Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания для студентов-заочников

Омск-2004

Составители: Воробьева Елена Алексеевна, ст. преподаватель,

Воробьева Екатерина Валентиновна, ст. преподаватель,
канд. физ.-мат. наук

АННОТАЦИЯ

Данные методические указания представляют собой исправленное издание третьей части “Методических указаний по изучению курса высшей математики для студентов-заочников”.

Цель данной работы помочь студентам заочной формы обучения самостоятельно научиться решать задачи по темам:
Функции нескольких переменных. Двойные и тройные криволинейные интегралы. Их приложения. Теоретические понятия, формулы, теоремы изложены очень кратко, предваряя решение задач подробнейшим образом, разобрано и проиллюстрировано около 70 задач по названным темам.

СОДЕРЖАНИЕ

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные понятия

1. Определение функции двух переменных $z = f(x, y)$, или $F(x, y, z) = 0$.
2. Способы ее задания: аналитический, табличный, явный, неявный.
3. Область определения и область изменения функции $z = f(x, y)$. Классификация областей определения: открытая и замкнутая, ограниченная и неограниченная.
4. Геометрический смысл функции $z = f(x, y)$, или $F(x, y, z) = 0$.

Задача 1. Найти область определения функции $z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{x\,y}$.

Решение. Функция **z** представляет собой сумму двух слагаемых функций: $z_1 = \arcsin\frac{x}{2}$ и $z_2 = \sqrt{x\,y}$. Найдем области их определения:

$$z_1 = \arcsin\frac{x}{2}, \qquad\qquad z_2 = \sqrt{x\,y},$$

$$D_1:\quad -1 \le \frac{x}{2} \le 1, \quad -2 \le x \le 2.$$

$$D_2:\quad x \cdot y \ge 0, \qquad 1)\ x \ge 0,\ y \ge 0 \quad \text{или} \quad 2)\ x \le 0,\ y \le 0.$$

Очевидно, область определения функции **z** есть <u>пересечение</u> областей определения z_1 и z_2, т. е. $D = D_1 \cap D_2$ (рис. 1).

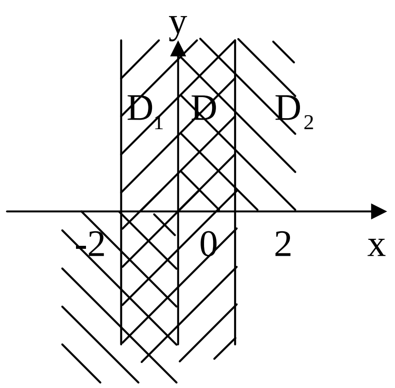


Рис. 1

Ответ: D – область, отмеченная двойной штриховкой, замкнутая и неограниченная.

Задача 2. Найти область определения функции $z = \ln\left(4 + 4x - y^2\right)$.

Решение. **z** – логарифмическая функция, поэтому $4 + 4x - y^2 > 0$,

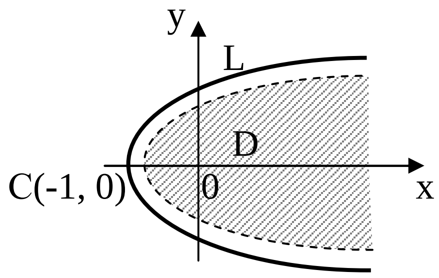


Рис. 2

или $4 + 4x > y^2$.

Уравнение границы области D:

$y^2 = 4 + 4x$ (L),

$y^2 = 4(x+1)$ – парабола с вершиной $C(-1, 0)$.

Парабола разбивает всю плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю по отношению к параболе. Возьмем для контроля любую точку плоскости, например, O(0, 0), подставим ее координаты в первое неравенство: $4 + 4\cdot 0 - 0 > 0$, $\Rightarrow$ $O(0,0) \in D$; где **D** – область определения функции, открытая, неограниченная (рис.2).

Дифференцирование функций нескольких переменных

Частные производные функции $z = f(x, y)$

а) первого порядка: $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$,

где $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ - частное приращение **z** по **x**.

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta_y},$$

где $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ - частное приращение **z** по **y**.

б) второго порядка: $z''_{xx} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)'_x = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ - вторая производная функции **z** по переменной **x**, т. е. частная производная по переменной **x**, взятая от частной производной первого порядка по переменной **x**.

$z''_{xy} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)'_y = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ - смешанная производная **z** по **x** и по **y**;

$z''_{yx} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)'_x = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ - смешанная производная **z** по **y** и по **x**.

Можно показать, что порядок дифференцирования безразличен, т. е. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$;

$z''_{yy} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ - вторая производная функции **z** по переменной **y**.

Правило. Отыскивая частные производные функции нескольких переменных по одной из переменных, пользуемся правилами и формулами дифференцирования, считая в этот момент все остальные переменные постоянными.

Задача 3. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)'_x}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

отыскивая $\frac{\partial z}{\partial x}$, переменную **y** считаем постоянной.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)'_y}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

отыскивая $\frac{\partial z}{\partial y}$, переменную **x** считаем постоянной.

б) $z = x\, e^{xy} - \ln(x\, t) + \cos(y\, t)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy} - \frac{t}{x\, t} = e^{xy} + x\, y\, e^{xy} - \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot e^{xy} - t \sin(y\, t);$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{x}{x\, t} - y \sin(y\, t) = -\frac{1}{t} - y \sin(y\, t).$$

Задача 4. Доказать следующие тождества:

а) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$, если $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$.

Решение. Найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ данной функции и подставим их в равенство, которое надо доказать:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^y}{e^x+e^y}\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^x}{e^x+e^y}+\frac{e^y}{e^x+e^y}=1,$$

что и требовалось доказать.

б) $\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=2z$, если $z=x^y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^y\right)_x'=y\cdot x^{y-1}\quad \text{(степенная функция);}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^y\right)_y'=x^y\ln x\quad \text{(показательная функция).}$$

Подставим $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в равенство:

$$\frac{x}{\cancel{y}}\cdot\cancel{y}\cdot x^{y-1}+\frac{1}{\cancel{\ln x}}\cdot x^y\cdot\cancel{\ln x}=2\cdot x^y,$$

$2x^y\equiv 2x^y$, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл частных производных первого порядка

Задача 5. Через точку $M_0(1,e)$ поверхности $z=\left(1+\log_y x\right)^3$ проведены плоскости, параллельные координатным плоскостям **XOZ** и **YOZ**. Определить углы, которые образуют с осями координат **OX** и **OY** касательные к получившимся сечениям, проведенные в их общей точке $M_0(1,e)$ (рис. 3).

Решение. Геометрический смысл частных производных первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=f(x,y)$ состоит в том, что частные значения этих частных производных, вычисленные в точке касания, определяют тангенсы углов наклона к соответствующим осям касательных к образовавшимся сечениям, проведенных в точке касания $M_0(x_0, y_0)$ – это тангенсы углов наклона к соответствующим осям касательных в этой точке к кривым, которые образуются при пересечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$, т. е.

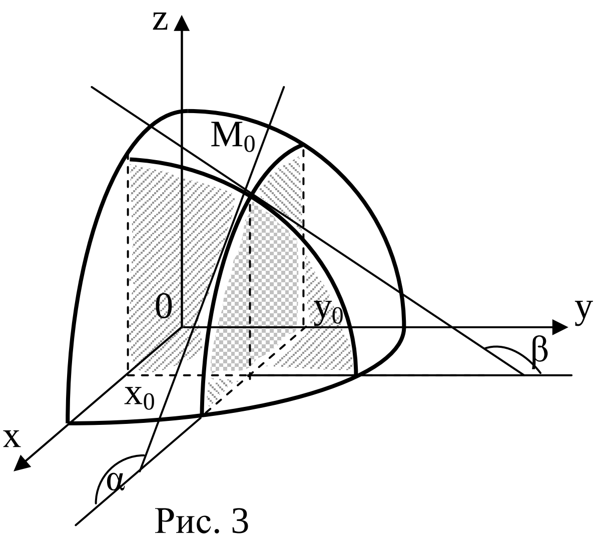


Рис. 3

с осью OX: $\angle\alpha = \operatorname{arctg}\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}$;

с осью OY: $\angle\beta = \operatorname{arctg}\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}$;

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = \operatorname{tg}\alpha; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = \operatorname{tg}\beta.$$

Для отыскания производных данной функции преобразуем ее, используя формулу:

$$\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}, \text{ т.е. } z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{x}; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0(1,e)} = 3\left(1 + \frac{\ln 1}{\ln e}\right)^2 \cdot \frac{1}{\ln e} \cdot \frac{1}{1} = 3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3\left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \ln x \cdot \left(-\frac{1}{y \ln^2 y}\right); \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0(1,e)} = 3\left(1 + \frac{\ln 1}{\ln e}\right)^2 \cdot \ln 1 \cdot \left(-\frac{1}{e \ln^2 e}\right) = 0.$$

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} 3;\ \beta = \operatorname{arctg} 0 = 0$.

Задача 6. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^2 y + y^3$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy$, $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Заметим, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$.

Задача 7. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$, если $u = e^{xy} \cdot \sin z$.

Решение. Вначале найдем $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y e^{xy} \sin z; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = e^{xy} \sin z + y\ x\ e^{xy} \sin z = e^{xy}(1 + x\ y)\sin z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xy}(1 + xy)\cos z.$$

Теперь найдем $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\ e^{xy} \sin z; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = x\ e^{xy} \cos z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = e^{xy} \cos z + y\ x\ e^{xy} \cos z = e^{xy}(1 + x\ y)\cos z.$$

Сравнив ответы, убеждаемся в том, что частные производные смешанного типа не зависят от порядка дифференцирования.

Задача 8. Дана функция $z = x e^y + y e^x$. Доказать, что эта функция удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + y \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y + y e^x \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x e^y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y e^x \qquad\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x e^y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y e^x \qquad\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x e^y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = e^x \qquad\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x} = e^y.$$

Подставим в уравнение найденные значения производных:

$$y\ e^x + x\ e^y \equiv x\ e^y + y\ e^x,$$

что и требовалось доказать.

Производная сложной функции

а) Если $z = f(u, v)$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, то $z = f[u(x, y), v(x, y)]$ - сложная функция <u>двух</u> переменных **x** и **y**, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

б) Если $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$, то $z = f[u(x), v(x)]$ - сложная функция <u>одной</u> переменной **x**, тогда

$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{dv}{dx}$ - полная производная сложной функции одной независимой переменной **x**.

в) Если $z = f(x, u, v)$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$, то $z = f[x, u(x), v(x)]$ - сложная функция одной переменной **x** и

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Задача 9. Дана функция $z = u \sin v + v \cos u$, где $u = \dfrac{x}{y}$, $v = x \cdot y$, т. е. $z = f(x, y)$ – сложная функция двух переменных **x** и **y**, где **u** и **v** - промежуточные аргументы. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} = (\sin v - v \sin u)\cdot\dfrac{1}{y} + (u \cos v + \cos u)\cdot y$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = (\sin v - v \sin u)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + (u \cos v + \cos u)\cdot x.$$

Задача 10. Дана функция $u = x^2 \cdot y^2 \cdot z$, где $x = t$, $y = t^2$, $z = \sin t$. Найти $\dfrac{du}{dt}$.

Решение. Очевидно, что **u** – сложная функция одной независимой переменной **t**, а **x**, **y** и **z** – промежуточные аргументы, т. е. существует $\dfrac{du}{dt}$ - <u>полная производная сложной функции одной переменной</u>.

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=2x\cdot y^2\cdot z\cdot 1+x^2\cdot 2y\cdot z\cdot 2t+x^2\cdot y^2\cdot 1\cdot\cos t=$$

$$=2x\,y^2\,z+4x^2\,y\,z\,t+x^2\,y^2\cos t.$$

Задача 11. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=\arcsin\frac{x}{y}$, где $y=\sqrt{x^2+1}$.

Решение. $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{x^2+1},\ \text{если}\quad y=\sqrt{x^2+1}.$$

Сравните: $\frac{dz}{dx}\neq\frac{\partial z}{\partial x}$, т.к. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1-x^2}}=1.$

Производная функции, заданной неявно

а) Если $F(x,y)=0$, то **y** – функция одной переменной **x**, заданная неявно.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F_x'}{F_y'}.$$

б) Если $F(x,y,z)=0$, то **z** – функция двух независимых переменных, заданная неявно.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F_x'}{F_z'};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F_y'}{F_z'}.$$

Задача 12. Дано: $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$. Доказать, что $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

Решение. Данное уравнение задает неявно функцию **z**, зависящую от переменных **x** и **y**. Запишем данное уравнение в виде $F(x,y,z)=0$.
$2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z=0$. Очевидно, что

$$F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{2\cos(x+2y-3z)(-3)+3}=\frac{-[2\cos(x+2y-3z)-1]}{-3[2\cos(x+2y-3z)-1]}=\frac{1}{3};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{2\cos(x+2y-3z)\cdot 2-2}{2\cos(x+2y-3z)(-3)+3}=\frac{-2[2\cos(x+2y-3z)-1]}{-3[2\cos(x+2y-3z)-1]}=\frac{2}{3}.$$

Очевидно: $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$, что и требовалось доказать.

Приложения производных функции $z=f(x,y)$

Полный дифференциал функции двух переменных и его приложение в приближенных вычислениях

Если $z=f(x,y)$, то $dz=df(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ – полный дифференциал $z=f(x,y)$. Так как полное приращение функции $\Delta z\approx dz$, то

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=f(x,y)+\Delta z\approx f(x,y)+dz.$$

Задача 13. Найти полный дифференциал du функции $u=\mathrm{tg}(3x-y)+6^{y+z}$.

Решение. Воспользуемся формулой $du=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$ или, что то же самое, $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$.

$$du = \sec^2(3x-y)\cdot 3\cdot dx + \left[\sec^2(3x-y)(-1) + 6^{y+z}\ln 6\right]dy + 6^{y+z}\cdot(\ln 6)\cdot dz =$$

$$= 3\sec^2(3x-y)\,dx + \left[6^{y+z}\ \ln 6 - \sec^2(3x-y)\right]dy + 6^{y+z}\,(\ln 6)\,dz\,.$$

Задача 14. Высота конуса H=60 см, радиус основания R=20 см. Как изменится объем конуса, если высоту увеличить на 3 мм, а радиус основания уменьшить на 1 мм?

Решение. Изменение объема конуса, т. е. приращение Δv, можно заменить его полным дифференциалом dv: $\Delta v \approx dv$, $v_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Дано: R = 20 см, ΔR = -0,1 см, H = 60 см, ΔH = 0,3 см.

$$\Delta v \approx dv = \frac{\partial v}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial v}{\partial H}\Delta H = \frac{1}{3}\pi\left[2R\,H\,\Delta R + R^2\,\Delta H\right] = \frac{1}{3}\pi R\left[2H\,\Delta R + R\,\Delta H\right] =$$

$$= \frac{20\pi}{3}\left[2\cdot 60\cdot(-0{,}1) + 20\cdot 0{,}3\right] = \frac{20\pi}{3}\left[-12+6\right] \approx \frac{\cancel{20}\cdot 3}{\cancel{3}}\cdot(-6) = -120\ \text{см}^3 < 0\,.$$

Ответ: Объем конуса уменьшится приблизительно на 120 см^3.

Задача 15. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$.

Решение. Воспользуемся функцией $f(x,\ y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ и формулой

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) = f(x,\ y) + \Delta f(x,\ y) \approx f(x,\ y) + df(x,\ y)\,.$$

Положив $x = 4;\ \Delta x = 0{,}05;\ y = 3;\ \Delta y = -0{,}07$, найдем

$$df(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = \frac{x\cdot\Delta x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\cdot\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Вычислим $df(x,\ y)$ в условиях задачи:

$$df(x,\ y) = \frac{4\cdot 0{,}05}{\sqrt{4^2+3^2}} + \frac{3\cdot(-0{,}07)}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{0{,}2-0{,}21}{5} = -\frac{0{,}01}{5} = -0{,}002\,.$$

Итак,

$$\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2} = \sqrt{(4+0{,}05)^2 + (3-0{,}07)^2} \approx \sqrt{4^2+3^2} - 0{,}002 = 5 - 0{,}002 = 4{,}998\,.$$

Экстремумы функции $z = f(x, y)$

(максимум и минимум $z = f(x, y)$**)**

а) Необходимые условия: если в точке $M_0(x_0, y)$ функция имеет экстремум, то $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ в этой точке. $M_0(x_0, y_0)$ – критическая (стационарная) точка.

б) Достаточные условия: если $M_0(x_0, y_0)$ – критическая точка и

$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0$ в этой точке, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума. Причем, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка максимума, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка минимума. Чтобы найти экстремум, надо вычислить $z = f(x_0, y_0)$.

Задача 16. Найти минимум и максимум функции $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Решение. Найдем стационарные точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (необходимые условия экстремума):

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y \end{cases}.$$

Решим систему уравнений

$$+\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow x = -y.$$

$$x^3 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - 2) = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{2};\quad x_2 = 0;\quad x_3 = \sqrt{2}.$$

Найдены три стационарные точки: $M_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $M_2(0, 0)$, $M_3(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Исследуем их на экстремум с помощью достаточных условий:

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 4;$$

$$\Delta = \left(12x^2 - 4\right)\left(12y^2 - 4\right) - 4^2.$$

1) $M_1\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$; $\Delta_1\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 400 - 16 > 0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 4 > 0$,

отсюда следует, что в точке M_1 функция **z** имеет минимум

$$z_{\min}\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \left(-\sqrt{2}\right)^4 + \left(\sqrt{2}\right)^4 - 2\left(-\sqrt{2}\right)^2 + 4\left(-\sqrt{2}\right)\sqrt{2} - 2\left(-\sqrt{2}\right)^2 = -8.$$

2) $M_2(0,0)$; $\Delta_2(0, 0) = 0$ – неизвестно, есть ли экстремум.

3) $M_3\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$; $\Delta_3\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) > 0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 4 > 0$,

отсюда следует, что в точке M_3 функция **z** имеет минимум, $z_{\min}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = -8$.

Ответ: Данная функция имеет минимум $\left(z_{\min} = -8\right)$ в двух симметричных точках $M_1\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ и $M_2\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, скорее всего в точке $O(0, 0, 0)$ у нее максимум $\left(z_{\max} = 0\right)$.

Наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D

Правило. Чтобы найти **M** – наибольшее и **m** – наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области **D**, находят критические точки этой функции. Если эти точки принадлежат области **D**, то в них следует вычислить значения $z = f(x, y)$. Затем, используя уравнения границы **L** области **D**, нужно найти критические точки $z = f(x, y)$, принадлежащие **L**, вычислить в них значения $z = f(x, y)$. Вычислить значения $z = f(x, y)$ на концах **L**. Осталось из всех найденных значений данной функции $z = f(x, y)$ выбрать самое большое **M** и самое малое **m**.

Задача 17. Найти наибольшее **M** и наименьшее **m** значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

Решение. Найдем критические точки функции **z**, которые принадлежат заданной области (рис. 4).

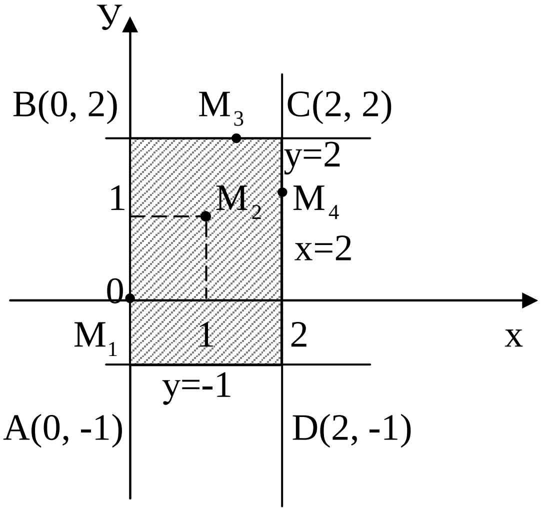


Рис. 4

$$z'_x = 3x^2 - 3y$$
$$z'_y = 3y^2 - 3x$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x, \end{cases}$$

подставим $y = x^2$ во второе уравнение:

$x^4 = x$, т. е. $x^4 - x = 0$, $x(x^3 - 1) = 0$,

$x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_2 = 1,\ y_2 = 1.$

Таким образом, решений у системы два: $\{0,\ 0\}$ и $\{1,\ 1\}$. Первому решению соответствует точка $M_1(0,\ 0)$, которая принадлежит границе области. Второму решению соответствует критическая точка $M_2(1,\ 1)$, которая принадлежит области, поэтому вычислим значения функции в ней: $z(1,\ 1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$, $\underline{z(1,\ 1) = -1}$.

Исследуем функцию **z** на границе области (прямоугольник ABCD), которая состоит из четырех звеньев:

1. **AB**: $x = 0,\ -1 \le y \le 2$, где $z = y^3$. Найдем $z' = 3y^2$; $z' = 0 \Rightarrow y = 0$. Получаем критическую точку $M_1(0, 0)$, вычислим функцию в этой точке: $\underline{z(0,\ 0) = 0}$.

2. **BC**: $y = 2,\ 0 \le x \le 2$, где $z = x^3 + 2^3 - 3x \cdot 2$ или $z = x^3 + 8 - 6x$. Найдем производную этой функции: $z' = 3x^2 - 6$; $z' = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \in BC$, корень уравнения $x = -\sqrt{2} \notin BC$, поэтому критическая точка $M_3(\sqrt{2},\ 2) \in BC$. Вычислим значение функции в ней: $z(\sqrt{2},\ 2) = (\sqrt{2})^3 + 2^3 - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2} + 8 - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2{,}4$.
$\underline{z(\sqrt{2},\ 2) \approx 2{,}4}$.

3. **CD**: $x = 2,\ -1 \le y \le 2$, где $z = 2^3 + y^3 - 3 \cdot 2 \cdot y = 8 + y^3 - 6y$. Найдем $z' = 3y^2 - 6$, $z' = 0 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2} \in CD$, а $y = -\sqrt{2} \notin CD$. Поэтому критическая точка $M_4(2,\ \sqrt{2}) \in CD$. Вычислим в ней значение функции:

$z(2, \sqrt{2}) = 2^3 + (\sqrt{2})^3 - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2{,}4$. $\underline{z(2,\ \sqrt{2}) \approx 2{,}4}$.

4. **AD**: $y=-1,\ 0\le x\le 2,$ где $z=x^3+(-1)^3-3x(-1)$ или $z=x^3-1+3x$. Найдем производную этой функции: $z'=3x^2+3,\ z'=0\ \Rightarrow$ уравнение $x^2=-1$, действительных корней не имеет.

5. Осталось вычислить значения функции $z=x^3+y^3-3xy$ на концах каждого из отрезков, являющихся сторонами прямоугольника: **AB**, **BC**, **CD**, **AD**, т. Е. в вершинах прямоугольника $A(0,\ -1), B(0,\ 2), C(2,\ 2), D(2,\ -1)$.

$z(A)=z(0,-1)=0^3+(-1)^3-3\cdot 0\cdot(-1)=-1,$ $\qquad \underline{z(A)=-1},$

$z(B)=z(0,2)=0^3+2^3-3\cdot 0\cdot 2=8,$ $\qquad \underline{z(B)=8},$

$z(C)=z(2,2)=2^3+2^3-3\cdot 2\cdot 2=4,$ $\qquad \underline{z(C)=4},$

$z(D)=z(2,-1)=2^3+(-1)^3-3\cdot 2\cdot(-1)=8-1+6=13,$ $\qquad \underline{z(D)=13}.$

Сравнив все подчеркнутые значения функции **z** (только они представляют интерес), делаем вывод: наибольшее значение **z** достигает в вершине прямоугольника **D**, т. Е. $M=z(2,-1)=13$, а наименьшее – в двух точках: во внутренней точке области M_2, $m=z(1,\ 1)=-1$ и в вершине A, $m=z(0,-1)=-1$.

Задача 18. В шар, диаметр которого равен **2R**, вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема (рис. 5).

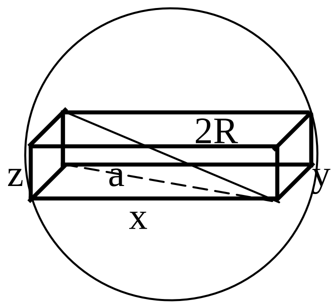


Рис. 5

Решение. Обозначим **x**, **y**, **z** – стороны параллелепипеда, тогда $v(x,y,z)=x\cdot y\cdot z$. Из рис. 5 видно: $a=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\sqrt{4R^2-a^2}$, т. е. $z=\sqrt{4R^2-x^2-y^2}$, значит, $v=x\cdot y\cdot\sqrt{4R^2-x^2-y^2}$, где $0\le x\le 2R$, $0\le y\le 2R$.

$$v'_x=y\sqrt{4R^2-x^2-y^2}-\frac{x^2\,y}{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}};$$

$$v'_y=x\sqrt{4R^2-x^2-y^2}-\frac{x\,y^2}{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}},$$

или $\begin{cases} y\left(4R^2 - x^2 - y^2\right) - x^2 y = 0, \\ x\left(4R^2 - x^2 - y^2\right) - x y^2 = 0. \end{cases}$

Из условия задачи $x \neq 0,\ y \neq 0$,

$$\begin{cases} 4R^2 - x^2 - y^2 - x^2 = 0 \\ 4R^2 - x^2 - y^2 - y^2 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4R^2 - 2x^2 = y^2 \\ 4R^2 - 2y^2 = x^2 \end{cases} \Rightarrow x = y,$$

откуда $4R^2 = 3x^2$ или $x = \dfrac{2R}{\sqrt{3}},\ y = \dfrac{2R}{\sqrt{3}},\ z = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, т. е. прямоугольный параллелепипед, вписанный в данный шар, будет иметь наибольший объем, если он будет кубом, ребра которого равны $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Элементы скалярного поля

а) Производная скалярного поля $u = u(x, y, z)$ по направлению вектора

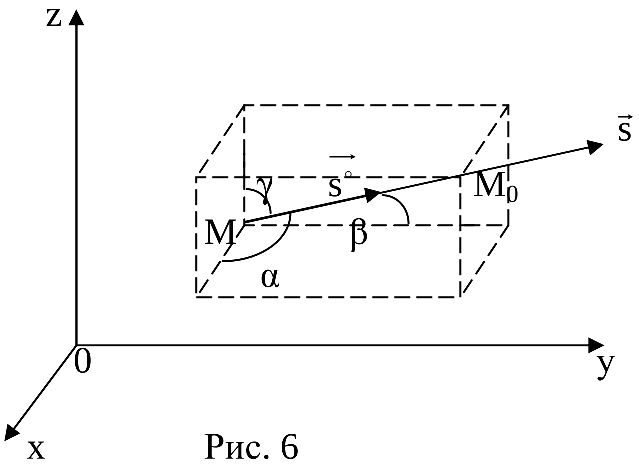


Рис. 6

$\overrightarrow{s^\circ} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ (рис.6). определяется так:
$\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$ – это скорость изменения скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в направлении вектора $\overrightarrow{s^\circ}$.

Задача 19. Найти скорость изменения скалярного поля $u(M) = x\,y\,z$ в точке $M_0(5,\ 1,\ -8)$ в направлении от этой точки к точке $M_1(9,\ 4,\ 4)$.

Решение. Скорость изменения скалярного поля в направлении вектора $\overrightarrow{s^\circ}$ в точке M_0 определяют по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma.$$

В задаче $\vec{s} = \overrightarrow{M_0 M_1} = \{4, 3, 12\}$, $|\vec{s}| = \left|\overrightarrow{M_0 M_1}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = 13$,

$$\overrightarrow{s^{\circ}} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \left\{\frac{4}{13}; \frac{3}{13}; \frac{12}{13}\right\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = yz\Big|_{M_0(5,1,-8)} = 1\cdot(-8) = -8,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = xz\Big|_{M_0(5,1,-8)} = 5\cdot(-8) = -40,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = xy\Big|_{M_0(5,1,-8)} = 5\cdot 1 = 5.$$

Подставим все найденные величины в первую формулу:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -8\cdot\frac{4}{13} - 40\cdot\frac{3}{13} + 5\cdot\frac{12}{13} = \frac{-32-120+60}{13} = -\frac{92}{13} < 0.$$

Ответ: В заданном направлении данное скалярное поле убывает со скоростью $\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{92}{13}$.

б) Градиент скалярного поля $u = u(x, y, z)$ – вектор

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\vec{k} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Очевидно,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma =$$

$$= \operatorname{grad} u \cdot \overrightarrow{s^{\circ}} = \text{Пр}_{\overrightarrow{s^{\circ}}} \operatorname{grad} u.$$ Поэтому $\max\frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u|$.

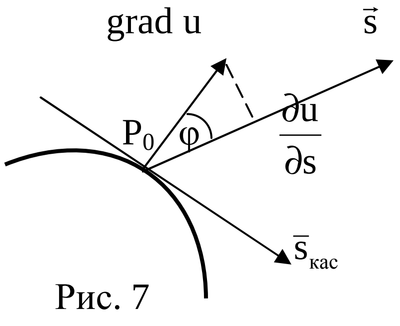


Рис. 7

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \text{Пр}_{\bar{s}} \operatorname{grad} u = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi$$

(рис. 7).

Задача 20. Найти величину градиента скалярного поля $u(M)=x^2+y^2+$ $+z^2-2xyz$ в точке $M_0(1,-1,2)$.

Решение.

$$\operatorname{grad} u=\nabla u=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\vec{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\vec{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=$$

$$=\left.(2x-2yz)\right|_{M_0(1,-1,2)}\vec{i}+\left.(2y-2xz)\right|_{M_0(1,-1,2)}\vec{j}+\left.(2z-2xy)\right|_{M_0(1,-1,2)}\vec{k}=$$

$$=(2\cdot1-2\cdot(-1)\cdot2)\vec{i}+(2\cdot(-1)-2\cdot1\cdot2)\vec{j}+(2\cdot2-2\cdot1\cdot(-1))\vec{k}=6\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k}=\{6,-6,6\}.$$

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{6^2+(-6)^2+6^2}=6\sqrt{3}.$$

Ответ: $|\operatorname{grad} u|=6\sqrt{3}$.

Задача 21. Найти наибольшую скорость возрастания скалярного поля $u(M)=x^y-z$ в точке $M_0(2,2,4)$.

Решение. Воспользуемся формулой $\max\frac{\partial u}{\partial s}=|\operatorname{grad} u(M_0)|$,

$$\operatorname{grad} u(M_0)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\vec{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\vec{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\vec{k}=$$

$$=\left.y\cdot x^{y-1}\right|_{M_0(2,2,4)}\vec{i}+\left.x^y\ln x\right|_{M_0(2,2,4)}\vec{j}-1\cdot\vec{k}=4\vec{i}+4(\ln2)\vec{j}-\vec{k}=\{4,\ 4\ln2,\ -1\}$$

$$|\operatorname{grad} u(M_0)|=\sqrt{4^2+(4\ln2)^2+(-1)^2}=\sqrt{17+16\ln^2 2}.$$

Ответ: $\max\frac{\partial u}{\partial s}=\sqrt{17+16\ln^2 2}$.

Задача 22. Функция $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ определяет скалярное поле. Доказать, что она удовлетворяет уравнению $u=2\ln2-\ln(\operatorname{grad} u)^2$.

Решение. Найдем вначале градиент **u** по формуле $\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$,

или $\operatorname{grad} u=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\vec{i}+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\vec{j}+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\vec{k}$. Из полученного равенства следует, что декартовы координаты $\operatorname{grad} u$ известны:

$$\operatorname{grad} u=\left\{\frac{2x}{x^2+y^2+z^2};\ \frac{2y}{x^2+y^2+z^2};\ \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right\}.$$

Так как скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, то

$$(\operatorname{grad} u)^2=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right)^2+\left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right)^2+\left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)^2=\frac{4}{x^2+y^2+z^2}.$$

Теперь все известные величины можно подставить в уравнение:

$\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)=2\ln 2-\ln\dfrac{4}{x^2+y^2+z^2}$, т. е. $\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)=\ln 4-\ln 4+$

$+\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$, что и требовалось доказать.

Геометрические приложения частных производных

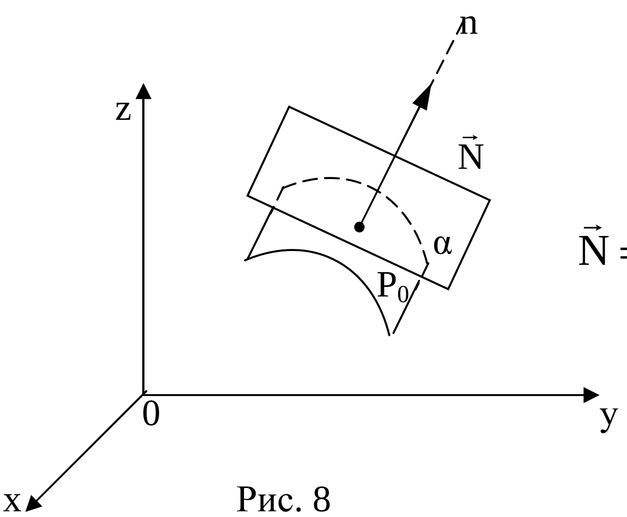
а) Уравнения касательной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к пространственной кривой

$\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$: $\dfrac{x-x_0}{x'_t(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'_t(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'_t(t_0)}$, где $\vec{s}=\{x'_t(t_0),\ y'_t(t_0),\ z'_t(t_0)\}$ – направляющий вектор касательной, $x_0=x(t_0),\ \ y_0=y(t_0),\ \ z_0=z(t_0)$ – точка касания.

б) Уравнения касательной плоскости α и нормали n к поверхности $F(x, y, z)=0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$\alpha:\ \ F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0.$$

$$n:\ \frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$



$$\vec{N}=\nabla u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}_{P_0}$$ (рис. 8)

Рис. 8

Задача 23. Составить уравнение касательной прямой к пространственной линии $x = 3t^2 - 2, \quad y = t^3 + 1, \quad z = 2t^2 + 6$ в точке $t_0 = 1$.

Решение. Уравнение касательной к пространственной кривой в общем виде таково: $\dfrac{x - x_0}{x'_t(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'_t(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'_t(t_0)}$. Найдем координаты точки касания:

$x_0 = \left(3t^2 - 2\right)\Big|_{t_0=1} = 1, \quad y_0 = \left(t^3 + 1\right)\Big|_{t_0=1} = 2, \quad z_0 = \left(2t^2 + 6\right)\Big|_{t_0=1} = 8$, затем координаты направляющего вектора $\vec{s} = \{m, n, p\} = \{x'_t, y'_t, z'_t\}_{M_0}$:

$$m = x'_t(M_0) = 6t\Big|_{t_0=1} = 6, \quad n = y'_t(M_0) = 3t\Big|_{t_0=1} = 3, \quad p = z'_t(M_0) = 4t\Big|_{t_0=1} = 4.$$

Итак, $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-8}{4}$ – касательная к пространственной кривой в данной точке.

Задача 24. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - y^2$ (гиперболический параболоид) в точке $M_0(1, 1, 0)$.

Решение. Вначале запишем уравнение данной поверхности в виде $F(x, y, z) = 0$, т. е. $x^2 - y^2 - z = 0$. Тогда уравнение касательной плоскости в общем виде запишется так: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$,

где $A = F'_x(M_0) = 2x\Big|_{x=1} = 2$, $B = F'_y(M_0) = -2y\Big|_{y=1} = -2$, $C = F'_z(M_0) = -1\Big|_{z=0} = -1$,

т. е. нормаль к касательной плоскости $\vec{N} = \{2, -2, -1\}$, $M_0(1, 1, 0)$ – точка касания, значит, $2(x-1) - 2(y-1) - 1(z-0) = 0$, т. е. $2x - 2y - 1 = 0$ – касательная плоскость к данной поверхности в точке M_0.

Уравнения нормали к этой же поверхности в точке M_0 в общем виде запишутся так: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$, где $\vec{s} = \{m, n, p\}$ – направляющий вектор нормали, за него можно принять нормаль к касательной плоскости $\vec{N}$, т. е. $\vec{s} = \vec{N} = \{2, -2, -1\}$. Итак, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{-1}$ – это канонические уравнения нормали к данной поверхности в точке M_0.

Задача 25. Показать, что конус $z^2 = x^2 + y^2$ и сфера $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$ касаются друг друга в точке $M_0(0,\ 1,\ 1)$.

Решение. Чтобы решить задачу, достаточно показать, что в точке $M_0(0,1,1)$ данные конус и сфера имеют общую касательную плоскость:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Сначала найдем касательную плоскость к конусу в точке M_0: уравнение конуса запишем в виде $F(x,\ y,\ z) = 0$, т. е. в виде $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, откуда

$$A = F'_x(M_0) = 2x\Big|_{x_0=0} = 0,\ B = F'_y(M_0) = 2y\Big|_{y_0=1} = 2,\ C = F'_z(M_0) = -2z\Big|_{z_0=1} = -2.$$

Значит, $0(x-0) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0,$ или $2y - 2z = 0$ – касательная плоскость к конусу в точке M_0.

Также найдем касательную плоскость к сфере $x^2 + y^2 + (z-2)^2 - 2 = 0$ в точке $M_0(0,\ 1,\ 1)$.

$$A = F'_x(M_0) = 2x\Big|_{x_0=0} = 0,\ B = F'_y(M_0) = 2y\Big|_{y_0=1} = 2,\ C = F'_z(M_0) = 2(z-2)\Big|_{z_0=1} = -2.$$

Касательная плоскость к сфере в точке M_0 задается уравнением $0(x-0) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0,$ или $2y - 2z = 0$, что и требовалось доказать.

Задача 26. На поверхности $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости **XOZ**.

Решение. Так как касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости **XOZ**, то она перпендикулярна оси **OY** и ее нормаль $\vec{N} = \{A,\ B,\ C\}$ имеет координаты $\vec{N} = \{0,\ B,\ 0\}$. С другой стороны известно, что нормаль касательной плоскости к поверхности $F(x,\ y,\ z) = 0$ имеет координаты:

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0} = 2x_0 - 2, \quad B = 2y\Big|_{M_0} = 2y_0, \quad C = -2z\Big|_{M_0} = -2z_0.$$

Чтобы найти $x_0,\ y_0,\ z_0$, сравним **A**, **B** и **C** вектора $\vec{N}$: $2x_0 - 2 = 0,\ \ 2y_0 = B,$ $-2z_0 = 0$, т. е. $x_0 = 1, \quad y_0 = \frac{B}{2}, \quad z_0 = 0$ – координаты точки касания. Осталось найти **B**. Так как точка касания принадлежит поверхности, ее координаты должны удовлетворять уравнению этой поверхности:

$x^2+y^2-z^2-2x=0$ или $1^2+\dfrac{B^2}{4}-0^2-2\cdot 1=0$, откуда $B^2=4,\ B=2\pm 2,$ значит $y_0=\pm 1$. Значит, точек касания две: $M_0(1,\ 1,\ 0)$ и $N_0(1,\ -1,\ 0)$.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Двойной интеграл
Теорема существования.

Определение.

$\iint\limits_{\sigma} f(x,\,y)ds=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \max\Delta s_i\to 0}}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,\,y_i)\Delta s_i$, где $f(x,\,y)$ – непрерывна в области σ.

Основные свойства

1. $\iint\limits_{\sigma} c\,f(x,\ y)ds=c\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)ds$.

2. $\iint\limits_{\sigma}\left[f_1(x,\ y)\pm f_2(x,\ y)\right]ds=\iint\limits_{\sigma} f_1(x,\ y)ds\pm\iint\limits_{\sigma} f_2(x,\ y)ds$.

3. $\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)ds=\iint\limits_{\sigma_1} f(x,\ y)ds+\iint\limits_{\sigma_2} f(x,\ y)ds,$ где $\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$.

4. Теорема об оценке двойного интеграла.

$m\cdot s_\sigma\le\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)ds\le M\cdot s_\sigma$, где s_σ – площадь области σ, **m** и **M** – наименьшее и наибольшее значения $f(x,\ y)$ в области σ.

5. Теорема “о среднем” двойного интеграла.

Существует такая точка $M_0(x_0,\ y_0)\in\sigma$, что $\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)ds=f(x_0,\ y_0)\cdot s_\sigma$.

6. Геометрический смысл двойного интеграла.

$\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)ds=v_{цил.}$, где $v_{цил.}$ – объем цилиндроида, пространственного тела, ограниченного сверху поверхностью **P**: $z=f(x,\ y)$, снизу областью σ, лежащей в плоскости **XOY**, с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси **OZ**, и направляющей **ABCD** – границей области σ.

Вычисление двойного интеграла в прямоугольных координатах

а) Дифференциал площади $ds = dx\,dy$, а двойной интеграл

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)\,ds = \iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Чтобы вычислить двойной интеграл, его следует заменить двукратным (или повторным) интегралом по следующему правилу: предположим, что область σ – правильная, т. е. любая прямая, параллельная осям координат, пересекает границу σ не более чем в двух точках (рис. 9). Спроектируем сначала область σ на ось OX в отрезок $[a,\ b]$. Точки касания **A** и **B** делят границу области σ на две дуги **ACB** и **ADB** с уравнениями соответственно:

ACB: $y = y_1(x)$ и **ADB**: $y = y_2(x)$,

где $a \le x \le b$, а $y_1(x) \le y \le y_2(x)$.

Таким образом, данный интеграл

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy$$

или
$$\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\ y)\,dx,$$

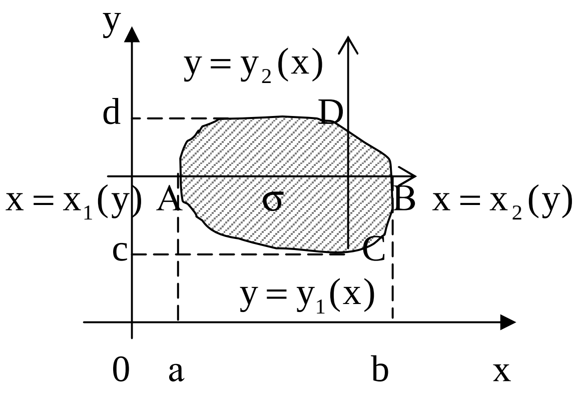


Рис. 9

где $x = x_1(y)$ – уравнение **CAD**, а $x = x_2(y)$ – уравнение **CBD** (если изменить порядок интегрирования, т. е. начать с проектирования области σ на ось **OY**).

Задача 1. Вычислить $I = \iint\limits_{\sigma} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, если область σ ограничена линиями $x = y$ и $x\,y = 1$, $x = 2$.

Решение. Построим область интегрирования σ (рис. 10). Найдем координаты точки A, решив совместно уравнения прямой $y = x$ и гиперболы $y = \frac{1}{x}$ $(x\,y = 1)$,

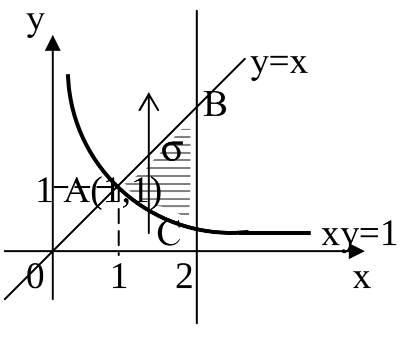


Рис. 10

A(1, 1). Область σ (“треугольник” **ABC**) проектируем на ось **OX**, в отрезок $1 \le x \le 2$, проведем стрелку параллельно оси **OУ**, которая “входит” в область σ на линии $y = \frac{1}{x}$ – это нижний предел интегрирования по **y**, а “выходит” из σ на линии $y = x$ – это верхний предел интегрирования по **y**.

Интегрирование начинаем с внутреннего интеграла по переменной **y**, поэтому **x**, как постоянную, выносим за знак этого интеграла.

$$I=\iint_{\sigma}\frac{x^2}{y^2}dx\,dy=\int_1^2 dx\int_{y=\frac{1}{x}}^{y=x}\frac{x^2}{y^2}dy==\int_1^2 x^2\,dx\int_{y=\frac{1}{x}}^{y=x}\frac{1}{y^2}dy=$$

$$=\int_1^2 x^2\,dx\left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x}=\int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{x}+x\right)dx=\int_1^2\left(-x+x^3\right)dx=$$

$$=-\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2+\frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2=-2+\frac{1}{2}+4-\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}.$$

Ответ: $I=2\frac{1}{4}$.

Задача 2. Вычислить интеграл $I=\iint_{\sigma}2y\,dx\,dy$ по области σ, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $x+y=2$, $y=0$ (ось **OX**).

Решение. Построим область σ (рис. 11). Видно, что координаты точки пересечения параболы $y=\sqrt{x}$ и прямой $y=2-x$ $(x+y=2)$: $A(1,\ 1)$ (Проверьте). Проектировать область треугольника **OAB**, как в предыдущей задаче, на ось **OX** нецелесообразно, т. к. по отношению к переменной **y** “верхняя граница” – **OAB** – “ломается” в точке **A**, состоит из двух линий **OA** и **AB**, поэтому не может быть описана одним уравнением, в таком случае σ придется разбивать на части: **OAC** и **CAB**, а данный интеграл вычислять как сумму двух интегралов по каждой из областей. Выгоднее изменить порядок интегрирования: внешний интеграл вычислить по **y**, спроектировав σ на ось **OY** в отрезок $0\le y\le 1$, а внутренний – по **x**. Пределы интегрирования по **x** найдем с помощью стрелки, пересекающей σ параллельно оси **OX**. “Входит” стрелка в σ на параболе $y=\sqrt{x}$, или $x=y^2$, а “выходит” стрелка на прямой $x+y=2$, или $x=2-y$. Таким образом,

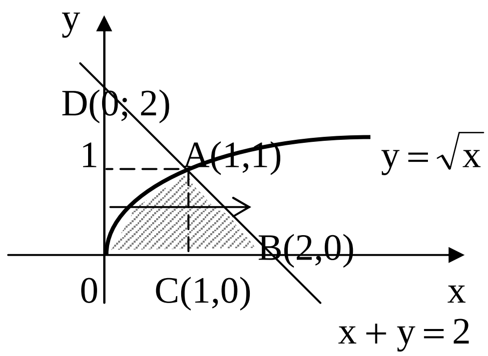


Рис. 11

$$I=\iint\limits_{\sigma}2y\,dx\,dy=2\int_0^1 dy\int_{x=y^2}^{x=2-y}y\,dx=2\int_0^1 y\,dy\int_{x=y^2}^{x=2-y}dx=2\int_0^1 y\,x\Big|_{x=y^2}^{x=2-y}dy=2\int_0^1 y\left(2-y-y^2\right)dy=$$

$$=2\int_0^1\left(2y-y^2-y^3\right)dy=2\left(y^2-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=2\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=2\cdot\frac{12-4-3}{12}=\frac{5}{6}.$$

Ответ: $I=\frac{5}{6}$.

Замечание. Из решенных задач видно, что от выбора порядка интегрирования часто существенно зависит трудоемкость решения задачи двойного интегрирования. Подтверждение этому можно увидеть в следующих задачах.

Задача 3. Дан двойной интеграл: $I=\iint\limits_{\sigma}f(x\,y)\,dx\,dy=\int_1^2 dy\int_1^y f(x\,y)\,dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2}f(x\,y)\,dx$.

Восстановить область интегрирования σ и изменить порядок интегрирования.

Решение. Наличие двух слагаемых в правой части равенства свидетельствует о том, что σ разбита на две области: σ_1 и σ_2 (свойство 3). Первое слагаемое – повторный интеграл по σ_1: **ABD** $1\le y\le 2$, $x=1$ и $x=y$ – пределы интегрирования, второе – повторный интеграл по σ_2: **BCD** $2\le y\le 4$, $x=\frac{y}{2}$, $x=2$ – пределы интегрирования (рис. 12). Функция записывается после того, как будут записаны пределы интегрирования $I=\int_1^2 dx\int_{y=x}^{y=2x}f(xy)\,dy$.

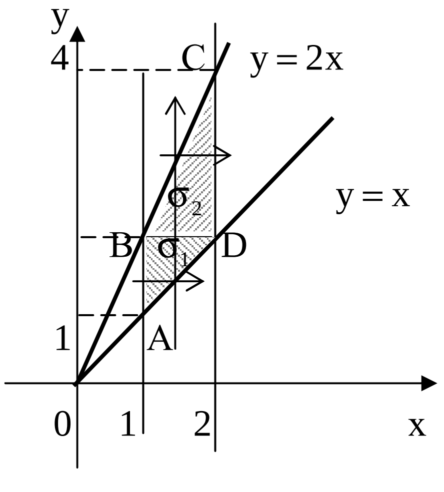


Рис. 12

Оказывается, если изменить порядок интегрирования, то эту задачу можно решить, вычислив один двукратный интеграл.

Задача 4. Дан двойной интеграл $I=\iint\limits_{\sigma}f(x\;y)\,dx\,dy=\int_0^r dx\int_x^{\sqrt{2rx-x^2}}f(x\;y)\,dy$. Восстановить область интегрирования и изменить порядок интегрирования.

Решение. Из пределов интегрирования в правой части равенства следует:

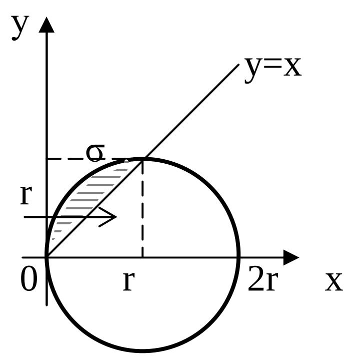


Рис. 13

$0 \le x \le r,\ y = x,\ y = \sqrt{2rx - x^2}$. Построим область σ, преобразовав предварительно уравнение $y = \sqrt{2rx - x^2}$: $y^2 = 2rx - x^2$, следовательно, $x^2 - 2rx + r^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow (x-r)^2 + y^2 = r^2$ (рис. 13). Очевидно, это окружность, центр которой находится в точке **C**(r, 0), а радиус равен **r**. Изменим порядок интегрирования. Решим уравнение окружности относительно **x**:

$$(x-r)^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow (x-r)^2 = r^2 - y^2 \Rightarrow x - r = \pm\sqrt{r^2 - y^2} \Rightarrow x = r - \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Знак “минус” у корня выбираем из расчета, что в области σ переменная $x \le r$. Итак: $I = \int\limits_0^r dy \int\limits_{x=r-\sqrt{r^2-y^2}}^{x=y} f(x,y)\,dx$.

Замечание. Необходимо заметить, что пределы интегрирования в двукратном интеграле будут <u>постоянными</u> по **x** и **y** в том, и только в том, случае, если σ - область интегрирования – прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. В общем же случае постоянны пределы только во внешнем интеграле: это интервал, в который спроектировалась σ на ось, одноименную с внешней переменной, пределы интегрирования во внутреннем интеграле помогает определить <u>стрелка</u>, проходящая параллельно оси координат, одноименной с внутренней переменной.

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Если граница области интегрирования σ состоит из окружности и ее дуг, а подынтегральное выражение содержит выражение $x^2 + y^2$, то имеет смысл ввести полярную систему координат (ρ, φ), полюс которой **O** совпадает с началом координат данной прямоугольной системы, а полярная ось $O\rho$ направлена по оси **OX**. Тогда связь между полярными и декартовыми координатами выражается следующими формулами: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, при этом $x^2 + y^2 = \rho^2$, а $ds = dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$. Поэтому переход от декартовых координат к полярным под знаком двойного интеграла осуществляется по формуле

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

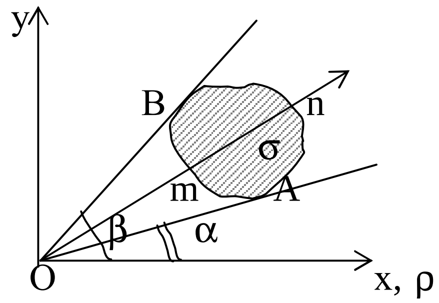


Рис. 14

Чтобы вычислить интеграл, полученный в правой части, его заменяют двукратным (повторным интегралом) (рис. 14). Для этого спроектируем σ в полюс **O** с помощью лучей ОА и ОВ, при этом α – угол наклона ОА к полярной оси, а β – угол наклона **OB**. Это пределы изменения полярного угла φ в области σ: $\alpha \le \varphi \le \beta$.

Точки касания **A** и **B** разбивают границу σ на две дуги: “нижнюю” **AmB**: $\rho = \rho_1(\varphi)$, на которой стрелка, проведенная из полюса **O**, “входит” в область σ, и “верхнюю” **AnB**: $\rho = \rho_2(\varphi)$, на которой эта стрелка “выходит” из σ. Это пределы изменения полярного луча ρ: $\rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)$.

Таким образом, получаем $\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho=\rho_1(\varphi)}^{\rho=\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$.

Задача 5. Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}\,dx\,dy$, если σ ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. σ – круг, радиус которого R = 1, а центр находится в начале координат.

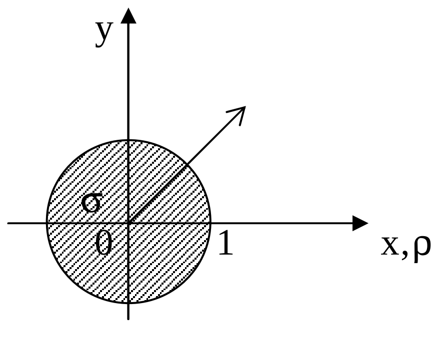


Рис. 15

Введем полярную систему координат, поместив полюс в начало координат **O**(0, 0), а полярную ось совместим с осью **OX** (рис. 15). По формулам связи между декартовыми и полярными координатами получим уравнение границы области σ: $\rho = 1$ – окружность $x^2 + y^2 = 1$. Тогда по формулам перехода от декартовых координат к полярным, получим:

$$I = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}} d(1-\rho^2) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

(Сделав поправку на (-2), внутренний интеграл берем как степенной).

Ответ: $I=\frac{2\pi}{3}$.

Замечание. Следует обратить внимание на то, что постоянными будут пределы интегрирования во внешнем и внутреннем интегралах двукратного интеграла в полярной системе координат в том, и только в том случае, если σ – область интегрирования – круг с центром в полюсе, как в только что решенной задаче 5.

Задача 6. Вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_{\sigma} y\ dx\ dy$, если σ – фигура, ограниченная линиями $x^2+y^2=ax$ и осью **OX** ($x\ge 0, y\ge 0$).

Решение. Чтобы построить линию $x^2+y^2=ax$, приведем ее уравнение к каноническому виду: $x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2=\frac{a^2}{4}$ или $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$. Очевидно, это окружность, центр которой в точке $C\left(\frac{a}{2},0\right)$, а радиус $R=\frac{a}{2}$.

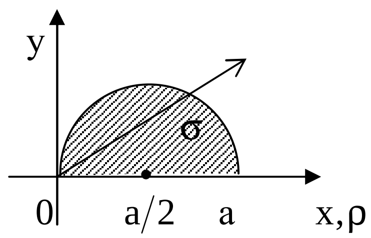


Рис. 16

Введем полярную систему координат. Уравнение окружности в ней примет вид $\rho^2=a\,\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho=a\cos\varphi$. Из рис. 16 видно: $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le\rho=a\cos\varphi$ (стрелка на рисунке "входит" в σ в начале координат, а "выходит" на окружности $\rho=a\cos\varphi$). Получим

$$I=\iint\limits_{\sigma} y\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\rho=a\cos\varphi} \underbrace{\rho\sin\varphi}_{y}\ \rho\ d\rho=\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\ d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\rho^2\,d\rho=\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\ d\varphi\ \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{a\cos\varphi}=$$

$$=\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\ \cos^3\varphi\, d\varphi=\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\sin\varphi\ d\varphi=\left|\begin{array}{l} v=\cos\varphi \\ dv=-\sin\varphi\, d\varphi \\ \int v^3\,dv=\dfrac{v^4}{4}\end{array}\right|,$$

интеграл требует поправки на минус единицу:

$$-\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\, d\cos\varphi=-\frac{a^3}{3}\,\frac{\cos^4\varphi}{4}\Bigg|_0^{\pi/2}=-\frac{a^3}{12}(0-1)=\frac{a^3}{12}.$$

Ответ: $I=\dfrac{a^3}{12}$.

Приложения двойного интеграла
Вычисление площадей плоских фигур

Исходя из геометрического смысла двойного интеграла, можно заметить, что

$$S_\sigma=\iint\limits_\sigma dx\,dy \text{ (в декартовых координатах)},$$

$$S_\sigma=\iint\limits_\sigma \rho\, d\rho\ d\varphi \text{ (в полярных координатах)}.$$

Задача 7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-2,\quad y=2,$ $y=x+2,\quad y^2=x$.

Решение. Построим область σ. Из рис. 17 видно, что в этой задаче целесообразно внешний интеграл вычислить по переменной **y**, а внутренний – по **x**:

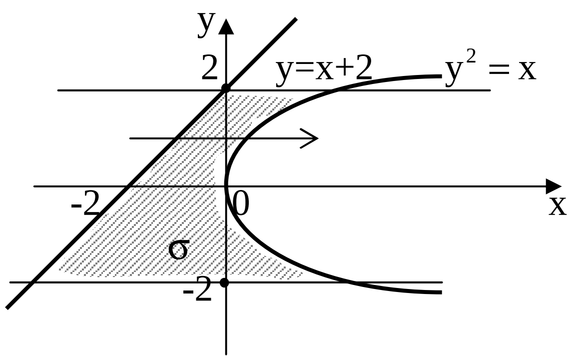


Рис. 17

$$S_\sigma=\iint\limits_\sigma dx\ dy=\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{x=y-2}^{x=y^2}dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^{2}(y^2-y+2)\,dy=$$

$$=\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+2y\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}+4\right)-$$

$$-\left(-\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-4\right)=\frac{16}{3}+8=\frac{40}{3}.$$

Ответ: $S=\dfrac{40}{3}$.

Задача 8. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $\rho=a\ \cos\varphi$.

Решение. Построим область σ (рис.18). Ее ограничивают кардиоида $\rho=a(1+\cos\varphi)$ и окружность $\rho=a\ \cos\varphi$. Площадь области σ находим как разность площадей двух фигур: $S_{\text{кард.}}$ – площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, и $S_{\text{кр.}}$ – площадь круга.

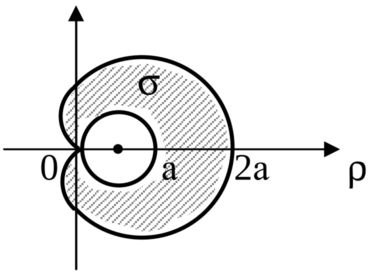


Рис. 18

$$S_{\text{кард.}}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}\rho\,d\rho=\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{a(1+\cos\varphi)}d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\varphi+2\sin\varphi+\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{4}\sin2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}\left(2\pi+2\sin2\pi+\frac{2\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin4\pi\right)=\frac{3a^2\pi}{2}.$$

Площадь круга найти легко, ведь радиус его, как видно из его уравнения и рисунка 18, $R=\dfrac{a}{2}$. Значит, $S_{\text{круга}}=\pi R^2=\dfrac{\pi a^2}{4}$.

Итак, $S_\sigma=S_{\text{кард.}}-S_{\text{кр.}}=\dfrac{3\pi a^2}{2}-\dfrac{\pi a^2}{4}=\dfrac{5\pi a^2}{4}$.

Ответ: $S_\sigma=\dfrac{5\pi a^2}{4}$.

Вычисление объемов тел

Задача 9. Вычислить объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $2z=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}$ и плоскостями $x=1$, $y=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Решение. Очевидно, что сверху тело Ω ограничено частью эллиптического параболоида $OA_1C_1B_1$: $z = f(x, y)$ или $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{6}$; в основании тела лежит прямоугольник $\sigma(AOBC)$ (рис.19): $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$.

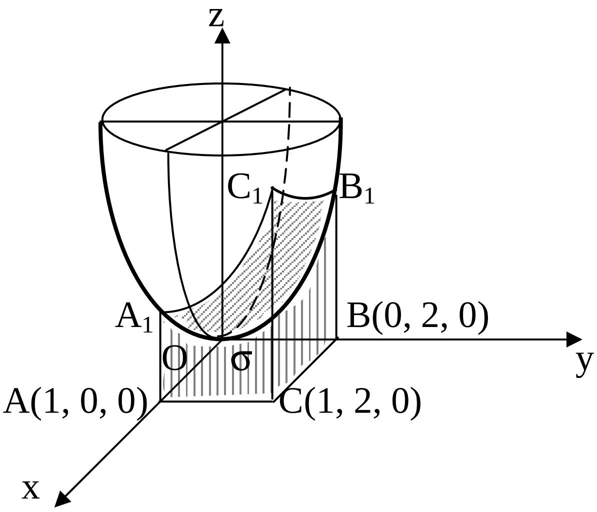


Рис. 19

Значит, объем тела

$$V = \iint_{\sigma} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} \right) dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{x^2}{4} y + \frac{y^3}{6 \cdot 3} \right]_0^2 = \int_0^1 \left(\frac{2}{4} x^2 + \frac{2^3}{18} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^1 + \frac{8}{18} x \Bigg|_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{8}{18} = \frac{11}{18}.$$

Ответ: $V = \dfrac{11}{18}$.

Задача 10. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрами $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ и плоскостями $x = 0,\ y = o,\ z = 0$ (рис. 20).

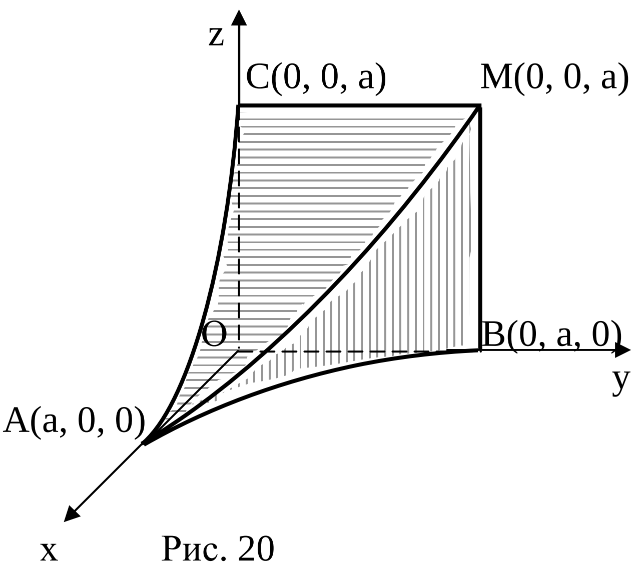


Рис. 20

Решение. Сверху тело ограничено частью **ACM** цилиндрической поверхности $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ или $z = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ – это подынтегральная функция. Область интегрирования σ – криволинейный треугольник AOB, причем уравнение дуги **AB**

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

где $0 \le x \le a$, $0 \le y \le \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ – пределы изменения аргументов в области σ.

Таким образом, $V=\iint\limits_{\sigma}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}dx\,dy=\int\limits_{0}^{a}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}dx\int\limits_{0}^{\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}dy=$

$$=\int\limits_{0}^{a}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{3}dx=\int\limits_{0}^{a}\left(a^{2}-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^{2}\right)dx=$$

$$=\left[a^{2}x-3a^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{x^{3}}{3}\right]_{0}^{a}=a^{3}-\frac{9}{5}a^{3}+\frac{9}{7}a^{3}-\frac{a^{3}}{3}=$$

$$=\frac{105-189+135-35}{105}a^{3}=\frac{16}{105}a^{3}.$$

Ответ: $V=\frac{16}{105}a^{3}$.

Задача 11. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^{2}+y^{2}+z^{2}=4R^{2}$ и цилиндром $x^{2}+y^{2}=2Rx$ (на рис. 21 изображена $\frac{1}{4}$ часть “тела Вивиани”).

Решение. Эту задачу будем решать в полярных координатах. Подынтегральная функция, задающая поверхность, которая ограничивает тело сверху, задается уравнением $z=\sqrt{4R^{2}-\left(x^{2}+y^{2}\right)}$, в полярных координатах примет вид $z=\sqrt{4R^{2}-\rho^{2}}=\left(4R^{2}-\rho^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Граница области σ – полуокружность OA в полярной системе координат задается уравнением $\rho^{2}=2R\rho\cos\varphi$, или $\rho=2R\cos\varphi$. Очевидно, что переменные ρ и φ в области σ изменяются в следующих пределах:

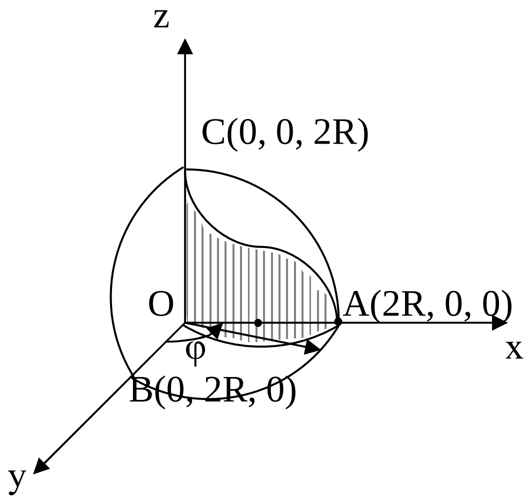


Рис. 21

$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le 2R\cos\varphi$. Итак, $V=\iint\limits_{\sigma}\sqrt{4R^{2}-\rho^{2}}\,\rho\,d\rho\,d\varphi=\iint\limits_{\sigma}\left(4R^{2}-\rho^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\rho\,d\rho\,d\varphi=$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi}\left(4R^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2\rho)\,d\rho=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi}\left(4R^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot d\left(4R^2-\rho^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left.\frac{2\left(4R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{2R\cos\varphi}=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(4R^2-4R^2\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}-(2R)^3\right]d\varphi=$$

$$=-\frac{8R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3\varphi-1\right)d\varphi=-\frac{8R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(1-\cos^2\varphi\right)\sin\varphi\,d\varphi-d\varphi\right]=$$

$$=-\frac{8R^3}{3}\left.\left(-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{3}-\varphi\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{8R^3}{3}\left(1-\frac{1}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{8R^3}{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{8R^3}{3}\cdot\frac{(3\pi-4)}{6}=\frac{4R^3(3\pi-4)}{9}.$$

Так как на рис. 21 изображена только четвертая часть “тела Вивиани”, расположенная в первом октанте, то

$$V_{ТВ}=4V=\frac{16R^3(3\pi-4)}{9}.$$

Ответ: $V=\dfrac{16R^3(3\pi-4)}{9}$.

Вычисление физических характеристик плоских фигур

1) Масса плоской пластинки σ с переменной плотностью $\mu=\mu(x,\,y)$:

$m=\iint\limits_{\sigma}\mu(x,\,y)\,dx\,dy$ – в декартовых координатах,

$m=\iint\limits_{\sigma}\mu(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi$ – в полярных координатах.

2) Статические моменты пластинки **σ** относительно координатных осей:

$$M_{OX}=\iint\limits_{\sigma} y\,\mu(x,\,y)\,dx\,dy,$$

$$M_{OY}=\iint\limits_{\sigma} x\,\mu(x,\,y)\,dx\,dy.$$

3) Координаты центра тяжести $C(x_0,\ y_0)$ пластинки **σ**:

$$x_C=\frac{M_{OY}}{m};\qquad y_C=\frac{M_{OX}}{m}.$$

4) Моменты инерции пластинки **σ** относительно координатных осей:

$$I_{OX}=\iint_{\sigma} y^2\,\mu(x,\,y)\,dx\,dy,$$

$$I_{OY}=\iint_{\sigma} x^2\,\mu(x,\,y)\,dx\,dy,$$

$I_{XY}=\iint_{\sigma} x\ \ y\ \ \mu(x,\,y)\,dx\,dy$ – центробежный момент инерции,

$I_0=\iint_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)\mu(x,\,y)\,dx\,dy=I_{OX}+I_{OY}$ – центральный (полярный) момент инерции.

Задача 12. Найти центр тяжести однородной фигуры $(\mu=1)$, ограниченной синусоидой $y=\sin x$ и прямыми $x=\dfrac{\pi}{2}$, $y=0$ (рис. 22).

Решение. Воспользуемся формулами: $x_c=\dfrac{M_{OY}}{m}$; $y_c=\dfrac{M_{OX}}{m}$. Масса фигуры

ABO: $m=\displaystyle\iint_{\sigma}dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sin x}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\ x\ dx=-\cos\ x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\ 0\right)=1.$

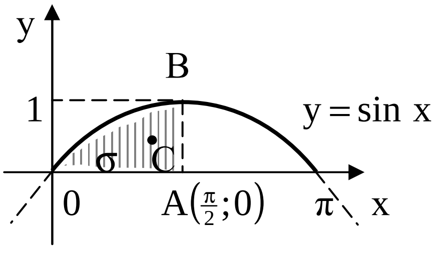


Рис. 22

Теперь найдем статические моменты M_{OX} и M_{OY}:

$$M_{OX}=\iint_{\sigma}y\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\sin\ x}y\,dy=\int_0^{\pi/2}dx\,\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sin\ x}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{8}.$$

$$M_{OY}=\iint_\sigma x\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}x\,dx\int_0^{\sin x}dy=\int_0^{\pi/2}x\,dx\;y\Big|_0^{\sin x}=$$

$$=\int_0^{\pi/2}x\sin x\,dx=\left|\begin{array}{ll}\int u\,dv=uv-\int v\,du & \\ u=x & du=dx\\ dv=\sin x\,dx & v=-\cos x\end{array}\right|=-x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Ответ: $C\left(1,\ \frac{\pi}{8}\right)$.

Задача 13. Найти моменты инерции:

а) параболического полусегмента $y=2\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, если плотность фигуры в каждой точке равна ее ординате (рис. 23).

Решение. Воспользуемся формулами

$$I_{OX}=\iint_\sigma y^2\mu\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{2\sqrt{x}}y^2\cdot y\,dy=\int_0^1\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^{2\sqrt{x}}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 16x^2\,dx=4\int_0^1 x^2\,dx=\frac{4}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{4}{3};$$

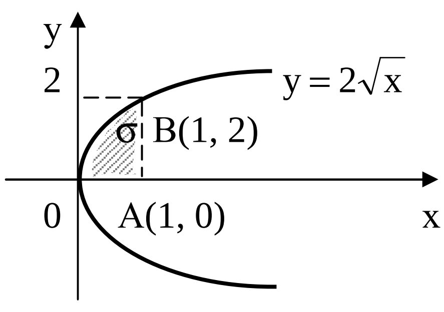


Рис. 23

$$I_{OY}=\iint_\sigma x^2\mu\,dx\,dy=\int_0^1 x^2\,dx\int_0^{2\sqrt{x}}y\,dy=\int_0^1 x^2\,dx\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left(2\sqrt{x}\right)^2=2\int_0^1 x^3dx=\frac{2x^4}{4}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2};$$

$$I_0=\iint_\sigma\left(x^2+y^2\right)\mu\,dx\,dy=\int_0^1dx\int_0^{2\sqrt{x}}\left(x^2+y^2\right)y\,dx\,dy=\int_0^1dx\int_0^{2\sqrt{x}}\left(x^2\,y\,dy+y^3\,dy\right)=$$

$$=\int_0^1\left(x^2\,\frac{y^2}{2}\bigg|_0^{2\sqrt{x}}+\frac{y^4}{4}\bigg|_0^{2\sqrt{x}}\right)dx=\int_0^1\left(2x^3\,dx+4x^2\,dx\right)=\frac{2x^4}{4}\bigg|_0^1+\frac{4x^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=\frac{11}{6};$$

Ответ: $I_{OX}=\frac{4}{3};\ I_{OY}=\frac{1}{2};\ I_0=\frac{11}{6}.$

б) однородной круглой пластинки радиуса **R** относительно центра **O**.

Решение. Пусть $\mu=1$. Решаем задачу в полярной системе координат.

$$I_0=\iint_\sigma\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho^3\,d\rho=\frac{\pi R^4}{2}.$$

Ответ: $I_0=\frac{\pi R^4}{2}.$

Тройной интеграл
Основные понятия

Пусть тело Ω ограничено поверхностями $P_1:z=z_1(x,y)$ и $P_2:z=z_2(x,y)$, причем обе функции имеют общую область определения $\sigma=\text{пр}_{XOY}P_1=\text{пр}_{XOY}P_2$. Помимо этого, тело Ω ограничено цилиндрической поверхностью с направляющей **ACBDA** и образующими, параллельными оси **OZ** (рис. 24). Тогда объем тела выражается формулой $V_\Omega=\iiint_\Omega dv=\iiint_\Omega dx\,dy\,dz$.

Найдем границы изменения переменных **x**, **y**, **z** в области Ω. При этом области Ω и σ будем предполагать правильными. Из рис. 24 следует, что $a\le x\le b$, $y_{ACB}\le y\le y_{ADB}$, $z_{p_1}\le z\le z_{p_2}$. Пусть $y_{ACB}=y_1(x)$, $y_{ADB}=y_2(x)$, тогда в области Ω переменные изменяются в следующих границах:

$$a\le x\le b,\quad y_1(x)\le y\le y_2(x),\quad z_1(x,\ y)\le z\le z_2(x,\ y).$$

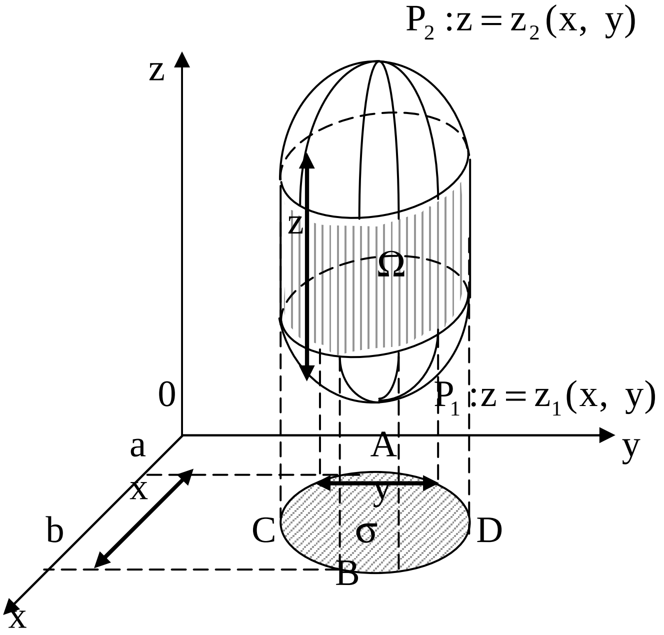


Рис. 24

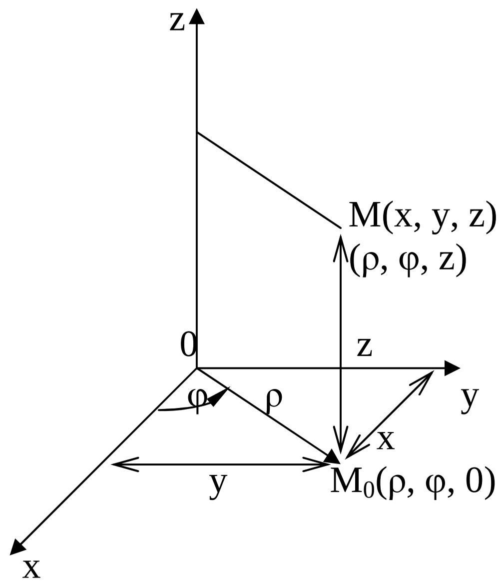


Рис. 25

Поэтому $V = \iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz$.

В тех задачах, где уравнения границ $P_1, P_2, ABCD$ содержат выражение $x^2 + y^2$, вычисление следует проводить в <u>цилиндрических координатах</u>: $\rho,\ \varphi,\ z$ (рис. 25).

Пусть $M_0 = \text{пр}_{XOY} M$, тогда $\rho = |OM_0|$, $\varphi = (\widehat{OX,\ \rho})$. Из рис. 25 следует, что $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$. Дифференциал объема в цилиндрических координатах имеет вид $dv = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$, поэтому объем в цилиндрических координатах выражается формулой (рис. 26):

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dv = |x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z,\ dv = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz| = \iiint\limits_{\Omega} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

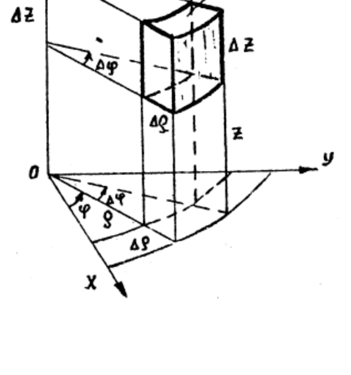


Рис. 26

Вычисление объемов тел

Задача 14. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидами $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$ и плоскостями $x = y,\ x = 2y,\ x = 1$ (рис. 27).

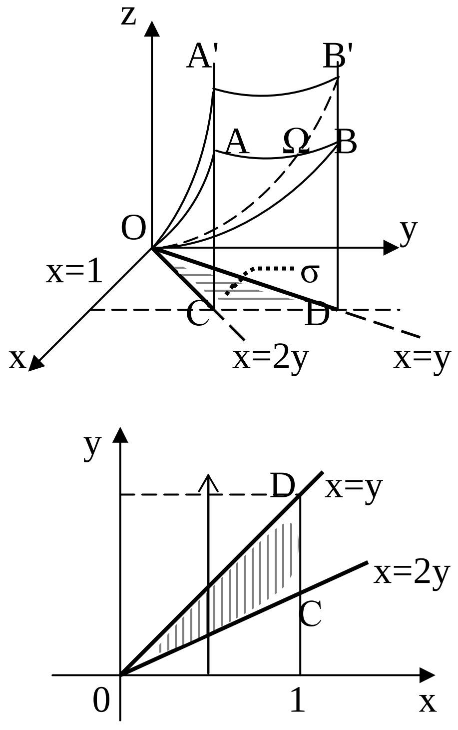


Рис. 27

Решение.
На рис. 27 изображено тело Ω: $A'OABB'A'$ и его проекция на плоскость **XOY**, т.е. область σ: ΔOCD.

$$V = \iiint_{\sigma} dx\, dy\, dz = \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} dy\left(x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2\right) =$$

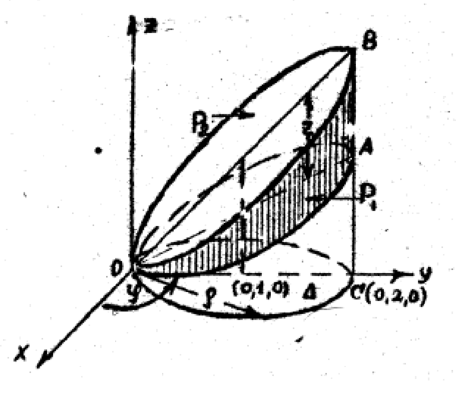
$$= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} y^2\, dy = = \int_0^1 \left.\frac{y^3}{3}\right|_{\frac{x}{2}}^{x} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^3}{8}\right) dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{7}{96}.$$

Ответ: $V = \frac{7}{96}$.

Задача 15. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $x^2 + y^2 = 2y$ и плоскостями $y - z = 0,\ 2y - z = 0$ (рис. 28).

Решение. Тело Ω ограничено поверхностью прямого кругового цилиндра, направляющей которого является расположенная в плоскости **xOy** окружность



$x^2 + y^2 = 2y$, или $x^2 + (y-1)^2 = 1^2$, образующие цилиндра параллельны оси **OZ**. Плоскости $z = y$ и $z = 2y$ пересекают поверхность по эллипсам с осями ОА и ОВ. Задачу решаем в <u>цилиндрических координатах</u>. Из рис. 28 видно, что тело, объем которого нужно найти, проектируется на плоскость **xOy** в круг с границей $x^2 + y^2 = 2y$, или $\rho^2 = 2\rho\sin\varphi \Rightarrow$ $\rho = 2\sin\varphi$ – в полярных координатах.

Рис. 28

На рисунке 29 изображена проекция тела Ω (OAB) на плоскость **xOy**, очевидно, что $0 \le \varphi \le \pi$, т. к. лучи, выходящие из полюса и "проектирующие" окружность в полюс, образуют развернутый угол (это вся ось OX).

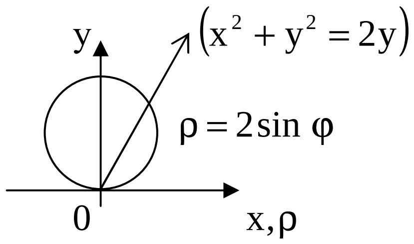


Рис. 29

Проведем из полюса под произвольным углом стрелку, пересекающую окружность, т.е. $0 \le \rho \le 2\sin\varphi$. Аппликата **z** изменяется от плоскости z=y до плоскости z = 2y (рис. 28), т. е. $y \le z \le 2y$ (проведите стрелку параллельно оси **OZ**: она "входит" в тело на плоскости z = y, или $z = \rho\sin\varphi$, а "выходит" на плоскости z = 2y, или $z = 2\rho\sin\varphi$).

Таким образом, в цилиндрических координатах переменная **z** меняется в пределах $\rho\sin\varphi \le z \le 2\rho\sin\varphi$. Определив пределы изменения всех переменных интегрирования $(\varphi,\ \rho,\ z)$, получим:

$$V = \iiint_{\Omega} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho\, d\rho \int_{\rho\sin\varphi}^{2\rho\sin\varphi} dz = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^2 (2\sin\varphi - \sin\varphi) d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^2\, d\rho = \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2\sin\varphi} = \frac{8}{3}\int_0^{\pi} \sin^4\varphi\, d\varphi =$$

$$\Bigg(\text{т.к. } \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \Rightarrow \sin^4\varphi = \frac{1}{4}(1-\cos 2\varphi)^2,$$

$$\cos^2 2\varphi = \frac{1+\cos 4\varphi}{2}, \Rightarrow \sin^4\varphi = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)\Bigg)$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right) d\varphi = \frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}\varphi - \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\pi = \pi.$$

Ответ: $V = \pi$.

Вычисление физических характеристик пространственных фигур

1) Масса тела Ω с переменной плотностью $\mu = \mu(x,\ y,\ z)$:

$m=\iiint\limits_{\Omega}\mu(x,\ y,\ z)\,dx\ dy\ dz$ - в декартовых координатах,

$m=\iiint\limits_{\Omega}\mu(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\ \rho\, d\rho\ d\varphi\ dz$ - в цилиндрических координатах.

2) Статические моменты относительно координатных плоскостей:

$$M_{XOY}=\iiint\limits_{\Omega} z\ \mu(x,\ y,\ z)\,dx\ dy\ dz,$$

$$M_{XOZ}=\iiint\limits_{\Omega} y\ \mu(x,\ y,\ z)\,dx\ dy\ dz,$$

$$M_{YOZ}=\iiint\limits_{\Omega} x\ \mu(x,\ y,\ z)\,dx\ dy\ dz.$$

3) Координаты центра тяжести $C(x_0,\ y_0,\ z_0)$ тела Ω:

$$x_C=\frac{M_{YOZ}}{m},\ y_C=\frac{M_{XOZ}}{m},\ z_C=\frac{M_{XOY}}{m}.$$

4) Моменты инерции тела Ω относительно координатных плоскостей:

$$I_{XOY}=\iiint\limits_{\Omega} z^2\ \mu(x,\ y,\ z)\,dx\ dy\ dz,$$

$$I_{XOZ}=\iiint\limits_{\Omega} y^2\ \mu(x,\ y,\ z)\,dx\ dy\ dz,$$

$$I_{YOZ}=\iiint\limits_{\Omega} x^2\ \mu(x,\ y,\ z)\,dx\ dy\ dz;$$

относительно координатных осей:

$$I_{OX}=\iiint\limits_{\Omega}\left(y^2+z^2\right)\mu(x,\ y,\ z)\,dx\ dy\ dz,$$

$$I_{OY}=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+z^2\right)\mu(x,\ y,\ z)\,dx\ dy\ dz,$$

$$I_{OZ}=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mu(x,\ y,\ z)\,dx\ dy\ dz,$$

$I_0=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mu(x,\ y,\ z)\,dx\ dy\ dz$ – центральный момент.

Задача 16. Найти центр тяжести однородного тела $(\mu=1)$, ограниченного цилиндром $y^2=2z$ и плоскостями $2x+3y-12=0,\ x=0,\ z=0$ (рис. 30).

Решение. Построим тело Ω (ABCOA), ограниченное данными поверхностями:

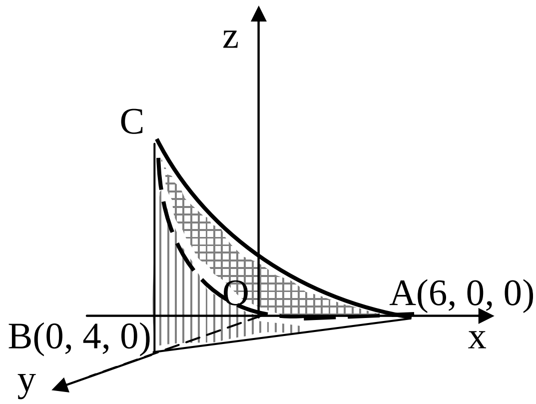


Рис. 30

$y^2=2z$ – цилиндр параболический с направляющей параболой $y^2=2z$ (ее дуга **OC**), а образующие параллельны оси **OX**; плоскость **ABC**: $2x+3y-12=0$, или $2x+3y=12$, или $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}=1$ – параллельна оси **OZ**, а на осях **OX** и **OY** (на рис. 30 выбрана левая ориентация) отсекает соответственно отрезки a = 6, b = 4. Координатные плоскости x = 0 и z = 0 ограничивают тело соответственно слева (криволинейный треугольник **OBC**) и снизу (треугольник **OAB**). Из рис.30 следует, что $0\le x\le 6,\ 0\le y\le \dfrac{12-2x}{3},\ 0\le z\le \dfrac{y^2}{2},\ \ \mu=1.$

Итак, масса тела

$$m=\iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz=\int_0^6 dx\int_0^{\frac{12-2x}{3}} dy\int_0^{\frac{y^2}{2}} dz=\int_0^6 dx\int_0^{\frac{12-2x}{3}} z\Big|_0^{\frac{y^2}{2}} dy=\frac{1}{2}\int_0^6 dx\int_0^{\frac{12-2x}{3}} y^2\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^6 dx\,\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{12-2x}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^6\left(\frac{12-2x}{3}\right)^3 dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^4}\cdot(-2)^3\int_0^6 (x-6)^3\,dx=-\frac{2^2}{3^4}\frac{(x-6)^4}{4}\Bigg|_0^6=\frac{6^4}{3^4}=2^4=16.$$

Найдем статические моменты тела:

$$M_{XOY}=\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz=\int_0^6 dx\int_0^{\frac{12-2x}{3}} dy\int_0^{\frac{y^2}{2}} z\,dz=\frac{1}{2}\int_0^6 dx\int_0^{\frac{12-2x}{3}}\left(\frac{y^2}{2}\right)^2 dy=$$

$$=\frac{1}{2^3}\int_0^6 dx \int_0^{\frac{12-2x}{3}} y^4\,dy=\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{5}\int_0^6 dx\left(\frac{12-2x}{3}\right)^5=-\frac{(-2)^5\cdot 2^2}{2^3\cdot 5\cdot 3^5}\int_0^6 (x-6)^5\,dx=$$

$$=\frac{2^2}{5\cdot 3^5\cdot 6}\cdot(x-6)\Big|_0^6=\frac{2^2\cdot 6^6}{5\cdot 3^5\cdot 6}=\frac{2^2\cdot 6^5}{5\cdot 3^5}=\frac{2^2\cdot 2^5}{5}=\frac{128}{5},$$

$$M_{XOZ}=\iiint_\Omega y\,dx\,dy\,dz=\int_0^6 dx\int_0^{\frac{12-2x}{3}} y\,dy\int_0^{\frac{y^2}{2}} dz=\frac{192}{5},$$

$$M_{YOZ}=\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz=\int_0^6 x\,dx\int_0^{\frac{12-2x}{3}} dy\int_0^{\frac{y^2}{2}} dz=\frac{96}{5}.$$

Координаты центра тяжести $x_C=\frac{M_{YOZ}}{m}=\frac{96}{5\cdot 16}=\frac{6}{5}$;

$$y_C=\frac{M_{XOZ}}{m}=\frac{192}{5\cdot 16}=\frac{12}{5};\quad z_C=\frac{M_{XOY}}{m}=\frac{128}{5\cdot 16}=\frac{8}{5}.$$

Ответ: $c\left(\frac{6}{5};\frac{12}{5};\frac{8}{5}\right)$.

Задача 17. Найти момент инерции однородного $(\mu=c)$ кругового цилиндра радиусом **R** и высотой **H** относительно диаметра основания.

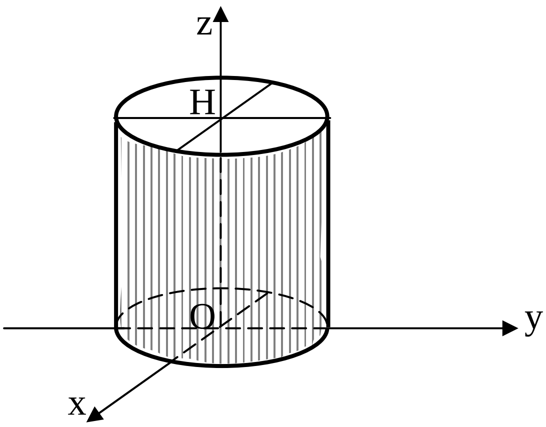


Рис. 31

Решение. Выберем систему координат таким образом, чтобы одна из осей координат, например **OX**, совпала с диаметром, относительно которого находим момент инерции (рис. 31). Тогда $x^2+y^2=R^2$ – уравнение цилиндра, причем $0\le z\le H$, а $\mu=c$. Решая задачу в цилиндрических координатах, получим

$$I_{OX}=c\iiint_\Omega\left(y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz.$$

Положим $y=\rho\sin\varphi,\ z=z,\ dx\,dy\,dz=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$, $0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le R,\ 0\le z\le H$, тогда

$$I_{OX}=c\iiint\limits_{\Omega}\left(\rho^2\sin^2\varphi+z^2\right)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=c\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho\,d\rho\int_0^H\left(\rho^2\sin^2\varphi+z^2\right)dz=$$

$$=c\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho\,d\rho\left[\rho^2\left(\sin^2\varphi\right)\cdot z+\frac{z^3}{3}\right]_0^H=c\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\left[H\rho^2\sin^2\varphi+\frac{H^3}{3}\right]\rho\,d\rho=$$

$$=c\int_0^{2\pi}\left[H\sin^2\varphi\frac{\rho^4}{4}+\frac{H^3}{3}\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R d\varphi=c\int_0^{2\pi}\left(\frac{HR^4}{4}\sin^2\varphi+\frac{H^3R^2}{6}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{cHR^4}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi+\frac{cH^3R^2}{6}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{cHR^4}{8}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{cH^3R^2}{6}\cdot 2\pi=$$

$$=\frac{cHR^4\pi}{4}+\frac{cH^3R^2\pi}{3}=\frac{cHR^2\pi}{12}\left(3R^2+4H^2\right).$$

Если учесть, что тело Ω - однородный прямой круговой цилиндр, то масса его

$m=c\cdot V_{\Omega}=\pi R^2H\cdot c$, а $I_{OX}=\dfrac{m}{12}\left(3R^2+4H^2\right)$.

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Криволинейный интеграл первого рода
Основные понятия

Определение. Если f(x, y) непрерывная функция, **L** – некоторая плоская кривая, то $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \max\Delta\ell_i\to 0}}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(x_i,\ y_i\right)\Delta\ell_i=\int\limits_L f(x,\ y)d\ell$ – криволинейный интеграл первого рода (или интеграл по длине дуги).

Свойства криволинейного интеграла первого рода

1. $\int\limits_L [c_1 f_1(x,y) \pm c_2 f_2(x,y)]d\ell = c_1 \int\limits_L f_1(x,y)d\ell \pm c_2 \int\limits_L f_2(x,y)d\ell$.

2. $\int\limits_L f(x,y)d\ell = \int\limits_{L_1} f(x,y)d\ell + \int\limits_{L_2} f(x,y)d\ell$, где $L = L_1 \cup L_2$.

3. $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)d\ell = \int\limits_{\overset{\cup}{BA}} f(x,y)d\ell$, т. е. интеграл первого рода по длине дуги не зависит от направления пути интегрирования.

Вычисление криволинейного интеграла первого рода

1. Если кривая **L** задана уравнением $y = y(x)$, $(a \le x \le b)$, то $d\ell = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ и

$$\int\limits_L f(x,\, y)d\ell = \int\limits_a^b f[x,\, y(x)]\sqrt{1 + (y'(x))^2}\;dx.$$

2. Если кривая **L** задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $(\alpha \le t \le \beta)$, то

$$d\ell = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\Psi'(t)]^2}\,dt \text{ и } \int\limits_L f(x,y)d\ell = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t),\ \psi(t)]\sqrt{\varphi'^1(t) + \psi'^2(t)}\,dt.$$

3. Если кривая **L** задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ $(\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2)$,

то $d\ell = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi$ и $\int\limits_L f(x,y)d\ell = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi$.

4. Если **L –** пространственная кривая, заданная параметрически уравнениями

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$, то $d\ell = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\,dt$

и $\int\limits_L f(x,\, y,\, z)d\ell = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}\;dt$.

Приложения криволинейного интеграла первого рода

1. Масса дуги кривой **L** с переменной плотностью $\mu=\mu(x,\ y)$:

$$m=\int_L \mu(x,\ y)\,d\ell .$$

2. Статические моменты дуги кривой **L** относительно осей координат:

$$S_{OX}=\int_L \mu\ y\,d\ell,\quad S_{OY}=\int_L \mu\ x\,d\ell .$$

3. Моменты инерции дуги кривой **L** относительно осей координат и центральный момент I_0 (относительно начала координат):

$$I_{OX}=\int_L \mu\ y^2\,d\ell,\quad I_{OY}=\int_L \mu\ x^2\,d\ell,\quad I_O=\int_L \mu\left(x^2+y^2\right)d\ell .$$

4. Координаты центра тяжести дуги кривой **L**: $x_c=\dfrac{S_{OY}}{m},\ y_c=\dfrac{S_{OX}}{m}$.

Задача 1. Вычислить криволинейный интеграл $I=\displaystyle\int_L \frac{x}{y}\,d\ell$, где **L –** дуга параболы $y^2=2x$, лежащая между точками $A\left(1,\ \sqrt{2}\right)$ и $B(2,\ 2)$.

Решение. Найдем дифференциал длины дуги $d\ell=\sqrt{1+y'^2}\,dx$. По условию задачи $y^2=2x$, откуда $y=\sqrt{2x}$ (корень берем со знаком плюс, т. к. точки **A** и **B** лежат в первой четверти), следовательно, $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$, значит, $d\ell=\sqrt{1+\dfrac{1}{2x}}\ dx=\dfrac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}}dx$.

Тогда $I=\displaystyle\int_L \frac{x}{y}d\ell=\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{1+2x}\ dx=\frac{2}{4\cdot 3}\left(1+2x\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{5^3}-\sqrt{3^3}\right)=\frac{5\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $I=\dfrac{5\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{6}$.

Задача 2. Вычислить $I=\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,d\ell$, если **L** – контур окружности $x^2+y^2=a\cdot y$ $(a>0)$ (рис. 32).

Решение. Введем полярную систему координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $x^2+y^2=\rho^2$. Уравнение окружности примет вид $\rho^2=a\cdot\rho\sin\varphi$, или $\rho=a\sin\varphi$.

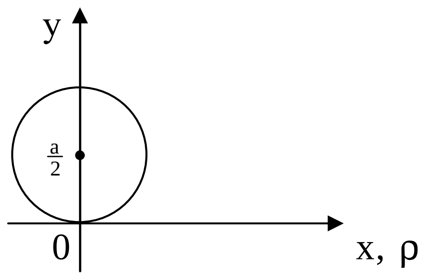


Рис. 32

Тогда $\rho'=a\cos\varphi$, $d\ell=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=$ $=\sqrt{a^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$, $d\ell=a\,d\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$ (рис. 32).

$$I=\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,d\ell=\int\limits_0^\pi \rho\cdot a\,d\varphi=a\int\limits_0^\pi a\sin\varphi\,d\varphi=-a^2\cos\varphi\Big|_0^\pi=$$

$$=-a^2(\cos\pi-\cos 0)=-a^2(-1-1)=2a^2.$$

Ответ: $I=2a^2$.

Задача 3. Найти координаты центра тяжести однородной дуги циклоиды

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Решение. Так как кривая однородна (можно считать $\mu=1$), а дуга $\overset{\cup}{OA}$ симметрична относительно прямой $x=\pi a$, центр тяжести $\overset{\cup}{OA}$ лежит на этой прямой, т. е. $x_c=\pi a$ (рис. 33). Остается найти y_c по формуле $y_c=\dfrac{\int\limits_L y\,d\ell}{m}$. Циклоида задана параметрическими уравнениями.

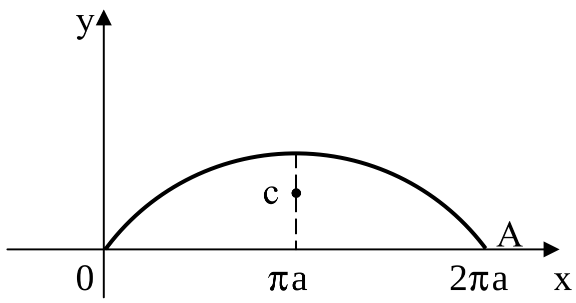


Рис. 33

Значит, $d\ell = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\ dt =$

$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\ dt =$

$= a\sqrt{1-2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\ \ dt =$

$= a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt$, т.к. $\begin{array}{l} x_t' = a(1-\cos t), \\ y_t' = a\sin t. \end{array}$

$$m = \int_L d\ell = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\ dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4a + 4a = 8a,$$

т.к. $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$.

$$y_C = \frac{\int_L y\,d\ell}{m} = \frac{\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a\sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos t}\ dt}{8a} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{2}}{8a}\int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}dt = \frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt = -a\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\cos\frac{t}{2} =$$

$$= -a\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -a\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}a.$$

Ответ: $C\left(\pi a,\ \frac{4}{3}a\right)$.

Аналогично можно найти координаты центра тяжести пространственной кривой **L**:

$$x_C=\frac{\int\limits_L \mu\, x\, d\ell}{\int\limits_L \mu\, d\ell};\quad y_C=\frac{\int\limits_L \mu\, y\, d\ell}{\int\limits_L \mu\, d\ell};\quad z_C=\frac{\int\limits_L \mu\, z\, d\ell}{\int\limits_L \mu\, d\ell},$$

где μ – плотность распределения массы в линии **L**.

Задача 4. Найти координаты центра тяжести одного витка винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=b\,t$, где $0\le t\le 2\pi$, если ее линейная плотность постоянна (можно считать $\mu=1$).

Решение. Для пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=x(t)$, где $t_1\le t\le t_2$, $d\ell=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$,

$$x_C=\frac{\int\limits_L x\,d\ell}{\int\limits_L d\ell}=\frac{\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt}=$$

$$=\frac{\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}\cos t\,dt}{\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}dt}=\frac{a\sin t\Big|_0^{2\pi}}{2\pi}=0.$$

Аналогично получим

$$y_C=\frac{\int\limits_L y\,d\ell}{\int\limits_L d\ell}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}\sin t\,dt}{\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}dt}=\frac{-a\cos t\Big|_0^{2\pi}}{2\pi}=0,$$

$$z_C=\frac{\int\limits_L z\,d\ell}{\int\limits_L d\ell}=\frac{\int\limits_0^{2\pi} b\,t\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}dt}=\frac{b\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi}}{2\pi}=\frac{b\cdot 4\pi^2}{2\cdot 2\pi}=\pi b.$$

Ответ: $C(0,\,0,\,\pi b)$.

Задача 5. Найти моменты инерции относительно осей координат и центральный момент инерции отрезка однородной прямой $x=-2y+1$, расположенного между осями координат в плоскости **xOy** (рис. 34).

Решение. Преобразуем уравнение прямой $x+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1$. Построим отрезок **AB**

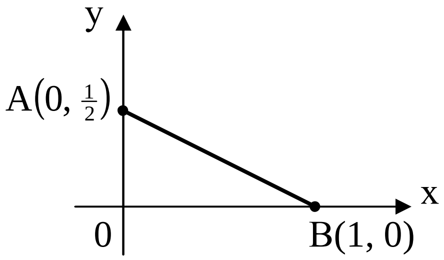


Рис. 34

прямой $x=-2y+1$, отсекаемый осями координат: $A\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, $B(1,\ 0)$. Используя формулы, получим.

$$I_{OX}=\int\limits_{AB} y^2 d\ell .$$

На отрезке **AB**: $x=-2y+1 \ \Rightarrow\ y=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2},\ y'=-\frac{1}{2} \ \Rightarrow$

$$d\ell=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx=\frac{\sqrt{5}}{2}dx\text{, тогда}$$

$$I_{OX}=\int\limits_0^1 y^2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_0^1\left(-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 dx=-\frac{\sqrt{5}}{2\cdot 4}\left.\frac{(-x+1)^3}{3}\right|_0^1=\frac{\sqrt{5}}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{5}}{24}.$$

$$I_{OY}=\int\limits_{AB} x^2 d\ell=\int\limits_0^1 x^2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{\sqrt{5}}{6}.$$

$$I_0=\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)d\ell=\int\limits_0^1 x^2 d\ell+\int\limits_0^1 y^2 d\ell=\frac{\sqrt{5}}{24}+\frac{\sqrt{5}}{6}=\frac{5\sqrt{5}}{24}.$$

Ответ: $I_{OX}=\frac{\sqrt{5}}{24};\ I_{OY}=\frac{\sqrt{5}}{6};\ I_0=\frac{5\sqrt{5}}{24}.$

Криволинейный интеграл второго рода. Основные понятия

Определение. Если две функции P(x, y) и Q(x, y) непрерывны во всех точках дуги **AB** (а сама дуга не имеет особых точек), то

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i = \int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \; -$$

криволинейный интеграл второго рода (или интеграл по координатам).

Свойства криволинейного интеграла второго рода

1. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл второго рода меняет знак на противоположный, т. е.

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = -\int_{BA} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy\,.$$

2. Если точка **C** – внутренняя точка дуги **AB**, то

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{AC} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy + \int_{CB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy\,.$$

Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению определенного интеграла.

1. Если кривая **L**, по которой требуется вычислить интеграл, задана параметрически: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ \ (\alpha \le t \le \beta)$, где $\varphi(t), \varphi'(t), \psi(t)$ и $\psi'(t)$ – непрерывны, то

$$\int_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\}\,dt\,.$$

2. Если L задана явным уравнением y = f(x) $(a \le x \le b)$, где f(x) – непрерывная функция, то

$$\int\limits_L P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = \int\limits_a^b \{P[x,\ f(x)] + Q[x,\ f(x)]\,f'(x)\}\,dx\,.$$

3. Если функции P(x y) и Q(x y), входящие в подынтегральное выражение интеграла в левой части, удовлетворяют условию $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то такой интеграл не зависит от пути интегрирования, т.е. безразлично, по какой линии **L**, соединяющей точки **A** и **B**, будет вестись интегрирование.

4. Если линия **L**, по которой следует вычислить криволинейный интеграл, замкнута, а функции P(x y) и Q(x y) непрерывны вместе со своими частными производными на контуре **L** и в области **D**, ограниченной **L**, то справедлива формула Грина-Остроградского:

$$\oint\limits_L P(x,\ y)\ dx + Q(x,\ y)\ dy = \iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\ dy\,.$$

Таким образом, вычисление криволинейного интеграла по замкнутому контуру **L**, пробегаемому против часовой стрелки, можно заменить вычислением двойного интеграла по области, ограниченной этим контуром.

5. Если криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования, т. е. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, и вычисляется по замкнутому контуру, то он заведомо равен нулю (см. формулу Грина-Остроградского).

Приложения криволинейного интеграла второго рода

1. Площадь плоской фигуры, ограниченной линией **L**: $S = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx\,.$

2. Работа, которую выполняет на пути **L** сила $\vec{F} = \{P(x,\ y),\ Q(x,\ y)\}$:

$$A = \int\limits_L P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy\,.$$

3. Если линия **L**, по которой вычисляется криволинейный интеграл второго рода, замкнута, то положительным считается обход контура **L** против часовой стрелки, интеграл обозначается так: $\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. При этом, если обозначить

векторы $\vec{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$, а $\overrightarrow{dr} = \{dx, dy\}$, то интеграл

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$$

называется <u>циркуляцией</u> векторного поля $\vec{F}(x\ y)$ по замкнутому контуру **L**.

Задача 6. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int_L 2x\,y\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz$, если **L** – виток винтовой линии $x = \cos t,\quad y = \sin t,\quad z = 2t$ от точки $A(1, 0, 0)$ до точки $B(1, 0, 4\pi)$.

Решение. L – задана параметрически, поэтому вычислять данный интеграл следует по параметру **t**, причем **t** изменяется от 0 до 2π вдоль дуги **AB**. Воспользуемся формулой замены переменной:

$$\int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} P[x(t),\ y(t),\ z(t)]x'dt + Q[x(t),\ y(t),\ z(t)]y'dt + R[x(t),\ y(t),\ z(t)]z'dt\,.$$

Так как $dx = x'dt = -\sin t\,dt,\ dy = y'dt = \cos t\,dt,\quad dz = z'dt = 2dt$, то

$$I = \int_0^{2\pi} 2\cos t \cdot \sin t \cdot (-\sin t)dt + \sin^2 t \cdot \cos t\,dt + 4t^2 \cdot 2\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-2\sin^2 t \cdot \cos t + \sin^2 t \cdot \cos t + 8t^2\right]dt = -\int_0^{2\pi} \sin^2 t(\cos t\,dt) + 8\int_0^{2\pi} t^2 dt =$$

$$= -\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi} + 8\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}(2\pi)^3 = \frac{64\pi^3}{3}.$$

Ответ: $I = \dfrac{64\pi^3}{3}$.

Задача 7. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_L x^2\,dx+\sqrt{x}\;y\,dy$, где L –

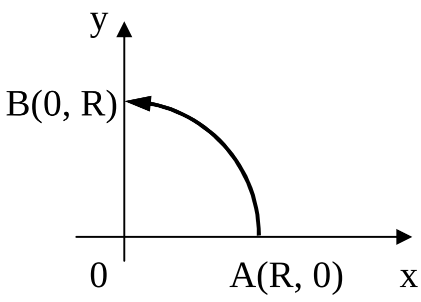


Рис. 35

дуга окружности $x^2+y^2=R^2$, пробегаемая против часовой стрелки, лежащая в первой четверти (рис. 35).

Решение. Данный интеграл – криволинейный интеграл второго рода, или криволинейный интеграл <u>по координатам</u>. Выразим из уравнения $x^2+y^2=R^2$ переменную **y** как функцию от **x**:

$y=\sqrt{R^2-x^2}$, взяв только положительное значение корня, т. к. **L** – дуга окружности, расположенная в первой четверти. Найдем $dy=\dfrac{-x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$ и подставим найденные y и dy в подынтегральное выражение, причем $R\le x\le 0$, т. к. в задаче указано направление интегрирования: “против часовой стрелки”, т. е. от точки **A** к точке **B**.

$$I=\int\limits_R^0 x^2\,dx+\sqrt{x}\cdot\sqrt{R^2-x^2}\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)dx=\int\limits_R^0\left(x^2-x\sqrt{x}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2x^{5/2}}{5}\right)\Bigg|_R^0=-\frac{R^3}{3}+\frac{2R^{5/2}}{5}=\frac{R^2}{15}\left(6\sqrt{R}-5R\right).$$

Ответ: $I=\dfrac{R^2}{15}\left(6\sqrt{R}-5R\right)$.

Задача 8. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_L (x+y)\,dx+2x\;y\,dy$, если

1) **L** – отрезок прямой, соединяющей точки A(1, 1) и B(2, 4);
2) **L –** дуга параболы $y=x^2$, соединяющей эти же точки (рис. 36).

Решение. 1) **L –** прямая, проходящая через точки A(1, 1) и B(2, 4). Составим ее уравнение:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\quad \frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{4-1}\;\Rightarrow\; 3x-3=y-1\;\Rightarrow\; y=3x-2,\quad dy=3dx\,.$$

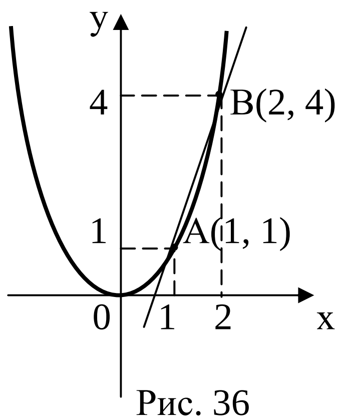


Рис. 36

$$I=\int_1^2 (x+3x-2)\,dx+2x(3x-2)\cdot 3dx=$$

$$=\int_1^2 (x+3x-2+18x^2-12x)\,dx=\int_1^2 (18x^2-8x-2)\,dx=$$

$$=\left(6x^3-4x^2-2x\right)\Big|_1^2=6\cdot 8-4\cdot 4-4-6+4+2=28.$$

2) **L** – дуга параболы $y=x^2$, соединяющая точки A(1, 1) и B(2, 4): $y=x^2$, $dy=2x\,dx$.

$$I=\int_1^2 \left(x+x^2\right)dx+2x\cdot x^2\cdot 2x\,dx=\int_1^2 \left(x+x^2+4x^4\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=2+\frac{8}{3}+\frac{4\cdot 32}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{4}{5}=\frac{3}{2}+\frac{7}{3}+\frac{124}{5}=\frac{45+70+744}{30}=28\frac{19}{30}.$$

Ответ: 1) $I=28$; 2) $I=28\dfrac{19}{30}$.

Заметим, что, вычисляя один и тот же интеграл в одних и тех же пределах интегрирования по разным линиям, получаем разные ответы, т. е. данный интеграл зависит от пути интегрирования.

Задача 9. Вычислить криволинейный интеграл

$$I=\int_{(0,0)}^{(2,2)} \left(2y-6xy^3\right)dx+\left(2x-9x^2y^2\right)dy,\text{ если}$$

1) **L** – отрезок прямой, соединяющий точки **O** и **A**;

2) **L** – дуга параболы $y=\dfrac{1}{2}x^2$ от точки **O** до точки **A**;

3) **L –** дуга параболы $x=\dfrac{1}{2}y^2$ от точки **O** до точки **A**;

4) **L** – кубическая дуга параболы $y=\dfrac{1}{4}x^3$ от точки **O** до точки **A**.

Решение. 1) Прямая **L** проходит через точки O(0, 0) и A(2, 2), очевидно, ее уравнение y = x, dy = dx.

$$I=\int_0^2 \left(2x-6x\cdot x^3\right)dx+\left(2x-9x^2\cdot x^2\right)dx=$$

$$=\int_0^2 \left(4x-15x^4\right)dx=\left(2x^2-3x^5\right)\Big|_0^2=8-3\cdot 32=8-96=-88.$$

2) **L** – парабола $y=\frac{1}{2}x^2$, dy = x dx и

$$I=\int_0^2 \left[2\cdot\frac{1}{2}x^2-6x\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\right)^3\right]dx+\left[2x-9x^2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\right]x\,dx=$$

$$=\int_0^2 \left(x^2-\frac{3}{4}x^7+2x^2-\frac{9}{4}x^7\right)dx=\int_0^2 \left(3x^2-3x^7\right)dx=$$

$$=3\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^8}{8}\right)\Big|_0^2=8-3\cdot 32=-88.$$

3) **L –** парабола $x=\frac{1}{2}y^2$, dx = y dy,

$$I=\int_0^2 \left(2y-6\cdot\frac{1}{2}y^2\cdot y^3\right)y\,dy+\left(y^2-9\cdot\frac{1}{4}y^4\cdot y^2\right)dy=\int_0^2 \left(2y^2-3y^6+y^2-\frac{9}{4}y^6\right)dy=$$

$$=\int_0^2 \left(3y^2-\frac{21}{4}y^6\right)dy=\left(y^3-\frac{3}{4}y^7\right)\Big|_0^2=8-3\cdot 32=-88.$$

4) **L** – кубическая парабола $y=\frac{1}{4}x^3$, $dy=\frac{3}{4}x^2dx$,

$$I=\int_0^2 \left(2\cdot\frac{1}{4}x^3-6x\cdot\frac{1}{4^3}x^9\right)dx+\left(2x-9x^2\cdot\frac{1}{4^2}x^6\right)\cdot\frac{3}{4}x^2dx=$$

$$=\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{32}x^{10}+\frac{3}{2}x^3-\frac{27}{4^3}x^{10}\right)dx=\int_0^2\left(2x^3-\frac{33}{64}x^{10}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{2}-\frac{3}{64}x^{11}\right)\Bigg|_0^2=8-3\cdot 32=-88.$$

Замечание. По результатам, полученным в задаче, можно предположить, что данный интеграл не зависит от пути интегрирования. Поэтому прежде, чем вычислять любой криволинейный интеграл второго рода, следует проверить <u>условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования</u>: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, причем функции **P**, **Q**, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ должны быть непрерывны на пути интегрирования.

В данной задаче:

$$P(x,y)=2y-6xy^3,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=2-18xy^2;$$

$$Q(x,y)=2x-9x^2y^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2-18xy^2.$$

Это условие выполнено для всех **x** и **y**, а значит, вычислять такой интеграл можно по любому пути, соединяющему точки O(0, 0) и A(2, 2). Оказывается, наилучшим из всех является ломаная **OBA**, звенья которой параллельны осям координат (рис. 37). В самом деле, $I=\int\limits_{OB}+\int\limits_{BA}$, т. к. $OB:\ y=0,\ dy=0,\quad 0\le x\le 2$,

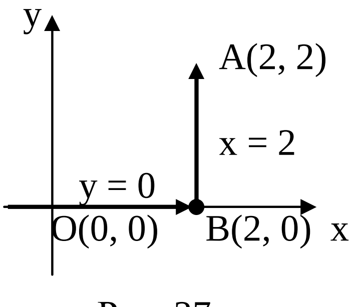


Рис. 37

BA: $x=2,\ dx=0,\quad 0\le y\le 2$,

$$I=\int_0^2 0\cdot dx+\int_0^2\left(4-9\cdot 4\cdot y^2\right)dy=$$

$$=4y\Big|_0^2-12y^3\Big|_0^2=8-96=-88.$$

Ответ: $I=-88$.

Задача 10. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{(AB)} \left(6x\,y^2 + 4x^3\right)dx + \left(6x^2\,y + 3y^2\right)dy,$$ если A(2, 3), а B(3, 4).

Решение. Выясним вначале, зависит ли данный интеграл от пути интегрирования: $P(x,\,y) = 6x\;y^2 + 4x^3$, $Q(x,\,y) = 6x^2\,y + 3y^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 12x\;y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 12x\;y$. Условие

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено, функции **P**, **Q**, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны для всех **x** и **y**, выберем путь интегрирования **ACB** – ломаную со звеньями, параллельными осям координат (рис. 38).

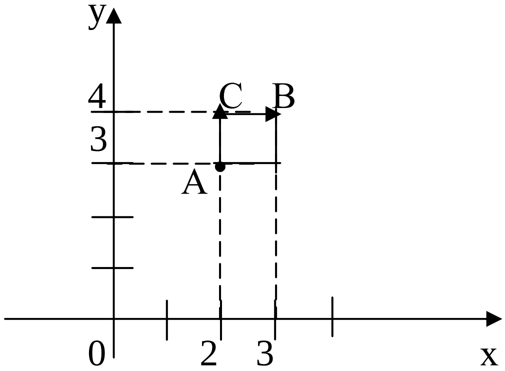


Рис. 38

$$I = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB};$$

$$AC:\; x = 2,\; dx = 0,\; 3 \le y \le 4;$$

$$CB:\; y = 4,\; dy = 0,\; 2 \le x \le 3.$$

$$I = \int\limits_3^4 \left(6\cdot 4\cdot y + 3y^2\right)dy + \int\limits_2^3 \left(6x\cdot 16 + 4x^3\right)dx =$$

$$= 6\cdot 2y^2\Big|_3^4 + y^3\Big|_3^4 + 3\cdot 16x^2\Big|_2^3 + x^4\Big|_2^3 =$$

$$= 12\cdot(16-9) + (64-27) + 48\cdot(9-4) + (81-16) = 12\cdot 7 + 37 + 48\cdot 5 + 65 = 426.$$

Ответ: $I = 426$.

Задача 11. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_L \frac{y}{x}dx + 2\ln x\,dy$, если

L – треугольник с вершинами A(1, 0), B(2, 0), C(1, 2).

Решение. Так как контур интегрирования замкнут (рис. 39), а точка разрыва

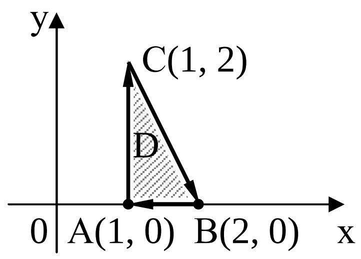


Рис. 39

подынтегральных функций (x = 0) не принадлежат ни **L**, ни области **D**, можно при вычислении интеграла применить формулу Грина-Остроградского:

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

$$P(x,y) = \frac{y}{x}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x};$$

$$Q(x,y) = 2\ln x; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2}{x};$$

$$I = \iint_D \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x}\right) dx\,dy = \iint_D \frac{1}{x}\,dx\,dy.$$

Для вычисления полученного двойного интеграла составим уравнение прямой **CB** по двум точкам: C(1, 2) и B(2, 0):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \quad \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{0-2}; \quad -2x + 2 = y - 2; \quad 2x + y - 4 = 0, \Rightarrow \quad y = 4 - 2x.$$

Тогда $I = \int_1^2 dx \int_0^{y=4-2x} \frac{1}{x}\,dy = \int_1^2 \frac{1}{x}(4-2x)\,dx = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 2\right) dx =$

$$= \left[4\ln x - 2x\right]_1^2 = 4\ln 2 - 4 - 4\ln 1 + 2 = 4\ln 2 - 2.$$

Ответ: $I = 4\ln 2 - 2$.

Задача 12. Вычислить с помощью формулы Грина-Остроградского криволинейный интеграл $I = \int_L xy^2 dy - x^2 y\,dx$ по окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в положительном направлении (против часовой стрелки) (рис. 40).

Решение. Формула Грина-Остроградского: $\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$

$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$ позволяет вычислить криволинейный интеграл <u>по замкнутому</u> <u>контуру</u> L, заменив его двойным <u>по области</u> **D**, ограниченной этим контуром, если функции P(x, y), Q(x, y), их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ <u>непрерывны</u> в области **D** и на ее границе **L**. Найдем $\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$, очевидно, что формулу применять можно: все перечисленные условия выполнены. $I = \iint\limits_D \left(y^2 + x^2 \right) dx\,dy$. Так как область интегрирования **D** – круг, перейдем к полярным координатам:

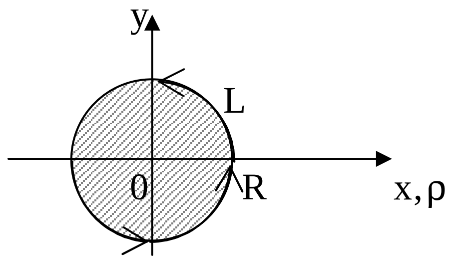


Рис. 40

$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ x^2 + y^2 = R^2\ \Rightarrow\ \rho = R,\ \ dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$. Заменяем двойной интеграл двукратным: $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3\,d\rho = 2\pi \cdot \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$.

Ответ: $I = \frac{\pi R^4}{2}$.

Задача 13. Будет ли криволинейный интеграл $\int\limits_L \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx - \frac{2y}{x^3} dy$, взятый по замкнутому контуру, равен нулю?

Решение. Криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, и по любому замкнутому контуру равен нулю, если на этом контуре и в области, им ограниченной, функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ <u>непрерывны</u>. Проверим условие независимости:

$$P(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4};\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{6y}{x^4};$$

$$Q(x, y) = -\frac{2y}{x^3};\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \left(-2y \cdot x^{-3} \right)'_x = -2y \cdot (-3) \cdot x^{-4} = \frac{6y}{x^4}.$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, данный интеграл равен нулю по любому замкнутому контуру, который не охватывает и не проходит через точки с абсциссой x = 0, ведь это точка разрыва функций P(x, y) и Q(x, y).

Задача 14. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_L -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$, если **L** – окружность $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ (рис. 41).

Решение. Проверим условие независимости данного интеграла от пути интегрирования $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$P(x,\ y) = -\frac{y}{x^2 + y^2},\quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2};$$

$$Q(x,\ y) = \frac{x}{x^2 + y^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Условие выполнено. Интеграл равен нулю, т. к. точка O(0, 0), где функции P(x, y) и Q(x, y) терпят разрыв, не принадлежит ни кругу, ни границе **L**, ограничивающей его (рис. 41).

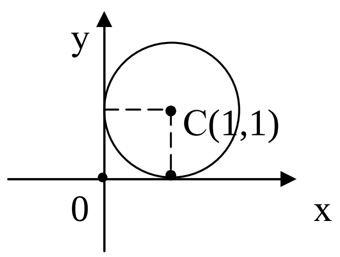


Рис. 41

Замечание. Можно убедиться в существенности требований непрерывности. Если данный интеграл вычислять по окружности $x^2 + y^2 = 1$, которая ограничивает область, содержащую точку O(0, 0), получим совсем другой ответ (рис. 42). **L** : $x^2 + y^2 = 1$ или в параметрической форме:

$$x = a\cos t = \cos t,\quad dx = -\sin t\ dt,$$

$$y = a\sin t = \sin t,\quad dy = \cos t\ dt,\qquad \text{где}\ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

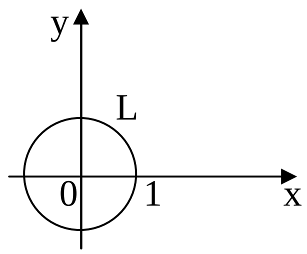


Рис. 42

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \left[-\frac{\sin^2 t}{\sin^2 t + \cos^2 t}(-\sin t\,dt) + \frac{\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t}(\cos t\,dt) \right] =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} dt = t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

Задача 15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $\left(0 \le t \le 2\pi\right)$ (рис. 43).

Решение. Воспользуемся формулой для вычисления площади плоской фигуры,

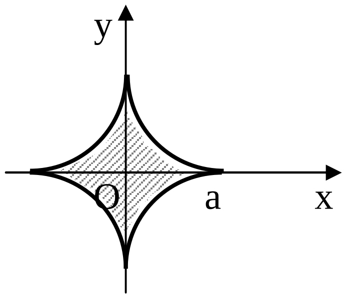


Рис. 43

ограниченной замкнутым контуром: $S = \frac{1}{2}\int\limits_L x\,dy - y\,dx$.

По условию задачи $x = a\cos^3 t$, $dx = -3a\cos^2 t\sin t\,dt$,

$y = a\sin^3 t$, $dy = 3a\sin^2 t\cos t\,dt$. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left[a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cdot\cos t\,dt - a\sin^3 t\left(-3a\cos^2 t\cdot\sin t\right)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3a^2}{2\cdot 4}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = \frac{3a^2}{2\cdot 4}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2\cdot 4\cdot 2}\cdot\left(t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{3\cdot 2\pi a^2}{2\cdot 4\cdot 2} = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

Задача 16. В каждой точке силового поля $\overline{F}(x,y)$ приложена сила, равная квадрату абсциссы точки приложения и направленная в сторону, противоположную оси **ОУ**. Найти работу поля по перемещению единичной массы по параболе $y^2 = 1 - x$ из точки $M_1(1,0)$ в точку $M_2(0,1)$ (рис. 44).

Решение. Из условия задачи следует, что в каждой точке M(x, y) проекции силы

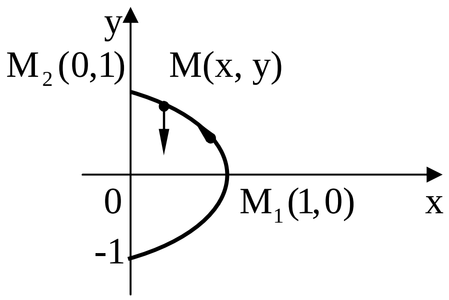


Рис. 44

на координатные оси будут $P(x,y) = \text{Пр}_x\overline{F} = 0$, $Q(x,y) = \text{Пр}_y\overline{F} = -x^2$. По формуле для вычисления работы силового поля $A = \int\limits_L P(x,y)\,dx + {}$ $+\,Q(x,y)\,dy$, получим $A = -\int\limits_L x^2\,dy$, где **L** – дуга $\overset{\frown}{M_1M_2}$ параболы $y^2 = 1 - x$, откуда $y = \sqrt{1-x}$ (дуга $\overset{\frown}{M_1M_2}$ расположена в первой четверти),

$$dy = -\frac{dx}{2\sqrt{1-x}}.$$

Таким образом,

$$A = -\int_1^0 x^2 \cdot \left(-\frac{dx}{2\sqrt{1-x}}\right) dx = \int_1^0 \frac{x^2}{2\sqrt{1-x}} dx = \left| \begin{array}{l} 1-x = t^2 \\ x = 1-t^2 \\ dx = -2t\,dt \\ t_1 = 0,\ t_2 = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-t^2)^2 \cdot (-2t)\,dt}{2t} = = -\int_0^1 \left(1 - 2t^2 + t^4\right) dt = -\left(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= -1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{-15+10-3}{15} = -\frac{8}{15}.$$

Ответ: $A = -\frac{8}{15}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1985. 455 с.

2. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики. М.: Высш. школа, 1978. Т. 1, 2. 384 с.

3. Берман Г.Н. Сборник задач и упражнений по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985. 380 с.

4. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высш. школа, 1996. Ч. 1, 2. 160 с.

5. Задачник по курсу математического анализа / Под ред. Н.Л.Виленкина. М.: Просвещение, 1971. Ч.II. 336 с.

6. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Харьков: Изд-во ХГУ, 1972. Ч. IV. 235 с.

7. Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. М.: Высш. школа, 1973. 576 с.

8. Применение стереоскопических чертежей на практических занятиях по криволинейным поверхностям и кратным интегралам. Метод. указания / Сост.: Е. А. Воробьева, Р. Л. Долганов. Омск: Изд-во ОмПИ, 1988. 34 с.

Редактор Т.А.Жирнова
Свод. темплан 2004г.
ИД 06039 от 12.10.01
Подписано в печать 05.03.04 Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 4,25. Уч.-изд. л. 4,0.
Тираж 300 экз. Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г.Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ