Министерство высшего и среднего специального образования

Омский государственный технический университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ ГУМАНИТАРНОГО ФАКУЛЬТЕТА

(Часть 2)

Составители: Веснина Алла Александровна
Стругова Татьяна Михайловна

Омск - 2001

Тема 6. ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Задачи для контрольной работы

ЗАДАНИЕ № 1 Исследовать на экстремум :

1. 1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$, 2) $y = x^2 - 2\ln x + 3$.
2. 1) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$, 2) $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{16}$.
3. 1) $y = x^3 - 6x^2 + 5$, 2) $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}$.
4. 1) $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 9$, 2) $y = \frac{1}{x} + x$.
5. 1) $y = \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x}$, 2) $y = x^4 - 2x^2$.
6. 1) $y = x^2 (x - 12)^2$, 2) $y = (1 + x)e^x$.
7. 1) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 7$, 2) $y = \frac{1}{1 + x^2}$.
8. 1) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$, 2) $y = x^2 (1 - x)$.
9. 1) $y = 80x - x^5 - 80$, 2) $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$.
10. 1) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$, 2) $y = \frac{x^2}{x - 2}$.
11. 1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, 2) $y = \frac{3 - x^2}{x + 2}$.
12. 1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x$, 2) $y = x + \frac{1}{x}$.
13. 1) $y = x^4 - 2x^2 + 6$, 2) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$.
14. 1) $y = 17 - 3x^2 + \frac{1}{2}x^4$ 2) $y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$.
15. 1) $y = x^2 (x - 2)^2$, 2) $y = \frac{x^3}{3} + x^2$.
16. 1) $y = (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2$ 2) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

ЗАДАНИЕ № 2 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1. $y = 72x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 1$ на отрезке $[0; 1]$.
3. $y = 2 - 2x^2 + x^4$ на отрезке $[0; 3]$.
2. $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2; 2]$.
4. $y = \sin 2x - x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. $y=(x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[0;2]$.
6. $y=x-2\sqrt{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{9};4\right]$.
7. $y=2x^3-3x^2-36x+40$ на отрезке $[1;3]$.
8. $y=\sin x-2x$ на отрезке $[0;\pi]$.
9. $y=x^3-6x^2+9x-2$ на отрезке $[0;4]$.
10. $y=x^3-7{,}5x^2+18x+1$ на отрезке $[0;4]$.
11. $y=4x^3-15x^2+12x-1$ на отрезке $[0;2]$.
12. $y=x^3-12x+7$ на отрезке $[0;3]$.
13. $y=15+4x^2-x^4$ на отрезке $[-1;2]$.
14. $y=3x-x^3$ на отрезке $[-2;3]$.
15. $y=3x-x^3$ на отрезке $[0;3]$.
16. $y=2x^3-3x^2+1$ на отрезке $[0;2]$.

ЗАДАНИЕ № 3

1. При каких размерах коробка (без крышки), изготовленная из квадратного листа картона, со стороной a, имеет наибольшую вместимость?
2. Среди всех прямоугольников, имеющих данный периметр *2a*, найти тот, площадь которого наибольшая.
3. Кусок проволоки данной длины l согнуть в виде прямоугольника так, чтобы площадь последнего была наибольшей.
4. Число 50 записать в виде суммы двух чисел, сумма кубов которых наименьшая.
5. Записать число 625 в виде произведения двух положительных чисел так, чтобы сумма их квадратов была наименьшая.
6. Из всех прямоугольников, площадь которых равна 9 см^2, найти прямоугольник с наименьшим периметром.
7. Из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых в основании лежит квадрат и площадь полной поверхности равна 600 см^2, найти параллелепипед наибольшего объема.
8. Из всех прямоугольников с периметром P найти прямоугольник с наименьшей диагональю.
9. Из всех равнобедренных треугольников с периметром P найти треугольник с наибольшей площадью.
10. Из всех прямоугольных треугольников, у которых сумма одного катета и

гипотенузы равна l, найти треугольник с наибольшей площадью.

11. Найти размеры открытого сверху цилиндрического бака данного объема 64 литра, при которых на его изготовление пойдет минимальное количество жести.
12. Окно магазина имеет форму прямоугольника, заканчивающегося полукругом. Периметр фигуры равен 15м. При каком размере полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света?
13. Образующая конического сосуда равна 25см. Какой должна быть его высота, чтобы вместимость сосуда была наибольшей.
14. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса r.
15. Решеткой длиной 120 м нужно огородить площадку наибольшей площади. Найти размеры этой площадки.
16. Разложить число 10 на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

ЗАДАНИЕ № 4 Найти точки перегиба функции:

1. $y = \frac{x^3}{6} - x^2$.
2. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.
3. $y = \frac{5x}{2 + x^2}$.
4. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$.
5. $y = \frac{2x - 1}{(x-1)^2}$.
6. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.
7. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.
8. $y = \frac{1}{x^2 + 3}$.
9. $y = \frac{x^3}{x - 1}$.
10. $y = \frac{x}{1 + x^2}$.
11. $y = \frac{x}{x^2 - 4}$.
12. $y = \frac{4x - 12}{(x-2)^2}$.
13. $y = \frac{6x}{1 + x^2}$.
14. $y = \frac{x + 1}{x^2}$.
15. $y = xe^x$.
16. $y = \frac{x}{(1 - x^2)^2}$.

ЗАДАНИЕ № 5 Найти асимптоты графика функции:

1. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.
2. $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$.
3. $y = \frac{2x^2 - 3x + 5}{5x}$.
4. $y = \frac{x^2}{x + 4}$.
5. $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$.
6. $y = \frac{1}{1 - x^2}$.

7. $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. 8. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$. 9. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

10. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$. 11. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$. 12. $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

13. $y=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$. 14. $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$. 15. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$. 16. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

ЗАДАНИЕ № 6 Исследовать функцию и построить ее график:

1. $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$. 2. $y=x^3-3x$. 3. $y=\dfrac{3x}{4+x^2}$. 4. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

5. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$. 6. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$. 7. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$. 8. $y=\dfrac{x^3}{x-1}$.

9. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$. 10. $y=xe^{-x}$. 11. $y=\dfrac{1}{x^2+3}$. 12. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

13. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$. 14. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. 15. $y=\dfrac{8}{x^2-4}$. 16. $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$.

Тема 7. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ЗАДАНИЕ № 1а Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции:

1. $z=2^{xy}+\sin(2xy)$.
2. $z=e^{xy}+\ln(x+\ln y)$.
3. $z=arctg\,\dfrac{x}{y}$.
4. $z=arctg\,\dfrac{x+y}{y}$.
5. $z=2^{xy^3}+\arcsin x$.
6. $z=\ln\left(x^2+y^2+xy\right)$.
7. $z=\arcsin\dfrac{x^2}{y}$.
8. $z=\arccos\sqrt{x^2+y^2}$.
9. $z=x^y+arctg(x+y)$.
10. $z=tg\,\dfrac{y}{x}$.
11. $z=\ln\sin\left(x^2+y\right)$.
12. $z=3^{xy}+\sin\left(x^2+y^2\right)$.
13. $z=e^{\frac{x}{y}}+\ln\left(x^2+xy\right)$.
14. $z=\cos\ln xy$.
15. $z=\ln tg\,\dfrac{x}{y}$.
16. $z=tg\ln\left(x^2+y^2\right)$.

ЗАДАНИЕ № 1б Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции:

1. $z = \arcsin \frac{x+y}{xy}$.
2. $z = \sin(x+y) + tg(x^2 y)$.
3. $z = \ln(x^2 + 3y^2 + xy)$.
4. $z = tg\frac{x}{y} \cdot \sin\frac{y}{x}$.
5. $z = \ln\frac{xy}{5x+y}$.
6. $z = \cos x^3 + \sin y^3 - xy$.
7. $z = x^y + y^x$.
8. $z = \sin \ln \frac{x}{y}$.
9. $z = \ln\cos(xy)$.
10. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
11. $z = arcctg\frac{y}{x}$.
12. $z = arcctg\frac{x}{y}$.
13. $z = \sqrt{x^2+y^2}$.
14. $z = \frac{2x+y}{x-3y}$.
15. $z = e^{2x+y} + \sqrt{x^2+y^2}$.
16. $z = \arcsin xy$.

ЗАДАНИЕ № 2 Показать, что

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = \ln(x^2 + y)$.
2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = \sqrt{2xy + y^2}$.
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = x^y$.
4. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $arctg\frac{x}{y}$.
5. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
6. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = e^x(x\cos y - y\sin y)$.
7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.

8. $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=y\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z=xe^{-\frac{y}{x}}$.

9. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$ для функции $z=2\cos^2\left(x-\dfrac{y}{2}\right)$.

10. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

11. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=e^x\cdot\cos y$.

12. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{x^2}$ для функции $z=\ln\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)$.

13. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=arctg\,\dfrac{y}{x}$.

14. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$ для функции $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$.

15. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z=\dfrac{y}{y^2-a^2x^2}$.

16. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2}{x-y}$ для функции $z=\dfrac{xy}{x-y}$.

ЗАДАНИЕ № 3 Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1. $\dfrac{4}{1{,}03^2+2{,}97^2}$.
2. $arctg\,\dfrac{0{,}96}{1{,}05}$.
3. $\dfrac{2{,}05^2}{2{,}05^2+3{,}01^2}$.
4. $1{,}03^{0{,}98}$.
5. $0{,}97^{1{,}05}$.
6. $3{,}09\cdot e^{0{,}09}$.
7. $\sqrt{1{,}05^3+1{,}98^3}$.
8. $\sqrt{4{,}05^2+2{,}93^2}$.
9. $2{,}003^2\cdot 3{,}004^3$.
10. $1{,}02^3\cdot 0{,}97^2$.
11. $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)$.
12. $1{,}04^{2{,}02}$.
13. $\sqrt{4{,}02^2+3{,}03^2}$.
14. $1{,}02^{3{,}01}$.
15. $0{,}98^{2{,}02}$.
16. $2{,}01\cdot e^{1{,}02}$.

ЗАДАНИЕ № 4 Исследовать на экстремум:

1. $z = x^2 + y^2 - 6x + 8y - 2$.
2. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
3. $z = 2x - 2y - x^2 - y^2 + 6$.
4. $z = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3$.
5. $z = x^2 - 8x - 10y + xy + y^2 + 17$.
6. $z = 4x + 5y - x^2 - xy - y^2 + 4$.
7. $z = 3x + 9y - x^2 - xy - y^2 - 4$.
8. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.
9. $z = 13y + 11x - xy - x^2 - y^2 + 5$.
10. $z = 6x - 8y - x^2 - y^2 - 17$.
11. $z = x^2 - 2x + 1 + 2y^2$.
12. $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$.
13. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7$.
14. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.
15. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.
16. $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$.

ЗАДАНИЕ № 5 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в треугольнике со сторонами $y = x + 1, \quad y = 0, \quad x = 3.$
2. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ в треугольнике со сторонами $x + y + 1 = 0, \quad y = 0, \quad x = -3.$
3. $z = x^2 + xy - 2$ в замкнутой области, ограниченной $y = 4x^2 - 4$ и осью OX.
4. $z = y^2 - 2xy - x^2 + 4x - 3$ в треугольнике со сторонами $y = x + 1, \quad x = 0, \ y = 2$.
5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ в треугольнике со сторонами $y = x + 2, \quad y = 0, \quad x = 2.$
6. $z = x^2 + 2xy - 10$ в замкнутой области, ограниченной $y = x^2 - 4$ и осью OX.
7. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$ в квадрате $0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 2.$
8. $z = 2x + y - xy$ в квадрате $0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 4.$
9. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{3}$ и $y = 3.$
10. $z = 1 + x + 2y$ в области, ограниченной прямыми $x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1.$
11. $z = 1 + x + 2y$ в области, ограниченной прямыми $x = 0, \quad y = 0, \quad x - y = 1.$
12. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad y = 2.$

13. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ в треугольнике со сторонами $x + y + 2 = 0,\quad x = 0,\quad y = 0.$

14. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в треугольнике со сторонами $x = 0,\quad y = 0,\quad x + y = 3.$

15. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$ в треугольнике со сторонами $y = 2x,\quad y = 2,\quad x = 0.$

16. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ в квадрате, ограниченном прямыми $x = -1,\quad x = 1,\quad y = -1,\quad y = 1.$

ЗАДАНИЕ № 6 Найти производную функции:

1. $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке (3;1) в направлении от этой точки к точке (6;5).
2. $z = arctg\, xy$ в точке (1;1) в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.
3. $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в точке (2;1) в направлении от этой точки к началу координат.
4. $z = arctg\frac{x}{y}$ в точке (1,1) в направлении луча, образующего угол в 60° с осью *OX*.
5. $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$ в начале координат в направлении луча, образующего угол в 30° с осью *OX*.
6. $z = arctg\frac{y}{x}$ в точке (1;3) по направлению вектора $\vec{e} = \{3;4\}$.
7. $z = x^2 - xy - 2y^2$ в точке (1;2) в направлении, составляющем с осью *OX* угол в 60°.
8. $z = 3x^4 + xy + y^2$ в точке (1;2) в направлении вектора, образующего с осью *OX* угол в 45°.
9. $z = arctg\frac{y}{x}$ в точке (3;1) по направлению вектора $\vec{e} = \{3;4\}$.
10. $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$ в точке (1;1) в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.
11. $z = x^2 - 3xy + 5$ в точке (1;2) в направлении от этой точки к точке (1;1).
12. $z = xy^2 + x^3 - xy$ в точке (1;1) в направлении, образующем углы α=30°, β=60°.
13. $z = 2xy^2 + y^3 + 3xy$ в точке (4;1) в направлении от этой точки к точке (5;1).
14. $z = xy$ в точке (5;1) в направлении от этой точки к точке (9;4).
15. $z = x^2y + x^3$ в точке (1;1) по направлению вектора $\vec{e} = \{1;-1\}$.

16. $z = x^3 + 3x^2 y + 6xy + y^2$ в точке (1;1) в направлении от этой точки к точке (2;2).

ЗАДАНИЕ № 7 Найти формулу вида $y = ax + b$ методом наименьших квадратов по данным опыта:

1.

x	1	2	3	4	5
y	3,2	4,2	2,7	0,7	1,2

2.

x	1	2	3	4	5
y	3,4	4,4	2,9	0,9	1,4

3.

x	1	2	3	4	5
y	3,6	4,6	3,1	1,1	1,6

4.

x	1	2	3	4	5
y	4,6	5	3,4	1,2	1,8

5.

x	1	2	3	4	5
y	4	5	3,5	1,5	2

6.

x	1	2	3	4	5
y	2,8	3,8	2,3	0,3	0,8

7.

x	1	2	3	4	5
y	4,1	5,1	3,6	1,6	2,1

8.

x	1	2	3	4	5
y	4,4	5,4	3,9	1,9	2,4

9.

x	1	2	3	4	5
y	4,6	5,6	4,1	2,1	2,6

10.

x	1	2	3	4	5
y	4,8	5,8	4,3	2,3	2,8

11.

x	1	2	3	4	5
y	3	4	2,5	0,5	1

12.

x	1	2	3	4	5
y	3,7	4,7	3,2	1,2	1,7

13.

x	1	2	3	4	5
y	2,9	3,9	2,4	0,4	0,9

14.

x	1	2	3	4	5
y	3,1	4,1	2,6	0,6	1,1

15.

x	1	2	3	4	5
y	2,5	3,5	2,0	0	0,5

16.

x	1	2	3	4	5
y	2,6	3,6	2,1	0,1	0,6

Тема 8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Задачи для контрольной работы

ЗАДАНИЕ Вычислить неопределенные интегралы:

1. 1) $\int \frac{x^2dx}{\left(3+2x^3\right)^2}$, 2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$, 3) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$, 4) $\int \frac{x^2dx}{x^6+4}$,

5) $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}dx$, 6) $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$, 7) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$, 8) $\int x\cdot tg^2 xdx$,

9) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$, 10) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

2. 1) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$, 2) $\int \frac{\ln x}{5x}dx$, 3) $\int \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, 4) $\int \frac{xdx}{x^4+1}$,

5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$, 6) $\int \frac{5x-1}{x^2+4x-12}dx$, 7) $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$, 8) $\int x\cdot arctgxdx$,

9) $\int \frac{\sqrt{1+2x}}{x}dx$, 10) $\int x^3\sqrt{x^2-9}dx$.

3. 1) $\int \frac{x-2}{\sqrt{3-2x^2}}dx$, 2) $\int tg^3 2x\sec^2 2xdx$, 3) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$, 4) $\int \frac{dx}{2x^2+9}$,

5) $\int \cos^5\frac{x}{7}dx$, 6) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$, 7) $\int x^2 arctg 2xdx$, 8) $\int \ln^2 xdx$,

9) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$, 10) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. 1) $\int 5x\sqrt{1-2x^2}dx$, 2) $\int \frac{2x^2dx}{8x^3-7}$, 3) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$, 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$,

5) $\int ctg^3 xdx$, 6) $\int \frac{x-7}{x^2+4x+13}dx$, 7) $\int x^2\ln(1+x)dx$, 8) $\int \arccos xdx$,

9) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$, 10) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-16}}$.

5. 1) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{2\sin x+1}}$, 2) $\int \frac{e^x+\sin x}{e^x-\cos x}dx$, 3) $\int \frac{2^{arctgx}}{1+x^2}dx$, 4) $\int \frac{e^xdx}{e^{2x}+4}$,

5) $\int tg^4 xdx$, 6) $\int \frac{x-2}{x^2+x+1}dx$, 7) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$, 8) $\int arctg\sqrt{x}dx$,

9) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$, 10) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

6. 1) $\int \frac{x^2-4}{x-3}dx$, 2) $\int \frac{x+arctgx}{1+x^2}dx$, 3) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$, 4) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{25-16e^{2x}}}$,

5) $\int ctg^4 xdx$, 6) $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+x-2}}dx$, 7) $\int x\ln(x^2+1)dx$, 8) $\int x^2 e^{2x}dx$,

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, 10) $\int \sqrt{3-x^2}dx$.

7. 1) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$, 2) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$, 3) $\int x\sin x^2 dx$, 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$,

5) $\int tg^2 x\cdot \sec^4 xdx$, 6) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$, 7) $\int \sqrt{x}\ln xdx$, 8) $\int x^2 \sin xdx$,

9) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$, 10) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

8. 1) $\int \frac{(3-\sqrt{x})^3}{x^2}dx$, 2) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5}dx$, 3) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx$, 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$,

5) $\int \sin^2 x\cdot\cos^5 xdx$, 6) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx$, 7) $\int x^2\cdot e^{3x}dx$, 8) $\int x\ln xdx$,

9) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$, 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

9. 1) $\int \frac{x^5+x+\sqrt[3]{x}}{x^2}dx$, 2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+7}}$, 3) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$, 4) $\int \frac{4xdx}{\sqrt{1-x^4}}$,

5) $\int tg^4 xdx$, 6) $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}dx$, 7) $\int (2x+3)\ln xdx$, 8) $\int x\cdot\cos xdx$,

9) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$, 10) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

10. 1) $\int \frac{xdx}{2x^2-1}$, 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$, 3) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{1+\cos^2 x}}dx$, 4) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$,

5) $\int \sec^4 2xdx$, 6) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$, 7) $\int x^2\cos 6xdx$, 8) $\int (2-x)\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx$,

9) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$, 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$.

11. 1) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx$, 2) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$, 3) $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}}dx$, 4) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$,

5) $\int tg^3 \frac{x}{3}dx$, 6) $\int \frac{2x-3}{x^2+2x-7}dx$, 7) $\int x^2\cdot 5^{\frac{x}{2}}dx$, 8) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$,

9) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$, 10) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

12. 1) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$, 2) $\int \frac{x}{e^{x^2}}dx$, 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, 4) $\int \frac{3^{arctgx}}{1+x^2}dx$,

5) $\int \cos^5 x dx$, 6) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx$, 7) $\int x^2 \sin 4x dx$, 8) $\int x^4 \ln(x^2+1)dx$,

9) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$, 10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

13. 1) $\int 2x\sqrt{x^2+4}\,dx$, 2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-2)^3}}$, 3) $\int \frac{2+\ln x}{2x}dx$, 4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{5+x^6}}$,

5) $\int \sin^5 x dx$, 6) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2+6x-16}}dx$, 7) $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$, 8) $\int x^3 arctgx dx$,

9) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$, 10) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4}dx$.

14. 1) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$, 2) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x-7}}{x}dx$, 3) $\int xe^{x^2}dx$, 4) $\int \frac{x^2 dx}{4+x^6}$,

5) $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx$, 6) $\int \frac{4x+3}{\sqrt{x^2-6x+4}}dx$, 7) $\int \arcsin x dx$, 8) $\int \frac{\ln x}{x^5}dx$,

9) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+9}}$, 10) $\int \sqrt{4-x^2}dx$.

15. 1) $\int \frac{xdx}{e^{x^2-1}}$, 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x+10}}$, 3) $\int (2x\sqrt{x}-7x)^2 dx$, 4) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$,

5) $\int \sin^2 x dx$, 6) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+10x-21}}dx$, 7) $\int x^2 \sin(3x+5)dx$,

8) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$, 9) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$, 10) $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-9}}$.

16. 1) $\int \frac{e^{3x}dx}{1-e^{3x}}$, 2) $\int \sqrt{2-\cos x}\cdot \sin x dx$, 3) $\int \frac{1-arctgx}{1+x^2}dx$, 4) $\int \frac{(2x\cdot\sqrt{x}-3)^2}{x}dx$,

5) $\int \cos^2 x dx$, 6) $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+4x-12}}dx$, 7) $\int x\cdot arctgx dx$, 8) $\int x^3 \cdot \ln x dx$,

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$, 10) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$.

Тема 9. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Задачи для контрольной работы

ЗАДАНИЕ № 1 Вычислить интегралы:

1. 1) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ 2) $\int_0^1 x^2 e^x dx$.
2. 1) $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}dx$ 2) $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$.
3. 1) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos xdx$.
4. 1) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ 2) $\int_1^3 x\ln xdx$.
5. 1) $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$ 2) $\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot arctgxdx$.
6. 1) $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$ 2) $\int_0^{2\pi} x^2\cos xdx$.
7. 1) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$ 2) $\int_0^1 xe^{-x}dx$.
8. 1) $\int_1^9 x\cdot\sqrt[3]{1-x}dx$ 2) $\int_0^{\pi} x\cdot\sin xdx$.
9. 1) $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$ 2) $\int_{\pi}^0 x\cdot\cos xdx$.
10. 1) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos xdx$.
11. 1) $\int_0^5 x\sqrt{x+4}dx$ 2) $\int_0^1 \ln(x+5)dx$.
12. 1) $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx$ 2) $\int_0^1 xe^{-x}dx$.
13. 1) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$ 2) $\int_0^3 \ln(x+3)dx$.
14. 1) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$ 2) $\int_1^e \ln xdx$.
15. 1) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$ 2) $\int_1^2 x\ln(x+1)dx$.
16. 1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ 2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin xdx$.

ЗАДАНИЕ № 2 Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1. 1) $y=6x-x^2$ и $y=0$. 2) $y^2=x^3$, $x=0$ и $y=4$.
2. 1) $y=x^2+4x$ и $x-y+4=0$. 2) $xy=6$ и $y=7-x$.
3. 1) $y=x^3$ и $y=x$. 2) $y=x^2-6x+10$ и $y=x$.
4. 1) $y=x^3$ и $y=2x$. 2) $x^2=9y$ и $x=3y-6$.
5. 1) $y^2=4x$ и $y=x$. 2) $y=2-x^2$ и $y^3=x^2$.
6. 1) $y^2=4x$ и $y=\frac{1}{4}x^2$. 2) $x=2-y-y^2$ и $x=0$.
7. 1) $3y=x^2$ и $3x=y^2$. 2) $y=6x-x^2-5$ и $y=0$.
8. 1) $y=x^2-3x$ и $y=4-3x$. 2) $y=x^2-5x+6$, $x=0$ и $y=0$ (прилегающую к обеим осям).
9. 1) $y=2x-x^2$ и $y=x$. 2) $y^2=x^3$, $x=0$ и $y=1$.

10. 1) $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y=4-x$. 2) $y^3=x^2$ и $y=1$.

11. 1) $x=y^2$ и $x=\frac{3}{4}y^2+1$. 2) $y=\ln x$, $x=e$ и $y=0$.

12. 1) $y=x^2$ и $2x-y+3=0$. 2) $xy=6$, $x=1$, $x=e$ и $y=0$.

13. 1) $y=4-x^2$ и $y=0$. 2) $y^2=9x$, и $y=3x$.

14. 1) $y=\frac{1}{2}x^2$ и $x+2y-6=0$. 2) $y=x^2$, и $y^2=x$.

15. 1) $4x=y^2$ и $4y=x^2$. 2) $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ и $y=1$.

16. 1) $y=x^2$ и $y=x+2$. 2) $x=8y-y^2-7$ и $x=0$.

ЗАДАНИЕ № 3 Найти объемы тел, образованных вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями:

1. 1) $xy=5$, $y=0$, $x=1$, $x=5$. 2) $y^2=x^3$, $x=1$, $y=0$.
2. 1) $y=9-x^2$, $y=0$. 2) $2x+3y-6=0$, $x=0$, $y=0$.
3. 1) $y=2x-x^2$ $y=0$. 2) $xy=2$, $x=2$, $x=4$.
4. 1) $y=\sqrt{5-x}$, $x=-5$, $y=0$. 2) $y=x^2$, $2x-y+3=0$.
5. 1) $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$. 2) $y=x^2-9$, $y=0$.
6. 1) $y=\ln x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$. 2) $y=4x-x^2$, $y=0$.
7. 1) $y=-x^2+8$, $y=x^2$. 2) $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$.
8. 1) $2y^2=x^3$, $x=4$. 2) $y=e^x$, $x=0$, $y=0$, $x=1$.
9. 1) $y^2=2x$, $x=3$, $y=0$. 2) $y^2=x^3$, $y=0$, $x=1$.
10. 1) $y^2=2x$, $2x=3$. 2) $y=8x-x^2$, $y=0$.
11. 1) $y^2=9x$, $y=3x$. 2) $xy=1$, $x=1$, $x=5$.
12. 1) $y=\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$. 2) $y^2=4x$, $x=4$, $y=0$.
13. 1) $y=x^2+1$, $y=0$, $x=-2$, $x=2$. 2) $xy=2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.
14. 1) $xy=4$, $2x+y-6=0$. 2) $y^2=2x$, $x^2=2y$.
15. 1) $y=3x-x^2$, $y=0$. 2) $xy=1$, $y=0$, $x=1$, $x=3$.
16. 1) $y=e^{2x}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$. 2) $5x+3y-15=0$, $y=0$, $x=0$.

Тема 10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задачи для контрольной работы

ЗАДАНИЕ . Решить дифференциальные уравнения:

1. 1) $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$, 2) $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$,

 3) $y'-\frac{y}{x}=x^2$, $y(1)=1$, 4) $y'-y\cdot ctgx=2x\sin x$,

5) $yy'' - (y')^2 = 0$,

6) $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 4x - 17$,

7) $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.

2. 1) $\sqrt{4+y^2}\,dx - ydy = x^2 ydy$,

2) $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0$,

3) $y' + y \cdot tgx = \cos^2 x$,

4) $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x$,

5) $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$,

6) $y'' - 3y' = x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\dfrac{2}{7}$,

7) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \cdot \sin 6x$.

3. 1) $\sqrt{3+y^2}\,dx - ydy = x^2 ydy$,

2) $6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx$,

3) $y' - \dfrac{1}{x+1} \cdot y = e^x (x+1)$,

4) $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x, \quad y(\pi) = 2\pi$,

5) $xy'' - y' = 0$,

6) $y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x}$,

7) $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$.

4. 1) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$,

2) $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$,

3) $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x$,

4) $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = \dfrac{2}{7}$,

5) $3y \cdot y'' + (y')^2 = 0$,

6) $y'' - 6y' - 7y = 32e^{3x}$,

7) $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.

5. 1) $6xdx - 6ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$,

2) $x\sqrt{5+y^2}\,dx + y\sqrt{4+x^2}\,dy = 0$,

3) $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}\,y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = 2$,

4) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x} \cdot e^x$,

5) $yy'' + (y')^2 = 0$,

6) $y'' - 2y' = 6x^2 - 10x + 12$,

7) $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.

6. 1) $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$,

2) $\sqrt{4-x^2} \cdot y' + xy^2 + x = 0$,

3) $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}, \quad y(1) = 5$,

4) $y' + \dfrac{xy}{2(1-x^2)} = \dfrac{x}{2}$,

5) $2yy'' = 1 + (y')^2$,

6) $y'' - 4y' + 3y = x - 1$,

7) $y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x)$.

7. 1) $2xdx - 2ydy = x^2 ydy - 2xy^2 dx$,

2) $x\sqrt{4+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$,

3) $y' + \dfrac{2}{x}\,y = x^3$,

4) $y' - \dfrac{2}{x+1}\,y = e^x(x+1)^2, \ y(0) = 2$,

5) $y'' x \ln x = y'$,

6) $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15$,

7) $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$.

8. 1) $\left(e^x+8\right)dy-ye^x dx=0$, 2) $6xdx-ydy=yx^2dy-3xy^2dx$,

3) $y'+\dfrac{y}{x}=3x, \quad y(1)=3$, 4) $y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=1+x^2$,

5) $yy''+2(y')^2=0$, 6) $y''-2y'+y=e^x$,

7) $y''-4y'+4y=e^{2x}\cdot\sin 3x$.

9. 1) $y\ln y+xy'=0$, 2) $\sqrt{1-x^2}\cdot y'+xy^2+x=0$,

3) $y'+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{2}{x^3}, \quad y(1)=2$, 4) $y'+2xy=x\cdot e^{-x^2}\cdot\sin x$,

5) $2xy''=y'$, 6) $y''+2y'-8y=12e^{2x}$,

7) $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cdot\cos 4x$.

10. 1) $\left(1+e^x\right)y'=ye^x$, 2) $6xdx-2ydy=2yx^2dy-3xy^2dx$,

3) $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$, 4) $y'+y=\dfrac{1}{e^x}, \ y(0)=1$,

5) $2(y')^2=y''(y-1)$, 6) $y''+4y'-5y=x$,

7) $y''+y=2\cos 3x-3\sin 3x$.

11. 1) $y(1+\ln y)+xy'=0$, 2) $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}\cdot y\cdot y'=0$,

3) $y'+\dfrac{y}{x}=x^2$, 4) $y'+2xy=xe^{-x^2}, \ y(0)=2$,

5) $(1+x^2)y''-2xy'=0$, 6) $2y''+y'-y=2e^x$,

7) $y''+2y'+5y=-2\sin x$.

12. 1) $(3+e^x)yy'=e^x$, 2) $xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$,

3) $y'-y\cdot tgx=\dfrac{2x}{\cos x}, \ y(0)=4$, 4) $xy'-y=x^3$,

5) $2yy''=(y')^2$, 6) $y''-3y'+2y=e^x$,

7) $y''-4y'+8y=e^x\left(-3\sin x+4\cos x\right)$.

13. 1) $\sqrt{5+y^2}dx+4(x^2y+y)dy=0$, 2) $(1+e^{x)})yy'=e^x$,

3) $y'+\dfrac{x}{1-x^2}\cdot y=1$, 4) $y'-\dfrac{y}{x}=2, \ y(1)=-1$,

5) $xy''-y'=0$, 6) $y''-2y'+2y=6e^{2x}$,

7) $y''+2y'=10e^x(\sin x+\cos x)$.

14. 1) $3(x^2y+y)dy+\sqrt{2+y^2}dx=0$, 2) $2xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$,

3) $y'-4y=e^{2x}$, 4) $y'-\dfrac{xy}{x^2+1}=x, \ y(0)=1$,

5) $y''+2y(y')^3=0$, 6) $y''-4y'+4y=e^{2x}$,

7) $y''-4y'+4y=e^{2x}\cdot\sin 5x$.

15. 1) $\sqrt{5+y^2}+y'\cdot y\sqrt{1-x^2}=0$, 2) $2x+2xy^2+\sqrt{2-x^2}\cdot y'=0$,

3) $y'+2xy=xe^{-x^2}$, $y(0)=-2$, 4) $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\ln x+1}{x}$,

5) $(1+x^2)y''-2xy'=0$, 6) $y''-y'-2y=e^{2x}$,

7) $y''+y=2\cos 5x+3\sin 5x$.

16. 1) $(xy^2+y^2)dx+(x^2-x^2y)dy=0$, 2) $x^2y'+y=0$,

3) $y'+2y=4x$, 4) $y'+y\cdot tgx=\dfrac{1}{\cos x}$, $y(0)=-3$,

5) $y''\cdot tgy=2(y')^2$, 6) $y''+6y'+5y=25x^2-2$,

7) $y''+2y'+5y=-17\sin 2x$.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

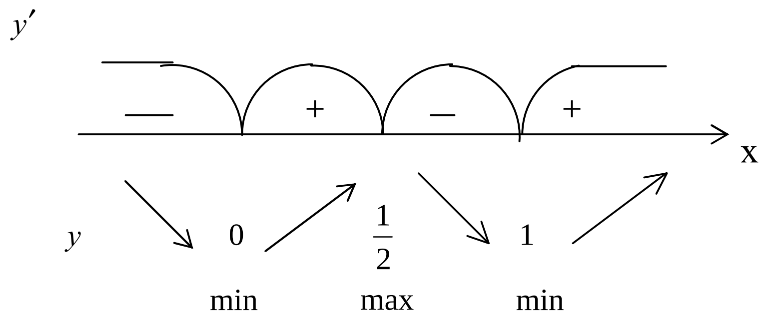
Тема 6. Приложение дифференциального исчисления

1) Исследовать на экстремум функцию $y=x^2(1-x)^2$.

Решение. Найдем точки, подозрительные на экстремум. Для этого возьмем производную y' и приравняем ее нулю.

$$y'=\left(x^2(1-x)^2\right)'=\left(x^2\right)'(1-x)^2+x^2\left((1-x)^2\right)'=2x(1-x)^2+x^2\cdot 2(1-x)(-1)=2x(1-x)^2-2x^2(1-x)$$
$$=2x(1-x)[1-x-x]=2x(1-x)(1-2x)=2x(x-1)(2x-1)$$

$y'=0$ при $x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3=\dfrac{1}{2}$.



На тех интервалах, где $y' < 0$, функция убывает; где $y' > 0$, функция возрастает. Поэтому интервалы возрастания функции $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $(1, \infty)$, интервалы убывания функции $(-\infty, 0)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

По рисунку видно, что в точках $x = 0$ и $x = 1$ функция принимает свои минимальные значения, а при $x = \frac{1}{2}$ - максимальное. Найдем эти значения:

$$y_{\min}(0) = 0, \quad y_{\min}(1) = 0,$$

$$y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Ответ: $y_{\min}(0) = y_{\min}(1) = 0, \quad y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$.

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ на отрезке $[-2, 0]$.

Решение. Так как свои наименьшее и наибольшее значения непрерывная на отрезке функция может принимать либо на концах этого отрезка, либо в точках экстремума, входящих в этот отрезок, то находим значения исследуемой функции во всех этих точках и среди них выбираем наибольшее и наименьшее значения.

$$y(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 5 = -8 - 12 + 18 + 5 = 3;$$

$$y(0) = 5;$$

$$y' = (x^3 - 3x^2 - 9x + 5)' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3).$$

$y' = 0$ при $x^2 - 2x - 3 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}.$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1.$$

Найдем значение функции только при $x = -1$, так как $3 \notin [-2, 0]$.

$$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = -1 - 3 + 9 + 5 = 10.$$

Выбираем наибольшее значение функции из найденных трех чисел; это 10. Теперь наименьшее – это 3.

Ответ: $y_{наиб}(-1) = 10, \quad y_{наим}(-2) = 3.$

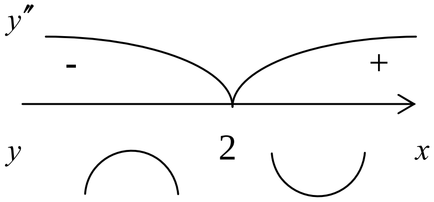
3) Найти точки перегиба функции $y = x \cdot e^{-x}$.

Решение. Так как точками перегиба являются те точки из области допустимых значений, где вторая производная y'' меняет знак, то сначала найдем y', затем y'' и приравняем y'' нулю.

$$y' = \left(xe^{-x}\right)' = (x)' e^{-x} + x\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$y'' = (y')' = \left(e^{-x} - xe^{-x}\right)' = -e^{-x} - \left(e^{-x} - xe^{-x}\right) = -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$$

$y'' = 0$ при $x = 2$, так как $e^{-x} > 0$ для всех x.



Так как в точке $x = 2$ y'' изменила знак, то функция y изменила выпуклость на вогнутость, т.е. $x = 2$ - точка перегиба функции.

Ответ: $x = 2$ - точка перегиба.

4) Найти асимптоты графика $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$.

Так как вертикальную асимптоту имеет функция с разрывом 2-го рода в точке $x = x_0$, то сначала найдем точки разрыва и исследуем поведение функции в их окрестностях.

О.Д.З. $x \neq -1$.

Значит, $x = -1$ - точка разрыва, так как функция в этой точке не определена. Найдем предел слева и предел справа функции $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$ при подходе к точке $x = -1$. И выясним, разрыв какого рода терпит данная функция в этой точке.

$$\lim_{\substack{x \to -1-0 \\ x<-1}} \frac{2x^2}{x+1} = \left| \begin{matrix} x+1 \to -0 \\ \dfrac{1}{x+1} \to -\infty \end{matrix} \right| = -\infty.$$ Предел слева равен $-\infty$.

$$\lim_{\substack{x \to -1+0 \\ x>-1}} \frac{2x^2}{x+1} = \left| \begin{matrix} x+1 \to +0 \\ \dfrac{1}{x+1} \to +\infty \end{matrix} \right| = +\infty.$$ Предел слева равен $+\infty$.

Так как односторонние пределы бесконечны, то в точке $x = -1$ разрыв 2-го рода, поэтому уравнение вертикальной асимптоты $x = -1$.

Функция также может иметь или не иметь наклонные асимптоты. Если они есть, то их уравнение $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}; \quad \mathrm{b} = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right).$$

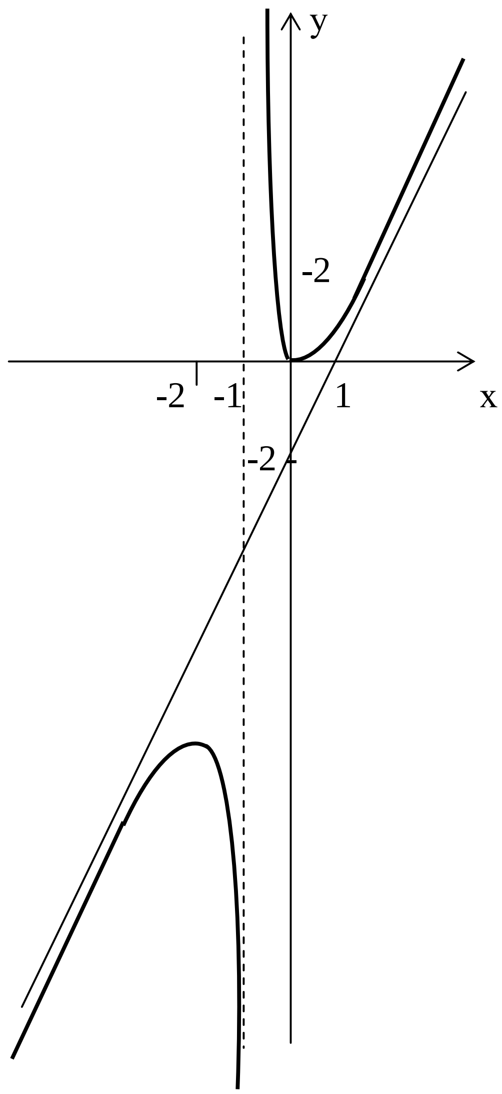
Найдем правую наклонную асимптоту при $x \to +\infty$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x+1} : \mathrm{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left|\begin{matrix}\text{применяем}\\ \text{правило Лопиталя}\end{matrix}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(x+1)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1} =$$

$$= 2 \Rightarrow \quad k = 2.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x+1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 - 2x(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2 - 2x^2 - 2x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left|\begin{matrix}\text{По правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{(-2x)'}{(x+1)'} = -2 \Rightarrow \quad b = -2.$$



Подставляем в уравнение асимптоты $y = kx + b$ и получаем уравнение правой асимптоты $y = 2x - 2.$

Найдем левую асимптоту при $x \to -\infty$. Повторяя все предыдущие действия, как и для $x \to +\infty$, получаем уравнение левой асимптоты $y = 2x - 2.$

Ответ: Вертикальная асимптота $x = -1.$ Наклонная асимптота $y = 2x - 2$.

5) Исследовать функцию и построить ее график $y=\dfrac{x^3}{2(x^2+1)}$.

Исследование функции будем проводить по плану.

1. Найдем О.Д.З. и, если есть асимптоты О.Д.З. , $x-$ любое. Следовательно, нет точек разрыва, поэтому вертикальных асимптот нет.

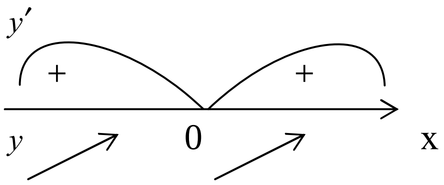
2. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат, исследуем функцию на четность, тригонометрические функции - на периодичность. Пусть $x=0$, тогда $y=0$. Точка (0,0). Проверим четность функции.

$y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{2\left((-x)^2+1\right)}=\dfrac{-x^3}{2(x^2+1)}=-y(x)$. Значит, наша функция нечетная, и ее график симметричен относительно начала координат.

3. Исследуем монотонность функции с помощью y'.

$$y'=\left(\frac{x^3}{2(x^2+1)}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2(x^2+1)-2x\cdot x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$y'=0$ при $x=0$



Получаем, что функция $y=\dfrac{x^3}{2(x^2+1)}$ всюду возрастающая, не имеющая точек экстремума, так как нет ни одной точки, в y' равен нулю или бесконечности.

4. С помощью y'' находим точки перегиба

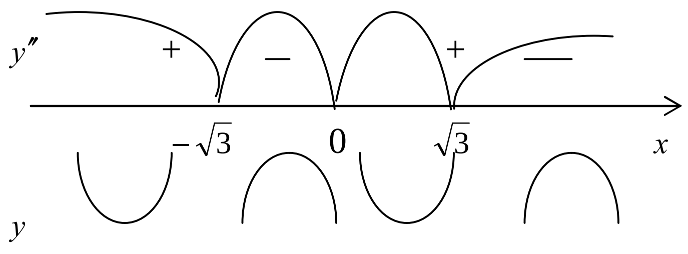
$$y''=(y')'=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}\right)'=\frac{1}{2}\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-2(x^2+1)2x(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2x(2x^2+3)(x^2+1)^2-2x(x^2+1)(2x^4+6x^2)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{2x(x^2+1)}{2}\frac{(2x^2+3)(x^2+1)-(2x^4+6x^2)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=x\frac{2x^4+3x^2+2x^2+3-2x^4-6x^2}{(x^2+1)^3}=x\frac{3-x^2}{(x^2+1)^3}.$$

$y'' = 0$ при $x = 0$ и $3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.



Все точки, в которых $y'' = 0$, являются точками перегиба, так как в них y'' меняет знак на противоположный.

Найдем значения функции в этих точках :

$$y\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{2\left((-\sqrt{3})^2 + 1\right)} = \frac{-3\sqrt{3}}{2 \cdot 4} \approx -0{,}65,\ y(0) = 0,\ y\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx +0{,}65\ .$$

5. Найдем наклонные асимптоты, если они есть $y = kx + b$.

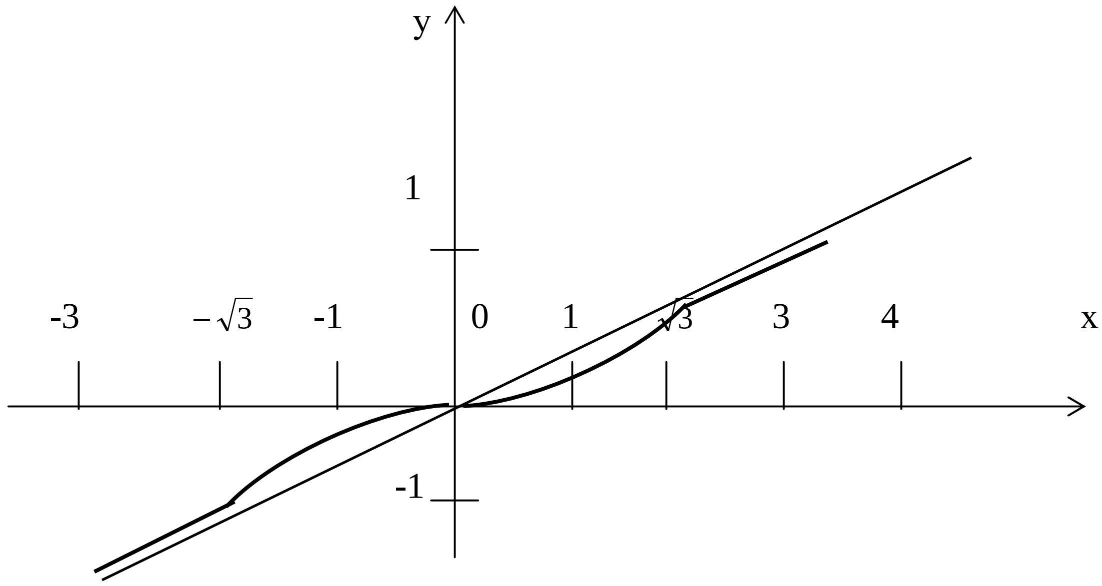
Сначала $x \to +\infty$, тогда $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2(x^2+1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left|\begin{matrix}\text{по правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right| =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^2)'}{2(x^2+1)'} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$ Теперь найдем $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - k(x)\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2(x^2+1)} - \frac{\overset{x^2+1}{x}}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3 - x^3 - x}{2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(x^2+1)'} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0 \Rightarrow \mathrm{b} = 0.$$

Получаем $y = \frac{x}{2}$ - уравнение правой асимптоты. Повторяя прежние рассуждения, уже при $x \to -\infty$ получим уравнение левой асимптоты $y = \frac{x}{2}$.

6. Теперь строим график функции, начертив сначала все асимптоты, отметив точки экстремума, точки перегиба и точки пересечения с осями координат.



Тема 7. Функции нескольких переменных

1) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = e^{xy} - \cos\frac{x}{y}$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{xy} - \cos\frac{x}{y}\right)'_x = \left|\begin{matrix}\text{Считаем при этом переменную} \\ \text{"у" постоянной величиной}\end{matrix}\right| = \left(e^{xy}\right)'_x - \left(\cos\frac{x}{y}\right)'_x = e^{xy}(xy)'_x + \sin\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x =$$

$$= e^{xy}\cdot y(x)'_x + \sin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}(x)'_x = ye^{xy} + \frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\left(\text{т.к.}\quad (\text{x})'_\text{x} = 1\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{xy} - \cos\frac{x}{y}\right)'_y = \left|\begin{matrix}\text{Считаем при этом} \\ \text{переменную "x"} \\ \text{постоянной величиной}\end{matrix}\right| = \left(e^{xy}\right)'_y - \left(\cos\frac{x}{y}\right)'_y = e^{xy}\cdot x(y)'_y + \sin\frac{x}{y}\cdot x\left(\frac{1}{y}\right)'_y =$$

$$= x\cdot e^{xy} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}\left(\text{т.к. } (\text{y})'_\text{y} = 1; \left(\frac{1}{y}\right)'_y = (y^{-1})'_y = -y^{-2} = -\frac{1}{y^2}\right).$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} + \frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}$.

2) Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ при $z = \ln\frac{x+y}{y}$.

Решение. Сначала найдем первые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\frac{x+y}{y}\right)'_x=\frac{1}{\frac{x+y}{y}}\left(\frac{x+y}{y}\right)'_x=\frac{\cancel{y}}{x+y}\cdot\frac{1}{\cancel{y}}(x+y)'_x=\frac{1}{x+y},\ \left(\text{т.к. } (x+y)'_x=1+0=1\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\frac{x+y}{y}\right)'_y=\frac{1}{\frac{x+y}{y}}\left(\frac{x+y}{y}\right)'_y=\frac{y}{x+y}\cdot\frac{(x+y)'_y\cdot y-(y)'_y(x+y)}{y^2}=$$

$$\frac{\cancel{y}}{x+y}\cdot\frac{1\cdot y-1\cdot(x+y)}{y^{\cancel{2}}}=\frac{1}{x+y}\cdot\frac{\cancel{y}-x-\cancel{y}}{y}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x+y}=-\frac{x}{y(x+y)}.$$

Теперь находим смешанные вторые частные производные и сравниваем их.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y(x+y)}\right)=-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{x+y}\right)'_x=$$

$$=-\frac{1}{y}\cdot\frac{(x)'_x(x+y)-(x+y)'_x\cdot x}{(x+y)^2}=-\frac{1}{y}\cdot\frac{1\cdot(x+y)-1\cdot x}{(x+y)^2}=-\frac{1}{y}\cdot\frac{x+y-x}{(x+y)^2}=-\frac{1}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}}{(x+y)^2}=-\frac{1}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y}\right)=\left((x+y)^{-1}\right)'_y=-(x+y)^{-2}(x+y)'_y=-\frac{1}{(x+y)^2}(0+1)=-\frac{1}{(x+y)^2}.$$

Видим, что смешанные производные равны, что и требовалось показать.

3) Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{2{,}01^3+0{,}98^2}$.

Решение. Введем функцию двух переменных $z=\sqrt{x^3+y^2}$. Так как 2,01=2+0,01, то $x_0=2,\ \ \Delta x=0{,}01$. Аналогично, так как 0,98 = 1 - 0,02, то $y_0=1,\ \ \Delta y=-0{,}02$. Воспользуемся тем, что $\Delta z\approx dz$ при малых Δx и Δy. Так как $\Delta z=z(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-z(x_0+y_0)$, то отсюда $z(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)=z(x_0,y_0)+\Delta z(x_0,y_0)$.

Заменим приращение функции Δz ее дифференциалом $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$,

где $dx\equiv\Delta x,\ \ dy\equiv\Delta y$. Тогда $z(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\approx z(x_0,y_0)+\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y$.

Т.е. в нашем случае $z(2+0{,}01,\ \ 1-0{,}02)\approx z(2{,}1)+\frac{\partial z(2{,}1)}{\partial x}0{,}01+\frac{\partial z(2{,}1)}{\partial y}(-0{,}02)$.

Вычислим $z(2{,}1)=\sqrt{2^3+1^2}=3$. Найдем $\frac{\partial z(2{,}1)}{\partial x}$. Для этого сначала найдем частную производную z по x в произвольной точке.

$$\frac{\partial z}{\partial \text{x}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^3+y^2}\right)=\left(\left(x^3+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'_x=\frac{1}{2}\left(x^3+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x^3+y^2\right)'_x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3+y^2}}\left(3x^2+0\right)=\frac{3x^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3+y^2}};$$

$$\frac{\partial z(2,1)}{\partial x}=\frac{3(2)^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2^3+1^2}}=\cancel{\frac{3\cdot 4^2}{2}}\cdot\cancel{\frac{1}{3}}=2.$$

Теперь найдем $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^3+y^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3+y^2}}\left(x^3+y^2\right)'_y=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3+y^2}}(0+2y)=\frac{y}{\sqrt{x^3+y^2}};$

$$\frac{\partial z(2,1)}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{2^3+1^2}}=\frac{1}{3}.$$

Находим искомое значение корня

$$\sqrt{2{,}01^3+0{,}98^2}\approx 3+2\cdot 0{,}01+\frac{1}{3}\cdot(-0{,}02)\approx 3+0{,}02-0{,}0067\approx 3{,}0133.$$

Если найти $\sqrt{2{,}01^3+0{,}98^2}$ на калькуляторе, то получим $\approx 3{,}01347$. Разница только в четвертом знаке после запятой.

Ответ: $\sqrt{2{,}01^3+0{,}98^2}\approx 3{,}013$.

4) Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+y^2-xy+2x-3y+4$.

Найдем сначала стационарные точки, т.е. те точки, в которых частные производные одновременно равны нулю.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=2x-y+2,\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=2y-x-3,\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}2x-y+2=0\\ 2y-x-3=0.\end{cases}$$

Изменим порядок во втором уравнении и приведем систему линейных уравнений к стандартному виду, чтобы ее можно было решить методом Крамера.

$$\begin{cases}2x-y=-2\\ -x+2y=3\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-(-1)(-1)=4-1=3,$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=(-2)2-(-1)\cdot 3=-4+3=-1,$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=6-(-2)(-1)=6-2=4,\quad x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3},\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{4}{3}.$$

Нашли одну стационарную точку, в которой $z'_x = z'_y = 0$, это точка $M_0\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Выясним с помощью вторых производных, есть ли в M_0 экстремум и, если есть, какой.

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x - y + 2) = 2,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2y - x - 3) = 2,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2y - x - 3) = -1.$$

Составляем определитель $Д = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & B \\ \mathrm{B} & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)(-1) = 4 - 1 = 3 > 0$.

Так как $Д > 0$, то экстремум существует. Так как $A = 2 > 0$, то в стационарной точке M_0 функция имеет минимум. Найдем его.

$$z_{\min}\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right) + 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 3 \cdot \frac{4}{3} + 4 = \frac{1}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} - 4 + 4 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $\mathrm{z}_{\min}\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$.

5) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x + 2y + y^2 - x^2 + xy$ в треугольнике со сторонами $x + y = 2,\ x = 1,\ y = 0$.

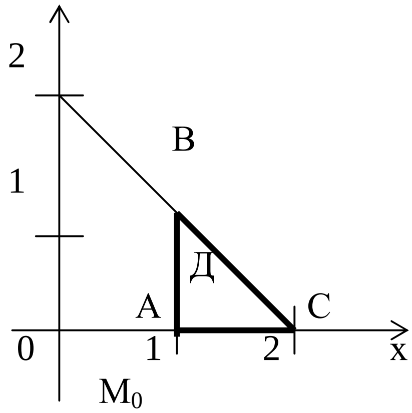
Решение. Так как свои наибольшее и наименьшее значения непрерывная функция может иметь или в стационарной точке внутри рассматриваемой области или на границе этой области, то задачу будем решать в два действия. Найдем стационарные точки и значения функции в тех из них, которые лежат в рассматриваемой области.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 - 2x + y = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 + 2y + x = 0, \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -2, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5, \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7,$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{y}{5} = 0{,}8, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{7}{5} = -1{,}4.$$



Точка $M_0(0{,}8;-1{,}4)\notin$ треугольнику $Д$, поэтому значение функции в этой точке не вычисляем. Переходим ко второму действию. Треугольник $Д$ ограничивают три прямые. Будем исследовать функцию на экстремум на каждой из них. Сначала найдем значения функции в вершинах треугольника.

$z_A = z(1{,}0) = 3\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0^2 - 1^2 + 1\cdot 0 = 3 - 1 = 2,$
$z_B = z(1{,}1) = 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 1 = 6,$
$z_c = z(2{,}0) = 3\cdot 2 + 2\cdot 0 + 0^2 - 2^2 + 2\cdot 0 = 2.$

Рассмотрим границу AB: $x = 1$. Подставляя $x = 1$ в выражение функции, получим

$z = 3\cdot 1 + 2y + y^2 - 1^2 + 1\cdot y = y^2 + 3y + 2.$

Получили задачу на экстремум для функции одной переменной. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = y^2 + 3y + 2$ на отрезке $[0{,}1]$. Находим $z' = 2y + 3 = 0.$ $z' = 0$ при $y = -\dfrac{3}{2}$, а это значение y не входит в рассматриваемый отрезок $[0{,}1]$. На концах отрезка значения функции уже подсчитаны, это z_A и z_B.

Переходим к границе AC: $y = 0$. Подставляя $y = 0$ в выражение функции, получим $z = 3x + 2\cdot 0 + 0^2 - x^2 + x\cdot 0 = 3x - x^2$.

Снова решаем задачу для функции одной переменной. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x - x^2$ на отрезке $[1{,}2]$.

Находим $z' = 3 - 2x = 0.$ $z' = 0$ при $x = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$. Эта точка входит в отрезок $[1{,}2]$. Поэтому вычислим значение функции в этой точке. $z\left(\dfrac{3}{2}\right) = 3\dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} = 2{,}25$. На концах отрезка значения функции подсчитаны заранее, это z_A и z_C.

Рассматриваем третью границу BC: $x+y=2$. Выразим $y=2-x$ и подставим в выражение функции

$z=3x+2(2-x)+(2-x)^2-x^2+x(2-x)=3x+4-2x+4-4x+x^2-x^2+2x-x^2=8-x-x^2$.

Ищем наибольшее и наименьшее значения функции $z=8-x-x^2$ на отрезке $[1,2]$.

Находим $z'=-1-2x$. $z'=0$ при $x=-\dfrac{1}{2}$, а это значение x не входит в $[1,2]$. Теперь выбираем из найденных значений функции z наибольшее. Это значение равно 6 в точке $B(1,1)$. А наименьшее значение принимается в двух точках $A(1,0)$ и $C(2,0)$.

Ответ: $z_{\text{наиб.}}(1,1)=6$, $z_{\text{наим.}}(1,0)=z_{\text{наим.}}(2,0)=2$.

6) Найти производную функции $z=3x^2-4y^3+2xy^2-5x+7y-1$ в точке $A(0,1)$ в направлении от этой точки к точке $B(4,4)$.

Решение. Напишем формулу производной функции по направлению вектора $\vec{n}$.

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial n}\right|_A=\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_A\cdot\cos\alpha+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_A\cdot\cos B$, где $(\cos\alpha,\cos\beta)=\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$- орт направления вектора $\vec{n}$.

Сначала найдем вектор $\vec{n}$, в направлении которого будем искать производную. $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=$ $(4-0;4-1)=(4;3)$. Найдем длину $\vec{n}$. $|\vec{n}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$. Направляющие косинусы вектора $\vec{n}$ совпадают с координатами орта $\vec{n}$, поэтому $cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{5}$.

Теперь найдем частные производные функции z.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(3x^2-4y^3+2xy^2-5x+7y-1\right)'_x=6x+2y^2-5,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A=6\cdot0+2\cdot1^2-5=2-5=-3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(3x^2-4y^3+2xy^2-5x+7y-1\right)'_y=-12y^2+4xy+7,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A=-12\cdot1^2+4\cdot0\cdot1+7=-12+7=-5.$$

Все найденные значения подставляем в формулу производной по направлению.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_A=(-3)\cdot\frac{4}{5}+(-5)\cdot\frac{3}{5}=\frac{-12-15}{5}=-\frac{27}{5}.$$

Вывод. Функция z убывает по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, так как полученная производная меньше нуля.

Ответ: $\left.\dfrac{\partial z}{\partial n}\right|_A = -\dfrac{27}{5}$.

7) Найти формулу вида $y = ax + b$ методом наименьших квадратов по данным опыта.

x	1	2	3	4	5
y	3,3	4,0	2,8	0,9	1,2

Решение. Нужно провести прямую $y = ax + b$ так, чтобы сумма квадратов расстояний от точек, данных в таблице, до искомой прямой была наименьшей. Для этого составляется функция S, которая зависит от двух переменных a и b и находится точка ее минимума.

$S = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + (ax_3 + b - y_3)^2 + (ax_4 + b - y_4)^2 + (ax_5 + b - y_5)^2$. Это можно записать короче : $S = \sum\limits_{i=1}^{5} (ax_i + b - y_i)^2$. Находим стационарную точку.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a} = 2\sum\limits_{i=1}^{5} x_i (ax_i + b - y_i) = 0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial b} = 2\sum\limits_{i=1}^{5} (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

Перепишем эти уравнения так, чтобы потом можно было решить полученную систему линейных уравнений относительно a и b методом Крамера.

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{5} x_i = \sum\limits_{i=1}^{5} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{5} x_i + nb = \sum\limits_{i=1}^{5} y_i \end{cases}$$

Найдем коэффициенты при a и b .Для этого составим таблицу.

i	x_i	x_i^2	y_i	$x_i \cdot y_i$
1	1	1	3,3	3,3
2	2	4	4,0	8,0
3	3	9	2,8	8,4
4	4	16	0,9	3,6
5	5	25	1,2	6,0
Σ	15	55	12,2	29,3

Внизу получились в результате суммирования нужные коэффициенты. Подставляем их в систему:

$$\begin{cases} 55a + 15b = 29{,}3 \\ 15a + 5b = 12{,}2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} = 50, \quad \Delta a = \begin{vmatrix} 29{,}3 & 15 \\ 12{,}2 & 5 \end{vmatrix} = -36{,}5, \quad \Delta b = \begin{vmatrix} 55 & 29{,}3 \\ 15 & 12{,}2 \end{vmatrix} = 231{,}5.$$

$a = \dfrac{\Delta a}{\Delta} = \dfrac{-36{,}5}{50} = -0{,}73, \qquad b = \dfrac{\Delta b}{\Delta} = \dfrac{231{,}5}{50} = 4{,}63.$ **Ответ:** $y = -0{,}73x + 4{,}63.$

Тема 8. Неопределенный интеграл

Вычислить интегралы:

1)

$$I = \int \frac{x^2 dx}{(5+4x^3)^4} = \left| \begin{array}{l} \text{Делаем замену переменных. Так как } \mathrm{x}^2 - \text{это почти производная } \mathrm{x}^3, \\ \text{то за t можно взять } \mathrm{x}^3, \text{а лучше } \mathrm{t} = 5 + 4\mathrm{x}^3, \text{тогда } \mathrm{dt} = \mathrm{d}(5+4\mathrm{x}^3) = \\ = (5+4x^3)'\mathrm{dx} = 12\mathrm{x}^2\mathrm{dx}. \text{Выразим отсюда } \mathrm{x}^2\mathrm{dx} = \dfrac{1}{12}\mathrm{dt}. \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{12}dt}{t^4} = \frac{1}{12}\int \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{12}\int t^{-4}dt = \frac{1}{12}\cdot\frac{t^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{t^3} + c = -\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{(5+4x^3)^3} + C.$$

Можно проверить, что интеграл найден верно. Для этого воспользуемся формулой $\left(F(x)\right)' = f(x).$

$$\left(-\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{(5+4x^3)^3} + c\right)' = -\frac{1}{36}\left((5+4x^3)^{-3}\right)' = -\frac{1}{36}\cdot(-3)(5+4x^3)^{-4}(5+4x^3)' = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{(5+4x^3)^4}\cdot 12x^2 =$$

$$= \frac{x^2}{(5+4x^3)^4} - \text{получили подынтегральную функцию.}$$

Ответ: $I = -\dfrac{1}{36}\cdot\dfrac{1}{(5+4x^3)^3} + C$.

2)

$$I = \int \frac{3xdx}{\sqrt{4-x^4}} = 3\int \frac{xdx}{\sqrt{4-(x^2)^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{В числителе стоит почти производная от } \mathrm{x}^2. \\ \text{Поэтому } \mathrm{t} = \mathrm{x}^2 \quad \mathrm{dt} = 2\mathrm{xdx}, \quad \mathrm{xdx} = \dfrac{1}{2}\mathrm{dt} \end{array} \right| =$$

$$= 3\int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{2^2 - t^4}} = \frac{3}{2}\arcsin\frac{t}{2} + c = \frac{3}{2}\arcsin\frac{x^2}{2} + C.$$

Ответ: $I=\frac{3}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}+C.$

3)

$$I=\int x\ln x dx=\left|\begin{array}{l}\text{Применяем формулу интегрирования}\\ \text{по частям } \int \mathrm{u}\cdot \mathrm{dv}=\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}-\int \mathrm{v}\cdot\mathrm{du}\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ll}u=\ln x & v=xdx\\ du=\frac{dx}{x} & v=\int dv=\int xdx=\frac{x^2}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+c=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

Ответ: $I=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^4}{4}+C.$

4)

$$\int\frac{5x-3}{x^2+x+1}dx=\left|\begin{array}{l}\text{Выделим в знаменателе полный квадрат}\\ \mathrm{x}^2+x+1=\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\\ =\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=t^2+\frac{3}{4},\text{где } \mathrm{t}=\mathrm{x}+\frac{1}{2}\Rightarrow\\ \Rightarrow x=t-\frac{1}{2}, dx=dt,\ 5x-3=5\left(t-\frac{1}{2}\right)-3=5t-\frac{5}{2}-3=5t-\frac{11}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\left(5t-\frac{11}{2}\right)dt}{t^2+\frac{3}{4}}=5\int\frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{11}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=I.$$ Найдем отдельно интегралы.

$$\int\frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}=\left|\begin{array}{l}z=t^2+\frac{3}{4}\\ dz=2t\cdot dt\\ tdt=\frac{1}{2}dz\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\ln|z|=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1).$$

$$\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Подставляя найденные выражения в I, получим

$$I=5\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{11}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c=\frac{5}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{11\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Ответ: $I=\frac{5}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{11\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

5)

$$\int \frac{\sqrt[4]{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-1}dx = \left| \begin{matrix} t^4 = x+1 & t=\sqrt[4]{x+1} \\ 4t^3dt = dx & t^2 = \sqrt{x+1} \end{matrix} \right| = \int \frac{(t+2)\cdot 4t^3dt}{t^2-1} = 4\int \frac{t^4+2t^3}{t^2-1}dt = I.$$

Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель так же, как число 231 на 8, столбиком

$$\begin{array}{l|l} -231 & 8 \\ \underline{16} & \underbrace{28}_{} \\ -71 & \textit{целая часть} \\ \underline{64} & \\ 7-\textit{остаток} & \end{array}$$

результат записывается смешанной дробью : $\frac{231}{8} = 28\frac{7}{8} = 28+\frac{7}{8}.$

Аналогично делим многочлены.

$$\begin{array}{l|l} t^4+2t^3 & t^2-1 \\ -\underline{t^4-t^2} & \underbrace{t^2+2t+1}_{\textit{целая часть}} \\ -2t^3+t^2 & \\ \underline{2t^3-2t} & \\ t^2+1t & \\ -\underline{t^2-1} & \\ (2t+1)-\text{остаток} & \end{array}$$

Берем степень t^4, делим на t^2, получаем t^2. Затем t^2 умножаем на (t^2-1), получаем t^4-t^2 и отнимаем от t^4+2t^3. t^4 взаимно уничтожаются, $2t^3$ сносим вниз, а $-t^2$ при вычитании становится $+t^2$. Затем $2t^3$ делим на t^2, получаем $2t$. Затем умножаем $2t$ на (t^2-1), получаем $2t^3-2t$ и это отнимаем и т.д.

Записываем результат деления $\frac{t^4+2t^3}{t^2-1} = t^2+2t+1+\frac{2t+1}{t^2-1}$ и подставляем его под знак интеграла $I = 4\int\left(t^2+2t+1+\frac{2t+1}{t^2-1}\right)dt$. Последнее слагаемое представляет собой правильную дробь, которую можно разложить в сумму простейших дробей. $\frac{2t+1}{t^2-1} = \frac{\overset{t+1}{A}}{t-1}+\frac{\overset{t-1}{B}}{t+1}$. Приравниваем числители дробей $2t+1 = A(t+1)+B(t-1)$

$$\begin{array}{l|l} t=1 & 3 = A\cdot 2 \Rightarrow A = \frac{3}{2} \\ t=-1 & -1 = B(-2) \Rightarrow B = \frac{1}{2} \end{array}, \qquad \frac{2t+1}{t^2-1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}.$$ Теперь

$$I = 4C = \frac{4\sqrt[4]{(x+1)^3}}{3}+4\sqrt{x+1}+4\sqrt[4]{x+1}+6\ln\left|\sqrt[4]{x+1}-1\right|+2\ln\left|\sqrt[4]{x+1}+1\right|+C =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt[4]{(x+1)^3}+4\sqrt{x+1}+4\sqrt[4]{x+1}+2\ln\left|\left(\sqrt[4]{x+1}-1\right)^3\cdot\left(\sqrt[4]{x+1}+1\right)\right|+C =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt[4]{(x+1)^3}+4\sqrt{x+1}+4\sqrt[4]{x+1}+2\ln\left|\left(\sqrt[4]{x+1}-1\right)^2\left(\sqrt{x+1}-1\right)\right|+C.$$

Ответ: $I=\frac{4}{3}\sqrt[4]{(x+1)^3}+4\sqrt{x+1}+4\sqrt[4]{x+1}+2\ln\left|\left(\sqrt[4]{x+1}-1\right)^2\left(\sqrt{x+1}-1\right)\right|+C.$

6)

$$I=\int\sin^5 xdx=\int\sin^4 x(\sin xdx)=\int\left(\sin^2 x\right)^2\left(-d(\cos x)\right)=$$

$$=-\int\left(1-\cos^2 x\right)^2 d\left(\cos x\right)=\left|\begin{matrix}t=\cos x\\ dt=-\sin xdx\end{matrix}\right|=-\int\left(1-t^2\right)^2 dt=$$

$$=-\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=\int\left(2t^2-1-t^4\right)dt=2\frac{t^3}{3}-t-\frac{t^5}{5}+C=$$

$$=\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$$

Ответ : $I=\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$.

Так находятся интегралы, если есть хотя бы одна нечетная степень $\sin x$ и $\cos x$. В случае, если имеются только четные степени, интегралы находят с помощью понижения степени по формулам тригонометрии.

7)

$$I=\int\cos^4 xdx=\left|\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right|=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=\frac{1}{8}\int\left(3+2\cos 2x+\cos 4x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\left(3x+2\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}\right)+c=\frac{1}{8}\left(3x+\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$$

Ответ: $I=\frac{1}{8}\left(3x+\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$

Тема 9. Приложения определенных интегралов

1) Вычислить интегралы.

а) $$I=\int_2^{28}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+4}=\left|\begin{matrix}\text{Чтобы избавиться от кубического корня заменим } t^3=x-1\text{, тогда}\\ t=\sqrt[3]{x-1},\ \ t^2=\sqrt[3]{(x-1)^2},\ \ 3t^2dt=dx,\ \text{заменим пределы интегрирования}\\ x=2\Rightarrow t=\sqrt[3]{2-1}=1,\quad x=28\Rightarrow\quad t=\sqrt[3]{28-1}=3\end{matrix}\right|=$$

$=\int_1^3\frac{t^2\cdot 3t^2dt}{t^2+4}=3\int_1^3\frac{t^4dt}{t^2+4}$. Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь.

Делим столбиком.

$$\begin{array}{r|l} -\,t^4 & t^2+4 \\ \underline{t^4+4t^2} & \overline{t^2-4} \\ -\,-4t^2 & \\ \underline{-4t^2-16} & \\ 16 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{t^4}{t^2+4}=t^2-4+\frac{16}{t^2+4}.$$

$$I=3\int_1^3\left(t^2-4+\frac{16}{t^2+2^2}\right)dt=3\left(\frac{t^3}{3}-4t+16\cdot\frac{1}{2}arctg\,\frac{t}{2}\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=3\left[\left(\frac{3^3}{3}-4\cdot 3+8arctg\,\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1^3}{3}-4\cdot 1+8arctg\,\frac{1}{2}\right)\right]=$$

$$=3\left[9-12+8arctg\,\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+4-8arctg\,\frac{1}{2}\right]=3\left[\frac{2}{3}+8\left(arctg\,\frac{3}{2}-arctg\,\frac{1}{2}\right)\right]=$$

$$=2+24\left(arctg\,\frac{3}{2}-arctg\,\frac{1}{2}\right)\approx 2+24(0{,}983-0{,}464)=14{,}46.$$

Ответ: $I=2+24\left(arctg\,\frac{3}{2}-arctg\,\frac{1}{2}\right)$.

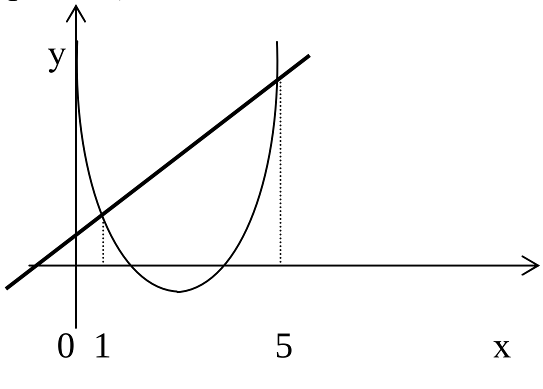
б)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\cos x\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{Находим интеграл по частям}\\ \int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ll}u=x & dv=\cos x\,dx\\ du=dx & v=\int dv=\int\cos x\,dx=\sin x\end{array}\right|=$$

$$=x\cdot\sin x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-0\cdot\sin 0\right)-(-\cos x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=\frac{\pi}{2}-1.$$

Ответ: $I=\frac{\pi-2}{2}$.

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-5x+6$ и прямой $y=x+1$.



Найдем точки пересечения графиков этих линий.

$$x^2-5x+6=x+1$$

$$x^2-6x+5=0$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}$$

$$x_1=1,\ x_2=5.$$

Так как $S=\int_a^b[(f_2(x)-f_1(x))]dx$, то площадь данной фигуры

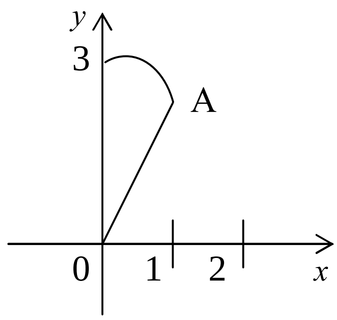
$$S=\int_1^5\left[(x+1)-\left(x^2-5x+6\right)\right]dx=\int_1^5\left(6x-5-x^2\right)dx=\left(6\frac{x^2}{2}-5x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^5=$$

$$=\left(6\cdot\frac{5^2}{2}-5\cdot5-\frac{5^3}{3}\right)-\left(6\cdot\frac{1^2}{2}-5\cdot1-\frac{1^3}{3}\right)=\left(75-25-\frac{125}{3}\right)-\left(3-5-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=50-\frac{125}{3}+2+\frac{1}{3}=52-\frac{124}{3}=\frac{156-124}{3}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}.$$

Ответ: $S=\frac{32}{3}$(кв.ед.).

3) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y=2x;\ y=3-x^2,\ x=0(x\geq 0)$.



Найдем точки пересечения параболы $y=3-x^2$ и прямой $y=2x$.

$2x=3-x^2$

$x^2+2x-3=0$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm4}{2}$

$x_1=-3,\quad x_2=1$

Выбираем, как дано, x больше нуля, значит, $x=1$. Так как объем тела вращения $V=\pi\int_a^b y^2dx,$ а в нашем случае $V=\pi\int_a^b\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx,$ то

$$V=\pi\int_0^1\left[\left(3-x^2\right)^2-\left(2x\right)^2\right]dx=\pi\int_0^1\left(9-6x^2+x^4-4x^2\right)dx=\pi\int_0^1\left(9-10x^2+x^4\right)dx=$$

$$=\pi\left[9x-10\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1=\pi\left(9-\frac{10}{3}+\frac{1}{5}\right)=\pi\frac{135-50+3}{15}=\pi\frac{88}{15}\approx18{,}43.$$

Ответ: $V\approx18{,}43$(куб.ед.).

Тема 10. Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

1) $2x\sqrt{y^2-2}\,dx-x^2ydy=3ydy$.

Переносим второе слагаемое в правую часть и выносим ydy за скобку $2x\sqrt{y^2-2}\,dx = y\left(3+x^2\right)dy$. Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Делим обе части уравнения на множители, «лишние» при дифференциалах. При dx «лишним», т.е. не зависящим от x, является $\sqrt{y^2-2}$, а при dy «лишним» будет $\left(3+x^2\right)$.

$$\frac{2x\sqrt{y^2-2}\,dx}{\sqrt{y^2-2}\left(3+x^2\right)} = \frac{y\left(3+x^2\right)dy}{\sqrt{y^2-2}\left(3+x^2\right)} \Rightarrow \quad \frac{2xdx}{3+x^2} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2-2}}.$$

Теперь можно проинтегрировать, так левая часть зависит только от x, а правая зависит только от y:

$$\int \frac{2xdx}{3+x^2} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2-2}}. \qquad (*)$$

Находим интегралы по отдельности.

$$\int \frac{2xdx}{3+x^2} = \begin{vmatrix} t = 3+x^2 \\ dt = 2xdx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + \ln c = \ln tc = \ln c(3+x^2),$$

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2-2}} = \begin{vmatrix} t = y^2-2 \\ dt = 2ydy \\ \dfrac{dt}{2} = ydy \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{y^2-2}.$$

Подставляем найденные интегралы в (*) : $\ln c\left(x^2+3\right) = \sqrt{y^2-2}$.

Получили общий интеграл данного дифференциального уравнения. Можно его записать по – другому:

$$\ln(3+x^2) + c_1 = \sqrt{y^2-2} \quad \Rightarrow \sqrt{y^2-2} - \ln(3+x^2) = c.$$

Ответ: $\sqrt{y^2-2} = \ln c(x^2+3).$

2) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{xe^x}, \quad y(1) = 0.$

Так как y и y' присутствуют в дифуравнении только в первых степенях, то это линейное ДУ. Так как даны начальные условия, то следует после нахождения общего решения ДУ найти частное решение, удовлетворяющее этому начальному условию, то есть решить так называемую задачу Коши.

Ищем общее решение ДУ методом Бернулли, т.е. в виде $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$. Подставляем в исходное уравнение $u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{xe^x}$.

Группируем первое и третье слагаемые и выносим за скобки v, получаем

$$v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + v'u = \frac{1}{xe^x}. \qquad (*)$$

Ищем такую функцию $u = u(x)$, чтобы скобка была равна нулю.

$u' + \frac{u}{x} = 0$ - это ДУ с разделяющимися переменными. Заменяем $u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$, $du = -\frac{u}{x}dx$. Здесь «лишний» множитель u при dx, делим на него обе части уравнения $\frac{du}{u} = -\cancel{\frac{u}{u}} \cdot \frac{dx}{x}$, $\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$, $\ln u = -\ln x \Rightarrow \ln u = \ln x^{-1} \Rightarrow u = \frac{1}{x}$.

Нашли функцию u, при которой выражение в скобках равно нулю. Подставляем найденное u в (*), получаем $v \cdot 0 + v' \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{xe^x} \Rightarrow \frac{v'}{x} = \frac{1}{xe^x} \Big| \cdot x$. Получили $v' = e^{-x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} e^{-x} \Rightarrow dv = e^{-x}dx$. Интегрируем обе части уравнения. $\int dv = \int e^{-x}dx, \quad v = -e^{-x} + c$.

Получили общее решение ДУ $y = u \cdot v = \frac{1}{x} \cdot \left(c - e^{-x}\right)$; $y = \frac{c}{x} - \frac{1}{xe^x}$ - общее решение.

Замечание. *Здесь первое слагаемое* $\frac{c}{x}$ *является общим решением линейного однородного уравнения* $y' + \frac{y}{x} = 0$, *а второе слагаемое* $-\frac{1}{xe^x}$ *является частным решением исходного линейного неоднородного уравнения* $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{xe^x}$. *Сделаем проверку общего решения линейного однородного дифуравнения* y_0. $y_0 = \frac{c}{x} \Rightarrow y_0' = c\left(x^{-1}\right)' = -\frac{c}{x^2}$. *Подставляем в* $y' + \frac{y}{x} = 0$, *получаем* $-\cancel{\frac{c}{x^2}} + \cancel{\frac{c}{x \cdot x}} = 0$, *т.е. верное равенство* $\Rightarrow y_0 = \frac{c}{x}$ *- общее решение линейного однородного (с нулевой правой частью) дифуравнения.*

Теперь сделаем проверку для частного решения $\tilde{y} = -\frac{1}{xe^x} = -x^{-1}e^{-x}, \tilde{y}' = -\left(x^{-1}e^{-x}\right)' = -\left(-\frac{1}{x^2}e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-x}\right) = \frac{1}{x^2e^4} + \frac{1}{xe^x}$. *Подставляем в исходное ДУ* $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{xe^x}$, $\frac{1}{x^2e^x} + \frac{1}{xe^x} + \left(-\frac{1}{xe^x}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{xe^x}$, $\frac{1}{x^2e^x} + \frac{1}{xe^x} - \frac{1}{x^2e^x} = \frac{1}{xe^x}$. *Получили* *верное равенство, т.е. именно такая функция* $y=-\frac{1}{xe^x}$ *при прохождении через данное дифференциальное уравнение дала правую часть* $\frac{1}{xe^x}$, *что и доказывает, что найденное* $\tilde{y}$ *является частным решением исходного дифуравнения.*

Теперь приступим к решению задачи Коши. Подставим данное начальное условие в полученное общее решение $y=\frac{c}{x}-\frac{1}{xe^x}$, $y(1)=0$, $0=\frac{c}{1}-\frac{1}{1e^1}\Rightarrow 0=c-\frac{1}{e}\Rightarrow c=\frac{1}{e}=0$.

Найденное c подставляем в общее решение. $y=\frac{1}{xe}-\frac{1}{xe^x}$ - решение задачи Коши. Можно его записать по - другому $y=\frac{1}{x}\left(e^{-1}-e^{-x}\right)$.

Ответ: $y=\frac{1}{x}\left(e^{-1}-e^{-x}\right)$.

3) Решить ДУ, допускающие понижение порядка.

а) $xy'''+y''=1$.

ДУ третьего порядка. В этом уравнении отсутствует неизвестная функция $y=y(x)$ и ее первая производная y'. Понижаем порядок дифуравнения заменой $y''=z$, тогда $y'''=z'$. Исходное уравнения теперь запишется как $xz'+z=1\Rightarrow xz'=1-z$ - дифуравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными.

$$x\frac{dz}{dx}=1-z\Big| \cdot dx\Rightarrow xdz=(1-z)dx\Big|:x(1-z)\Rightarrow\frac{dz}{1-z}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dz}{1-z}=\int\frac{dx}{x}-\ln|z|+\ln c_1=\ln|x|,$$

$$\ln\frac{c_1}{z}=\ln|x|\Rightarrow\frac{c_1}{z}=x\Rightarrow z=\frac{c_1}{x}.$$

Подставляем $z=y''$, получаем $y''=\frac{c_1}{x}$. Так как $y'=\int y''dx$, то $y'=\int\frac{c_1}{x}dx=c_1\ln|x|+c_2$. Так как $y=\int y'dx$, то $y=\int(c_1\ln|x|+c_2)dx$. Найдем сначала с помощью формулы интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$:

$$\int\ln|x|dx=\begin{vmatrix}u=\ln|x| & dv=dx\\ du=\frac{dx}{x} & v=x\end{vmatrix}=x\ln|x|-\int x\frac{dx}{x}=x\ln|x|-\int dx=x\ln|x|-x.$$

$$y=c_1\int\ln|x|dx+c_2\int dx=c_1\left(x\ln|x|-x\right)+c_2x+c_3=c_1x\ln|x|-c_1x+c_2x+c_3=c_1x\ln|x|+(c_2-c_1)x+c_3$$

Обозначим $c_2 - c_1$ другой константой, пусть это будет c_2, тогда $y = c_1 x \ln|x| + c_2 x + c_3$.

Ответ: $y = c_1 x \ln|x| + c_2 x + c_3$.

Замечание. *Так как исходное уравнение было 3-го порядка, то и найденная функция содержит три произвольных константы.*

б) $y'' = 18y^3, \quad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = 3.$

В этом уравнении отсутствует аргумент x в явном виде, поэтому новым аргументом будем считать y, а новой функцией будем считать $p = y'$, причем $p = p(y)$, а $y = y(x)$, т.е. $p \to y \to x$. Найдем $y'' = (y')'_x = (p)'_x = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p$. Подставляем в исходное уравнение $p' \cdot p = 18y^3$. Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{dp}{dy} \cdot p = 18y^3 \Big| \cdot dy \Rightarrow \int p \cdot dp = 18\int y^3 dy \Big| \cdot 2$$

$$\int 2p dy = 9\int 4y^3 dy$$

$$p^2 = 9y^4 + c_1$$

Целесообразно здесь подставить начальные данные и найти c_1. Учитывая $p = y'$, т.е. $p(-1) = 3, \quad y(-1) = 1$. Получаем $3^2 = 9 \cdot 1 + c_1 \Rightarrow 9 = 9 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$, т. е. $p^2 = 9y^4 \Rightarrow p = \pm 3y^2$, выбираем $\oplus$, так как при $x = -1, \quad p = y' = 3 > 0, \Rightarrow \mathrm{p} = 3\mathrm{y}^2$, т. е.

$$y' = 3y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3y^2 \Big| \cdot dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = 3\int dx \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = 3x + c_2.$$

Опять подставляем начальные данные $-\frac{1}{1} = 3(-1) + c_2 \Rightarrow -1 = -3 + c_2 \Rightarrow c_2 = 2.$ Подставляем c_2 в общее решение и получаем частное решение $-\frac{1}{y} = 3x + 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{3x+2}$.

Ответ: Решение задачи Коши : $y = -\frac{1}{3x+2}$.

4) Решить линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4x + 1$.

Линейные дифуравнения с постоянными коэффициентами решаем в два этапа.

Сначала решается уравнение с нулевой правой частью.

$I.\ y'' - 3y' + 2y = 0$.

Пишем характеристическое уравнение, заменяя y'' на r^2, y' на r, вместо y пишем 1.

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$
$$r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$
$$r_1 = 2, \quad r_2 = 1.$$

Запишем фундаментальные решения $y_1 = e^{r_1 x} = e^{2x}$, $y_2 = e^{r_2 x} = e^x$. Запишем общее решение однородного уравнения $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$. Теперь находим частное решение $\tilde{y}$ исходного уравнения.

$II.\quad y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4x + 1 \qquad (*)$

Ищем $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$, так как правая часть представляет собой многочлен второго порядка. Ищем A, B, C, «прогоняя» функцию $\tilde{y}$ через исходное дифуравнение. Находим

$y' = (\tilde{y})' = \left(Ax^2 + Bx + C\right)' = 2Ax + B, \quad y'' = (y')' = \left(2Ax + B\right)' = 2A.$. Подставляем все в (*).

$$2A - 3(2Ax + B) + 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 2x^2 - 4x + 1,$$
$$2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 2x^2 - 4x + 1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\begin{array}{l|l}
x^2: & 2A = 2 \Rightarrow A = 1 \\
x^1: & -6A + 2B = -4 \Rightarrow -6 + 2B = -4 \Rightarrow 2B = 2 \Rightarrow B = 1 \\
x^0: & 2A - 3B + 2C = 1 \Rightarrow 2 - 3 + 2C = 1 \Rightarrow 2C = 2 \Rightarrow C = 1
\end{array}$$

Подставляем в $\tilde{y} \Rightarrow \tilde{y} = x^2 + x + 1$. Так как общее решение линейного дифуравнения $y = y_0 + \tilde{y}$, то $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + x^2 + x + 1$.

Ответ: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + x^2 + x + 1$.

б) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}\left(\cos x + 3\sin x\right)$.

$I.\quad y'' + 2y' + y = 0$

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

$r_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2} = -1 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1 = r -$ кратный корень.

Т.е. 1 является корнем характеристического уравнения два раза.

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = e^{rx} = e^{-x} \\ y_2 = xe^{rx} = xe^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

$II.\quad y'' + 2y' + y = 2e^{-x}(\cos x + 3\sin x)$ (*)

Ищем $\tilde{y} = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$.

$$y' = -e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + e^{-x}(-A\sin x + B\cos x) \Rightarrow$$
$$y' = e^{-x}(B\cos x - A\sin x - A\cos x - B\sin x)$$
$$y'' = -e^{-x}(B\cos x - A\sin x - A\cos x - B\sin x) + e^{-x}(-B\sin x - A\cos x + A\sin x - B\cos x) =$$
$$= e^{-x}(2A\sin x - 2B\cos x)$$

Подставляем все в (*):

$$e^{-x}(2A\sin x - 2B\cos x) + 2e^{-x}(B\cos x - A\sin x - A\cos x - B\sin x) + e^{-x}(A\cos x + B\sin x) =$$
$$= 2e^{-x}(\cos x + 3\sin x) \Big| : e^{-x} \neq 0$$
$$2A\sin x - 2B\cos x + 2B\cos x - 2A\sin x - 2A\cos x - 2B\sin x + A\cos x + B\sin x =$$
$$= 2\cos x + 6\sin x.$$

При упрощении получаем $-A\cos x - B\sin x = 2\cos x + 6\sin x$.

Приравниваем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$.

$$\begin{array}{l|l} \cos x: & -A = 2 \Rightarrow A = -2 \\ \sin x: & -B = 6 \Rightarrow B = -6 \end{array}$$

Подставляем найденные A и B в $\tilde{y} \Rightarrow$:

$$\tilde{y} = e^{-x}(-2\cos x - 6\sin x) = -2e^{-x}(\cos x + 3\sin x).$$

Запишем общее решение $y = y_0 + \tilde{y} \Rightarrow$:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - 2e^{-x}(\cos x + 3\sin x) \Rightarrow$$
$$y = e^{-x}(c_1 + c_2 x - 2\cos x - 6\sin x)$$

Ответ: $y = e^{-x}(c_1 + c_2 x - 2\cos x - 6\sin x)$.

в) $y'' - y' = x^2 + 1$.

$I.\quad y'' - y' = 0$

$$r^2 - r = 0$$
$$r(r-1) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 0 \\ r_2 = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = e^{0\cdot x} = 1 \\ y_2 = e^x \end{array}\right\} y_0 = c_1 + c_2 e^x$$

II. $y'' - y' = (x^2 + 1)e^{0\cdot x}$ (0 является простым корнем характеристического уравнения). Так как $e^0 = 1$, то, если в правой части отсутствует e^{ax}, это означает, что $a = 0$. Поэтому нужно этот множитель дописывать и проверять, является ли ноль решением характеристического уравнения. В нашем случае ноль является корнем характеристического уравнения, поэтому мы будем искать решение в виде произведения $(Ax^2 + Bx + C)$ на x^1.

$$\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y'' = 6Ax + 2B$$

Подставляем найденное в $y'' - y' = x^2 + 1$

$$6Ax + 2B - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2 - 1.$$

Приравниваем коэффициенты при равным степенях x.

$$\begin{array}{l|l} x^2: & -3A = 1 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{3} \\ x^1: & 6A - 2B = 0 \Rightarrow 2B = 6A = 6\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -2 \Rightarrow B = -1 \\ x^0: & 2B - C = 1 \Rightarrow C = 2B - 1 = -3 \end{array}$$

Получаем частное решение $\tilde{y} = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$. Сделаем проверку частного решения:

$$\tilde{y} = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$$

$$y' = -x^2 - 2x - 3$$

$$y'' = -2x - 2$$

Подставляем их в $y'' - y' = x^2 + 1$,

$$\cancel{-2x} - 2 + x^2 \cancel{+2x} + 3 = x^2 + 1$$

$x^2 + 1 = x^2 + 1$ (верно)

Записываем общее решение $y = y_0 + \tilde{y}$.

$$y = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x.$$

Ответ: $y = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$.

Список литературы

1. Гурский Е. И., Ершова В. В. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. Минск: Высш. шк., 1965. -184 с.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М.: Наука, 1980, 1984. –120 с.

3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1980. -270 с.

4. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики. - М.: Высш.шк., 1978. – Т.1. – 384 с.

5. Щипачев В. С. Основы высшей математики. - М.: Высш.шк., 1998. –200 с.

6. Элементы линейной алгебры / Сост. Ю. Ф. Стругов, Г. А. Троценко, Е. М. Назарук. Омск: Изд-во ОмГТУ, 1998. – 36 с.

7. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1986. – 240 с.

8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.:Наука, 1977. – 416 с.

9. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1985.

10. Предел и непрерывность / Сост. Л. В .Бельгарт, Н. И. Николаева. - Омск: Изд-во ОмГТУ, 2000. – 36 с.

11. Сборник задач и упражнений по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича.- М.: Высш.шк., 1973. – 576 с.