Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения первого порядка

Методические указания

Омск – 2005

Составители: Бояркин Геннадий Николаевич, профессор;
Зобнин Александр Иванович, доцент;
Рассказова Марина Николаевна, доцент

Печатается по решению редакционно–издательского совета Омского государственного технического университета

Редактор Г.М. Кляут

ИД 06039 от 12.10.01.
Подписано в печать 10.09.05. Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 2,0. Уч. – изд. л. 2,0.
Тираж 200 экз. Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г.Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

Содержание

Введение

Методические указания (конспект лекций и примеры) посвящены методам решения и качественного исследования задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основное внимание уделено изложению конструктивной (алгоритмической) стороне построения решения типовых задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложений. Важные теоретические аспекты, такие, как доказательства теорем существования и единственности решений, сходимость рядов и существование интегралов, в виде которых отыскивается то или иное решение, и другие здесь не рассматриваются.

Излагаются решения специально подобранных задач, разъясняющих и иллюстрирующих основные идеи, понятия, теоретические факты (и их практическое применение) теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Конспект состоит из двух частей. Первая посвящена обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка. В ней также даны общие понятия и определения для уравнения n-го порядка. Завершает первую часть раздел, в котором рассмотрены некоторые классы уравнений порядка выше первого, допускающих понижение порядка.

В части второй рассматриваются уравнения n-го порядка и системы уравнений.

Конспект полностью охватывает программу курса обыкновенных дифференциальных уравнений для технических вузов.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных, сами эти переменные, а также производные различных порядков этой функции.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**, если от нескольких – то **уравнением с частными производными**.

Замечание. Строго говоря, в обыкновенном дифференциальном уравнении неизвестная функция может зависеть еще от нескольких переменных, по которым нет дифференцирования и которые обычно называются **параметрами уравнения** или **задачи**. Параметры могут принимать различные значения из некоторого спектра, определяемого физическим или каким-то другим смыслом исследуемой проблемы. Разумеется, в уравнениях с частными производными тоже могут быть параметры.

Простейший пример дифференциального уравнения – это задача о нахождении первообразной $F(x)$ для заданной функции $f(x)$. Дифференциальное уравнение в этом случае будет

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

В общем случае дифференциальное уравнение (напомним, обыкновенное) имеет вид

$$G(x,\ y,\ y',\ y'',\dots,\ y^{(n)}) = 0, \tag{2}$$

где G – некоторая функция от $n+2$ переменных, n – натуральное число $(n \in N)$.

При этом число n – порядок старшей производной – называется **порядком дифференциального уравнения.**

Так, например, уравнение (1) будет уравнением первого порядка, уравнение (2) – n-го порядка, а уравнение $y'' + y' + x + 9 = 0$ – второго порядка.

Замечание. В дальнейшем изложении будет удобно применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям опускать для краткости термины «обыкновенное» и «дифференциальное». Таким образом, если мы говорим «уравнение», то подразумеваем под этим обыкновенное дифференциальное уравнение, а не, например, алгебраическое уравнение или уравнение в частных производных.

Если уравнение (2) n-го порядка допускает приведение его к виду

$$y^{(n)} = F(x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(n-1)}), \tag{3}$$

то такое уравнение называется **разрешимым относительно старшей производной**, а уравнение n-го порядка (3) – соответственно **разрешенным относительно старшей производной.** Здесь функция F – некоторая функция $(n+1)$ переменных.

Решением дифференциального уравнения (2) называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает последнее в тождество. Например, функция $y = \sin x$ является решением уравнения $y'' + y = 0$, так как $(\sin x)'' + \sin x = 0$ для любых x.

Процесс построения решения некоторого дифференциального уравнения называют **интегрированием** данного дифференциального уравнения. Кривая (график) функции решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой** (этого уравнения).

Поясним сказанное на примере решения простого уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $y'' = x$.

Решение. Так как $y'' = dy'/dx$, данное уравнение эквивалентно равенству дифференциалов $dy' = xdx$. Интегрируя левую и правую части, получаем $y' = \dfrac{x^2}{2} + C_1$, где C_1 – произвольная константа. Ещё раз записывая производную в форме отношения двух дифференциалов, приходим к равенству $dy = \left(\dfrac{x^2}{2} + C_1\right)dx$.

После интегрирования получаем окончательное решение $y = \dfrac{x^3}{6} + C_1x + C_2$ исходного уравнения. Здесь C_2 – ещё одна произвольная постоянная.

Легко видеть, что построенное решение представляет собой двупараметрическое множество решений, в котором величины C_1 и C_2 могут принимать произвольные вещественные значения. Другими словами, решение дифференциального уравнения, вообще говоря, принципиально неоднозначно. Говорят ещё, что дифференциальное уравнение задает целое семейство **интегральных кривых** на плоскости.

Для выделения однозначно определенной интегральной кривой (решения) в рассмотренном выше примере достаточно указать точку плоскости, через которую проходит искомая интегральная кривая, и направление, в котором она проходит через эту точку. Дополнительные условия такого рода можно отнести к **начальным условиям**, если проинтерпретировать здесь переменную x как переменную времени.

Например, пусть известно, что $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Тогда соответствующее этим начальным данным решение (кривая) будет $y = x^3/6 + 2x + 1$.

Аналогично для выделения однозначно определенного решения дифференциального уравнения n-го порядка следует задать n начальных условий.

Теперь вплотную подошли к важному в теории дифференциальных уравнений (не только обыкновенных) понятию.Это так называемая **задача для дифференциального уравнения**. Как уже убедились на примере, дифференциальное уравнение может иметь (как правило, так и бывает) целое семейство решений. Для практических же приложений чаще важно выделить из всего семейства какое-то одно, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. Дополнительные требования к искомому решению могут быть самыми различными, ибо детерменируются спецификой конкретных областей применения дифференциальных уравнений. Зачастую это уже упомянутые выше **начальные условия**, если, например, исследуется процесс, протекающий во времени. Могут быть **краевые условия** в случае, например, колебаний упругой балки (консоли), один конец которой неподвижно закреплен, а другой свободен. Могут быть **начально-краевые условия** либо какие-то другие. Задачу с начальными условиями принято называть **задачей Коши.**

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка (2) будет такое его решение

$$y = \varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n), \qquad (4)$$

которое является функцией независимого переменного x и n постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$. (Независимость постоянных означает отсутствие каких-либо соотношений между ними).

Частным решением дифференциального уравнения, соответственно, будет решение, полученное из общего решения при некоторых конкретных числовых значениях величин C_1, ..., C_n.

Подчеркнем, что частное решение – это одно какое-то решение дифференциального уравнения, а общее решение – суть семейство решений.

Таким образом, в рассмотренном примере решение $y = x^3/6 + C_1x + C_2$ является общим решением уравнения $y'' = x$, а решение $y = x^3/6 + 2x + 1$ – частным.

Иногда требуется, наоборот, – по заданному семейству кривых (4) написать дифференциальное уравнение, которому соответствовало бы это семейство. В этом случае следует продифференцировать равенства (4) n раз, полагая, что y есть функция независимого переменного x. Затем из полученных таким образом равенств и (4) исключить величины $C_1,\ C_2, ..., C_n$.

Пример 2. Написать уравнение семейства кривых $y = (C_1 + C_2x)e^x$.

Решение. После двукратного дифференцирования получаем $y' = C_2e^x + y$, $y'' = 2C_2e^x + y$. Исключая из этих равенств постоянную C_2, получаем уравнение $y'' - 2y' + y = 0$.

К необходимости иметь дело с дифференциальными уравнениями приводят задачи целого ряда областей знаний, таких как физика, химия, биология, медицина, экономика, собственно сама математика и т. д.

Приведем два примера таких задач.

Пример 3. В результате статистических исследований была отслежена закономерность, что для некоторого региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения региона с некоторыми коэффициентами k_1 и k_2 соответственно. Нужно найти закон изменения численности населения с течением времени.

Решение. Пусть $y = y(t)$ есть число жителей региона в момент времени t. Прирост населения Δy за время Δt равен разности между числом родившихся и умерших за это время, а именно $\Delta y = k_1 y\Delta t - k_2 y\Delta t$ или $\Delta y/\Delta t = ky$, где $k = k_1 - k_2$. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, приходим к уравнению

$$y' = ky, \tag{5}$$

решая которое, получаем математическую модель демографического процесса

$$y = Ce^{kt}. \tag{6}$$

Здесь C – константа, определяемая начальными условиями (в данном случае – численностью населения в начальный момент времени).

Пример 4. Требуется найти уравнение кривых, в каждой точке которых отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам точкой касания.

Решение. Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка искомой кривой, $y = kx + b$ – касательная к кривой в точке M, точки $A(a,0)$ и $B(0,b)$ – точки пересечения касательной с осями абсцисс и ординат соответственно (рис. 1).

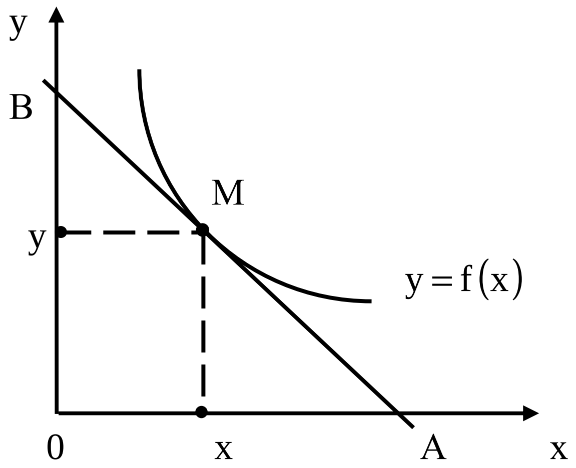

Рисунок 1

Из условия задачи следует, что $AM = BM$ и, следовательно, $b = 2y$ или $y - kx = 2y$. Так как тангенс наклона касательной к графику (угловой коэффициент) равен производной, т. е. $k = y'$, то приходим к уравнению $y' = -y/x$. Решая это дифференциальное уравнение, получаем искомое уравнение кривых $y = C/x$, где C – произвольное вещественное число.

2. Теорема существования и единственности решения для уравнений первого порядка

Рассмотрим некоторые важные вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений применительно к уравнениям **первого порядка, разрешенных относительно производной,** т. е. имеющих вид

$$y' = f(x, y), \tag{7}$$

где f – функция двух переменных.

Обозначим Γ множество точек плоскости $0xy$, на котором функция $f(x, y)$ определена. Дополнительно предположим, что множество Γ является **открытым.** Последнее означает, что вместе с каждой своей точкой оно содержит некоторую окрестность этой точки.

Проанализируем геометрический смысл уравнения (7). Производная y' есть тангенс угла наклона касательной к кривой $y = y(x)$ в точке с абсциссой x. Следовательно, уравнение (7) каждой точке $(x, y) \in \Gamma$ в плоскости $0xy$ сопоставляет направление $\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$ касательной к интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через эту точку. Говорят также, что уравнение (7) задает поле направлений в области Γ (рис. 2).

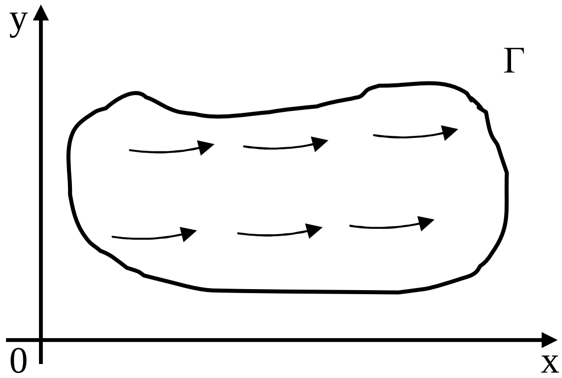

Рисунок 2

Решить уравнение (7) – означает найти семейство кривых, отвечающих заданному полю направлений.

Перейдем теперь к **теореме существования и единственности решения,** играющей важную роль при описании решений дифференциального уравнения. Приведем её без доказательства.

Теорема. Пусть в уравнении (7) функция $f(x,\ y)$ и её частная производная $\partial f / \partial y$ непрерывны на открытом множестве Γ координатной плоскости $0xy$. Тогда

1) для каждой точки $(x_0,\ y_0) \in \Gamma$ существует решение $y = y(x)$ уравнения (7), удовлетворяющее условию $y_0 = y(x_0)$;

2) если два решения $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ уравнения (7) совпадают хотя бы для одного значения $x = x_0$, т. е. $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, то эти решения совпадают для всех тех значений переменной x, для которых они существуют (определены).

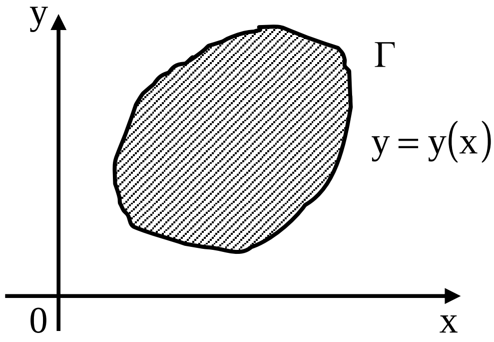

Рисунок 3

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что через каждую точку $(x_0,\ y_0) \in \Gamma$ проходит **одна и только одна** интегральная кривая уравнения (7) (рис. 3).

Следующий пример иллюстрирует применение теоремы о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения к конкретному уравнению.

Пример 5. Решить уравнение

$$y' = y. \tag{8}$$

Решение. В данном случае функция $f(x,\ y) = y$ и её частная производная $\partial f / \partial y = 1$ определены и непрерывны при любых значениях $x,\ y$ и, следовательно, условия теоремы выполнены на всей плоскости $0xy$.

Непосредственная подстановка в уравнение показывает, что любая функция вида

$$y = Ce^{x}, \tag{9}$$

где C – некоторое число, является решением уравнения (8).

Убедимся теперь в том, что все решения уравнения (9) имеют именно такой вид (при некотором значении величины C). Пусть $y = y(x)$ – одно из решений уравнения (8), $x = x_0$ – точка, в которой это решение определено, и $y_0 = y(x_0)$. Положим $C = y_0 e^{-x_0}$. Тогда два решения: $y_1 = y(x)$ и $y_2 = Ce^{x} = y_0 e^{-x_0} e^{x} = y_0 e^{x-x_0}$ – уравнения (8) совпадают в точке $x = x_0$ и, следовательно, согласно п. 2 теоремы, совпадают на всей плоскости $0xy$.

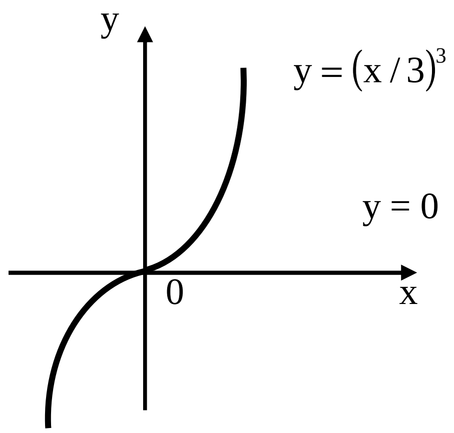

Рисунок 4

Теперь приведем пример уравнения, для которого **не имеет места единственность решения.** А именно покажем, что существует такая точка плоскости $0xy$, через которую проходит более, чем одна интегральная кривая.

Возьмём уравнение $y' = y^{2/3}$. Легко видеть, что два различных решения $y = 0$ и $y = (x/3)^3$ проходят через начало координат – точку $(0, 0)$ (рис. 4).

3. Элементы качественного анализа дифференциальных уравнений первого порядка. Автономные уравнения

Рассмотрим некоторые аспекты так называемого **качественного анализа дифференциальных уравнений** (первого порядка). Для простоты и наглядности сделаем это на примере **автономных уравнений.**

Дифференциальное уравнение (7) называется **автономным**, если функция f зависит только от переменной y, т. е. если уравнение имеет вид

$$y' = f(y). \tag{10}$$

Рассмотренное выше уравнение (8) представляет собой пример автономного уравнения.

Уравнения этого класса часто возникают в различного рода приложениях. Достаточно типичной является ситуация, когда дифференциальное уравнение описывает, например, действие во времени некоторого закона природы. Тогда бывает уместным предположить, что сам закон инвариантен по x, x – время. Это означает, что в правую часть уравнения (10) x не входит. В качестве примера можно привести задачу о демографическом законе, описываемом уравнением (5).

Предположим, что для правой части уравнения (10) – функции $f(x)$ – выполнены условия, обеспечивающие существование и единственность решения при произвольном значении переменной y. А именно будем считать, что функция $f(y)$ имеет непрерывную производную при любом y (см. формулировку теоремы о существовании и единственности решения). Пусть, кроме того, нули функции $f(y)$ (корни уравнения $f(y)=0$), не имеют **предельных** точек, т. е. все они отстоят друг от друга не менее чем на заданную положительную величину.

Для удобства и наглядности будем трактовать уравнение (10) как описание процесса движения точки по прямой Oy, x – как время. Тогда y' – скорость, которая, согласно (10), зависит только от координат точки и не зависит от значения текущего момента времени.

Нули функции $f(y)$ играют особую роль в проводимом (в очень схематичной и упрощенной форме изложения, без математических подробностей) качественном анализе дифференциальных уравнений (первого порядка). Их еще называют **положениями равновесия** или **стационарными точками.** Действительно, если в некоторой точке $x=a$ функция $f(a)=0$, то такая точка не меняет своего положения на оси Oy с течением времени x.

Пусть теперь a, b, c,... – нули функции $f(y)$. Прямые $y=a$, $y=b$, $y=c$,... разбивают всю координатную плоскость Oxy на полосы, расположенные параллельно оси абсцисс. Каждую такую полосу заполняют интегральные кривые уравнения (10). Так как функция $f(x)$ непрерывна, из уравнения (10) следует, что производная y' знакопостоянна на произвольном интервале между положениями равновесия. Поэтому все интегральные кривые, лежащие в одной полосе, задаются либо только возрастающими, либо только убывающими функциями.

Поясним изложенное на примере построения интегральных кривых уравнения (8).

В этом случае $f(y)=y$, и единственным нулем этой функции является $y=0$. В силу этого вся координатная плоскость разбивается прямой $y=0$ на две полуплоскости (которые в данном случае играют роль “полос”). Решения уравнения (8) описываются экспонентами (9). При $C=0$ имеет место решение $y=0$, отвечающее неподвижной точке. Для всех $C>0$ имеем семейство монотонно возрастающих функций, для $C<0$ – монотонно убывающих (рис. 5).

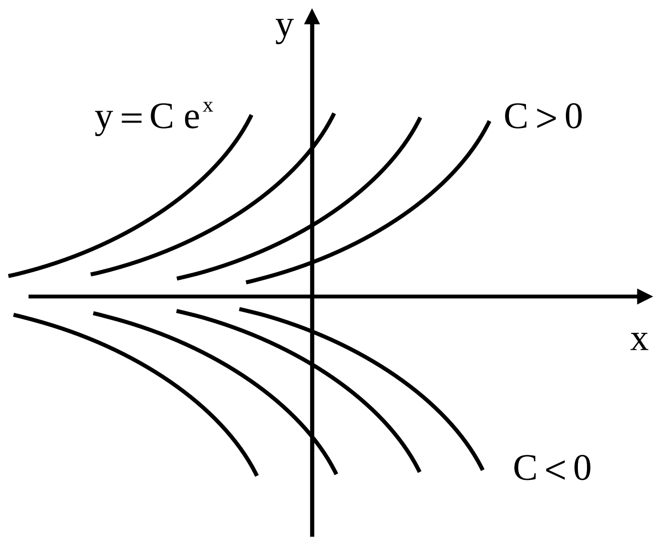

Рисунок 5

Нетрудно показать (читателю предлагается сделать это самостоятельно), что каждая кривая семейства при $C > 0$ получается из другой параллельным сдвигом вдоль оси абсцисс. То же и для $C < 0$. Кроме того, очевидно, что семейство кривых верхней полуплоскости есть зеркальное отражение (относительно оси абсцисс) такового нижней полуплоскости.

Прямая $y = 0$, отвечающая неподвижной точке уравнения, является горизонтальной асимптотой интегральных кривых этого уравнения.

Отметим, что факты, изложенные при рассмотрении этого примера, распространяются и на более общую ситуацию. Однако такое обобщение выходит за рамки настоящего пособия.

Завершая краткое знакомство с очень важным и сложным вопросом теории дифференциальных уравнений – качественным их анализом – рассмотрим ещё одно уравнение $y' = 1 - y^2$.

Пример 6. Сделать качественный анализ уравнения $y' = 1 - y^2$.

Решение. Находим корни уравнения $1 - y^2 = 0$, получаем положения равновесия: $y = \pm 1$. Траекторий в данном случае будет пять: интервалы $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$ и точки $y = \pm 1$. Из вида решаемого уравнения следует, что если $y > 1$ или $y < -1$, то $y' < 0$. Решение $y = y(x)$ тогда – убывающая функция, и, следовательно, точка движется по прямой влево.

Если $-1 < y < 1$, то $y' > 0$, и точка движется соответственно вправо.

Замечание. Направление движения точки вблизи её положения равновесия определяет **тип положения равновесия,** который может быть разным. Различают три положения равновесия: – **устойчивое, неустойчивое** и **полуустойчивое.**

Например, для рассмотренного только что уравнения $y' = 1 - y^2$ точка $y = 1$ будет точкой **устойчивого равновесия**, поскольку некоторая подвижная точка, находясь в достаточной близости от точки $y = 1$, будет стремиться к последней. Напротив, точка $y = -1$ будет точкой **неустойчивого равновесия**. В этом случае точка, расположенная в непосредственной близости от положения равновесия, будет удаляться от него.

Наконец, точка **полуустойчивого равновесия** характеризуется тем, что она является **устойчивой "слева"** и **неустойчивой "справа"**. Или наоборот.

4. Неполные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение (7) первого порядка называется **неполным,** если функция f **явно зависит** либо только от независимой переменной x, либо только от искомой функции y.

Решение неполных дифференциальных уравнений строятся сравнительно просто. Здесь возможны две ситуации.

Первая – правая часть f уравнения есть функция только независимого переменного x, т. е. само уравнение имеет вид $y' = f(x)$ или $dy/dx = f(x)$. Это означает равенство дифференциалов $dy = f(x)dx$, и общее решение уравнения (7) в этом случае будет $y = \int f(x)dx$.

Вторая ситуация – правая часть f уравнения (7) зависит только от искомой функции y, т. е. уравнение (7) имеет вид $y' = f(y)$.

Это уже знакомое **автономное уравнение**, решение которого удобно искать в виде $x = x(y)$. Искомая функция y и независимое переменное x поменялись здесь местами. Уравнение (10) запишем в форме равенства дифференциалов

$$dy/f(y) = dx. \tag{11}$$

Тогда, очевидно, решением $x(y)$ будет

$$x(y) = \int \frac{dy}{f(y)}. \tag{12}$$

В качестве иллюстрации решим пример 5 ещё раз, но другим способом.

Пример 7. Решить уравнение $y' = y$.

Решение (второй способ). Будем искать решение уравнения в виде $x = x(y)$. Полагая $y \neq 0$ (что сужает область поиска, и об этом следует, разумеется, помнить), из (8) и (12) получаем $x = \int dx/dy$ и, следовательно,

$$x = \ln|y| + C_1 \tag{13}$$

или $|y| = e^{-C_1}e^x$, $y = \pm e^{-C_1}e^x$, C_1 – произвольная константа. Если взять другую произвольную постоянную $C = \pm e^{-C_1}$, окончательно получим $y = Ce^x$. Этот результат, естественно, совпадает с приведенным ранее (9).

Принятое выше ограничение $y \neq 0$ означает, что случай $y = 0$ должен быть рассмотрен особо. Очевидно, нулевая функция удовлетворяет уравнению (8).

Кроме того, полученное вторым способом общее решение (9) уравнения (8) при $C = 0$ как раз и дает частное решение $y(x) = 0$.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется **уравнением с разделяющимися переменными,** если оно может быть записано в виде

$$dy/dx = f(x)g(y) \tag{14}$$

или в виде

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dx = 0, \tag{15}$$

где $f(x)$, $g(y)$, $M(x)$, $P(x)$, $N(y)$, $Q(y)$ – некоторые функции своих переменных.

Для решения уравнения с разделяющимися переменными (в форме (14) или (15)) его следует преобразовать к виду, в котором дифференциал и функции переменной x оказались бы в одной части равенства, а переменной y – в другой. Затем следует проделать интегрирование в левой и правой частях полученного дифференциального уравнения. Например, из (14) следует, что $dy/g(y) = f(x)dx$ и $\int dy/g(y) = \int f(x)dx$. Выполняя интегрирование, получаем решение уравнения (14).

Решим ряд примеров для дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$.

Решение. Поделив обе части уравнения на выражение $x\sqrt{y^2+1}$ (примем $x \neq 0$), приходим к равенству $dx/x = ydy/\sqrt{y^2+1}$. Интегрируя, получим

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} \tag{16}$$

или

$$\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C_2. \tag{17}$$

Интеграл в левой части (16) табличный. Интеграл в правой части (16) может быть найден посредством замены переменной интегрирования y на другую переменную, например на $t = \sqrt{y^2+1}$. В силу такой замены будет $y^2+1 = t^2$ и $2ydy = 2tdt$, тогда правая часть (16) легко интегрируется:

$$\int ydy/\sqrt{y^2+1} = \int tdt/t = \int dt = t + C_1 = \sqrt{y^2+1} + C_1.$$

Полученное таким образом решение (17) можно ещё записать как $x = \pm e^{C_1} e^{\sqrt{y^{2+1}}}$ или $x = Ce^{\sqrt{y^2+1}}$, где $C = \pm e^{C_1}$.

Сделаем одно важное замечание. Оно заключается в том, что к уравнениям с разделяющимися переменными в форме (14) легко приводятся уравнения вида

$$y' = f(ax + by + c) \tag{18}$$

путем **линейной** замены $z = ax + by + c$. Проследим эту процедуру на примере.

Пример 9. Решить уравнение

$$(x + 2y)y' = 1 \tag{19}$$

Решение. Уравнение (19) относится к уравнениям вида (18). Поэтому можно применить замену $z = x + 2y$. Тогда $z' = 1 + 2y'$ и $y' = (z' - 1)/2$, что позволяет исходное уравнение (19) записать в виде $z(z' - 1)/2 = 1$, который уже допускает разделение переменных.

Далее, очевидно, что $z' = (z + 2)/z$ и $z\,dz/(z + 2) = dx$. Интегрирование последнего равенства дает $\int dx = \int z\,dz/(z + 2)$ или $x = z - 2\ln|z + 2| + C_1$.

Возвращаясь к исходным переменным, получаем $x = x + 2y - 2\ln|x + 2y + 2| + C_1$ или

$$y - \ln|x + 2y + 2| = C, \tag{20}$$

где $C = -C_1/2$.

Построенное решение (20) уравнения (19) имеет так называемый **неявный вид,** поскольку оно **не разрешено относительно** y **или** x**.** Подстановкой (20) в (19) легко убедиться, что полученное решение удовлетворяет уравнению, т. е. обращает последнее в тождество.

Рассмотрим далее несколько подробнее уравнение с разделяющимися переменными в форме (15). Путем деления обеих его частей на произведение $P(x)N(y)$ получаем уравнение $M(x)dx/P(x) = -Q(y)dy/N(y)$ а общим интегралом последнего тогда, очевидно, будет

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx = -\int \frac{Q(y)}{N(y)}dy. \tag{21}$$

При делении на $P(x)N(y)$, естественно, следует сделать оговорку. А именно, что случай $P(x) = 0$ и (или) $N(y) = 0$ следует рассмотреть отдельно. Если x_0, y_0 - корни уравнений $P(x) = 0$ и $N(y) = 0$, то $y = y_0$ и $x = x_0$ – **суть особые решения дифференциального уравнения** (20).

Поясним эту ситуацию снова на конкретных уравнениях или задачах для них.

Пример 10. Решить уравнение $3e^x \operatorname{tg} y\,dx = (e^x - 2)\sec^2 y\,dy$.

Решение. После деления обеих частей уравнения на выражение $(e^x - 2)\operatorname{tg} y$, полагая при этом, естественно, что $\operatorname{tg} y \neq 0$, $e^x - 2 \neq 0$, приходим к уравнению

$3e^x dx/(e^x - 2) = \sec^2 y\,dy/\operatorname{tg} y$. Интегрирование дает общее решение в виде $-3\ln|e^x - 2| = \ln|\operatorname{tg} y| + \ln C$.

Непосредственной подстановкой этого решения в исходное уравнение нетрудно убедиться, что корнями уравнений $\operatorname{tg} y = 0$ и $e^x - 2 = 0$ будут числа $y = k\pi$ $(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$, $x = \ln 2$, которые и являются особыми решениями исходного уравнения примера.

Пример 11. Найти решение начальной задачи (задачи Коши)

$$\begin{cases} (1 + e^x)\, y\, y' = e^x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Решение: Так как $1 + e^x \neq 0$ для $\forall x \in R$, после деления обеих частей уравнения на $1 + e^x$ и перехода к дифференциалам будем иметь $y\,dy/dx = e^x/(1 + e^x)$ или $y\,dy = e^x dx/(1 + e^x)$. Общий интеграл уравнения можно записать как $y^2/2 = \ln(1 + e^x) + \ln C$ или $y^2/2 = \ln C(1 + e^x)$.

Полагая в нем, согласно начальным данным, $x = 0, y = 1$, получаем, что $1/2 = \ln C(1 + e^0)$, $1/2 = \ln 2C$. Подставляя определенную таким образом константу в общий интеграл, приходим к $y^2/2 = \ln\left(\dfrac{1 + e^x}{2}\right) + 1/2$

или $y = \pm\sqrt{1 + \ln\left(\dfrac{1 + e^x}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{1 + \ln(1 + e^x)^2 - \ln 4}$.

А так как в начальный момент $x = 0$ решение $y = 1$ заведомо положительно, знак минус перед радикалом следует отбросить. Таким образом, окончательным ответом будет $y = \sqrt{1 + \ln(1 + e^x)^2 - \ln 4}$.

Пример 12. Найти уравнение интегральной кривой, проходящей через данную точку и удовлетворяющей данному дифференциальному уравнению (решить задачу Коши),

$$\begin{cases} y\, y' = -9x \\ y(0) = -6. \end{cases}$$

Решение. Разделение переменных $y\,dy = -9x\,dx$ дает после интегрирования семейство кривых $\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{9x^2}{2} = C$. Подставляя сюда начальные данные $x = 0, y = -6$, находим $C = 18$, и тем самым выделяем конкретную кривую

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Найденная кривая – эллипс с полуосями $a = 2$, $b = 6$.

Пример 13. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} 2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Очевидно, что функции $y = 1$ и $y = -1$ являются решениями дифференциального уравнения задачи. Но они не удовлетворяют начальным данным $y(0) = 0$. Поэтому далее можем считать, что $\sqrt{1-y^2} \neq 0$.

Поделив обе части уравнения на выражение $\sqrt{1-y^2}(1+x^2)$, получаем

$$\frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Интегрирование последнего уравнения дает общий интеграл в виде $\ln(1+x^2) = \arcsin y + C$.

Подстановка в него начальных условий требует, чтобы $\ln 1 = \arcsin 0 + C$, поэтому $C = 0$. Таким образом, частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным данным, т. е. решение задачи Коши, запишется как $y = \sin\ln(1+x^2)$.

Рассмотрим далее ещё один класс дифференциальных уравнений – так называемые **однородные дифференциальные уравнения.**

Функция $f(x, y)$ называется **однородной (**степени $k \in N$**),** если она удовлетворяет условию

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \quad \text{для} \quad \forall t \in R, t \neq 0.$$

Например, функция $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ будет однородной нулевой степени, поскольку

$$f(tx, ty) = \frac{tx - ty}{tx + ty} = \frac{x-y}{x+y} = f(x).$$

А функция $f(x, y) = x^2 - xy$ будет однородной степени 2, поскольку $f(tx, ty) = (tx)^2 - (tx)(ty) = t^2(x^2 - xy) = t^2 f(x, y)$.

Дифференциальное уравнение называется **однородным относительно** x **и** y**,** если оно имеет вид

$$y' = f(x, y), \tag{22}$$

а $f(x, y)$ – однородная функция (вообще говоря, степени k).

Если функция $f(x, y)$ – **однородная нулевой степени** $(k = 0)$**,** то уравнение (22) может быть сведено **к уравнению с разделяющимися переменными.**

Замена искомого переменного y, путем которой однородные уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными, следующая: $y = ux$. Здесь u - новая искомая функция. Из формулы замены следует, что $y' = u + xu'$. Исходное уравнение превратится тогда в $xu' = f(x,\ xu) - u$ или, учитывая однородность $f(x,\ y)$, $xu' = f(1,\ u) - u$. А это уже уравнение с разделяющимися переменными.

Решим несколько уравнений (или задач), поясняющих процедуру сведения однородных уравнений к уравнениям с разделяющимися переменными.

Пример 14. Требуется написать общее решение уравнения

$$xy' = y + x\cos^2(y/x).$$

Решение. Делением обеих частей уравнения на x приводим его к виду $y' = y/x + \cos^2(y/x)$. Здесь правая часть – однородная функция (читателю предлагается убедиться в этом самостоятельно). Заменой искомой функции $y(x) = u(x) \cdot x$ уравнение приводится к виду $u + xu' = u + \cos^2 u$. Разделяя переменные и интегрируя, можно записать общий интеграл:

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{dx}{x}$$

или $\operatorname{tg} u = \ln x + C$, откуда следует, что $u = \operatorname{arctg} \ln Cx$. Возвращаясь к исходной функции $y(x)$, получаем искомый ответ: $y = x \operatorname{arctg} \ln Cx$.

Пример 15. Требуется решить задачу Коши

$$\begin{cases} (x - y)dx + x\,dy = 0 \\ y(1) = \ln 5. \end{cases}$$

Решение. Приводим уравнение задачи к виду $y' = \dfrac{y - x}{x}$ или $y' = \dfrac{y}{x} - 1.$

Путем замены искомой функции $y = xu$ уравнение преобразуем в уравнение $u + xu' = u - 1$. Разделяя переменные $x\,du = -dx$, находим общий интеграл: $u = \ln(C/x)$. Отсюда следует, что $y = x\ln(C/x)$. Подставляя в полученное общее решение задачи начальные данные $x = 1$, $y = \ln 5$, находим константу $C = 5$. Следовательно, искомым решением задачи Коши будет $y = x\ln(5/x)$.

Задачи для самостоятельного решения

	Найти общее решение уравнения или решить задачу Коши	Ответ
1	$\left(1+y^2\right)dx+\left(1+x^2\right)dy=0$	$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=C$ или $y=\operatorname{tg}\left(C-\operatorname{arctg}x\right)$
2	$y'\sin x-y\cos x=0,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$	$y=\sin x$
3	$2x^2y'=x^2+y^2,\ \ y(1)=-1$	$2x=(x-y)\ln(ex)$ или $y=x-\frac{2x}{\ln(ex)}$
4	$(4x-3y)dx+(2y-3x)dy=0$	$y^2-3xy+2x^2=C$
5	$e^{-y}(1+y')=1$	$e^x=C\left(1-e^{-y}\right)$
6	$y'+\sin(x-y)=\sin(x+y),\ y(\pi)=\pi/2$	$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=e^{2\sin x}$ или $y=2\operatorname{arctg}e^{2\sin x}$
7	$xy'=y(\ln y-\ln x)$	$y=xe^{1+Cx}$

5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение n-го порядка называется **линейным**, если оно имеет вид

$$y^{(n)}+f_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+f_{n-1}(x)y=g(x),\quad n\in N,$$

где f_i, $i=1,\ \ldots,\ n-1$ и $g(x)$ – некоторые (будем считать – непрерывные) функции переменной x. Функция $g(x)$ называется **правой частью** уравнения. Если $g(x)\equiv 0$, то уравнение называется **однородным**, в противном случае – **неоднородным.**

Отметим, что термин **линейное** здесь объясняется тем обстоятельством, что левая и правая части уравнения - суть линейные функции переменных $y^{(n)},\ y^{(n-1)},\ \ldots,\ y$.

В первой части пособия и в этом разделе, в частности, ограничимся пока только линейными дифференциальными уравнениями и только **первого** порядка, т. е. будем считать, что $n=1$. Уравнение в таком случае имеет вид

$$y'+f(x)y=g(x). \tag{23}$$

Рассмотрим один из возможных способов решения уравнения (23). Он заключается в том, что искомая функция $y(x)$ заменяется на **две другие** по формуле $y(x)=u(x)v(x)$. Метод часто называют **методом Бернулли**, а саму замену – **под-**

становкой Бернулли. Из замены следует, что $y' = u'v + uv'$, а уравнение (23) можно записать в виде

$$(v' + fv)u + u'v = g. \qquad (24)$$

Одну из двух функций u или v (пусть, для определенности, v) можно выбрать произвольно (почти), тогда вторая (в данном случае u) становится искомой. Пользуясь таким произволом, выберем функцию v так, чтобы коэффициент при u в уравнении (24) стал нулевым. А именно пусть v есть некоторое частное решение линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка $v' + fv = 0$. Тогда из самого уравнения (24) следует, что функция $u(x)$ есть решение простейшего дифференциального уравнения $vu' = g(x)$ или $u' = g(x)/v(x)$. Пусть $u = u(x, C)$ – общее решение последнего, тогда решением интересующего уравнения (24) будет, очевидно,

$$y(x) = u(x, C) \cdot v(x).$$

Здесь C – произвольная постоянная.

Пример 16. Решить уравнение

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

Решение. Запишем это уравнение в более удобном виде:

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3. \qquad (25)$$

После подстановки в него $y = uv, y' = u'v + v'u$ получим уравнение $u'v + uv' - 2uv/x = 2x^3$ или $u'v + u(v' - 2v/x) = 2x^3$. Полагая $v' - 2v/x = 0$ или $dv/dx = 2v/x$, будем иметь $dv/v = 2dx/x$. Возьмем какое-нибудь частное решение последнего уравнения. Пусть это будет, например, $\ln|v| = 2\ln|x|$ (при $C = 0$) и, следовательно, $v = x^2$. Теперь, когда функция v определена, уравнение (25) преобразуется в уравнение $u'x^2 = 2x^3$ или $du/dx = 2x$. Решая это **уравнение с разделяющимися переменными,** получим $u = x^2 + c$. Тогда окончательно $y = uv = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2$.

Пример 17. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}.$$

Решение. На первый взгляд представляется, что это уравнение не является линейным. Однако это не совсем так. А именно, если его рассмотреть как уравнение относительно функции $x(y)$, т. е. искать сначала функцию, обратную искомой, то тогда будем иметь дело уже с линейным уравнением

$$x\cos y + \sin 2y = \frac{dx}{dy} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} - x\cos y = \sin 2y.$$

Следуя методу Бернулли, ищем решение в виде $x = uv$. Уравнением для $v(y)$

будет $dv/dy - v\cos y = 0$, следовательно, $v(y) = e^{\sin y}$. Уравнением для $u(y)$, очевидно, будет тогда $v\,du/dy = \sin 2y$ или $du/dy = 2\sin y\cos y\, e^{-\sin y}$.

Интегрирование дает $u(y) = 2\int e^{-\sin y}\sin y\cos y\,dy = 2\int e^{-\sin y}\sin y d(\sin y)$.

К интегралам такого типа, как известно, можно применять замену $s = \sin y$. Тогда $u = 2\int s\,e^{-s}ds = 2(-s\,e^{-s} - e^{-s}) + C = 2(-\sin y e^{-\sin y} - e^{-\sin y}) + C$. Теперь нетрудно записать искомую функцию

$$x(y) = \left[2(-\sin y e^{-\sin y} - e^{-\sin y}) + C\right]e^{\sin y} = Ce^{\sin y} - 2\sin y - 2.$$

Замечание. Здесь уместно отметить два важных момента. Первый – далеко не всегда при решении даже простых дифференциальных уравнений возникающие в ответе интегралы можно вычислить в конечном виде. Однако такой результат, тем не менее, ценен тем, что его можно в дальнейшем исследовать численными методами. Второй – иногда найденную вместо функции $y(x)$ ей обратную $x(y)$ удается обратить, разрешив конечный результат относительно переменной y. Однако чаще это не так, как, например, в данной задаче. В таких случаях полученный результат анализируют опять же с помощью расчетов на ЭВМ.

Пример 18. Решить начальную задачу (задачу Коши)

$$\begin{cases} y' + 3y = e^{2x}y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Применяя метод Бернулли, строим сначала общее решение уравнения, после чего останется подставить в него начальные данные и тем самым выделить из общего решения искомое частное, удовлетворяющее данным Коши.

Итак, пусть $y(x) = u(x)v(x)$. Для v уравнение будет $v' + 3v = 0$, а его решение $v(x) = -e^{-3x}$. Тогда соответственно для $u(x)$ уравнение будет $u'v = e^{2x}y^2$. Его можно представить в виде $u' = e^{5x}u^2e^{-6x} = u^2e^{-x}$ или $du/u^2 = e^{-x}dx$. Откуда $-1/u(x) = -e^{-x} - C$ и $u(x) = 1/(C + e^{-x})$.

Общее решение уравнения исходной задачи можем теперь записать как $y(x) = u(x)v(x) = e^{-3x}/(C + e^{-3x})$. Подставляя в него начальные данные, конкретизируем константу C: $1 + 1/(C+1)$, следовательно, $C = 0$. Стало быть, интересующее нас решение есть $y(x) = e^{-2x}$.

Три решенных примера вполне иллюстрируют возможности и алгоритм применения метода Бернулли. Однако применение последнего не ограничивается только **линейными уравнениями.** Оказывается этот метод пригоден, в частности, для простейшего из **нелинейных** уравнений – так называемого **уравнения Бернулли.**

Его **общий вид:**

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

где α - постоянная, отличная от 0 и 1. Продемонстрируем это обобщение **метода Бернулли** на конкретном уравнении.

Замечание. В литературе можно встретить определение уравнения Бернулли без ограничений на показатель $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$. Оба определения термина, разумеется, правомерны и являются всего лишь условностью. Такая “двусмысленность” возникла из-за того, что при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ уравнение Бернулли превращается просто в линейное уравнение первого порядка. При $\alpha = 0$ – в неоднородное, при $\alpha = 1$ – в однородное.

Пример 19. Найти общее решение уравнения

$$y' + \frac{1}{x} y = y^2 \frac{\ln x}{x}.$$

Решение. Действуя по аналогии с линейным случаем, будем искать решение в виде $y(x) = u(x)v(x)$. Для $v(x)$ получим уравнение $v' + v/x = 0$, и следовательно, $v = 1/x$. Функцию $u(x)$ находим из уравнения $u'v = (u^2 v^2 \ln x)/x$, которое после подстановки в него $v = 1/x$ превращается в уравнение $du/u^2 = (\ln x\, dx)/x^2$. Общим интегралом последнего будет

$$\frac{1}{u} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C,$$

из которого находим $u(x)$ в явном виде: $u(x) = x/(1 + Cx + \ln x)$ и, соответственно, $y(x) = uv = 1/(1 + Cx + \ln x)$.

Задачи для самостоятельного решения

	Найти общее решение уравнения	Ответы
1	$x + 2xy = 2xy^2$	$y = \dfrac{1}{1 + Ce^{x^2}}$
2	$y' + 2y = e^{-x}$	$y = Ce^{-2x} + e^{-x}$
3	$xy' - 2y = x^3 \cos x$	$y = Cx^2 + x^2 \sin x$
4	$3xy^2 - 2y^3 = x^3$	$y = \sqrt[3]{x^3 + Cx^2}$
	Решить задачу Коши	
1	$x^2 + xy' = y, \quad y(1) = 0$	$y = x - x^2$
2	$y' - y\cos x = y\cos x, \quad y(0) = 1$	$y = \dfrac{1}{2e^{-\sin x} - 1}$
3	$y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}, \quad y(1) = 1$	$x = \dfrac{1}{y} + y\ln y$
4	$y' - 2ye^x = 2\sqrt{y}e^x, \quad y(0) = 0$	$y = \left(e^{e^x - 1} - 1\right)^2$

6. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy = 0 \qquad (26)$$

называется **дифференциальным уравнением в полных дифференциалах,** если его левая часть является дифференциалом некоторой функции двух переменных, дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой области $D \subset R^2$.

Другими словами, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция двух переменных $V(x,\ y)$, дважды непрерывно дифференцируемая на множестве (области) $D \subset R^2$, для которой выполняются равенства

$$M(x,\ y) = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad N(x,\ y) = \frac{\partial V}{\partial y}. \qquad (27)$$

Следовательно, в силу равенства между собой смешанных производных функции V необходимым и достаточным условием будет равенство

$$\frac{\partial M(x,\ y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,\ y)}{\partial x}. \qquad (28)$$

Если известна функция $V(x, y)$, полным дифференциалом которой является левая часть уравнения (15), то все решения этого уравнения описываются уравнением $V(x, y) = C$, где C – произвольная постоянная.

Чтобы найти $V(x, y)$, воспользуемся равенствами (27). Интегрируя первое из этих равенств по x, определим функцию $V(x, y)$ с точностью до произвольной дифференцируемой функции

$$V(x,\ y) = \int M(x,\ y)dx = \Phi(x,\ y) + \varphi(y). \qquad (29)$$

Здесь $\Phi(x, y)$ – первообразная (по x) от $M(x, y)$, $\varphi(y)$ – произвольная дифференцируемая функция. Дифференцируя (29) по y, с учетом второго из равенств (27) получим уравнение для определения функции $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial \Phi(x,\ y)}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy} = N(x,\ y).$$

Интегрирующим множителем уравнения (26)

$$M(x,\ y)dx + N(X,\ y)dy = 0$$

называется такая функция $m(x, y)$, после умножения на которую оно становится уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial}{\partial y}(m(x,\ y)\,M(x,\ y)) = \frac{\partial}{\partial x}(m(x,\ y)\,N(x,\ y)),$$

т. е. интегрирующий множитель, в силу (28), есть решение уравнения

$$m(x,\ y)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial m}{\partial x}-M\frac{\partial m}{\partial y}. \qquad (30)$$

В отдельных случаях уравнение (30) оказывается достаточно простым, и интегрирующий множитель для уравнения (15) удается легко построить. Наиболее простыми являются три следующие ситуации.

1. Если интегрирующий множитель $m(x,\,y)$ для уравнения (26) зависит только от x, т. е. $m(x,\,y)=m(x)$, то из (30) тогда следует, что

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dx}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

2. Если же уравнение (26) допускает интегрирующий множитель вида $m(x,\,y)=m(y)$, то

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dy}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial X}}{-M}.$$

Как видим, в обоих случаях интегрирующий множитель легко определяется.

3. Если уравнение (15) имеет интегральный множитель вида $m(x,y)=m(\omega\,(x,y))$, где $\omega\,(x,y)$ – известная функция, то

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{d\omega}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}. \qquad (31)$$

Не излагая дальнейший ход рассуждений, отметим лишь, что и в этом случае интегрирующий множитель, как правило, можно найти.

Пример 20. Решить уравнение

$$(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy=0.$$

Решение. Убедимся, что левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $V(x,\,y)$. Действительно,

$$M(x,y)=2xy+3y^2,N(x,y)=x^2+6xy-3y^2;$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x+6y,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2x+6y\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Для искомой функции $V(x, y)$ можно написать уравнения:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2.$$

Интегрирование первого из них по переменной x дает представление для $V(x, y)$ в виде

$$V(x, y) = x^2 y + 3xy^2 + \varphi(y),$$

$\varphi(y)$ – произвольная функция переменной y. Для её определения продифференцируем последнее равенство по y:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x^2 + 6xy + \frac{d\varphi}{dy} = x^2 + 6xy - 3y^2.$$

Отсюда следует, что $d\varphi/dy = -3y^2$, $\varphi(y) = -y^3 + C_1$, $V(x,y) = x^2 y + 3xy^2 - y^3 + C_1$ и, стало быть, окончательный ответ можно записать в следующем виде: $x^2 y + 3xy^2 - y^3 = C$.

Пример 21. Решить уравнение $x\dfrac{dy}{dx} = (3x^2 \cos y - \sin y)\cos y$, если известно, что оно имеет интегрирующий множитель, зависящий только от одной переменной – либо x, либо y.

Решение. Представим данное уравнение в виде

$$(3x^2 \cos y - \sin y)\cos y dx - x\,dy = 0 \tag{32}$$

и вычислим значение выражения

$\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = -3x^2 \cdot 2\cos y \ \ \sin y - \cos 2y + 1 = -2(3x^2 \cos y - \sin y)\sin y$. Если это выражение далее разделить на $-M(x,y) = -(3x^2 \cos y - \sin y)\cos y$, то частное окажется функцией только от y и интегрирующий множитель тоже. Найдем последний из уравнения (31). Из (30) ясно, что интегрирующий множитель m есть решение уравнения

$$\frac{1}{m(y)}\ \frac{dm}{dy} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} = 2\mathrm{tg} y,$$

общий интеграл которого можно записать в виде $\ln|m| = -2\ln|\cos y| + \ln C$, C – произвольная константа. Это, в свою очередь, означает, что в качестве интегрирующего множителя можно взять функцию $m(y)=\dfrac{1}{\cos^2 y}$. Умножение уравнения (32) на $m(y)$ приводит его к уравнению в полных дифференциалах

$$\left(3\ x^2-\operatorname{tg}\ y\right)\ dx-\frac{x}{\cos^2\ y}\ dy=0. \qquad (33)$$

Здесь важно отметить, что так как $m(y)=\dfrac{1}{\cos^2 y}$, то ситуацию, когда $\cos^2 y\equiv 0$, т. е. $y=\pi/2+k\pi,\ k\in Z$, следует проанализировать особо. А именно необходимо проверить, являются ли функции-константы $y_k(x)=\pi/2+k\pi,\ k\in Z$, решениями исходного уравнения. В данном примере легко видеть, что это так, поэтому счетное семейство решений: y_k, $k\in Z$ следует присовокупить к тому общему решению уравнения (33), которое будет получено путем интегрирования последнего.

Итак, следуя описанной выше процедуре, осталось решить уравнение в полных дифференциалах (33):

$$\frac{\partial V}{\partial x}=3\,x^2-\operatorname{tg}\,y,\qquad \frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{x}{\cos^2\,y},$$

$$V(x,\,y)=\int\left(3\,x^2-\operatorname{tg}\,y\right)dx=x^3-x\ \operatorname{tg}\ y+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3-x\operatorname{tg}\,y+\varphi\,(y)\right)=-\frac{x}{\cos^2\,y},$$

$$-\frac{x}{\cos^2\,y}+\varphi'(y)=-\frac{x}{\cos^2\,y},\quad \varphi'(y)=0,\qquad \varphi(y)=\text{const}.$$

Следовательно, $V(x,\,y)=x^3-x\ \operatorname{tg}\ y$, а общее решение исходного уравнения есть объединение двух множеств решений $x^3+x\ \operatorname{tg}\ y=C$ и $y_k=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$

Пример 22. Решить уравнение

$$\left(1-\frac{x}{y}\right)dx+\left(2\,x\,y+\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0.$$

Решение. Выясним, имеет ли данное уравнение интегрирующий множитель, являющийся функцией одной переменной. Для этого вычислим

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{x}{y^2}-2\,y-\frac{1}{y}-\frac{2\,x}{y^2}=-\left(2\,y+\frac{1}{y}+\frac{x}{y^2}\right).$$

Отсюда видно, что $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ зависит только от x, а интегрирующий множитель удовлетворяет уравнению $\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial m}{\partial x}=-\dfrac{1}{x}$ и, следовательно, $m=\dfrac{1}{x}.$

Умножая исходное уравнение на $\dfrac{1}{x}$, получим уравнение в полных дифференциалах:

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)dx+\left(2\,y+\frac{1}{y}+\frac{x}{y^2}\right)dy=0.$$

Его еще можно записать как

$$\frac{dx}{x}+\left(\frac{1}{y}+2\,y\right)dy-\frac{x\,dy-y\,dx}{y^2}=0$$

или

$$d\left(\ln|\,x\,|+\ln|y|+y^2-\frac{x}{y}\right)=0.$$

Интегрирование дает общий интеграл исходного уравнения

$$\ln|\,x\,|+\ln|y|+y^2-\frac{x}{y}=C.$$

Задачи для самостоятельного решения

	Найти общее решение уравнения или решить задачу Коши	Ответ
1	$\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0,\ y(0)=1$	$x^3+3x^2y^2+y^4=1$
2	$x\left(2x^2+y^2\right)+y\left(x^2+2y^2\right)y'=0$	$x^4+x^2y^2+y^4=C$
3	$\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0$	$x\sin y-y\cos x+\ln xy=C$
4	$\dfrac{2x}{y^2}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0,\quad y(1)=1$	$y=x$
5	$\left(2x+\dfrac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx=\dfrac{x^2+y^2}{x\,y^2}dy$	$x^3y+x^2-y^2=Cxy$

7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

В п. 2 была приведена теорема существования и единственности решения задачи Коши (начальной задачи) для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (7). Чтобы выделить его частное решение, нужно задать значение искомой функции y_0 в точке x_0. В более общем случае для уравнения (2) n**-го порядка** (запишем его ещё раз)

$$F\left(x,\ y,\ y',\ldots,\ y^{(n-1)},\ y^{(n)}\right)=0 \tag{34}$$

задается n **условий**

$$y(x_0)=h_0,\quad y'(x_0)=h_1,\ \ldots,y^{(n-1)}(x_0)=h_{n-1}. \tag{35}$$

Они называются **начальными условиями (начальными данными или данными Коши)** для начальной задачи (задачи Коши) (34)-(35).

Существуют некоторые классы **уравнений высших (**более чем первого**) порядков, допускающих понижение порядка.** Проследим технику такого понижения применительно к решению задачи Коши на примере двух классов уравнений. Отметим, что этот метод оказывается эффективен и в более общей ситуации, рассмотреть которую в рамках данного пособия не представляется возможным.

Итак, один класс – это уравнения n-го порядка, **не содержащие искомой функции и её производных до порядка** $k-1$ включительно, $k<n$. Это означает, что уравнение (34) (или (2)) имеет вид

$$F\left(x,\ y^{k},\ y^{(k+1)},\ldots,\ y^{(n)}\right)=0.$$

Порядок такого уравнения может быть понижен до порядка $(n-k)$ заменой $y^{(k)}=p(x)$, после которой уравнение станет уже уравнением $(n-k)$-го порядка относительно новой неизвестной функции $p(x)$, а именно

$$F\left(x,\ \ p,\ \ p',\ \ \ldots,\ \ p^{(n-k)}\right)=0.$$

Решая это уравнение, получим общее решение

$$p(x)=\Psi\ (x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-k})=0.$$

Теперь можно записать, что

$$y^{(k)}(x)=\Psi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-k}).$$

Интегрируя последнее уравнение k раз, находим $y(x)$. Если требуется решить задачу Коши, то постоянные $C_i\ (i=1,\ \ldots\ ,\ n)$ определяются **перед каждым последующим интегрированием из начальных условий.**

Пример 23. Решить задачу Коши $\begin{cases} y''' - \dfrac{y''}{x} = 0 \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = -1, \quad y''(1) = 2. \end{cases}$

Решение. Положим $y''(x) = p(x)$, тогда $y'''(x) = p'(x)$, и уравнение примет вид

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p(x)}{x} \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}.$$

Его решение: $p(x) = x \cdot C_1$. Возвращаясь к исходной функции $y(x)$, получим дифференциальное уравнение второго (а не третьего, как у исходного уравнения) порядка $y'' = C_1 x$. Согласно данным Коши, задачи $y'' = 2$ при $x = 1$, следовательно $C_1 = 2$. Теперь нужно рассмотреть уравнение $y'' = 2x$. Интегрируя очередной раз, получим $y' = x^2 + C_2$. Константу C_2 находим из начального условия $y'(1) = -1$: $-1 = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$. Общим решением полученного в итоге уравнения первого порядка $y' = x^2 - 2$ будет $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x + C_3$. Постоянную C_3 находим из условия $y(1) = 1$: $C_3 = \dfrac{8}{3}$.

Окончательный ответ: $y(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x + \dfrac{8}{3}$.

Другой класс уравнений, допускающих понижение порядка, – это уравнения, **не содержащие независимую переменную** x **в явном виде,** т. е.

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right). \qquad (36)$$

Ограничимся, для простоты, значением $n = 2$. При больших n ситуация аналогична.

Порядок уравнения (36) можно понизить **на единицу** заменой неизвестной функции

$$y'(x) = p(y),$$

где $p(y)$ рассматривается как новая неизвестная функция, а y принимается **за независимую переменную.**

Тогда, дифференцируя сложную функцию $p(y(x))$, можно записать

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p.$$

После подстановки в уравнение (36) при $(n = 2)$

$$F(y, \ y', \ y'') = 0,$$

получим уравнение **первого** порядка $F(y,\ p,\ p' p)=0$,

в котором, важно подчеркнуть, переменная y трактуется как **независимая переменная**, а $p(y)-$ **новая искомая функция.**

Пример 24. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y\, y'' + (y')^2 = 0, \\ y(0)=3, \quad y'(0)=2. \end{cases}$$

Решение. Делая замену $y'(x)=p(y(x))$, как было описано выше,

$$\frac{dy}{dx}=p(y), \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=p(y)\frac{dp}{dy},$$

приходим к уравнению **первого порядка** для функции $p(y)$, $y-$ независимая переменная:

$$y\, p\frac{dp}{dy}+p^2=0.$$

Сокращая на p (будем считать пока, что $p\neq 0$) и разделяя переменные, получаем решение

$$p(y)=\frac{C_1}{y}.$$

Случай, когда $p=0$ следует рассмотреть отдельно. Действительно, если $p(y(x))=0$, то $y'=0$ и $y=C$, $C-$ произвольная постоянная. Такая функция является решением уравнения исходной задачи, но она не удовлетворяет начальным данным. Следовательно, это решение должно быть отброшено.

Возвращаясь к исходной функции $y(x)$, находим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{y}.$$

Подчеркнем, что последнее уравнение есть уравнение **первого порядка** для функции $y(x)$. Конкретизируем в нем константу с помощью начальных условий. Подстановка данных Коши дает $C_1=6$, и уравнение примет вид $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6}{y}$. Отсюда, разделяя переменные и интегрируя , получим общее решение: $\dfrac{y^2(x)}{2}=6x+C_2$.

Подставляя сюда начальное условие $y(0)=3$, находим, что $C_2=\dfrac{9}{2}$.

Теперь можно утверждать, что окончательный ответ в задаче будет $y=\sqrt{12x+9}$. Знак минус перед радикалом отброшен, т. к. $y(0)=3>0$.

Прежде чем решить ещё один пример, отметим, что существуют уравнения (и соответственно задачи для них), принадлежащие одновременно обоим рассмотренным видам уравнений высших порядков, допускающими понижение порядка. Речь идет об уравнениях, не содержащих в явном виде независимую переменную x и саму искомую функцию $y(x)$, а только производные функции $y(x)$. Общий вид таких уравнений:

$$F\left(y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (37)$$

Их можно решать любым из двух описанных методов.

Отметим также, что оба метода рассмотрены применительно к решению **задачи Коши.** Однако это не принципиально – оба подхода пригодны и для отыскания **общего решения дифференциального уравнения.** В этом случае константы будут произвольными, т. е. не будут принимать конкретные значения, как при решении задачи Коши.

Рассмотрим пример задачи для уравнения вида (37) второго порядка. Решим его вторым методом. Первый метод проще, его применение к рассмотренному ниже примеру предлагается читателю сделать самостоятельно.

Пример 25. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' = \sqrt{1 + (y')^2} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. В этом случае после замены $y'(x) = p(y(x))$ выражение для второй производной проще, чем для уравнения вида (36), а именно $y'' = p'(x)$.

После подстановки в исходное уравнение

$$p'(x) = \sqrt{1 + p^2} \Rightarrow \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = dx \Rightarrow \ln\left|p + \sqrt{1 + p^2}\right| = x + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p + \sqrt{1 + p^2} = e^{x + C_1}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим общий интеграл для $p(x)$: $p(x) = \dfrac{e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}}{2}$. Отсюда общим видом производной исходной неизвестной функции будет

$$y'(x) = \frac{e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}}{2}.$$

Подставляя сюда начальные данные $y'(0) = 0$, определяем $C_1 = 0$. Далее, интегрируем уравнение $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow y(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + C_2$. Из условия $y(0) = 0$ следует тогда, что $C_2 = -1$. Окончательный ответ в задаче будет иметь вид

$$y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 = \mathrm{ch} - 1.$$

Подчеркнем, что суть метода понижения порядка дифференциального уравнения заключается в сведении его решения к последовательному решению уравнений (или задач для них) низших порядков. В частности, в случае уравнения второго порядка его решение сводится к решению по отдельности (а не в системе!) двух уравнений первого порядка.

Задачи для самостоятельного решения

	Решить задачу Коши	Ответ
1	$x\,y'' + y' = 0,\quad y(1) = 1,\quad y'(1) = 2$	$y = 2\ln\lvert x\rvert + 1$
2	$y'' = y' \ln y',\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$	$y = x$
3	$y\,y'' = (y')^2,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 1$	$y = e^x$

Библиографический список

1. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Гостехиздат, 1953. – 468 с.

2. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: Высш. школа, 1989. – 383 с.

3. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1970. – 96 с.