $y(-1) = 1$. Получаем $3^2 = 9 \cdot 1 + c_1 \Rightarrow 9 = 9 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$, т. е. $p^2 = 9y^4 \Rightarrow p = \pm 3y^2$, выбираем \oplus , т. к. при $x = -1$, $p = y' = 3 > 0$, $\Rightarrow p = 3y^2$, т. е. $y' = 3y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3y^2 \Big| \cdot dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = 3 \int dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = 3x + c_2$.

Опять подставляем начальные данные: $-\frac{1}{1} = 3(-1) + c_2 \Rightarrow -1 = -3 + c_2 \Rightarrow c_2 = 2$.

Подставляем c_2 в общее решение и получаем частное решение

$$-\frac{1}{y} = 3x + 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{3x + 2}.$$

Ответ: Решение задачи Коши: $y = -\frac{1}{3x + 2}$.

4) Решить линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4x + 1$.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами решаем в два этапа.

В начале решается уравнение с нулевой правой частью:

I. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Пишем характеристическое уравнение, заменяя y'' на r^2 , y' на r , вместо y пишем единицу

$$\begin{aligned} r^2 - 3r + 2 &= 0, \\ r_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}, \\ r_1 &= 2, \quad r_2 = 1. \end{aligned}$$

Запишем фундаментальные решения $y_1 = e^{r_1 x} = e^{2x}$, $y_2 = e^{r_2 x} = e^x$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$. Теперь находим частное решение \tilde{y} исходного уравнения.

II. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4x + 1$.

Находим $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$, т. к. правая часть представляет собой многочлен второго порядка. Ищем A, B, C , «прогоняя» функцию \tilde{y} через исходное дифференциальное уравнение.

Находим $y' = (\tilde{y})' = (Ax^2 + Bx + C)' = 2Ax + B$, $y'' = (y')' = (2Ax + B)' = 2A$.

Подставляем все в уравнение $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4x + 1$:

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 4x + 1,$$

$$2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 2x^2 - 4x + 1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x .

$$\begin{array}{l|l} x^2: & 2A = 2 \Rightarrow A = 1 \\ x^1: & -6A + 2B = -4 \Rightarrow -6 + 2B = -4 \Rightarrow 2B = 2 \Rightarrow B = 1 \\ x^0: & 2A - 3B + 2C = 1 \Rightarrow 2 - 3 + 2C = 1 \Rightarrow 2C = 2 \Rightarrow C = 1. \end{array}$$

Подставляем в $\tilde{y} \Rightarrow \tilde{y} = x^2 + x + 1$. Так как общее решение линейного дифференциального уравнения имеет вид $y = y_0 + \tilde{y}$, $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + x^2 + x + 1$.

Ответ: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + x^2 + x + 1$.

б) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}(\cos x + 3\sin x)$.

I. $y'' + 2y' + y = 0$,

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1 = r - \text{кратный корень.}$$

Корень I является корнем характеристического уравнения два раза.

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = e^{rx} = e^{-x} \\ y_2 = x e^{rx} = x e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

II. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}(\cos x + 3\sin x)$

Находим $\tilde{y} = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$.

$$y' = -e^{-x}(A \cos x + B \sin x) + e^{-x}(-A \sin x + B \cos x)$$

$$y' = e^{-x}(B \cos x - A \sin x - A \cos x - B \sin x)$$

$$y'' = -e^{-x}(B \cos x - A \sin x - A \cos x - B \sin x) +$$

$$+ e^{-x}(-B \sin x - A \cos x + A \sin x - B \cos x) =$$

$$= e^{-x}(2A \sin x - 2B \cos x).$$

Подставляем все в уравнение $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}(\cos x + 3\sin x)$:

$$e^{-x}(2A \sin x - 2B \cos x) + 2e^{-x}(B \cos x - A \sin x - A \cos x - B \sin x) + e^{-x}(A \cos x + B \sin x) = 2e^{-x}(\cos x + 3\sin x) \Big| : e^{-x} \neq 0,$$

$$2A \sin x - 2B \cos x + 2B \cos x - 2A \sin x - 2A \cos x - 2B \sin x + A \cos x + B \sin x = 2 \cos x + 6 \sin x.$$

При упрощении получаем $-A \cos x - B \sin x = 2 \cos x + 6 \sin x$.

Приравниваем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$.

$$\begin{array}{l} \cos x : \\ \sin x : \end{array} \left| \begin{array}{l} -A = 2 \Rightarrow A = -2 \\ -B = 6 \Rightarrow B = -6 \end{array} \right.$$

Подставляем найденные A и B в $\tilde{y} = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$:

$$\tilde{y} = e^{-x}(-2 \cos x - 6 \sin x) = -2e^{-x}(\cos x + 3 \sin x).$$

Запишем общее решение $y = y_0 + \tilde{y}$:

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - 2e^{-x}(\cos x + 3 \sin x), \\ y &= e^{-x}(c_1 + c_2 x - 2 \cos x - 6 \sin x). \end{aligned}$$

Ответ: $y = e^{-x}(c_1 + c_2 x - 2 \cos x - 6 \sin x)$.

в) $y'' - y' = x^2 + 1$.

I. $y'' - y' = 0$

$$\begin{array}{l} r^2 - r = 0 \\ r(r-1) = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} r_1 = 0 \\ r_2 = 1 \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 = e^{0 \cdot x} = 1 \\ y_2 = e^x \end{array} \right\} y_0 = c_1 + c_2 e^x$$

II. $y'' - y' = (x^2 + 1)e^{0 \cdot x}$ (нуль является простым корнем характеристического уравнения). Так как $e^0 = 1$, то, если в правой части отсутствует e^{ax} , это означает, что $a = 0$. Поэтому нужно этот множитель дописывать и проверять, является ли ноль решением характеристического уравнения. В данном случае ноль является корнем характеристического уравнения, поэтому будем искать решение в виде произведения $(Ax^2 + Bx + C)$ на x^1 .

$$\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y'' = 6Ax + 2B$$

Подставляем найденное в $y'' - y' = x^2 + 1$:

$$6A x + 2B - 3A x^2 - 2B x - C = x^2 - 1.$$

Приравниваем коэффициенты при равных степенях x .

$$\begin{array}{l|l} x^2 : & -3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3} \\ x^1 : & 6A - 2B = 0 \Rightarrow 2B = 6A = 6\left(-\frac{1}{3}\right) = -2 \Rightarrow B = -1 \\ x^0 : & 2B - C = 1 \Rightarrow C = 2B - 1 = -3 \end{array}$$

Получаем частное решение $\tilde{y} = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$. Сделаем проверку частного решения:

$$\tilde{y} = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$$

$$y' = -x^2 - 2x - 3$$

$$y'' = -2x - 2$$

Подставляем значения y' и y'' в уравнение: $y'' - y' = x^2 + 1$,

$$-2x - 2 + x^2 + 2x + 3 = x^2 + 1$$

$$x^2 + 1 = x^2 + 1 \quad (\text{верно})$$

Записываем общее решение: $y = y_0 + \tilde{y}$.

$$y = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x.$$

Ответ: $y = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$.

Библиографический список

1. Гурский Е. И., Ершова В. В. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. Минск: Высш. шк., 1965. 184 с.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980, 1984. 120 с.
3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980. 270 с.
4. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики. М.: Высш. шк., 1978. Т.1. 384 с.
5. Щипачев В. С. Основы высшей математики. М.: Высш. шк., 1998. 200 с.
6. Элементы линейной алгебры / Сост.: Ю. Ф. Стругов, Г. А. Троценко, Е. М. Назарук. Омск: Изд-во ОмГТУ, 1998. 36 с.
7. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1986. 240 с.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1977. 416 с.
9. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1985.
10. Предел и непрерывность / Сост.: Л. В. Бельгарт, Н. И. Николаева. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2000. 36 с.
11. Сборник задач и упражнений по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. М.: Высш. шк., 1973. 576 с.
12. Иванов-Мусатов О.С. Начала математического анализа. М.: Наука, 1988.
13. Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. М.: Высш.шк., 1985.

СОДЕРЖАНИЕ

Контрольная работа № 6 “Приложение дифференциального исчисления...”	3
Контрольная работа № 7 “Функции нескольких переменных”	13
Контрольная работа № 8 “Неопределенный интеграл”	27
Контрольная работа № 9 “Определенный интеграл и его приложения”	37
Контрольная работа № 10 “Дифференциальные уравнения”	43
Библиографический список	56