

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ ТИПОВЫХ РАСЧЁТОВ
ПО КУРСУ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»**

Часть I.

Омск
Издательство ОмГТУ
2011

Рецензент:
Бояркин Геннадий Николаевич, к.э.н., профессор

Составители: Веснина Алефтина Александровна, доцент,
Стругова Татьяна Михайловна, старший преподаватель,
Назарук Елена Маратовна, старший преподаватель

Методические указания составлены в соответствии с программой курса высшей математики для технических вузов. Предназначены для студентов первого и второго курсов всех специальностей дневного обучения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета.

ГОУ ВПО «Омский государственный
технический университет», 2011

Контрольная работа № 1
“МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ”

ЗАДАНИЕ 1. Вычислить определители:

1. а) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix};$
2. а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$
3. а) $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 3 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix};$
4. а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{vmatrix};$
5. а) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 8 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix};$
6. а) $\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -3 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix};$
7. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \end{vmatrix};$

8.	a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 7 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -6 & 9 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 11 & 8 \end{vmatrix};$
9.	a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -3 & -15 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \end{vmatrix};$
10.	a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 10 & 2 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix};$
11.	a) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 12 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -11 & 4 \\ 0 & 3 & -7 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 7 & -4 & 2 & 0 \\ 8 & -5 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -6 & 3 \end{vmatrix};$
12.	a) $\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 1 & 2 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 \end{vmatrix};$
13.	a) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix};$
14.	a) $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix};$
15.	a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -7 & 1 & 0 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -1 & 8 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -7 \end{vmatrix};$

16.	a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -6 & -4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix};$
17.	a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$
18.	a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$
19.	a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$
20.	a) $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}.$
21.	a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}.$
22.	a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$
23.	a) $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$

24.	a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$
25.	a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$
26.	a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$
27.	a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$
28.	a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix}.$
29.	a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$
30.	a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix};$	б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix};$	в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$	г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

ЗАДАНИЕ 2. Умножить матрицы:

1.	a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$
2.	a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$
3.	a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$
4.	a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$
5.	a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
6.	a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$
7.	a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$
8.	a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$
9.	a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
10.	a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$

11.	a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$
12.	a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$
13.	a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$
14.	a) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$
15.	a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$
16.	a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$
17.	a) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$
18.	a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 5 & -9 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}.$
19.	a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 9 & -2 \end{pmatrix}.$
20.	a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -9 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -6 & 9 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 11 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$

21.	a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -11 & 4 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$
22.	a) $\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$
23.	a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$
24.	a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}.$
25.	a) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$
26.	a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$
27.	a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & -4 & 2 \\ 8 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$
28.	a) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$
29.	a) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 7 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$
30.	a) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$	б) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix};$	в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$

ЗАДАНИЕ 3. Найти обратные матрицы для матриц:

1. а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.	2. а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
3. а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.	4. а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
5. а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.	6. а) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
7. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.	8. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
9. а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.	10. а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
11. а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.	12. а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
13. а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.	14. а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
15. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.	16. а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.
17. а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \\ 8 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.	18. а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 6 & 3 & -2 \\ 7 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.
19. а) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -3 & -6 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.	20. а) $\begin{pmatrix} -12 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -8 & -1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

21. а) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.	22. а) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
23. а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.	24. а) $\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.
25. а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.	26. а) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
27. а) $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.	28. а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.
29. а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.	30. а) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;	б) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 4. Найти ранг матрицы двумя способами:

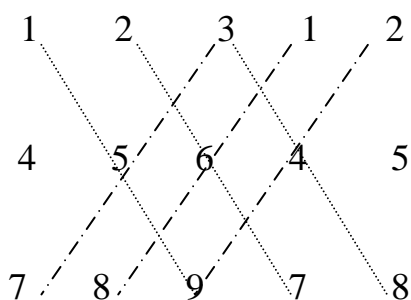
1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.	2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.	3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.	5. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.	6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$.
7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.	8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.	9. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.
10. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.	11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.	12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.	14. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.	15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.	17. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.	18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
19. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & 13 \end{pmatrix}$.	20. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.	21. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
22. $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.	23. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.	24. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
25. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.	26. $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.	27. $\begin{pmatrix} -5 & 9 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
28. $\begin{pmatrix} -9 & -8 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.	29. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.	30. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Образец выполнения контрольной работы № 1
“МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ”

1. Вычислить определители: а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = ?$

Решение. Этот определитель вычислим по правилу диагоналей. Приписываем справа к определителю первый и второй столбцы. Перемножаем элементы, стоящие на главной диагонали и складываем это произведение с аналогичными произведениями элементов, стоящих на диагоналях, параллельных главной. Затем к произведению элементов, стоящих на побочной диагонали, прибавляем аналогичные произведения элементов, стоящих на диагоналях, параллельных побочной. Затем от первой суммы вычитаем вторую. Это и будет искомым определитель.



$$\begin{aligned}
 &= (1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8) - \\
 &\quad - (3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 9) = \\
 &= (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) = \\
 &= 225 - 225 = 0
 \end{aligned}$$

Ответ: $\Delta = 0$.

$$\text{б) } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычислим этот определитель разложением по первому столбцу, но сначала с помощью свойств определителя сделаем нули в этом столбце везде кроме элемента, равного минус единице.

Для этого элементы **второй** строки умножим на два и прибавим к соответствующим элементам **первой** строки; элементы **второй** строки прибавим к соответствующим элементам **третьей** строки; элементы **второй** строки умножим на два и прибавим к соответствующим элементам **четвертой** строки. Эти действия записываем так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & 7 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 7 \end{vmatrix}.$$

Разложив определитель 4-го порядка по 1-му столбцу, свели его вычисление к нахождению одного определителя 3-го порядка, который можно вычислить по правилу диагоналей, разобранным выше. Можно дальше применить свойства определителя и свести этот определитель к одному определителю 2-го порядка. Продолжаем делать нули теперь уже во второй строке, умножая элементы третьего столбца на (-4) и прибавляя к первому и второму столбцам:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16 & -17 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -21 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -16 & -17 \\ -20 & -21 \end{vmatrix} = -(16 \cdot 21 - 20 \cdot 17) = \\
 \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ (-4) & (-4) \end{matrix} & \qquad \qquad \qquad = -(336 - 340) = 4.$$

Ответ: $\Delta = 4$.

1) Умножить матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} (1) & [2] \\ (3) & [4] \\ (5) & [6] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1) & (2) \\ [3] & [4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1) \cdot (1) + [2] \cdot [3] & (1) \cdot (2) + [2] \cdot [4] \\ (3) \cdot (1) + [4] \cdot [3] & (3) \cdot (2) + [4] \cdot [4] \\ (5) \cdot (1) + [6] \cdot [3] & (5) \cdot (2) + [6] \cdot [4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}.$$

3×2 2×2 3×2

Решение. Произведение матриц получили, умножая элементы строк первой матрицы на соответствующие элементы столбцов второй матрицы и складывая их

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}.$

3) Найти обратные матрицы: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$ $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$

Решение. Сначала находим $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2; \Delta \neq 0,$ значит, суще-

ствует матрица $A^{-1}.$ Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{4} \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{4} \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{4} \end{vmatrix} = 1; \quad A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

4) Найти двумя способами ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$

Решение.

1 способ. Метод окаймляющих миноров. Находим любой минор второго по-

рядка, отличный от нуля, например $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - (-2) \cdot 1 = -2 + 2 = 0,$

поэтому выписываем другой определитель $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - 1 \cdot 1 = 40 - 1 = 39 \neq 0$.

Нашелся определитель второго порядка, отличный от нуля, значит ранг A $rA \geq 2$. Теперь найдем определитель третьего порядка, окаймляющий найденный $\Delta_2 \neq 0$.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-2)(-1)} \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = (1-)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Берем другой определитель, окаймляющий $\Delta_2 \neq 0$:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-2)(-1)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 0, \text{ как и предыдущий.}$$

Больше окаймляющих миноров третьего порядка для $\Delta_2 \neq 0$ нет, поэтому ранг A , равный наивысшему порядку минора, отличного от нуля, равен 2.

2 способ. Метод элементарных преобразований.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} & -2 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получили 2-е ненулевые строки. Поэтому ранг A равен 2 (очевидно минор второго порядка $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$).

Ответ: $rA = 2$.

Контрольная работа № 2 “СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ”

ЗАДАНИЕ 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

1. а) $\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases};$	б) $\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$
--	--

2.	a) $\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3; \\ x - y - z = 4 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 7. \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$
3.	a) $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 5 \quad ; \\ 3x + z = -1 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 1 \quad . \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$
4.	a) $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \quad ; \\ 3x - y - 4z = 12 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x - y - z = -1. \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$
5.	a) $\begin{cases} x + 3y + 3z = 11 \\ x - 2y + 3z = 1 \quad ; \\ 3x + 3y - z = 1 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 3x - 2z = 11 \\ 2x - 2y + 3z = 3. \\ x - y + 4z = -1 \end{cases}$
6.	a) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 4x + 2y + 5z = 5; \\ 3x + 4y + 7z = 2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 6y + z = 2. \\ 4x + 8y - z = 2 \end{cases}$
7.	a) $\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4; \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \quad . \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}$
8.	a) $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1; \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11. \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$
9.	a) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \quad . \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$
10.	a) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5; \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \quad . \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$
11.	a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5; \\ x + y + z = 3 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 5x - 2y + 7z = 22. \\ 2x - 5y + 4z = 4 \end{cases}$

12. a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5; \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \quad . \\ x + 3y - z = -2 \end{cases}$
13. a) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1; \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ 3x - z = 0 \quad . \\ x + y + z = 2 \end{cases}$
14. a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3; \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ 4x + y + 3z = 9 \quad . \\ x + y + z = 2 \end{cases}$
15. a) $\begin{cases} 3x + y - 4z = -7 \\ x + 2y - 3z = 1 \quad ; \\ x - 3y + z = -10 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 10 \\ x - 3y + 4z = -11. \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases}$
16. a) $\begin{cases} x - 2y - z = 7 \\ 3x + y - 2z = 1; \\ x + 3y + z = -6 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 3x + y + 4z = 16 \\ 2x + 3y + z = 1 \quad . \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$
17. a) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \quad ; \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 18 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \quad . \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$
18. a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 2 \quad ; \\ -4x - y + 3z = -3 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \quad . \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$
19. a) $\begin{cases} 3x - y + 3z = 1 \\ x - 3y + 4z = 1 \quad ; \\ 2x - y - z = -6 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 19 \\ 8x + 3y - 6z = 2 \quad . \\ -4x - y + 3z = -3 \end{cases}$
20. a) $\begin{cases} 3x - 3y - 2z = 9 \\ 3x - y + 4z = 7 \quad ; \\ x - 6y + 9z = 8 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x - 2y - z = 12 \\ 4x + 11z = -43 \quad . \\ 2x + 3y + 4z = -20 \end{cases}$
21. a) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 5 \\ x - 11y + 4z = 13; \\ 3y - 7z = -3 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + 4y - 6z = -5 \\ x - 3y + 4z = 1 \quad . \\ 2x - y - z = -6 \end{cases}$

22. a) $\begin{cases} 2x - 3z = 10 \\ 2x + 3y - 4z = 20; \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y - 2z = -4. \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$
23. a) $\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 9 \\ 2x - y + 2z = -4; \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 4x + 3y - 2z = 9 \\ 2x - y + 2z = -1. \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$
24. a) $\begin{cases} x + y + 3z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4; \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 3 \\ 2x + 3y + 3z = 4. \\ x + 4z = 6 \end{cases}$
25. a) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ x + 2y - 2z = 5; \\ 2x - y - 3z = 4 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x - 4y - 2z = 5 \\ x + 2y + 3z = 0. \\ 2x + 5y + 4z = 2 \end{cases}$
26. a) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 11 \\ 4x + 3y - 2z = 5; \\ x + 4y - 6z = -2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 3x - y + z = -1 \\ x + 2y - 2z = 2. \\ 2x - 3z = -3 \end{cases}$
27. a) $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x - 2y + z = 0; \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x - 7y + 5z = -9 \\ x - 2y - z = -5. \\ 3x - 3y - 2z = -8 \end{cases}$
28. a) $\begin{cases} 5x + y + 2z = 4 \\ x + 2y + 2z = 1; \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - 2z = 2. \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases}$
29. a) $\begin{cases} 3x - 2y - 4z = 3 \\ x - 2y - 2z = -3; \\ 3x + y + 3z = 1 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x + y - 5z = -8 \\ x + 2y - 3z = 1. \\ 2x + 3y - z = 8 \end{cases}$
30. a) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2; \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1. \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 2. Решить системы методом Гаусса:

1.	а) $\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 4 \\ 7x + 8y - z = 14 \\ x + 7y + 4z = 1 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x + 3y + 11z + 5t = 2 \\ x + y + 5z + 2t = 1 \\ 2x + y + 3z + 2t = -3 \\ x + y + 3z + 4t = -3 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} 2x + 2y - 6z = -2 \\ -x - 3y + 5z = 3 \\ -3x + 7y - z = -7 \end{cases}$	г) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 5t = 2 \\ 2x + y + 4z + t = -3 \\ 3x - 3y + 8z - 2t = -1 \\ 2x - 2y + 5z - 12t = 4 \end{cases}$
2.	а) $\begin{cases} -3x + 6y + 4z = 7 \\ x - 3y + 5z = 7 \\ 10x - 3y + 7z = 4 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ 3x - y - z - 2t = -4 \\ 2x + 3y - z - t = -6 \\ x + 2y + 3z - t = -4 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} -x + 2y + z = 4 \\ 4x - 5y + 7z = -10 \\ 3x - y - 8z = -2 \end{cases}$	г) $\begin{cases} x - y + 2z - 6t = -8 \\ 7x - 4y + 2z - 15t = -32 \\ 8x - 5y + 4z - 21t = -40 \\ 2x - y - 6z + 6t = -1 \end{cases}$
3.	а) $\begin{cases} 7x - 5y + z = 3 \\ 8x + 3y - z = 10 \\ x + 5y + z = -2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 2z + t = -8 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \\ 3x - 4y + 7z = -4 \end{cases}$	г) $\begin{cases} x + 3y + 2z + t = 11 \\ 2x + 5y + 4z + t = 20 \\ 3x + 8y + 6z + 2t = 31 \\ x + 2y + 2z = 9 \end{cases}$
4.	а) $\begin{cases} -x + 2y - 2z = -1 \\ 3x + 4y + z = 8 \\ 4x + 5y - 2z = 1 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 6 \\ 3x + 5y + 2t = 4 \\ 9x + 4y + z + t = 2 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} -3x + 4y - 13z = -3 \\ x + 5y - 21z = 1 \\ -5x - 2y + 13z = -5 \end{cases}$	г) $\begin{cases} x - 2y - 2z - 3t = 3 \\ 4x - 3y + z + 5t = 7 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ 4x - 3y + z - 3t = 2 \end{cases}$

5.	a) $\begin{cases} 5x + 3y - z = 7 \\ x + y - 3z = -1 \\ 5x - y + z = -1 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + 2y - 3z + 5t = 1 \\ x + 3y - 13z + 22t = -1 \\ 3x + 5y + z - 2t = 5 \\ 2x + 3y + 4z - 7t = 4 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} -x + 2y - 7z = 2 \\ 4x - y = -8 \\ 2x + y - 6z = -4 \end{cases}$	г) $\begin{cases} x + y + 3z + 4t = -3 \\ 2x + y + 3z + 2t = -3 \\ x + y + 5z + 2t = 1 \\ 4x + 3y + 11z + 8t = -5 \end{cases}$
6.	a) $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 0 \\ x + 2y - 6z = -3 \\ -3x - y + 7z = 9 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x - y + 2z - 3t = 1 \\ x + 4y - z - 2t = -2 \\ x - 4y + 3z - 2t = -2 \\ x - 8y + 5z - 2t = -2 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} 3x + 4y + z = -5 \\ -x + 3y + 4z = 6 \\ -5x + y + 6z = 16 \end{cases}$	г) $\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 4z + 10t = 13 \end{cases}$
7.	a) $\begin{cases} x + 7y - 9z = -1 \\ -x + 8y - z = 6 \\ -4x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + 3y + 5z - t = 4 \\ 2x - y - 3z + 4t = 1 \\ 5x + y - z + 7t = 6 \\ 7x + 7y + 9z + t = 14 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} 3x + 2y - 6z = 2 \\ x - y - 8z = -1 \\ -2x + 3y - 22z = 3 \end{cases}$	г) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 1 \\ 2x - y - 2z - 3t = 2 \\ 3x + 2y - z + 2t = -5 \\ 2x - 3y + 2z + t = 11 \end{cases}$
8.	a) $\begin{cases} x - 5y - 2z = -6 \\ 6x - 2y + z = 5 \\ 2x - 2y - 2z = 7 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} x + 3y - 8z = -2 \\ 4x - y + 7z = -8 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$	г) $\begin{cases} x + 2y + 3z - t = 0 \\ x - y + z + 2t = 4 \\ x + 5y + 5z - 4t = -4 \\ x + 8y + 7z - 7t = -8 \end{cases}$

9.	a) $\begin{cases} x - 8y + z = -6 \\ -5x + 5y + 7z = 7 \\ -8x + y + 4z = 2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 3x - 2y + z - 3t = 7 \\ 2x - y - 5t = 6 \\ x - y + z + 2t = 1 \\ x - z - 7t = 5 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} 4x + 3y - 23z = 9 \\ -2x - y + 13z = -3 \\ x + 2y - 7z = 6 \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2x + 3y - 3z + t = 1 \\ 2x + 3y + 9z - 7t = 3 \\ 4x + 6y + 8z - 6t = 4 \\ 6x + 9y + 17z - 13t = 7 \end{cases}$
10.	a) $\begin{cases} 4x - 2y + 5z = 7 \\ 3x - 3y - 7z = -7 \\ x + 3y - z = 11 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 3x - 7y + 3z - t = -1 \\ 5x - 9y + 6z + 2t = 7 \\ 8x - 16y + 9z + t = 6 \\ 2x - 2y + 3z + 3t = 8 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} 3x + y - 11z = -1 \\ -2x + 3y = 19 \\ -x - 5y + 13z = -23 \end{cases}$	г) $\begin{cases} x + y - 6z - 4t = 6 \\ 3x - y - 6z - 4t = 2 \\ 3x + 2y + 3z + 8t = -7 \\ x + 15z + 16t = -19 \end{cases}$
11.	a) $\begin{cases} -3x + y + z = -1 \\ 6x + 3y + z = 10 \\ x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x - 3y + 3z + 2t = 3 \\ 6x + 9y - 6z - t = -4 \\ 8x + 6y + z + 3t = -7 \\ 2x - 3y + 3z + 4t = -3 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} 2x + y - 11z = -3 \\ 4x + 3y - 21z = -9 \\ -x - 3y + 3z = 9 \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2x - y - 6z + 13t = -1 \\ 7x - 4y - 4z + 9t = 5 \\ 4x + 5y - 14z + 21t = 9 \end{cases}$
12.	a) $\begin{cases} x + y - 6z = -4 \\ -7x + 2y + z = -4 \\ -9x + 6y + z = 5 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + 2y + 3z - t = 1 \\ 3x + 2y + z - t = 1 \\ 5x + 5y + 2z = 2 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} -x - 5y + 14z = -20 \\ -6x + y - 3z = -4 \\ 5x + 2y - z = 8 \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases}$

13.	a) $\begin{cases} 2x + y + 7z = 10 \\ 9x - y + 2z = 10 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 7t = 5 \\ 6x - 3y + z - 4t = 7 \\ 4x - 2y + 14z - 31t = 18 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} x + 2y - 10z = -2 \\ 4x - 6y - 26z = 6 \\ -x - 8y + 16z = 8 \end{cases}$	г) $\begin{cases} x + 2y + 3z - t = 1 \\ 5x + 5y + 2z = 2 \\ 3x + 2y + z - t = 1 \end{cases}$
14.	a) $\begin{cases} 3x - y - 6z = -4 \\ x + 9y - 5z = 5 \\ 6x + y - 4z = 1 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + 3y + 5z - 2t = 3 \\ x + 5y - 9z + 8t = 1 \\ 2x + 7y + 3z + t = 5 \\ x + 2y + 12z - 7t = 4 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} x + y - 5z = -3 \\ 2x - y - 13z = 3 \\ 3x + 2y - 16z = -6 \end{cases}$	г) $\begin{cases} x + y + z - 2t = 1 \\ -x + 2y - z - 2t = -1 \\ 2x - y + 2z + 2t = 2 \end{cases}$
15.	a) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1; \\ x + y = 2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ -x + 4y + z = 3; \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1; \\ x + y = 1 \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2t = 4. \\ 9x + 4y + z + 7t = 2 \end{cases}$
16.	a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 3; \\ 4x - 11y + 10z = 5 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t = 2; \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases}$
	в) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 3; \\ 3x + 6y + 9z = 2 \end{cases}$	г) $\begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9; \\ 2x + 3y - 5z = 7; \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases}$
17.	a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2; \\ 3x + 6y + 9z = 3 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3; \\ x - y + 2z = 5; \\ 3x - 6y + 5z = 6 \end{cases}$

	$\text{B)} \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 4y + 6z = 3; \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$	$\text{Г)} \begin{cases} x + 2y + 3z - t = 1 \\ 3x + 2y + z - t = 1. \\ 5x + 5y + 2z = 2 \end{cases}$
18.	$\text{a)} \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \quad ; \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$	$\text{б)} \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \quad ; \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases}$
	$\text{B)} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \quad ; \\ 5x + y - z = 7 \end{cases}$	$\text{Г)} \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \end{cases}$
19.	$\text{a)} \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3; \\ 4x - y + z = 11 \end{cases}$	$\text{б)} \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = -2 \quad ; \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$
	$\text{B)} \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \quad ; \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$	$\text{Г)} \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x - y + z - t = 1 \end{cases}$
20.	$\text{a)} \begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0 \quad ; \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases}$	$\text{б)} \begin{cases} 3x - 2y + 5z + 4t = 2 \\ 6x - 4y + 4z + 3t = 3; \\ 9x - 6y + 3z + 2t = 4 \end{cases}$
	$\text{B)} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 3y + 4z = 2 \quad ; \\ 11x - 12y + 17z = 3 \end{cases}$	$\text{Г)} \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases}$
21.	$\text{a)} \begin{cases} x + 2y - 6z = 5 \\ 2x - y + 3z = -7 \quad ; \\ 5x + 5y - 15z = 8 \end{cases}$	$\text{б)} \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \quad ; \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x - 6y + 5z = 6 \end{cases}$
	$\text{B)} \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4; \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$	$\text{Г)} \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x - y + z - t = 1 \end{cases}$

<p>22.</p>	<p>a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 4x - 11y + 10z = 5 \end{cases}$;</p> <p>б) $\begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ 7x - 4y + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{cases}$;</p>	<p>б) $\begin{cases} 11x + 17y + 6z - 39u = 1 \\ 2x - 3y - 5z - u = 0 \\ x + 32y + 31z - 34u = 1 \end{cases}$;</p> <p>г) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y - 3z = 13 \\ 3x - 2y + 4z = -15 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$.</p>
<p>23.</p>	<p>a) $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - z = 5 \end{cases}$;</p> <p>б) $\begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ 7x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{cases}$;</p>	<p>б) $\begin{cases} x - 2y + z + t = 1 \\ x - 2y + z - t = -1 \\ x - 2y + z + 5t = 5 \end{cases}$;</p> <p>г) $\begin{cases} x - y - 3z = 13 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = -15 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$.</p>
<p>24.</p>	<p>a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -7 \\ x + 2y - 6z = -1 \\ -x + 5y - 15z = 8 \end{cases}$;</p> <p>б) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 5x - 7y + 8z = 1 \end{cases}$;</p>	<p>б) $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \end{cases}$;</p> <p>г) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 7t = 5 \\ 6x - 3y + z - 4t = 7 \\ 4x - 2y + 14z - 31t = 18 \end{cases}$.</p>
<p>25.</p>	<p>a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = 2 \\ 5x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$;</p> <p>б) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 11y + 4z = 13 \\ 2x - 10y + 5z = 1 \end{cases}$;</p>	<p>б) $\begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases}$;</p> <p>г) $\begin{cases} 9x - 3y + 5z + 6t = 4 \\ 6x - 2y + 3z + t = 5 \\ 3x - y + 3z + 14t = -8 \end{cases}$.</p>

<p>26.</p>	<p>a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y + 5z = 12 \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x - y - z = -6 \\ 3x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$</p>	<p>б) $\begin{cases} x - 7y + 6z = 4 \\ x + 12y - 11z = -7 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ 8x + y - 3z = -1 \end{cases}$</p> <p>г) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 6y + z = 2 \\ 4x + 8y - z = 2 \\ 3x + 9y + 3z = 6 \end{cases}$</p>
<p>27.</p>	<p>a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ 2x - y - 3z = 4 \\ 3x + y - 5z = 1 \end{cases}$</p>	<p>б) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z + 4t = 2 \\ 6x - 4y + 4z + 3t = 3 \\ 9x - 6y + 3z + 2t = 4 \end{cases}$</p> <p>г) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$</p>
<p>28.</p>	<p>a) $\begin{cases} 3x + 2y + z = -1 \\ 7x + 6y + 5z = 5 \\ 5x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x - 7y + 5z = 1 \\ 3x - 8y + 8z = 5 \end{cases}$</p>	<p>б) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases}$</p> <p>г) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x - y + z - t = 1 \end{cases}$</p>
<p>29.</p>	<p>a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y + 5z = 12 \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 3x + y + 4z = 1 \end{cases}$</p>	<p>б) $\begin{cases} x + 2y + 3z - t = 1 \\ 3x + 2y + z - t = 1 \\ 5x + 5y + 2z = 2 \end{cases}$</p> <p>г) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x - 6y + 5z = 6 \end{cases}$</p>
<p>30.</p>	<p>a) $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - z = 5 \end{cases}$</p>	<p>б) $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \end{cases}$</p>

$$в) \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 2x - y - 2z = -4; \\ 3x + y - 4z = 1 \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} 9x - 3y + 5z + 6t = 4 \\ 6x - 2y + 3z + t = 5 \\ 3x - y + 3z + 14t = -8 \end{cases}.$$

Задание 3. Решить системы однородных уравнений:

$$1. \quad а) \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 0 \\ x - y + 4z = 0 \\ 5x + 2y + 10z = 0 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}.$$

$$2. \quad а) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0; \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x - y + 3z - t = 0 \\ 2x + 2y - z + 2t = 0. \\ 2x - 7y + 5z - t = 0 \end{cases}$$

$$3. \quad а) \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ 2x + 5y + z + 5t = 0; \\ 3x + 8y + z + 9t = 0 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0. \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$4. \quad а) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0; \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0. \\ 3x + z = 0 \\ 5x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$5. \quad а) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x + 4y - 4z = 0; \\ 5x + 5y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + 3y - z - 2t = 0. \\ 3x - y - 4z - t = 0 \end{cases}$$

$$6. \quad а) \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0; \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 4x - 3y + z - t = 0 \\ 2x + y + 3z - 5t = 0. \\ x - 2y - 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$7. \quad а) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 ; \\ 4x - 11y + 10z = 0 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \\ 3x - 2y - 4z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}.$$

$$8. \quad а) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0; \\ 5x - 7y + 8z = 0 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x - 2y + 5z + 4t = 0 \\ 6x - 4y + 4z + 3t = 0. \\ 9x - 6y + 3z + 2t = 0 \end{cases}$$

9. a) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} ;$	b) $\begin{cases} 3x - y + 3z + 14t = 0 \\ 6x - 2y + 3z + t = 0 \\ 9x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{cases} .$
10. a) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases} ;$	b) $\begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ x - 12y + 4z + 2t = 0 \\ 3x - 5y + 3z + t = 0 \end{cases} .$
11. a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} ;$	b) $\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \\ 2x + y + z - 2t = 0 \end{cases} .$
12. a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + 2y + 9z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} ;$	b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \end{cases} .$
13. a) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} ;$	b) $\begin{cases} x + 5y + 4z + 3t = 0 \\ 2x - y + 2z - t = 0 \\ 5x + 3y + 8z + t = 0 \end{cases} .$
14. a) $\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ 3x + 5y - 7z = 0 \\ 4x - 5y - 6z = 0 \end{cases} ;$	b) $\begin{cases} x - 2y - 4z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ 5x + 8y - 3z = 0 \\ 3x + y - 6z = 0 \end{cases} .$
15. a) $\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 0 \\ 4x + 7y + 5z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \\ 2x + 9y + 6z = 0 \end{cases} ;$	b) $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \\ 5x - 5y + 10z = 0 \end{cases} .$
16. a) $\begin{cases} 2x - 4y + 5z + 3t = 0 \\ 3x - 6y + 4z + 2t = 0 \\ 4x - 8y + 17z + 11t = 0 \end{cases} ;$	b) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases} .$
17. a) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases} ;$	b) $\begin{cases} x - 2y + 6z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - 6y + 7z = 0 \\ 3x - 5y + 8z = 0 \end{cases} .$

18. a) $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 6x + 3y + 4z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$
19. a) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + y - z = 0 ; \\ 5x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 7x + 3y + 4z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ 4x + y + 4z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \end{cases}$
20. a) $\begin{cases} x + 5y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 ; \\ x + 11y + 3z = 0 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ 4x + 7y + 5z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + 8y + 4z = 0 \end{cases}$
21. a) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y + 3z = 0 ; \\ 3x + y + 5z = 0 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 3x + 10y + 5z = 0 \\ -2x + 7y + z = 0 \end{cases}$
22. a) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 ; \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases}$	b) $\begin{cases} -2x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \\ -x - 3y - 4z = 0 \\ 3x + 7y + 7z = 0 \end{cases}$
23. a) $\begin{cases} 3x + 3y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 ; \\ 4x + y + 2z = 0 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x + y + 6z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + 3y + 13z = 0 \end{cases}$
24. a) $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -2x - y + z = 0 ; \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$	b) $\begin{cases} -4x + 6y - 3z = 0 \\ x + 2y + 6z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$
25. a) $\begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 ; \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$	b) $\begin{cases} -x + 5y + 8z = 0 \\ 5x + 2y - 4z = 0 \\ 7x + 2y + 4z = 0 \\ 6x + 7y + 12z = 0 \end{cases}$

26.	a) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ 4x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 7x - y - 2z = 0 \\ 3x + 3y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$
27.	a) $\begin{cases} 4x + 3y + z = 0 \\ 6x + 7y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ -x + 5y - 2z = 0 \\ -7x - 3y + 2z = 0 \\ -5x - y + 6z = 0 \end{cases}$
28.	a) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ x - 3y - 7z = 0 \\ 4x - y - 6z = 0 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 6x - 3y + z = 0 \\ -x - 5y + 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \\ 7x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$
29.	a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 7y + 2z = 0 \\ -2x - 5y + z = 0 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 2x + 5y - z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ 3x + 7y + 3z = 0 \end{cases}$
30.	a) $\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \\ -x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 5x + y - 6z = 0 \\ 6x + 3y - 5z = 0 \end{cases}$

Образец выполнения контрольной работы № 2

“СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ”

1) Решить систему матричным способом:
$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Решение. Пусть $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Тогда данную систему можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$. Решаем его, домножая слева на обратную матрицу: $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B$. Отсюда получаем решение $X = A^{-1}B$. Найдем сначала A^{-1} .

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \downarrow = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \underset{(-)}{(-1)}^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)(0 - (-2)) = -6.$$

($\Delta_A \neq 0$, значит $A^{-1} \exists$).

$$A_{11} = \underset{(+)}{(-1)}^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

$$A_{21} = \underset{(-)}{(-1)}^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - (-2)) = -2$$

$$A_{31} = \underset{(+)}{(-1)}^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$A_{12} = \underset{(-)}{(-1)}^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - (-1)) = -1,$$

$$A_{22} = \underset{(+)}{(-1)}^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$A_{32} = \underset{(-)}{(-1)}^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 2) = 3, \quad A_{13} = \underset{(+)}{(-1)}^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5,$$

$$A_{23} = \underset{(-)}{(-1)}^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 1) = 1 \quad A_{33} = \underset{(+)}{(-1)}^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3$$

Составляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Найдем

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (+3) \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-3)(-3) \\ 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-3)(-3) \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

т. е. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Проверка. Подставим найденное решение в исходную систему: $1 - 2 + 3 = 2$ (истина), $2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1$ (истина), $1 - 2 \cdot 2 = -3$ (истина).

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \\ z = 3 \end{cases}$

2) Решить систему методом Крамера.

Возьмем эту же систему и решим её с помощью определителей.

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1, \text{ запишем определитель системы } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \text{ (найден выше).} \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при x на столбец правых частей

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \underset{(-)}{(-1)}^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-)(0+2) = -6.$$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при y на столбец правых частей

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \underset{(+)}{(-1)}^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 3 = -12$$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при z на столбец правых частей

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (-2) \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = (-1) \underset{(-)}{(-1)}^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 3 = -18.$$

По формулам Крамера получаем решение
$$\begin{cases} x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = 1 \\ y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-12}{-6} = 2. \\ z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-18}{-6} = 3 \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \\ z = 3 \end{cases}$$

3) Решить системы методом Гаусса: а)
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Выписываем расширенную матрицу
$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{array} \right)$$
 и с помощью

элементарных преобразований приводим ее или к треугольному виду, или к виду трапеции (как получится).

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(-2) \\ (-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \begin{array}{l} : (-1) \\ : (-6) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right). \quad rA = 3, rB = 3 \Rightarrow r = 3. \end{array}$$

Так как число неизвестных $n = 3$ и равно рангу системы, система имеет единственное решение. По полученной матрице восстанавливаем систему уравнений. Идя снизу вверх, получаем это решение:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

Из последнего уравнения $z = 3$, с помощью второго находим $y = 5 - z = 5 - 3 = 2$. Подставляя в первое уравнение найденные $y = 2$ и $z = 3$, находим

$$x = 2 + y - z = 2 + 2 - 3 = 4 - 3 = 1. \quad \text{Ответ: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \\ z = 3 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(-2) \quad (-1) \\ \swarrow \quad \searrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$rA = 2$, $rB = 3$. Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли система несовместна (т. е. не имеет решения). Выпишем уравнение, соответствующее последней строке полученной матрицы: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2$, что невозможно.

Ответ: система не имеет решения.

$$в) \begin{cases} 3x - 2y + z = -1 \\ -2x + y - 2z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

Записываем расширенную матрицу:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(-2) \quad (-3) \\ \swarrow \quad \searrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) : (-1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad rA = rB = 2.$$

Отсюда следует, что система совместна.

Число неизвестных $n = 3 > r = 2$. Следовательно, система имеет бесконечное множество решений: $n - r = 3 - 2 = 1$. Отсюда система имеет одну свободную переменную, пусть это будет z , тогда x, y – базисные (базисных неизвестных столько, каков ранг системы, т. е. сколько ненулевых строк остается в последней матрице).

$$\text{Запишем систему, соответствующую полученной матрице: } \begin{cases} x - y - z = 1 \\ y + 4z = -4 \\ z = z \end{cases}$$

Следовательно, идя снизу вверх, выражаем базисные неизвестные через свободную z . Из второго уравнения выражаем $y = -4 - 4z$, из первого уравнения $x = y + z + 1 = (-4 - 4z) + z + 1 = -4 - 4z + z + 1 = -3 - 3z$.

Общее решение:
$$\begin{cases} x = -3 - 3z \\ y = -4 - 4z \\ z = z \end{cases}$$
. Из общего решения можно получить любое част-

ное решение. Пусть $z = -2$, тогда получим частное решение:

$$x = -3 - 3(-2) = -3 + 6 = 3; \quad y = -4 - 4(-2) = -4 + 8 = 4.$$

Частное решение:
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$
.

Выполним проверку общего решения. Для этого подставим найденные выражения x, y, z в уравнения исходной системы:

1) $3(-3 - 3z) - 2(-4 - 4z) + z = -1$
 $-9 - 9z + 8 + 8z + z = -1 \quad -1 = -1$ (истина)

2) $-2(-3 - 3z) + (-4 - 4z) - 2z = 2$
 $6 + 6z - 4 - 4z - 2z = 2 \quad 2 = 2$ (истина)

3) $(-3 - 3z) - (-4 - 4z) - z = 1$
 $-3 - 3z + 4 + 4z - z = 1 \quad 1 = 1$ (истина)

Ответ:
$$\begin{cases} x = -3 - 3z \\ y = -4 - 4z \\ z = z \end{cases}$$
.

Контрольная работа № 3 “ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ”

ЗАДАНИЕ 1. Построить графики функций путем сдвигов и деформаций:

1. $y = \frac{1}{x+2} - 3.$	2. $y = (x-1)^3 + 7.$	3. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - 1.$
4. $y = 3(1/2)^x.$	5. $y = 8 \cdot 2^x - 2.$	6. $y = \lg(x+2) - (1/2).$
7. $y = \log_3(x-2) + 1.$	8. $y = \lg(-x) - 2.$	9. $y = -2 \cos 2x.$
10. $y = 2 \operatorname{arctg} 2x.$	11. $y = -\arcsin x + (\pi/3).$	12. $y = \sin(x-3) + 1.$
13. $y = \operatorname{tg}(x-1) + 1.$	14. $y = \frac{1}{x-1} + 2.$	15. $y = (x+1)^3 - 3.$

16. $y = 2^{x-3} + 1.$	17. $y = \frac{2}{x-3} + 1.$	18. $y = (x+2)^2 - 4.$
19. $y = \sqrt[3]{(x+4)^2} + 1.$	20. $y = 2 \cdot (1/4)^x.$	21. $y = 2 \cdot 3^x + 1.$
22. $y = \log_2(x-1) - 3.$	23. $y = \ln(3x+1) - 1.$	24. $y = -3 \cdot \sin 3x.$
25. $y = -3 \cdot \operatorname{arctg}(x/2).$	26. $y = 2 \cdot \arcsin x - (\pi/4).$	27. $y = \sin(x+4) - 1.$
28. $y = \operatorname{tg}(x+2) - 1.$	29. $y = \frac{1}{x+4} - 4.$	30. $y = 3^{x+1} - 1.$

ЗАДАНИЕ 2. Построить графики функций, заданных несколькими аналитическими выражениями:

1. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{при } x \leq \pi, \\ 0, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$	2. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x > 2, \\ 1, & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ -x^2 + 2, & \text{при } x < 1. \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } -\pi \leq x \leq 0, \\ 2, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 1/x, & \text{если } 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$	4. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ e^x, & \text{если } 1 \leq x \leq 2, \\ e, & \text{если } x > 2. \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{если } x \leq 0, \\ 0, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ x-2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$	6. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 1, \\ \frac{2}{x-1}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{если } x < 0, \\ x+1, & \text{если } 0 \leq x < 4, \\ 3+\sqrt{x}, & \text{если } x > 4. \end{cases}$	8. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{если } x \leq 1, \\ 2x, & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ x+2, & \text{если } x > 3. \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ x+1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$	10. $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } -3 \leq x \leq 1, \\ 2x, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 4-x, & \text{если } 2 < x \leq 3. \end{cases}$
11. $f(x) = \begin{cases} -x/3, & \text{если } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 < x \leq \pi/2, \\ x - \pi/2, & \text{если } x > \pi/2. \end{cases}$	12. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{если } x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & \text{если } 0 < x < \pi/4, \\ 1, & \text{если } x \geq \pi/4. \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ \cos x, & \text{если } 0 < x \leq \pi/2, \\ x - \pi/2, & \text{если } x > \pi/2. \end{cases}$	14. $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & \text{если } x < -1, \\ 1/x, & \text{если } x \geq -1. \end{cases}$
15. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \leq 0, \\ x, & \text{если } 0 < x < 2, \\ 2x - 2, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$	16. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \leq 0, \\ 2x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$
17. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{при } x \leq \pi, \\ 0, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$	18. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x > 3, \\ 2, & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ x^2 + 1, & \text{при } x < 1. \end{cases}$
19. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1/x^2, & \text{при } 1 < x \leq 4. \end{cases}$	20. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -1, \\ e^x, & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ e, & \text{при } x > 1. \end{cases}$
21. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x}, & \text{при } x \leq 0, \\ 0, & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ x - 3, & \text{при } x > 3. \end{cases}$	22. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{x+2}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$
23. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{при } x < 0, \\ x, & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ x^2, & \text{при } x > 1. \end{cases}$	24. $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{при } x \leq 0, \\ \cos x, & \text{при } 0 < x < \pi, \\ 1, & \text{при } x \geq \pi. \end{cases}$
25. $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{при } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{при } 0 < x \leq \pi/2, \\ -1, & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$	26. $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{при } x \leq 0, \\ \operatorname{ctg} x, & \text{при } 0 < x < \pi/2, \\ 1 - x, & \text{при } x \geq \pi/2. \end{cases}$
27. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{x-1}, & \text{при } x < 0 \end{cases}$	28. $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{при } x \leq 0, \\ x - 1, & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$
29. $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & \text{при } x \leq 0, \\ 0, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ x, & \text{при } x > 1. \end{cases}$	30. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{при } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{при } 0 < x \leq \pi, \\ 2, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 3. Построить графики функций, заданных параметрически:

1. $\begin{cases} x = t \\ y = a^3 / (t^2 + a^2) \end{cases}$	2. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
3. $\begin{cases} x = 2a \cos^2 t \\ y = a \sin 2t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$	4. $\begin{cases} x = a \sin 2t \\ y = 2a \sin^2 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$
5. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = 4 - t^2 \end{cases}$	6. $\begin{cases} x = t^6 / 6 \\ y = 2 - t^4 / 4 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = 2\sin^3 t \\ y = 3\cos^2 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$	8. $\begin{cases} x = t^2 - 2t + 1 \\ y = t - 1 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$	10. $\begin{cases} x = 3 - t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t^2 + 4t + 5 \end{cases}$	12. $\begin{cases} x = 1 + \sin^2 t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$
13. $\begin{cases} x = 2 - 4\sin^2 t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$	14. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t - 1 \end{cases}$
15. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = 2 + t^2 \end{cases}$	16. $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t_3 \end{cases}$
17. $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t \end{cases}$	18. $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t \end{cases}$
19. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = \cos t \end{cases}, \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$	20. $\begin{cases} x = t^2 - 4t + 4 \\ y = t + 2 \end{cases}$
21. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t-1} \\ y = t \end{cases}$	22. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = t \end{cases}$
23. $\begin{cases} x = 1 + \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$	24. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1} \\ y = t^2 \end{cases}$
25. $\begin{cases} x = 3t - t^2 \\ y = 2t \end{cases}$	26. $\begin{cases} x = t^2 + 4t + 4 \\ y = t - 1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 1 - 3\cos^2 t \\ y = \cos t \end{cases}$	28. $\begin{cases} x = 5\sin^2 t \\ y = 3\cos^2 t \end{cases}$
29. $\begin{cases} x = t^2 - 6t + 9 \\ y = t + 2 \end{cases}$	30. $\begin{cases} x = t^2 - 2t - 1 \\ y = t - 3 \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 4. Построить графики функций в полярных координатах:

1. $\rho = \frac{1}{2 + \cos \varphi}$	2. $\rho = a \cos 3\varphi$	3. $\rho = \frac{3}{2 + \sin \varphi}$
4. $\rho = a(1 - \cos \varphi)$	5. $\rho = a(1 + \sin \varphi)$	6. $\rho = a(1 - \sin \varphi)$
7. $\rho = a\varphi$	8. $\rho = -\varphi/\pi$	9. $\rho = a/\varphi$
10. $\rho = -\varphi/\pi$	11. $\rho = 1 + \cos 2\varphi$	12. $\rho = 2\sin^2 2\varphi$
13. $\rho = 3\cos^2 2\varphi$	14. $\rho = \sin \varphi + \cos \varphi$	15. $\rho = a \sin 3\varphi$
16. $\rho = \sin 2\varphi$	17. $\rho = 4 \cos 3\varphi$	18. $\rho = \cos 2\varphi$
19. $\rho = 4 \sin 3\varphi$	20. $\rho = 2 \cos \varphi$	21. $\rho = -2\varphi/\pi$
22. $\rho = \sin 3\varphi$	23. $\rho = 3\varphi/\pi$	24. $\rho = 6 \sin 3\varphi$
25. $\rho = (1/2) + \sin \varphi$	26. $\rho = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4)$	27. $\rho = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi$
28. $\rho = \sin 6\varphi$	29. $\rho = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi$	30. $\rho = 4 \cos 4\varphi$

Образец выполнения контрольной работы № 3

“ ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ”

1) Построить график функции путем сдвигов и деформаций
 $y = \log_2(1 - x) - 2$

1. Строим график функции $y = \log_2 x$ (рис. 1)

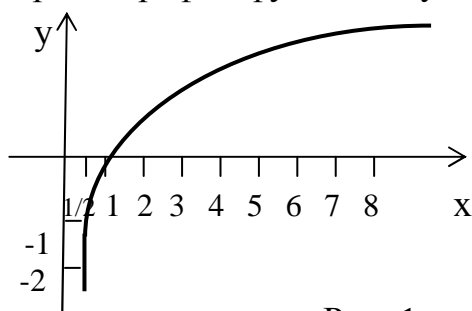


Рис. 1

x	y = log ₂ x
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

2. Симметрично отображаем этот график относительно оси ОУ и получаем график функции $y = \log_2(-x)$ (на рис. 2 – сплошная линия).

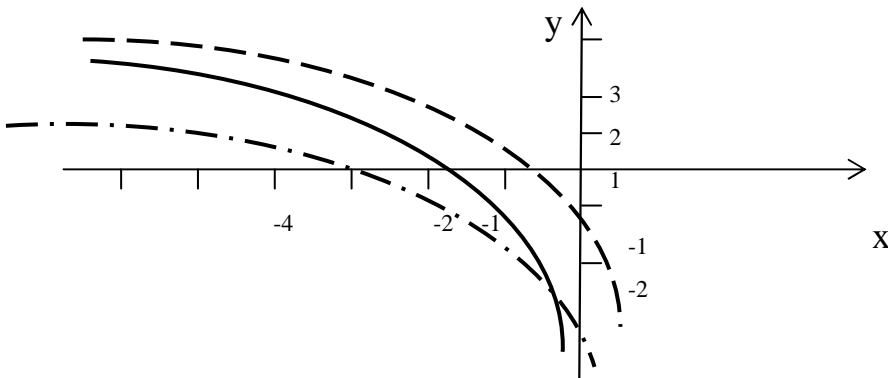


Рис. 2

3. Сдвигаем этот график на одну единицу вправо и получаем график функции $y = \log_2(1-x)$ (рис. 2, пунктирная линия).

4. Сдвигаем этот график на две единицы вниз и получаем график функции $y = \log_2(1-x) - 2$ (рис. 2, штрих-пунктирная линия), что и будет графиком данной функции.

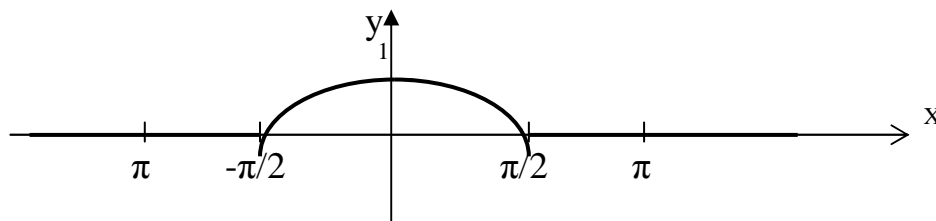
2) Построить график функции, заданной несколькими аналитическими выражениями:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{при } |x| \leq \pi/2, \\ 0, & \text{при } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Запишем данную функцию по интервалам возрастания аргумента x :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -\pi/2, \\ \cos x, & \text{при } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ 0, & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Графиком $f(x)$ при $x \in (-\infty, -\pi/2)$ будет часть оси ОХ, при $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ часть косинусоиды, затем при $x \in (\pi/2, \infty)$ снова часть оси ОХ

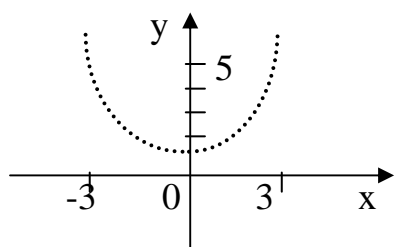


3) Построить график функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 - 2t + 2 \end{cases}$.

График функции, который надо построить, проходит через точки с координатами $(x(t), y(t))$. Чтобы найти координаты этих точек $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, составим таблицу связи аргумента t и координат точек (x, y) в зависимости от t .

t	-2	-1	0	1	2	3	4	$(x = t - 1)$ $y = t^2 - 2t + 2$
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	
y	10	5	2	1	2	5	10	

Для построения графика берем две последние строки таблицы и отмечаем на координатной плоскости точки $(-3, 10)$, $(-2, 5)$, $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 5)$, $(3, 10)$, координаты которых находятся в столбцах.

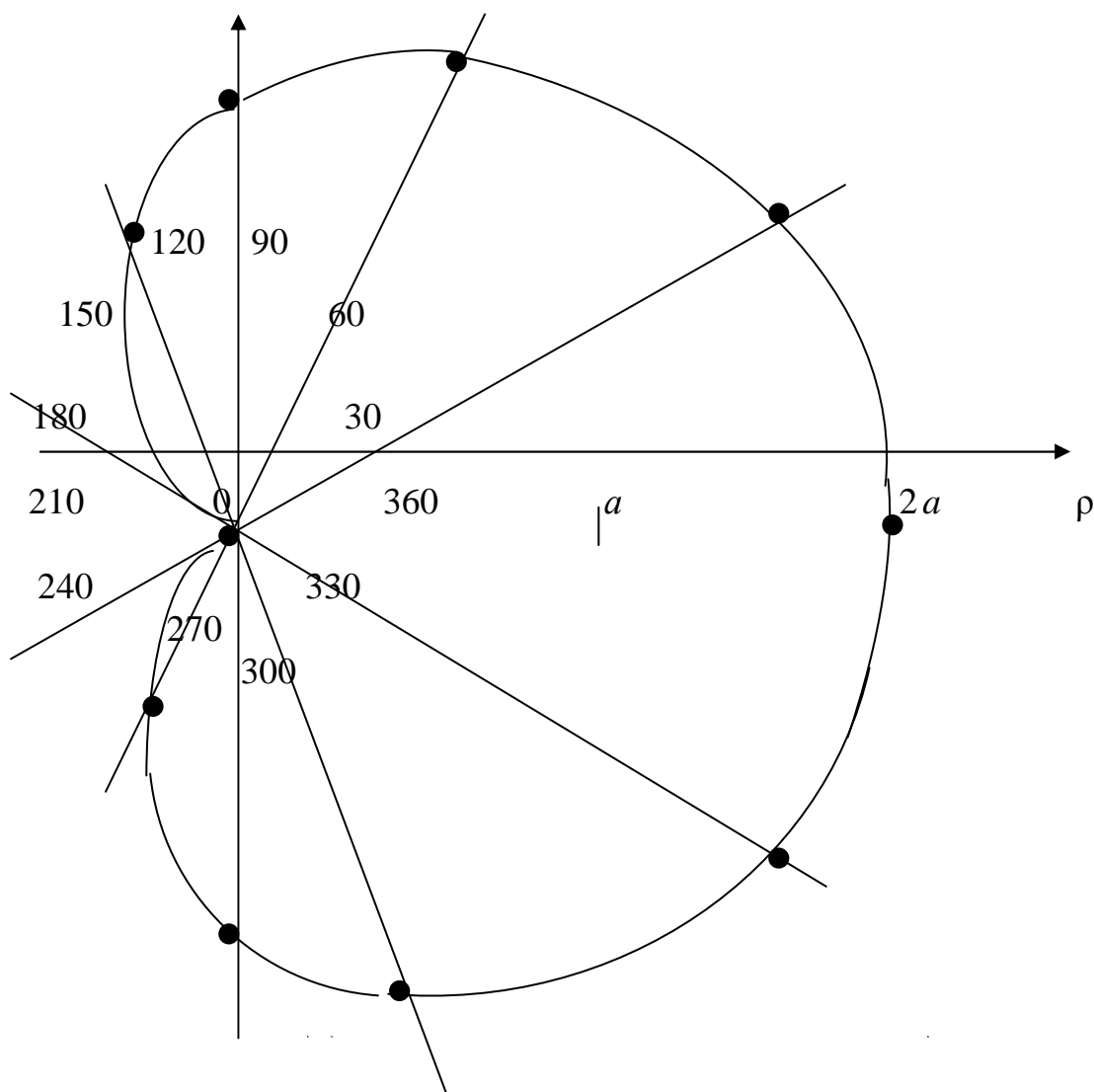


Затем соединяем полученные точки кривой (в данном случае получилась парабола вида $y = x^2$, центр которой смещен по оси OY на единицу вверх, т. е. уравнение имеет вид $y = x^2 + 1$).

4) Построить график функции, заданной в полярной системе координат: $\rho = a(1 + \cos \varphi)$. Здесь a выступает в роли масштаба. На полярной оси откладываем вместо единиц a , $2a$, $3a$ и т. д. Заносим в таблицу значения ρ , вычисленные для углов $\varphi \in [0, 360^\circ]$ (удобнее ρ/a).

φ°	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\frac{\rho}{a}$	2	1,9	1,5	1	0,5	0,1	0	0,1	0,5	1	1,5	1,9	2

На полярной оси откладываем ρ и проводим окружность этого радиуса. Проводим луч под углом φ и находим точку пересечения этой окружности и этого луча. Сначала строим точку $(\rho, \varphi) = (2a, 0)$ так: на оси Op откладываем отрезок длиной $2a$, это и будет искомая точка. Затем строим точку $(\rho, \varphi) = (1,9a; 30^\circ)$ так: на оси Op откладываем отрезок длиной $1,9a$, проводим окружность этого радиуса, строим луч под углом 30° и находим точку их пересечения, это и будет искомая точка и т. д.



**Контрольная работа № 4
“ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ”**

ЗАДАНИЕ 1. Вычислить пределы функций:

- | | | |
|--|---|--|
| 1.) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x + 5};$ | 2.) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x - 1}}{x^2 - 2x - 1};$ | 3.) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 1}{x - 3};$ |
| 4.) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 - x - 2}{(x - 2)^2};$ | 5.) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 + 4x + 1};$ | 6.) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{3x^2 + x - 1};$ |
| 7.) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 2x - 5};$ | 8.) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x);$ | 9.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^2 + x^3};$ |
| 10.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6x + 1} - 1}{3x};$ | 11.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{4(1 - \cos x)^2};$ | 12.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x};$ |

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 2x}$;

14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$;

15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x-5} \right)^{\frac{2x+3}{5}}$;

16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{x+4}$.

2.

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 5}{2x + 1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2x+1}$;

3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x}{x+1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 5x - 21}{2x^2 - 3x - 9}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}$;

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{7x^2 + 3}$;

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x - 1}{3x^3 + 2x}$;

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + 1} - x^2)$;

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$;

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$;

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 15x}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\arcsin 2x}$;

14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{2x}$;

15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{\frac{x+1}{3}}$;

16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$.

3.

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 1}{x + 3}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 1}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x}{x - 3}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{2x^2 - 7x - 15}$;

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x - 2}{2x^2 + x - 5}$;

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{2x^2 + x}$;

8) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3 + 8} \right)$;

9) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{5x} - x}{x - 5}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$;

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$;

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 7x}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{3x}$;

14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{10}{x} \right)^x$;

15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+3} \right)^{x^2}$;

16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+2} \right)^x$;

4.

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 2x + 1}{2x + 3};$	2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 + 2x + 2};$	3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x + 3}{(x - 3)^2};$
4) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8};$	5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6};$	6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 3x + 1}{4x^3 + x};$
7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x + 1}{2x^2 + 1};$	8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1};$	9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}};$
10) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} \right);$	11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{tg} x};$	12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x};$
13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{2x};$	14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x;$	15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1 + x} \right)^{x+4};$
16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2} \right)^{2x-1}.$		

5.

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x + 5}{2x^2 + x + 1};$	2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^2}{5x + 2};$	3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x + 1}{x - 3};$
4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{2x^2 + 3x - 2};$	5) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{3 + 2x - x^2};$	6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + x + 1}{x^3 + 2};$
7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{3x^3 + x + 1};$	8) $\lim_{x \rightarrow -2-0} \left(\frac{1}{x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right);$	9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x};$
10) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3};$	11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{x^2};$	12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x};$
13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{3x};$	14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x;$	15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 5}{x + 2} \right)^{2x+1};$
16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 5} \right)^{x+1}.$		

6.

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x}{2x + 3};$	2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 + x + 1};$	3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x + 3}{x - 3};$
4) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x - 3}{4x^2 - 1};$	5) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{5x^2 + 9x - 44}{2x^2 + 5x - 12};$	6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x + 1}{3x^2 + 5};$
7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 7}{x^3 + 2x + 3};$	8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right);$	9) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49};$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{5x}; \quad 14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-2}{2x+3} \right)^x; \quad 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x;$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}.$$

7.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + x - 3}{2x^2 + 4}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2 + 2x + 2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{(x-3)^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x + 1}{2x^2 + 5};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 1}{x^2 + 5x + 6}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right); \quad 9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{\sqrt{x} - \sqrt{2}};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{18 + x^2} - 3\sqrt{2x + 9}}{x + 3}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}; \quad 14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x} \right)^x; \quad 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x;$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x+3} \right)^x.$$

8.

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x + 7}{2x^2 - 5x + 6}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 + 7x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x + 1}{(x-3)^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x-4}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 1}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 7}{2x^2 + x + 1};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{x^2 + x + 1}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2 - 9} \right); \quad 9) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x-1}}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x + 5} - x \right); \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{5x};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^x;$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^x;$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+4} \right)^{x^2}.$$

9. 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 6x + 4};$

2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 7x + 6};$

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x + 1}{x - 3};$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3};$

5) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 6}{x^3 + 8};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 + 5x + 7};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 7x + 1}{3x^2 + 5x};$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1};$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2};$

10) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5};$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x \operatorname{tg} 2x};$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{5}}{x};$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x};$

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x;$

15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^x;$

16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x.$

10. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 8}{2x - 1};$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{3x^2 + 5x + 8};$

3) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 5};$

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 8};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + x + 4}{x^2 + x + 7};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{7x^3 + 8x + 1};$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right);$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7x+1} - 1}{5x};$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2};$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2};$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} 3x};$

14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x;$

15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1};$

16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}.$

11. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 - x - 4}{2x - 3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 + 3x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x}{x - 3}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 7x + 6}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{4x^2 - 5x - 6}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 3x + 4}{4x^3 + x}$;

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5x + 1}{x^2 - 7x}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3}$; 9) $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{8}{16-x^2} \right)$;

10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{x^3}$; 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{3x}$; 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2} \right)^{2x}$; 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^x$;

16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$.

12. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 7x + 4}{x^2 + 3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x+3}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5x + 4}{x - 3}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$; 5) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + x - 12}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 7}{4x^2 + x}$;

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + x + 3}{2x^2 + 5}$; 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$; 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$;

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$; 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{4}}{x^3}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x}$; 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x+4}$; 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^x$;

16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+1} \right)^{x+1}$.

13. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x + 5}{x + 7}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2 + x + 5}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x}{x - 3}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + 2x^2 - x}{5x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 7x + 4}{x^2 + x + 1}$;

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 8x + 4}{2x^2 + 3}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - 1}{x^3}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{2x}$;

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{4(1-\cos x)^2}$;

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-\cos x) \operatorname{ctg} x$;

14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$;

15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^x$;

16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x+1}$.

14. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+5x+7}{2x+1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+x+5}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2+7x}{(x-3)^2}$;

4) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-64}{x^2-7x+12}$;

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}$;

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+x+5}{6x^2+7x}$;

8) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{6}{9-x^2}\right)$;

9) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$;

10) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$;

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x}$;

12) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 3x$;

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos \frac{x}{2}}$;

14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+1}$;

15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$;

16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

15. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2+x+7}{x+1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x+3}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x+7}{(x-3)^3}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16-x^2}{x^3-64}$;

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-4x^2+8}{-5x^3+2x^2+x}$;

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+7x-1}{3x^2-5x+6}$;

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}\right)$;

9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$;

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x$;

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$;

14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$;

15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+2}\right)^x$;

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}.$$

16. 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{2x^3 + x^2 + 3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 19x + 6}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 4}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$; 5) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^3 + 2x + 12}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 4}{5x^3 + x}$;

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 5}{7x^3 + 2x + 1}$; 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+3} - x \right)$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+1} - 1}{3x}$;

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 13x}$; 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{1 - \cos 5x}$; 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$; 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$;

16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}.$

17. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 + 12x - 5}{x + 2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x^2 - 2x + 2}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 5x + 6}{x - 3}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 4x - 5}$; 5) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 2x + 1}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 + 7x - 4}{7x^3 + 8x^2 - 1}$;

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{10x^3 - 3x^2 + 5}$; 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$; 9) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x+11}}{x + 2}$;

10) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{x + 4}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{\sin^2 4x}$; 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{\operatorname{arctg} 3x}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x}$; 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-7} \right)^{x+1}$; 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+3}{3x-1} \right)^{x-3}$;

16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+1}.$

18. 1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 21x - 8}{3x + 4}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)^2}{x^2 - x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 3x - 14}{x^2 + 4x - 12}$;

5) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{3x^2 - 2x - 5}$;

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 3x + 5}{7x^2 - 5x}$;

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 3x - 1}{8x^2 + 5x + 1}$;

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{7x^3 + x^2} - 7x^{3/2})$;

9) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1-x} - 2}{4 - \sqrt{7-3x}}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x+5} - 3}$;

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 2x}$;

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x \sin 2x}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin 2x}$;

14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^x$;

15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 3} \right)^{-x}$;

16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{2x^2 + 1} \right)^{x^2}$.

19.

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 8x + 3}{2x - 1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow -9} \frac{x+9}{x^2 + 5x + 4}$;

3) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 5}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 + 6x - 7}$;

5) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{4x^2 + x - 14}$;

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^2 + 15x + 2}{13x^2 + 14x + 1}$;

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 2x - 2}{5x^2 + 3x - 1}$;

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 - 3} - x^2)$;

9) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{9+x} - 2}{x + 5}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+9} - 3}$;

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{\cos 2x - \cos x}$;

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{arctg} 6x}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin 3x}$;

14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x+1} \right)^x$;

15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x^2}$;

16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$.

20.

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 9x - 5}{x^2 + x + 1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 6x}{x^2 + 6x + 10}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 4x - 7}{x - 1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{6x^2 + x - 7}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 8x - 21}{2x^2 + x - 21}$;

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x + 4}{2x^2 + 3x - 5}$;

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - x + 7}{2x^3 - 6x^2 + 1}$;

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^8 + 7} - x^4)$;

9) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{4 - \sqrt{x+12}}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x-2}$;

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos 3x}$;

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{3x^2}$;

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 8x}; \quad 14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^x; \quad 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 - 1} \right)^{x/2}.$$

21.

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 7x + 4}{2x^2 + 3}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 + 9x + 11}{(x+2)^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 5}{4x^2 + x - 3}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{-4x^2 + 3x - 12};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 8x - 11}{7x^2 - 9x}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 1} - x \right); \quad 9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5 - \sqrt{x^2 + 9}}{x - 4};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{\sqrt{x+9} - 4}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 8x}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 6x}{1 - \cos 3x};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\arcsin x}; \quad 14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 5x} \right)^x; \quad 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x - 7}{6x + 4} \right)^{3x+1};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x^2 + 2} \right)^{x+1}.$$

22.

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 8x - 5}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - 2x}{x^2 + 4x + 3}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{3x^2 + 5}{x^2 - 100};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 9x + 4}{x^2 - 16}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 14}{x^2 - 5x + 6}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x - 2}{6x^2 - 2x + 1};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 2}{-8x^3 + 4x + 1}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 + 3x} - x^2 \right); \quad 9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x^2 - 4};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{2x+1} - 3}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\cos 3x - \cos x}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 7x}{1 - \cos^2 2x};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x/2)}{x \sin x}; \quad 14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^{2x+3}; \quad 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+5} \right)^{x+4};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x}{2x^2 + 8x} \right)^{2x}.$$

23.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x + 1}{3x + 4}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2x^2 - 5x + 2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 2}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 7x - 4}{x^2 - 3x - 4}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + 5x + 7}{8x^2 + 4}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 + 3x^2 - 7}{3x^2 - 3x + 7}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1 - 4x} - 3}{x + 2}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x + 2} - \sqrt{5x - 1}}{x - 1}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 6x}$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 7x}{7x^2}$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 5x}{3x^2 + 7x} \right)^{x+1}$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 10}{x + 1} \right)^{3x+1}$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 4x}{3x^2 + 2x} \right)^x$.

24.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x + 5}{4x^2 + 4x + 1}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x + 4)^2}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{3x^2 - x - 4}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 - 3x - 9}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + 2x + 5}{3x^2 + x - 1}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 3x - 1}{9x^3 - 2}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 5x} - 2x)$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 - 8x} - \sqrt{3 - 6x}}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x + 12} - 4}{x - 4}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\sin^2 2x}$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 7x}{\sin 9x}$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} 2x}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{7x + 1} \right)^{x+2}$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x - 3}{6x - 1} \right)^{3x}$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x + 1} \right)^{-x^2}$.

25.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5x + 4}{2x^2 - x - 2}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{x^2 - 3x + 2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{5x^2 - 2x - 3}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 3x - 10}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9x^2 + 6x + 1}{-7x^2 + 2x + 1}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6}{-7x^2 + 2x + 1}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 3x} - x^2)$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{1 + 2x}}{2 - \sqrt{x}}$;

$$10) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{x^2 - 4};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x^3}{7x^3};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 6x}{x^2 - 5x} \right)^{3x+2};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^{-x};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x-5}{8x+5} \right)^{3x}.$$

26.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 7x + 4}{2x^2 + 2x + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 11} \frac{(x-11)^2}{x^2 - x - 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 6x + 9}{(x-5)^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 3x - 4};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 5x - 1}{2x^2 + 3x - 5};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 11x - 3}{9x^2 + 9x - 1};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 7}{9x^2 + 2x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{3}{x^2-9} \right);$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{8-x}{\sqrt{9+2x}-5};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{27+x} - \sqrt{27-x}}{27x - x^2};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{1 - \cos^2 x};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\arcsin 6x};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{x^2 \operatorname{tg} 4x};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 2} \right)^{-2x};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 2}{2x^2 + 1} \right)^{2x^2};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + 1}{x^3 - 1} \right)^{-x^3}.$$

27.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 1}{6x - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 8x}{x^2 - 2x + 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^2 - 7x - 4}{x - 4};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5x - 24}{2x^2 - x - 15};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 8};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 6x - 4}{x^2 + 9x - 5};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x - 6}{-10x^3 + 9x^2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{2}{5-x} - \frac{1}{x^2-25} \right);$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x-4} - 2}{\sqrt{2+x} - 2};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{2}}{x^2 - 1};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{arctg} 9x};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x}{\operatorname{tg}^2 4x};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos^2 49x}{7x^2};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x-5} \right)^{5x+1};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 - 2}{4x^2 + 1} \right)^{x^2};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^3 + 4} \right)^{5x^3}.$$

28.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 2x + 1}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 10}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2 + 9x + 5}{2x - 1}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 - 3x - 8}{3x^2 + 4x + 1}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 2x - 16}{7x^2 - x - 26}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2 + 4x + 11}{8x^2 + 5x - 15}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 3x^2 + 8}{7x^2 + 8}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4}{x^2 - 1} - x^2 \right)$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 13} - 4}{x^2 - 9}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{x^2 - 4}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\sin 9x}$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x^2}{x \arcsin x}$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 5}{3x - 1} \right)^{2-x}$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - 5x}{7 - 5x} \right)^{2x+1}$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 6}{x + 7} \right)^{3x+1}$.

29.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x + 4}{2x - 1}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{x^2 - 3x - 2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2x^2 + x + 1}{3x + 1}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 3x - 3}{3x^2 + 2x - 5}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 + 2x - 24}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 5}{-2x^2 + 8x - 1}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 2}{-3x^3 + 7x}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^5}{x^2 + 2x - 1} - 3x^3 \right)$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x + 1}}{x}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{4 + 5x}}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 4x}{\cos x - \cos 3x}$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \operatorname{tg} 2x}$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin^2 5x}{1 - \cos 6x}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 1}{5x - 7} \right)^{1-x}$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x - 1} \right)^{7x}$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 6}{x^3 - 2} \right)^{x^2+1}$.

30.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 9x + 5}{2x + 1}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 9}{x^2 - 2x + 2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 + 6x + 1}{x - 10}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 3x + 2}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 3x - 7}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 7x + 2}{3x^2 + 5x + 1}$;

$$\begin{array}{lll}
7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^3 + 2x + 6}{-3x^2 + 2x + 4}; & 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{x+1} - 2x^2 \right); & 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x} - 2}; \\
10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{10-3x} - 2}; & 11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x^2}{x^2 \arctg^2 5x}; & 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{\sin 2x^3}; \\
13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2 4x}; & 14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x+1} \right)^{2x-1}; & 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+7}{2x-1} \right)^{3x}; \\
16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+3} \right)^{6x-1}. & &
\end{array}$$

ЗАДАНИЕ 2. Исследовать на непрерывность и построить графики функций:

<p>1. 1) $f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & x \leq -1 \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0; \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$</p> <p>3) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2};$</p>	<p>2) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2; \\ x-3, & x \geq 2 \end{cases}$</p> <p>4) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}.$</p>
<p>2. 1) $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 0 \\ x^2+1, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$</p> <p>3) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2};$</p>	<p>2) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq x \leq \pi; \\ \pi/2, & x > \pi \end{cases}$</p> <p>4) $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}.$</p>
<p>3. 1) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 2 \end{cases}$</p> <p>3) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4};$</p>	<p>2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq 2; \\ x-2, & x > 2 \end{cases}$</p> <p>4) $f(x) = \arctg \frac{1}{x-4}.$</p>
<p>4. 1) $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4-2x, & 1 < x < 2,5 \\ 2x-7, & 2,5 \leq x < +\infty \end{cases};$</p> <p>3) $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x};$</p>	<p>2) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0; \\ 1, & x > 0 \end{cases};$</p> <p>4) $f(x) = 1 - 2^{\frac{1}{x}}.$</p>

5. 1) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & 1 < x \leq 3; \\ x + 2, & x > 3 \end{cases}$	2) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0; \\ x, & x > 0 \end{cases};$ 4) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}.$
6. 1) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ (x + 1)^2, & 0 < x \leq 2; \\ -x + 4, & x > 2 \end{cases}$	2) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x < \pi/2; \\ x, & x \geq \pi/2 \end{cases}$ 4) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$
7. 1) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1 \\ x^2 + 1, & -1 < x \leq 1; \\ -x + 3, & x > 1 \end{cases}$	2) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & -\pi/2 < x \leq 0; \\ 1, & x > 0 \end{cases};$ 4) $f(x) = 9^{\frac{1}{x+3}}.$
8. 1) $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2; \\ 3, & x > 2 \end{cases}$	2) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq \pi/2; \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases};$ 4) $f(x) = 5^{\frac{2}{x+5}}.$
9. 1) $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1 \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1; \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$	2) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < \pi/2; \\ 1, & x \geq \pi/2 \end{cases};$ 4) $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}.$
10. 1) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x < 2; \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$	2) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2; \\ \pi/2, & x > \pi/2 \end{cases};$ 4) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-2}}.$

11. 1) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -1 \\ \frac{2}{x-1}, & x > -1 \end{cases};$ 3) $f(x) = \frac{6}{(x-3)^2};$	2) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases};$ 4) $f(x) = 4^{\frac{1}{x-3}}.$
12. 1) $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1; \\ 2, & x > 1 \end{cases};$ 3) $f(x) = \frac{8}{x+4};$	2) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 2 \end{cases};$ 4) $f(x) = 5^{\frac{1}{1-x}}.$
13. 1) $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & x < -1; \\ 1/x, & x \geq -1 \end{cases};$ 3) $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2};$	2) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases};$ 4) $f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}.$
14. 1) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x \leq 3; \\ x+2, & x > 3 \end{cases};$ 3) $f(x) = \frac{x^2-25}{x-5};$	2) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases};$ 4) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}}.$
15. 1) $f(x) = \begin{cases} -(1/2)x^2, & x \leq 2; \\ x, & x > 2 \end{cases};$ 3) $f(x) = \frac{4}{4-x^2};$	2) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases};$ 4) $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}.$
16. 1) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -1 \\ \frac{2}{x-1}, & x > -1 \end{cases};$ 3) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2};$	2) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases};$ 4) $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}.$
17. 1) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & x > 1 \end{cases};$	2) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2 \end{cases};$

$$3) f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6};$$

$$4) f(x) = 6^{\frac{1}{x+2}}.$$

18.

$$1) f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2+1, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ \operatorname{tg}x, & 0 \leq x < \pi/2; \\ 0, & x \geq \pi/2 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{3}{(4-x)^2};$$

$$4) f(x) = e^{-\frac{1}{x+3}}.$$

19.

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1; \\ 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \operatorname{tg}x, & 0 \leq x < \pi/2; \\ -1, & x \geq \pi/2 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{1}{(x-8)^2};$$

$$4) f(x) = 2^{\frac{1}{x^2-1}}.$$

20.

$$1) f(x) = \begin{cases} -x-1, & x < 0 \\ x^2-1, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi; \\ 2, & x > \pi \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$$

$$4) f(x) = 3^{\frac{1}{4-x^2}}.$$

21.

$$1) f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ \operatorname{ctg}x, & 0 < x \leq \pi/2; \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{x+1}{2x^2-x-3};$$

$$4) f(x) = 4^{\frac{1}{x^2}}.$$

22.

$$1) f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2+1, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2; \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{x-3}{9-x^2};$$

$$4) f(x) = \frac{1}{1+5^{1/x}}.$$

23.

$$1) f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x-1, & 0 \leq x \leq 1; \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ \operatorname{arctg}x, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{(x+5)}{x^2 + 2x - 15};$$

$$4) f(x) = 7^{\frac{1}{4-x}}.$$

24.

$$1) f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x-1, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & 0 < x; \\ 0, & x \geq 0 \end{cases};$$

$$3) f(x) = \frac{x-2}{x-6};$$

$$4) f(x) = 7^{\frac{1}{x^2-9}}.$$

25.

$$1) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x < 0 \\ -x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & 0 < x; \\ x, & x \geq 0 \end{cases};$$

$$3) f(x) = \frac{1}{5+x};$$

$$4) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+2}.$$

26.

$$1) f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 1, & x < -\pi/4 \\ \operatorname{tg} x, & -\pi/4 \leq x < 0; \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$$

$$4) f(x) = 4^{\frac{1}{x+1}}.$$

27.

$$1) f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1; \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq 0 \\ \operatorname{ctg} x, & 0 < x \leq \pi/2; \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{x+3}{x^2 - 4x + 3};$$

$$4) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-6}.$$

28.

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x \leq 0; \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2 \\ \cos x, & -\pi/2 \leq x \leq 0; \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$4) f(x) = \frac{1}{2 + 2^{\frac{1}{x+1}}}.$$

29.

$$1) f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1; \\ -1, & x > 1 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2 \\ \operatorname{ctg} x, & -\pi/2 \leq x < 0; \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{7}{(5-x)^2};$$

$$4) f(x) = 3 - 4 \frac{1}{x+1}.$$

30.

$$1) f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ (x-1)^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2, & x > 1 \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ \operatorname{tg} x, & 0 \leq x < \pi/2; \\ 0, & x \geq \pi/2 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{x}{x+8};$$

$$4) f(x) = 8^{\frac{1}{x^2-4}}.$$

Образец выполнения контрольной работы № 4 “ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ”

Вычислить пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 + 2x + 3}. \text{ Подставляем } x = 1, \text{ получаем } \frac{1 - 5 + 1}{1 + 2 + 3} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-1/2$.

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - 1}.$$

Подставляем $x = -1$, получаем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы избавиться

от такой неопределенности, следует и в числителе, и в знаменателе выделить “ноль”, т. е. множители, которые и дают нули. В данном примере $(x+1)$ обращается в ноль при $x = -1$, его и будем выделять, чтобы потом сократить.

$$1. x^2 - 1 = (x-1)(x+1);$$

2. $x^2 - 5x - 6 = 0$ (находим корни этого уравнения):

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 6 \\ x_2 = -1 \end{matrix} \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = (x-6)(x+1);$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-6)(\cancel{x+1})}{(x-1)(\cancel{x+1})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-6}{x-1}.$$

Подставляем $x = -1$ и получаем $\frac{-1-6}{-1-1} = \frac{7}{2}$. **Ответ:** $\frac{7}{2}$.

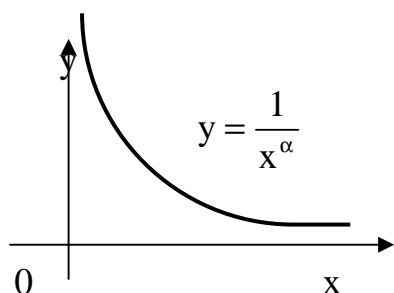
$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x - 1}{4x^3 + 2x + 5}.$$

При подстановке $x = \infty$ получаем неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы избавиться от такой неопределенности, следует и в числителе, и в знаменателе вынести за скобки наивысшую степень x .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x - 1}{4x^3 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3} \left(1 - 4 \frac{\overset{0}{\cancel{x^2}}}{x} + 3 \frac{\overset{0}{\cancel{x}}}{x^2} - \frac{\overset{0}{\cancel{1}}}{x^3} \right)}{\cancel{x^3} \left(4 + 2 \frac{\overset{0}{\cancel{1}}}{x^2} + \frac{\overset{0}{\cancel{5}}}{x^3} \right)} = \frac{1}{4}.$$

При нахождении этого предела использовано:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0 \quad \text{при } \alpha > 0.$$



Получили в ответе отношение коэффициентов при старших степенях x .

Ответ: $\frac{1}{4}$.

$$4) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2 - \sqrt{1-x}}{x+3} = \left| \frac{2 - \sqrt{1-(-3)}}{-3+3} = \frac{0}{0} \right|.$$

Для решения следует воспользоваться формулой сокращенного умножения $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Домножим числитель и знаменатель на $2 + \sqrt{1-x} \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(2 - \sqrt{1-x})(2 + \sqrt{1-x})}{(x+3)(2 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2^2 - (\sqrt{1-x})^2}{(x+3)(2 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4 - (1-x)}{(x+3)(2 + \sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\cancel{3+x}}{(x+3)(2 + \sqrt{1-x})} = \left| \frac{1}{2 + \sqrt{1-(-3)}} \right| = \frac{1}{4}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{4}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}) = |\infty - \infty|.$$

Для решения применяем тот же прием, что и выше: домножаем числитель и знаменатель на сумму этих корней, чтобы получить разность квадратов:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 1})(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 1})}{(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 1})} = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x - 3})^2 - (\sqrt{x^2 - 2x + 1})^2}{(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3 - (x^2 - 2x + 1)}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}} = 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right|. \end{aligned}$$

Как и в примере 3), вынесем за скобки x в первой степени, причем

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{x^2 \left(1 + 2\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right)} = x \sqrt{1 + 2\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}},$$

тогда

$$4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{x \cdot \left(\sqrt{1 + 2\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)} = 4 \frac{1}{1+1} = 2$$

Ответ: 2.

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 15x}{\operatorname{tg} 13x} = \left(\frac{0}{0} \right).$$

Применяем первый замечательный предел: $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1, \cos 0 = 1.$

$$\text{Получаем } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 15x}{15x} \right) \frac{15x}{13x} \left(\frac{13x}{\sin 13x} \right) \cos 13x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x}{13x} = \frac{15}{13}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-2} \right)^{2x}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{3x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(3 + \frac{4}{x}\right)}{x \left(3 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{3}{3} = 1$, имеем неопределенность $(1)^\infty$.

Применяем второй замечательный предел: $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$. Выделяем в основании степени “единицу” так: прибавляем 1 и вычитаем 1.

$$\frac{3x+4}{3x-2} + 1 - 1 = 1 + \frac{3x+4}{3x-2} - 1 = 1 + \frac{3x+4-3x+2}{3x-2} = 1 + \frac{6}{3x-2}.$$

В данном случае $u = \frac{6}{3x-2}$, т. е. $\frac{1}{u} = \frac{3x-2}{6}$,

поэтому $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{6}} = e$.

Подставляем это в пример:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-2}\right)^{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{3x-2}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{6}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{6}} \right]^{\frac{6}{3x-2} \cdot 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{6}{3x-2} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{12x}{3x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{3x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{12}{3 - \frac{2}{x}}\right)} = e^{\frac{12}{3}} = e^4. \quad \text{Ответ: } e^4. \end{aligned}$$

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{4x-3}\right)^{2x}$.

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{4x-3} = \frac{3}{4} < 1$, получаем показательную функцию с основанием меньше единицы в бесконечно большой степени, которая стремится к нулю.

Ответ: 0.

9) Исследовать на непрерывность и построить график функции:

$$1. f(x) = \begin{cases} x, & x < -1, \\ x^2 + 1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 7 - x, & x > 2. \end{cases}$$

Для исследования функции на непрерывность воспользуемся тем, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если выполняются равенства

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0). \quad (1)$$

Все элементарные функции, входящие в данную функцию, непрерывны на своих интервалах, проверять непрерывность будем в точках «склеивания».

$x = -1$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1-0 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} x = -1,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1+0 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} (x^2 + 1) = (-1)^2 + 1 = 2, \quad f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2.$$

Сравниваем эти три числа и видим, что первое равенство в (1) не выполняется. Следовательно, $x = -1$ – точка разрыва I-го рода, причем неустранимого (т. е. скачок).

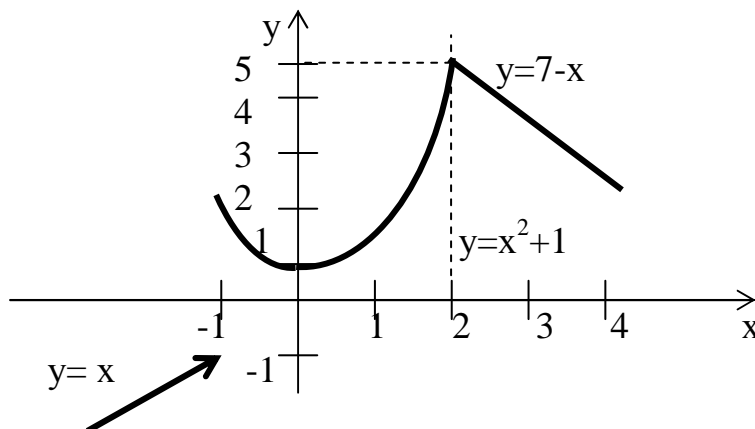
$x = 2$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2-0 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2+0 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (7 - x) = 7 - 2 = 5,$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5.$$

Сравниваем эти три числа и видим, что все равенства в (1) выполняются. Следовательно, в точке $x = 2$ данная функция непрерывна.



На графике функции на конце прямой $y = x$ в точке $(-1, -1)$ ставим стрелку, так как функция $f(x) = x$ при x , строго меньшем (-1) , а при $x = -1$ значение функции $f(x)$, вычисляется уже по другой формуле: $x^2 + 1$. Причем в точках непрерывности никаких стрелок не ставится.

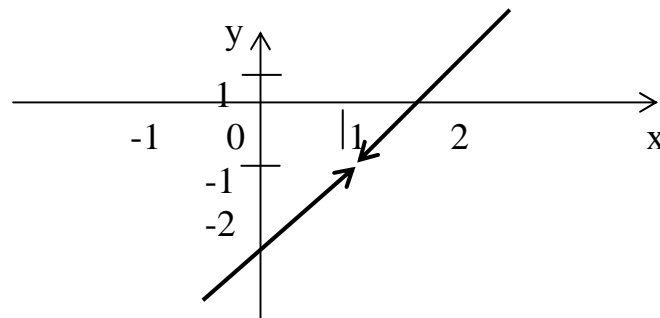
$$2. f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}. \text{ О.Д.З. } x \neq 1.$$

Так как $x = 1$ не входит в область допустимых значений (О.Д.З.) функции, то точка $x = 1$ является точкой разрыва данной функции. Выясним с помощью односторонних пределов, разрыв какого рода терпит функция в этой точке.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1-0 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1-0 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x-2) = 1-2 = -1;$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1+0 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-2) = 1-2 = -1.$$

Получили, что в (1) первое равенство выполняется, а функция $f(1)$ не существует, т.е. второе равенство не выполняется. Следовательно, $x = 1$ – точка разрыва I рода, причем устранимого. На графике выкалывается точка $(1, -1)$ стрелками, так как $x = 1$ не входит в О.Д.З.



$$3. f(x) = 1 - 2^{\frac{1}{x+3}}.$$

О.Д.З. $x \neq -3$. Значит $x = -3$ – точка разрыва.

Определяем тип разрыва функции в этой точке. Для этого опять находим левый и правый пределы при $x \rightarrow -3$.

Левый предел

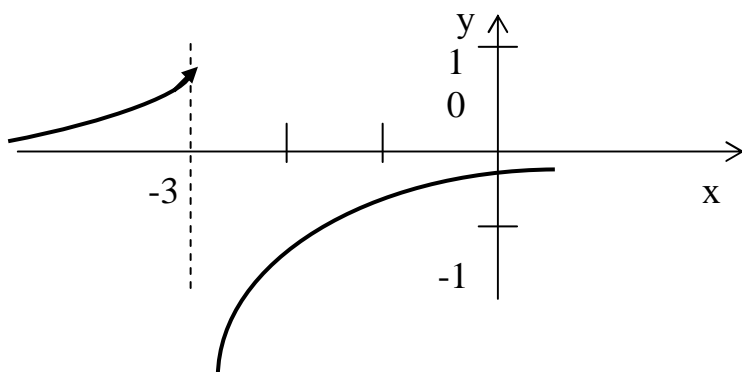
$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow -3-0 \\ x < -3}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow -3-0 \\ x < -3}} \left(1 - 2^{\frac{1}{x+3}} \right) = \left. \begin{array}{l} x+3 \rightarrow -0 \\ \text{т.к. } x < -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x+3} \rightarrow -\infty \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}} \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - 2^{\frac{1}{x+3}} \rightarrow (1-0) = 1 \end{aligned}$$

Правый предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -3+0 \\ x > -3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -3+0 \\ x > -3}} \left(1 - 2^{\frac{1}{x+3}} \right) = \left| \begin{array}{l} x+3 \rightarrow +0 \\ \text{т.к. } x > -3 \end{array} \Rightarrow \frac{1}{x+3} \rightarrow +\infty \Rightarrow \right. \\ \left. \Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}} \rightarrow \infty \Rightarrow 1 - 2^{\frac{1}{x+3}} = (1 - \infty) = -\infty \right| = -\infty.$$

Получился бесконечный предел, поэтому $x = -3$ – точка разрыва II-го рода. Исследуем поведение функции при $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - 2^{\frac{1}{x+3}} \right) = \left| \begin{array}{l} x+3 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{x+3} \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^{\frac{1}{x+3}} \rightarrow 1 \Rightarrow 1 - 2^{\frac{1}{x+3}} \rightarrow (1 - 1) = 0 \end{array} \right| = 0.$$



Контрольная работа № 5 “ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ”

Найти производные функций:

- | | | | |
|----|---|--|--|
| 1. | 1) $y = e^{\sin x} x^5 + \lg(5x+1)$; | 2) $y = 3^{\ln x} \operatorname{arccotg} 2x$; | 3) $y = \sqrt{3x^2+1} + 2^{\operatorname{tg} x}$; |
| | 4) $y = \operatorname{ctg}^2 8x - 2x^3 + 1$; | 5) $y = \operatorname{arctg}^3(\cos x)$; | 6) $y = \frac{\arccos 2x}{x} - 8\sqrt{x} + 2x$ |
| | 7) $y = \lg(\sin 2x) + \cos 3x$; | 8) $y = 3^{x^2} \sin 3x$; | 9) $y = \frac{\cos^2 3x}{2x+3} - \arcsin 2x$; |

$$10) y = \ln^2 \frac{1}{x}.$$

2. 1) $y = 5^{x^3} \cos 8x$; 2) $y = \frac{\sin^2 5x}{x+3} - \arccos 8x$; 3) $y = \sqrt{7x^2 + 5} + 3^{\operatorname{ctg} x}$;
 4) $y = \operatorname{tg}^2 7x + 3x^2 + 8$; 5) $y = \operatorname{arctg}^2(\sin x)$; 6) $y = e^{\cos x} x^3 + \lg(2x^2 + 3x)$;
 7) $y = 2^{\ln x} \operatorname{arctg} 3x$; 8) $y = \ln \cos 3x - \sin 2x$; 9) $y = \frac{\arcsin 3x}{x^2} + \sqrt[3]{x} - 1$;
 10) $y = \ln^3 \frac{1}{x}$.

3. 1) $y = 4^{x^5} \cos 2x$; 2) $y = \frac{\sin^3 3x}{2x+5} - \arcsin(3x+1)$; 3) $y = \sqrt{2x+3} - 4^{\operatorname{tg} x}$;
 4) $y = 2^{\lg x} \arccos 3x$; 5) $y = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} - \sqrt{x} + 2$; 6) $y = \ln \sin 3x + \operatorname{tg} 8x$;
 7) $y = \operatorname{arctg}^2(\sin x)$; 8) $y = e^{\operatorname{tg} x} \cdot x^4 - \lg(3x^3 + 5)$; 9) $y = \operatorname{ctg}^3 2x + 4x^2 + 5$;
 10) $y = \ln^5 \frac{1}{x}$.

4. 1) $y = 2^{x^2} \sin 3x$; 2) $y = 4^{\ln x} \arcsin 2x$; 3) $y = \sqrt{2x^2 + 1} + 2^{\operatorname{ctg} x}$;
 4) $y = \operatorname{tg}^2 3x - 3x - 4$; 5) $y = \frac{\arcsin 2x}{x} - \sqrt{x} + 5$; 6) $y = e^{\operatorname{ctg} x} x^7 - \lg(2x^2 + 8x)$;
 7) $y = \operatorname{arctg}^2(\cos x)$; 8) $y = \lg \cos 2x - \operatorname{ctg} 3x$; 9) $y = \frac{\cos^3 2x}{5x+1} + \arcsin(2x+5)$;
 10) $y = \ln^4 \frac{1}{x}$.

5. 1) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\cos 2x} + 2^x$; 2) $y = \arcsin^2(e^x) + x^3$; 3) $y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{1}{x}$;
 4) $y = \operatorname{arctg}^2 3x + 2x^4 + 1$; 5) $y = \ln^2 \frac{\sin 3x}{x}$; 6) $y = \operatorname{ctg} 3x \cdot \ln x$;
 7) $y = \sqrt[3]{3x^5 + 7} + \arccos 2x$; 8) $y = \frac{\sin e^x}{x^2} + 2x^2 + 5x$; 9) $y = \arcsin(5x+3) \cdot e^{2x}$;
 10) $y = \sin(\ln x)$.

6. 1) $y = \arccos^2 5x + e^{x^2}$; 2) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{\sin 3x} + 3^x$; 3) $y = \operatorname{ctg}^3 x \cdot \frac{2}{x}$;
 4) $y = \operatorname{arctg}^2 5x + 3x^3 + 8x$; 5) $y = \ln^2 \frac{\cos 2x}{x}$; 6) $y = \operatorname{tg} 2x \cdot \ln 2x$;
 7) $y = \sqrt{2x+5} + \arcsin 3x$; 8) $y = \frac{\cos e^x}{x^3} + 5x^3 + 4$; 9) $y = \cos(\ln x)$;
 10) $y = \arccos(3x+5) \cdot e^x$.

7. 1) $y = \arcsin^2 5^x + \sqrt{x+2}$; 2) $y = \operatorname{tg}^3(\sin 2x) + 2^x$; 3) $y = 2^{\sin x} + x^2 + 4$;
 4) $y = \ln^3(\sin 8x) + \operatorname{ctg} 2x$; 5) $y = \sin 3x \cdot \lg 7x^2$; 6) $y = \operatorname{arctg}^2 3x$;
 7) $y = \frac{\cos 8x}{x^5} - \arccos 3x$; 8) $y = \sin^3 7x^2$; 9) $y = \frac{x^2}{\ln x} + 8x$;
 10) $y = \frac{\cos 3x}{4} - \arccos 7x$.

8. 1) $y = \arccos^2 7^x + \sqrt{3x+1}$; 2) $y = \operatorname{arctg}^2 8x$; 3) $y = \frac{\sin 3x}{x^2} - \arcsin 4x$;
 4) $y = \ln^2(\cos 2x) + \operatorname{tg} 3x$; 5) $y = \cos 3x \cdot \lg 8x$; 6) $y = \operatorname{ctg}^2(\cos 2x) + 7^x$;
 7) $y = 3^{\cos x} + x^3 + 8x - 1$; 8) $y = \cos^2 8x^3$; 9) $y = \frac{x^3}{\sin x} + \ln 5x$;
 10) $y = \frac{\sin 2x}{3} - \arcsin 5x^2$.

9. 1) $y = \ln^3 \sqrt{\sin x}$; 2) $y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{3x} + \arcsin x^2$; 3) $y = \cos^2 \lg 5x$;
 4) $y = \sin 3x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; 5) $y = \operatorname{arctg} 5^x - 8x + 5$; 6) $y = 2^{x^2 + \sin x}$;
 7) $y = \arccos^2 5x + \ln 3x$; 8) $y = \cos^2 \left(\ln \frac{1}{x} \right)$; 9) $y = \operatorname{arctg}(\sin 8x)$;
 10) $y = \operatorname{ctg} \frac{x^2}{4} - \sin x$.

10. 1) $y = \ln^2 \sqrt{\cos x}$; 2) $y = \frac{\operatorname{ctg} 3x}{7x^2} + \arccos 2x$; 3) $y = \sin^2(\lg 3x)$;

$$4) y = \cos 2x \cdot \arccos \frac{1}{x}; \quad 5) y = \operatorname{arctg} 7^{x^2} - 3x + 5; \quad 6) y = \arcsin (\cos 2x);$$

$$7) y = 7^{\sin 3x + 5x}; \quad 8) y = \sin^3 \left(\ln \frac{1}{x} \right); \quad 9) y = \operatorname{arcctg} (\cos 5x);$$

$$10) y = \operatorname{tg} \frac{x^3}{3} - \cos x.$$

11.

$$1) y = \sin^8 (\sin 3x); \quad 2) y = \arcsin 2x \cdot \operatorname{tg} (7x + 3); \quad 3) y = \cos 3x + \sqrt{x^5 + 3};$$

$$4) y = 3^{x^2 + \operatorname{tg} x} - x^3; \quad 5) y = \sqrt{\frac{\cos 2x}{x}} + \ln 8x; \quad 6) y = \ln^2 (1/x);$$

$$7) y = \operatorname{arctg} 2^x + x^2 - 7x; \quad 8) y = \frac{\sin 2x}{x^4} - x^7 + 2x; \quad 9) y = \operatorname{arctg}^2 3x;$$

$$10) y = 3^{x^2} \cdot \cos 7x.$$

12.

$$1) y = \sqrt{\frac{\sin 3x}{x}} \cdot \ln 7x; \quad 2) y = 2^{x^3 + \operatorname{ctg} x} - x^5; \quad 3) y = \cos^5 (\ln 7x);$$

$$4) y = \arccos 3x \cdot \operatorname{ctg} (3x + 7); \quad 5) y = \sin 2x + \sqrt{x^3 + 7}; \quad 6) y = \ln^3 (1/x);$$

$$7) y = \operatorname{arcctg} 3^x + 7x + 5; \quad 8) y = \frac{\cos 3x}{x^3} - x^8 + 5x^3; \quad 9) y = \operatorname{arcctg}^3 2x;$$

$$10) y = 5^{x^3} \sin 3x.$$

13.

$$1) y = \ln^2 (\cos 3x) + x^3; \quad 2) y = \sin 4x \cdot 2^{x^2}; \quad 3) y = \frac{\sqrt{x+3}}{\operatorname{tg} 2x} + 3x^3;$$

$$4) y = \operatorname{arctg}^2 (\ln x); \quad 5) y = \cos (\arcsin 2x); \quad 6) y = 5^{x^3 + \operatorname{ctg} x};$$

$$7) y = x^7 \ln \frac{1}{x}; \quad 8) y = \cos^2 3x + \frac{x^2}{\sin x}; \quad 9) y = \ln^3 2^x + x^3;$$

$$10) y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{\cos x}}.$$

14.

$$1) y = \ln^2 (\sin 3x) + x^8 - 7; \quad 2) y = \cos 3x \cdot 4^{x^3}; \quad 3) y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\operatorname{ctg} x} + 8x^2 + 5;$$

$$4) y = \operatorname{arccctg}^3(\ln x); \quad 5) y = \sin(\arccos 2x); \quad 6) y = \sin^3 2x + \frac{x}{\cos 2x};$$

$$7) y = x^4 \cdot \ln \frac{1}{x}; \quad 8) y = 7^{x^2 + \cos 2x}; \quad 9) y = \ln^2(5^x) + x^7;$$

$$10) y = \sqrt{\frac{x^3}{\sin 5x}}.$$

15.

$$1) y = 5^{x^2 + \cos 2x}; \quad 2) y = \ln^5 \frac{\sin x}{x^4} + 8x^2; \quad 3) y = \arcsin^2 8x + 3;$$

$$4) y = \operatorname{arctg} 3x \cdot \cos \frac{1}{x}; \quad 5) y = \frac{\sqrt{x+4}}{\sin 8x} + 2^x; \quad 6) y = \arccos^2 5x;$$

$$7) y = \operatorname{tg} x \cdot \lg 2x; \quad 8) y = \ln \frac{\cos x}{x^5} - 7x^2; \quad 9) y = \sin^2(\ln x);$$

$$10) y = \operatorname{ctg}(\sin 2x) - 7x + 5.$$

16.

$$1) y = 7^{x^3 + \sin 7x}; \quad 2) y = \ln^2 \frac{\cos x}{x^2} - 7x^2; \quad 3) y = \arccos^2 3x;$$

$$4) y = \operatorname{arccctg} 7x \cdot \sin \frac{1}{x}; \quad 5) y = \frac{\sqrt{x-7}}{\cos 2x} - 7^x; \quad 6) y = \arcsin^3 3x;$$

$$7) y = \operatorname{tg}(\cos 3x) - 7x^2 + 5x; \quad 8) y = \ln \frac{\sin x}{x^3} - 2x^2 + 3; \quad 9) y = \operatorname{ctg} x \cdot \ln 3x;$$

$$10) y = \cos^2(\ln x).$$

17.

$$1) y = e^{\sin x} (x^3 + 2) + \ln(3x - 2) \quad 2) y = \frac{\sin^4 2x}{5x + 1} - \operatorname{arctg} 3x \quad 3) y = 4^{x^3} \operatorname{ctg} 5x$$

$$4) y = \arcsin^3 5x - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 \quad 5) y = \sqrt{4x^3 - 2x + 1} + 3^{\cos x} \quad 6) y = \operatorname{tg}^3(1 + x^2)$$

$$7) y = \frac{\arccos 3x}{x + 5} - 2\sqrt{6x + 5} + x \quad 8) y = \ln^2 \frac{1}{x + 1} \quad 9) y = 2^{\ln x} \operatorname{arccctg} \frac{x}{2}$$

$$10) y = \ln(x^2 + \sqrt{1 + x^4}) - \sin 6x$$

18.

$$1) y = e^{\cos x} (x^3 - 2) + \ln(2x^2 + 3) \quad 2) y = \ln^3 \frac{1}{x - 2} \quad 3) y = \sqrt{3x^4 + 2x} + 2^{\operatorname{tg} x}$$

$$4) y = \operatorname{ctg}^3 4x + \frac{1}{3}x^3 + 4x - 3 \quad 5) y = \arccos^2(\ln x) \quad 6) y = 3^{x^3-1} \cdot \sin 8x$$

$$7) y = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^4 + 2} + 3\sqrt[3]{x} - x \quad 8) y = \ln \sin 2x - \ln \cos 3x \quad 9) y = 5^{\ln x} \operatorname{arctg} e^x$$

$$10) y = \frac{\cos^2 5x}{2x - 5} - \arcsin 2x$$

19.

$$1) y = e^{\operatorname{ctg} x} \left(\frac{x^4}{4} - 0,2 \right) + \ln(3x^2 + 3) \quad 2) y = \ln^5 \frac{1}{2x-1} \quad 3) y = \sqrt[3]{3x-1} + 5^{\operatorname{ctg} x}$$

$$4) y = \operatorname{ctg}^5 3x + \frac{1}{4}x^2 + 2x - 7 \quad 5) y = \arcsin^3(\ln x) \quad 6) y = 2^{x^5+2} \cdot \cos 4x$$

$$7) y = \ln \cos 3x + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad 8) y = \frac{\operatorname{arcctg} 5x}{x} + \sqrt[4]{x} - \sqrt{2} \quad 9) y = 2^{\ln x} \arcsin 3x$$

$$10) y = \frac{\cos^3 2x}{x+3} - \arcsin(2x+5)$$

20.

$$1) y = e^{\operatorname{tg} x} \cdot (3x^3 + 5) - \ln(x^2 - 3x) \quad 2) y = \ln^4 \frac{1}{3x+2} \quad 3) y = \sqrt[4]{2x^2+1} + 4^{\sin x}$$

$$4) y = \operatorname{tg}^4 2x - 6x^2 + \frac{4}{x} - 5 \quad 5) y = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{x} \quad 6) y = 3^{x^3} \cdot \operatorname{ctg} 2x$$

$$7) y = \frac{\arcsin 5x}{x-1} - \sqrt{x^3} + 2x \quad 8) y = \ln \sin 2x - \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \quad 9) y = 4^{\ln x} \arccos 2x$$

$$10) y = \frac{\sin^3 2x}{4x-1} + \arccos(2x+5)$$

21.

$$1) y = \frac{\sqrt{2x+1}}{\sin 2x} + e^{-x} \quad 2) y = \arccos^3(2^x) + 2x^4 \quad 3) y = \operatorname{ctg}^2 x \cdot \frac{1}{x^3}$$

$$4) y = \operatorname{arcctg}^3 5x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \quad 5) y = \operatorname{tg} 2x \cdot \ln(4-x) \quad 6) y = \ln^3 \frac{\cos 2x}{x}$$

$$7) y = \sqrt[3]{(3x^2-5)^2} + \arcsin 3x \quad 8) y = \frac{e^{x^2}}{(x+2)^2} - 3\sqrt{x} + 4 \quad 9) y = \ln \ln x$$

$$10) y = \operatorname{arctg}(3x-5) \cdot e^{3x}$$

22.

1) $y = \frac{\sqrt{5x-3}}{\cos 3x} + e^{3x}$

2) $y = \arcsin^2(3^x) + \frac{5}{x}$ 3) $y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

4) $y = \operatorname{arctg}^4 2x + 3x^3 + 2x^2$

5) $y = \ln^2 \frac{\sin 5x}{x}$

6) $y = \operatorname{ctg} 2x \cdot \ln(7+x)$

7) $y = \sqrt[4]{(3x+4)^3} + \arccos 3x$

8) $y = \ln(\ln(\ln x))$

9) $y = \operatorname{arcctg}(2x+1) \cdot e^{x^2}$

10) $y = \frac{e^{-x}}{(x-1)^2} - 3 + 2\sqrt{x}$

23.

1) $y = \cos x^2 \cdot \ln(3x-2)$ 2) $y = \operatorname{ctg}^2(\cos 3x) + e^{-2x}$ 3) $y = \frac{\cos 5x}{4x^5} - \arccos(x+1)$

4) $y = \ln^2(\cos 2x) + \operatorname{tg} 4x$ 5) $y = 4^{\ln x} - \frac{3}{x^2} + 12$ 6) $y = \arcsin^3(2^x) + \sqrt{2x+1}$

7) $y = \operatorname{arcctg}^4 x + 7x^2 - 2x$ 8) $y = \frac{3x-1}{x^2+4} + \operatorname{arctg} 2x$ 9) $y = \frac{(x-3)^2}{\ln x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$

10) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \arcsin x$

24.

1) $y = \arccos^4(5^x) + \sqrt{4x-3}$ 2) $y = \operatorname{tg}^3(\sin 3x) + e^{3x}$ 3) $y = \ln \sin \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x}$

4) $y = \ln^2(\sin 4x) + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ 5) $y = \sin x^2 \cdot \ln 8x$ 6) $y = \operatorname{arctg}^2 3x + 4\sqrt{x} - 0,6$

7) $y = \frac{\sin 2x}{x^3} - \arcsin(x-2)$ 8) $y = 4^{\sin x} - \frac{1}{3x^3} + 2x$ 9) $y = \ln \frac{x^5}{x^5+2}$

10) $y = \frac{x+1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arcctg}(x+1)$

25.

1) $y = \ln \cos 4x + \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}$ 2) $y = \frac{x^3-1}{3x} - \arccos \sqrt{x}$ 3) $y = \cos^3 x - 3 \cos x$

4) $y = \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^2 3x$

5) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{4x^2-1} + 2x$ 6) $y = 3^{x^2-\ln x}$

7) $y = \sqrt{x} \cdot \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

8) $y = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} \right)^2$

9) $y = \operatorname{arcctg}(1-e^{2x})$

10) $y = (x^2+2x+2) \cdot e^{-x}$

26.

1) $y = \ln \sin 3x - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$

2) $y = 5^{x^3 + \cos 3x}$

3) $y = \sin^4 x - 4 \cos x$

4) $y = x \cdot \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$

5) $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$

6) $y = 2(\operatorname{ctg} \sqrt{x} - \sqrt{x})$

7) $y = \frac{x^4 + 3}{4x} + \arcsin \sqrt{x}$

8) $y = \frac{1}{6} \ln^3(2x^3 + 3x^2)$

9) $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{1 - e^{2x}}$

10) $y = (x^3 + 1) \cdot (\ln(x^3 + 1) - 3)$

27.

1) $y = \sqrt{\frac{\sin 3x}{x}} + \ln(1-x)$

2) $y = 7^{x^2 + \operatorname{ctg} 3x} - x\sqrt{x}$

3) $y = \cos^4 \frac{x}{4} - 4 \sin \frac{x}{4}$

4) $y = 2x^3 \cdot \arcsin x - \sqrt{1 - e^{2x}}$

5) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1 - x^2}$

6) $y = \ln^2 \frac{x}{x+1}$

7) $y = \operatorname{arcctg} 2^x - \frac{1}{4x^4} + \frac{3x^2}{2}$

8) $y = \frac{x - e^{2x}}{x + e^{2x}}$

9) $y = \operatorname{arcctg}^3 2x$

10) $y = (\sqrt{2x} - 1) \cdot e^{\sqrt{2x}}$

28.

1) $y = \sqrt{\frac{\cos 3x}{x}} + \ln 5x$

2) $y = (x^2 - 1) \cdot \arccos x - \sqrt{e^{3x} + 2}$

3) $y = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

4) $y = 3^{x^3 - \operatorname{ctg} 3x} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}$

5) $y = \frac{1}{4} \operatorname{arcctg} \sqrt{4x^2 - 1}$

6) $y = \ln^4 \frac{x}{2x-1}$

7) $y = \operatorname{arctg} 7^x - \frac{1}{x} + 3$

8) $y = \frac{9 - x^2}{9 + x^2}$

9) $y = \operatorname{arctg}^3 \frac{x}{3}$

10) $y = (5x + 4)^2 \cdot \sin 2x$

29.

1) $y = \sqrt{1 + \sin x} + \ln^2 5x$

2) $y = 2x \cdot \cos x - e^{-x^2}$

3) $y = 2 \operatorname{ctg}^3 x - 3 \operatorname{ctg}^2 x$

4) $y = 4^{x^2 - \ln x} + \frac{1}{3x^6} - 5$

5) $y = \frac{1}{9} \arccos \sqrt{1 - 9x^2}$

6) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{e^{2 \sin x}}{4}$

7) $y = \operatorname{arctg} 2^x - \frac{x-4}{x-2}$

8) $y = \sin(\ln x) \cos(\ln x) - \ln \frac{1}{x}$

9) $y = \operatorname{arctg}^2(e^{-x})$

10) $y = \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

30. 1) $y = \sqrt{1 + \cos 2x} + \ln^3 7x$ 2) $y = (2 - x) \cdot \sin 3x - e^{-\frac{x^2}{2}}$ 3) $y = \frac{\ln x}{x^5} + \frac{1}{5x^5}$

4) $y = 7^{x^2 + \operatorname{tg} 2x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3x$ 5) $y = -\frac{1}{5} \arcsin \sqrt{1 - 25x^2}$ 6) $y = \ln \operatorname{ctg} \frac{e^{2\cos x}}{2}$

7) $y = \operatorname{arcctg} 4^x - \frac{2x + 1}{2x - 3}$ 8) $y = e^{-x} - \sin(e^{-x}) \cos(e^{-x})$ 9) $y = \operatorname{arctg}^5(1 + x)$

10) $y = \sin^4 x - 2\sin^2 x$

Образец выполнения контрольной работы № 5
“ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ”

Найти производные функций:

1) $y = e^{x^3 - 5x^2 + 4x + 12}$.

$$y' = (e^{x^3 - 5x^2 + 4x + 12})' .$$

Можно представить данную функцию как $y = e^u$, где $u = x^3 - 5x^2 + 4x + 12$.

Зная, что $(e^u)' = e^u \cdot u'$, получим

$$e^{x^3 - 5x^2 + 4x + 12} (x^3 - 5x^2 + 4x + 12)' = e^{x^3 - 5x^2 + 4x + 12} (3x^2 - 10x + 4) .$$

Ответ: $y' = (3x^2 - 10x + 4) e^{x^3 - 5x^2 + 4x + 12}$.

2) $y = \operatorname{tg}^3 5x$.

$$y' = \left[(\operatorname{tg} 5x)^3 \right]' .$$

Можно представить $y = u^3$, где $u = \operatorname{tg} 5x$. Причем $(u^3)' = 3u^2 \cdot u'$, в результате получим

$$3(\operatorname{tg} 5x)^2 \cdot (\operatorname{tg} 5x)' = 3\operatorname{tg}^2 5x \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 = 15\operatorname{tg}^2 5x \frac{1}{\cos^2 5x} .$$

Ответ: $y' = 15 \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\cos^2 5x}$.

3) $y = 3x \ln x$.

$$y' = 3(x \cdot \ln x)' .$$

После подстановок $(u \cdot v)' = u'v + v'u$; $(c \cdot u)' = cu'$ получим

$$y' = 3 \left[(x)' \cdot \ln x + x (\ln x)' \right] = 3 \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right] = 3(\ln x + 1).$$

Ответ: $y' = 3(\ln x + 1)$.

$$4) y = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x}.$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 - 3x + 1)'x - (x)'(x^2 - 3x + 1)}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(2x - 3)x - (x^2 - 3x + 1)}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{2x^2 - 3x - x^2 + 3x - 1}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{x^2 - 1}{x^2}, \text{ если вос-}$$

пользоваться правилом $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Ответ: $y' = \frac{x^2 - 1}{2x^2}$.

Библиографический список

1. Николаева, Наталья Ивановна. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия [Текст] : конспект лекций / Н. И. Николаева ; ОмГТУ. - Омск : Изд-во ОмГТУ, 2008. Ч. 1. - 2008. - 87 с.
2. Николаева, Наталья Ивановна. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной [Текст]: конспект лекций / Н. И. Николаева. - Омск: Изд-во ОмГТУ, 2008. Ч. 2. - 2008. - 67 с. 67 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 частях. Ч. 1. – М.: Айрис-Пресс, 2009. – 279 с.
4. Шипачев В.С. Курс высшей математики. Учебник для вузов / под ред. А. Н. Тихонова. – М.: Оникс, 2009. – 599 с.
5. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. Учебник. / под ред. О. Н. Головина. – Санкт-Петербург: Лань, 2007. – 555 с.
6. Предел и непрерывность функций [Текст] : метод. указания для практ. занятий со студентами днев. и заоч. форм обучения / ОмГТУ ; Сост.: Н. И. Николаева, Л. В. Бельгарт. - Омск : Изд-во ОмГТУ, 2004. - 43 с.
7. Контрольные работы по аналитической геометрии и введению в математический анализ [Текст] : метод. указания для студентов заоч. формы обучения / ОмГТУ ; Сост.: Р. С. Кичигина, Н. М. Хаустова. - Омск : Изд-во ОмГТУ, 2004. - 55 с.
8. Контрольные работы по линейной и векторной алгебре [Текст] : метод. указания для студентов техн. специальностей заоч. формы обучения / ОмГТУ ; Сост.: Р. С. Кичигина, Н. М. Хаустова. - Омск : Изд-во ОмГТУ, 2004. - 48 с.
9. Линейная алгебра [Текст] : метод. указания к проведению практ. занятий и выполнению домаш. заданий / ОмГТУ ; сост. Н. В. Батехина. - Омск : Изд-во ОмГТУ, 2009. - 48 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Контрольная работа № 1 “Матрицы и определители”	3
Контрольная работа № 2 “Системы линейных уравнений”	15
Контрольная работа № 3 “Построение графиков функций”	34
Контрольная работа № 4 “Предел и непрерывность функций”	41
Контрольная работа № 5 “Вычисление производной”	65
Библиографический список	75

Редактор

Сводный темплан 2011 г.

ИД от

Подписано в печать Бумага офсетная. Формат .

Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 4,75. Уч.-изд.

Тираж 100 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ