Министерство образования и науки РФ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

Н.И. Николаева

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Конспект лекций

Часть 5

Омск

Издательство ОмГТУ

2011

УДК
ББК

Рецензенты:
Ю.Ф.Стругов, д-р физ.-мат. наук;
С.Е.Макаров, канд. физ.-мат. наук, доцент

Николаева Н.И.
Дифференциальные уравнения. Элементы теории устойчивости. Конспект лекций. Часть 5 / Н.И. Николаева. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2011. – 88 с.

Пособие представляет собой конспект лекций, читаемых автором на втором курсе технического университета, и предназначено для студентов всех форм обучения.

Часть 5 включает в себя три главы: «Дифференциальные уравнения», «Системы дифференциальных уравнений» и «Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений». Изложение сопровождается достаточным количеством примеров, поясняющих наиболее важные теоретические положения, иллюстрирующих теоретический материал и дающих образцы решения задач.

Автор благодарит доцента кафедры Высшей математики ОмГТУ Лореша М.А., который внимательно прочел рукопись. Его советы и замечания немало способствовали улучшению текста. Автор также выражает признательность А.Лымарю и зав.методическим кабинетом кафедры Царицинской Т.Г. за большую помощь в техническом оформлении рукописи.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Омского государственного технического университета

Оглавление

Глава 10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

10.1. Основные определения и примеры

При решении многих задач математики, физики и механики часто не удается установить непосредственную зависимость между искомыми и данными переменными величинами, но зато удается составить уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такое уравнение называется *дифференциальным*.

ПРИМЕР. Тело охладилось за 10 минут от 100°С до 60°С. Температура окружающего воздуха поддерживается постоянной и равной 10°С. Определить через сколько минут температура тела станет равной 20°С.

Как известно из физики, скорость охлаждения пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды.

Обозначим $T(t)$ – температуру тела в некоторый момент времени t. Тогда скорость изменения температуры равна производной $\frac{dT}{dt}$, и поэтому данный физический процесс описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = k(T-10), \tag{10.1}$$

где k – коэффициент пропорциональности, подлежащий определению. Это уравнение является дифференциальным. Искомая функция должна удовлетворять условиям задачи, а именно, $T(0)=100$, $T(10)=60$.

ПРИМЕР. Гибкая однородная нить подвешена за два конца. Найти уравнение кривой, по которой расположится нить под действием собственного веса (такую форму имеют подвешенные канаты, провода, цепи, поэтому уравнение этой кривой называется *уравнением цепной линии*).

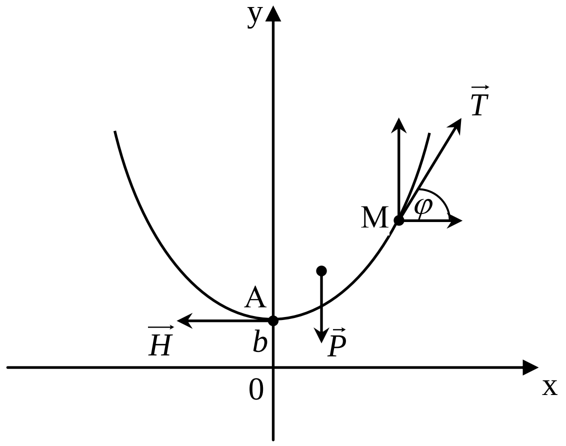


Рис. 1

Пусть $A(0,b)$ – самая низкая точка нити, а $M(x,y)$ – произвольная точка. Часть AM находится в равновесии под действием трех сил (рис.1):

1) сила натяжения $\vec{T}$, направленная по касательной в точке M и составляющая угол φ с осью OX,

2) сила натяжения $\vec{H}$ в точке A, действующая горизонтально,

3) вес $\vec{P}$, приложенный в центре масс и направленный вниз, $\left|\vec{P}\right| = P = \rho\ell$, где ρ – линейная плотность, ℓ – длина дуги.

Разложив вектор $\vec{T}$ на вертикальную и горизонтальную составляющие, получим уравнения равновесия:

$$T\cos\varphi = H,\ T\sin\varphi = \rho\ell \Rightarrow \mathrm{tg}\varphi = \frac{\rho}{H}\ell \quad \left(\left|\vec{T}\right| = T,\ \left|\vec{H}\right| = H\right).$$

Пусть уравнение нити имеет вид $y = y(x)$, тогда $\mathrm{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\rho}{H}\ell$.

Как известно (см. гл.8), $\frac{d\ell}{dx} = \sqrt{1+y'^2(x)}$, поэтому $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{H}\frac{d\ell}{dx} = \frac{\rho}{H}\sqrt{1+y'^2}$.

Таким образом, получено дифференциальное уравнение цепной линии:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{H}\sqrt{1+y'^2}. \tag{10.2}$$

Это уравнение связывает первую и вторую производные неизвестной функции. Заметим, что искомое решение удовлетворяет условиям $y(0) = b,\ y'(0) = 0$ (рис.1).

Как показывают эти примеры, дифференциальное уравнение может содержать первую, вторую, а также производные более высоких порядков неизвестной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение, которое связывает неизвестную функцию (или функции), ее производные и независимую переменную (или переменные), называется *дифференциальным уравнением*. Если неизвестная функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если от нескольких – *уравнением с частными производными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Порядком* дифференциального уравнения называется старший из порядков входящих в него производных.

ПРИМЕР. Уравнение (10.1) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, (10.2) – обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.
$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\sin t$ – уравнение с частными производными второго порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Решением* дифференциального уравнения называется функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество. Если решение найдено в *неявном виде*, оно называется *интегралом* данного дифференциального уравнения. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

ПРИМЕР. $y'' - \frac{2}{x} y' = 0$ – дифференциальное уравнение второго порядка. Легко проверить, что, например, $y = C,\ C \in \mathbb{R}$ является его решением. Также является решением $y = x^3 : y' = 3x^2,\ y'' = 6x \Rightarrow 6x - \frac{6x^2}{x} = 0$.

Функция $y = x^2$ этому уравнению не удовлетворяет, значит, решением не является.

Перейдем к изучению дифференциальных уравнений первого порядка.

10.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка связывает независимую переменную, неизвестную функцию и ее первую производную, то есть имеет вид $F(x, y, y') = 0$.

Уравнение вида

$$y' = f(x, y) \tag{10.3}$$

называется уравнением, разрешенным относительно производной.

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то (10.3) можно переписать в виде $dy - f(x, y)dx = 0$. В общем виде дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано и таким образом:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

ПРИМЕР. $y\,y' = y \ln x + 1$ – дифференциальное уравнение первого порядка. Перепишем его: $y\frac{dy}{dx} = y \ln x + 1 \Rightarrow (y \ln x + 1)dx - y\,dy = 0$. Наоборот, уравнение первого порядка $2xy\,dx + (x^2 + y^2)dy = 0$ может быть после деления обеих его частей на $dx \neq 0$ записано так: $(x^2 + y^2)y' + 2xy = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2)y' = -2xy$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = \frac{y}{x}$.

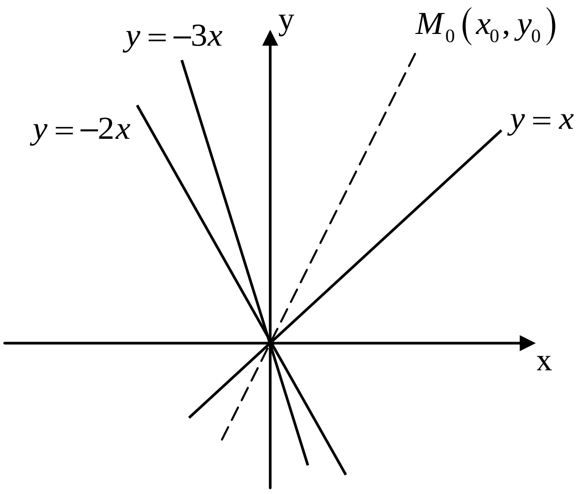


Рис. 2

Легко проверить, что $y=x$, $y=-2x$, $y=-3x$ и вообще $y=Cx$, $C\in\mathbb{R}$ – решения этого дифференциального уравнения. Каждому из этих решений соответствует интегральная кривая: прямая линия, проходящая через начало координат (рис. 2).

Если задать произвольную точку плоскости $M(x_0,y_0)$, $x_0\neq 0$, то через нее проходит интегральная кривая $y=\dfrac{y_0}{x_0}x$, а через точки $N(0,y)$, $y\neq 0$ не проходит ни одной интегральной кривой (рис. 2).

Таким образом, можно сделать следующий вывод:

1) данное дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений,
2) через любую точку плоскости, кроме принадлежащих оси OY, проходит единственная интегральная кривая,
3) через точки на оси OY либо не проходит ни одной интегральной кривой $(y\neq 0)$, либо проходит бесконечно много интегральных кривых (начало координат).

Этот вывод является иллюстрацией следующей теоремы.

ТЕОРЕМА Коши *(о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка)*. Пусть функция $f(x,y)$ – непрерывна вместе с производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой плоской области D. Тогда для любой точки $M(x_0,y_0)\in D$ существует, причем единственное, решение дифференциального уравнения (10.3), удовлетворяющее *начальному условию* $y(x_0)=y_0$.

Без доказательства.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0)=y_0$, называется *задачей Коши*.

Геометрический смысл задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка: *найти интегральную кривую данного дифференциального уравнения, проходящую через заданную точку плоскости*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точки, в которых не выполняется условие теоремы Коши, называются *особыми* точками дифференциального уравнения.

По теореме Коши через всякую неособую точку проходит единственная интегральная кривая. Если точка является особой для данного дифференциального уравнения, то через нее либо проходит более одной интегральной кривой, либо не проходит ни одна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Общим* решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = y(x,C)$, удовлетворяющая условиям:

1) при любых значениях постоянной C из некоторого множества $y = y(x,C)$ является решением дифференциального уравнения;
2) при любом начальном условии, удовлетворяющем условиям теоремы Коши, найдется единственное значение $C = C_0$ такое, что $y = y(x,C_0)$ – решение, удовлетворяющее этому условию.

Решения дифференциального уравнения, полученные из общего при конкретных значениях постоянной C, называются *частными* решениями. *Задача Коши является задачей отыскания частного решения дифференциального уравнения.*

Все дифференциальные уравнения первого порядка разделяются на типы, которые различаются методами, применяемыми для их решения. Рассмотрим некоторые из них.

10.2.1. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде

$$y' = f(x)\,g(y) \tag{10.4}$$

или
$$P_1(x)\,Q_1(y)dx + P_2(x)\,Q_2(y)\,dy = 0.$$

ПРИМЕРЫ.

а) $y' = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x}\cdot y \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(y) = y$ – данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными;

б) $y'x + y = y^2 \Rightarrow y' = \dfrac{y^2 - y}{x} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(y) = y^2 - y$ – это дифференциальное уравнение тоже является уравнением с разделяющимися переменными;

в) $y'x + x = y^2 \Rightarrow y' = \dfrac{y^2 - x}{x}$ – данное уравнение не может быть представлено в виде (10.4), поэтому не является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными;

г) $\left(xy^2 + x\right)dx + e^{2x+y}dy = 0 \Rightarrow x\left(y^2+1\right)dx + e^{2x}e^y\,dy = 0$ – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными;

д) дифференциальное уравнение (10.1) является уравнением с разделяющимися переменными.

Для того чтобы решить уравнение вида (10.4), надо сначала разделить переменные, то есть преобразовать его к виду, когда в левой части равенства будет одна переменная, а в правой – другая.

Приведем *алгоритм решения* уравнений вида $y' = f(x)\,g(y)$.

1 шаг: заменим в (10.4) y' на $\dfrac{dy}{dx}$ и перепишем уравнение: $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$;

2 шаг: умножим обе части на dx: $dy = f(x)\,g(y)dx$;

3 шаг: разделим обе части уравнения на $g(y)$, считая, что $g(y) \neq 0$: $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. Дифференциальное уравнение такого вида называется уравнением с *разделенными* переменными;

4 шаг: проинтегрируем обе части этого уравнения: $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$.

Вычислив интеграл слева и справа, получим общее решение дифференциального уравнения в неявном, как правило, виде, то есть его общий интеграл.

ЗАМЕЧАНИЕ. При делении обеих частей уравнения на $g(y)$ (шаг 3) могут быть потеряны некоторые решения дифференциального уравнения: если $g(y_0) = 0$, то постоянная функция $y = y_0$ – решение, в чем легко убедиться, подставив ее в уравнение.

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy' + y = y^2.$$

Как было отмечено выше, это уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - y \Rightarrow x\,dy = \left(y^2 - y\right)dx.$$

Полагая, что $x\left(y^2 - y\right) \neq 0$, получим

$$\frac{dy}{y^2-y}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{(1-y)+y}{y(y-1)}dy=\int\frac{dx}{x}\;\;\Rightarrow -\ln|y|+\ln|y-1|=\ln|x|+\ln|C|.$$

Отметим, что здесь постоянная интегрирования для удобства дальнейших преобразований записана как $\ln|C|$. Используя свойства логарифмов, имеем: $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=\ln|C\,x|$, или $\frac{y-1}{y}=C\,x$ – общий интеграл данного дифференциального уравнения (решение, записанное в неявном виде).

Заметим, что при делении на $\left(y^2-y\right)$ были потеряны решения $y=1$ и $y=0$. Однако решение $y=1$ в общем интеграле содержится (при $C=0$), а $y=0$ – нет. Поэтому, выразив y из равенства $\frac{y-1}{y}=C\,x$, запишем общее решение данного дифференциального уравнения, которое состоит из функций $y=1+C\,x\,y,\;\; y=0,\;\; C\in\mathbb{R}$.

ПРИМЕР. Вернемся к уравнению (10.1) и ответим на вопрос, заданный в примере на стр. 4.

$$\frac{dT}{dt}=k\left(T-10\right)\;\Rightarrow\; dT=k\left(T-10\right)dt\Rightarrow\int\frac{dT}{T-10}=\int k\,dt\;\Rightarrow\;\ln\left(T-10\right)=k\,t+C_1.$$

Так как по условию задачи $T\left(0\right)=100$, то $\ln 90=C_1\Rightarrow\ln\left(T-10\right)-\ln 90=k\,t$. Чтобы найти коэффициент k, воспользуемся вторым условием: при $t=10$ температура $T=60^\circ$. Тогда получим $\ln 50-\ln 90=10k$, следовательно,

$$\ln\left(T-10\right)-\ln 90=\frac{1}{10}\left(\ln 50-\ln 90\right)t\;\Rightarrow t=10\frac{\ln\left(T-10\right)-\ln 90}{\ln 50-\ln 90}\;.$$

Поэтому тело остынет до температуры $T=20^\circ$ за время

$$t=10\frac{\ln 10-\ln 90}{\ln 50-\ln 90}\approx 37{,}38\text{ (мин.).}$$

Заметим, что из равенства $\ln\left(T-10\right)-\ln 90=\frac{\ln 50-\ln 90}{10}t$ следует, что температура тела изменяется по закону $T=10+90e^{\frac{t}{10}\ln\frac{5}{9}}$, или $T=10+90\left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{t}{10}}$ – эта функция является решением задачи Коши, поставленной в рассмотренном примере.

10.2.2. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если его можно привести к виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{10.5}$$

ПРИМЕРЫ.

а) $y' = \dfrac{y}{x}$ – однородное дифференциальное уравнение первого порядка (это уравнение также является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными);

б) $y'x + y = y^2 \Rightarrow y' = \dfrac{y^2 - y}{x} = \dfrac{y^2}{x} - \dfrac{y}{x} = y\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x}$ – не является однородным, так как не может быть приведено к виду (10.5);

в) $\left(x^2 + 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2x^2\right)dy = 0$. Чтобы убедиться в том, что это однородное дифференциальное уравнение, разделим обе его части на x^2:

$$\left(1 + 2\frac{y}{x}\right)dx + \left(\frac{y^2}{x^2} - 2\right)dy = 0 \Rightarrow y' = \frac{1 + 2\dfrac{y}{x}}{2 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}.$$

Теперь стало очевидным, что данное уравнение приводится к виду (10.5), то есть является однородным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многочлен n-ой степени относительно двух переменных $P_n(x, y)$ называется *однородным многочленом*, если сумма показателей степеней во всех его одночленах одинакова и равна n.

ПРИМЕРЫ.

а) $P_1(x, y) = 2x + 3y$ – однородный многочлен первой степени;

б) $P_3(x, y) = 2x^3 + 3x^2y - xy^2 + y^3$ – однородный многочлен третьей степени;

в) $P_2(x, y) = x^2 + 2xy,\ Q_2 = y^2 - 2x^2$ – однородные многочлены второй степени;

г) $P_5(x, y) = x^2y^3 - 2xy^4 + 6y^5 + 3$ – не является однородным многочленом.

Уравнения вида $P_n(x, y)dx + Q_n(x, y)dy = 0$, *или* $y' = \dfrac{P_n(x, y)}{Q_n(x, y)}$, *где* $P_n(x, y)$,

$Q_n(x,y)$ *– однородные многочлены* n*-ой степени, являются однородными дифференциальными уравнениями первого порядка.*

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка *сводится к уравнению с разделяющимися переменными* в результате *замены переменной по формуле*: $z(x)=\dfrac{y(x)}{x}$. Действительно, так как $y(x)=z(x)x$, то $y'=z'x+z$, поэтому после выполнения подстановки уравнение (10.5) примет вид $z'x+z=\varphi(z)$, а дифференциальное уравнение $z'x=\varphi(z)-z$ является уравнением с разделяющимися переменными.

ПРИМЕР. Решить задачу Коши $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y},\ y(1)=2$.

Данное дифференциальное уравнение является однородным, поэтому сделаем замену переменной $z=\dfrac{y}{x}$. Тогда имеем: $z'x+z=z+\dfrac{1}{z}\Rightarrow z'x=\dfrac{1}{z}$ – уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$x\,dz=\frac{dx}{z}\ \Rightarrow\ \int z\,dz=\int\frac{dx}{x}\ \Rightarrow\ \frac{z^2}{2}=\ln|x|+C\ .$$

Возвращаясь к «старым» переменным, получим общий интеграл $\dfrac{y^2}{2x^2}=\ln|x|+C$.

Найдем решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=2$:

$\dfrac{4}{2}=\ln 1+C\ \Rightarrow C=2\ \Rightarrow y^2=2x^2\ln|x|+4x^2\ \Rightarrow y=\sqrt{2x^2\ln|x|+4x^2}$ – искомое частное решение.

Заметим, что если задать начальное условие $y(1)=-2$, то соответствующее частное решение будет иметь вид $y=-\sqrt{2x^2\ln|x|+4x^2}$.

10.2.3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если неизвестная функция и ее производная входят в него линейно, то есть в первой степени. Такое уравнение имеет вид

$$y'=p(x)y+q(x).\tag{10.6}$$

Если $q(x)=0$, то дифференциальное уравнение $y'=p(x)y$ называется *линейным однородным* дифференциальным уравнением первого порядка (оно является также дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными). Если $q(x)\neq 0$, то уравнение называется *линейным неоднородным*.

ПРИМЕРЫ.

а) $y'=\dfrac{y}{x}+x$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение;

б) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$ – не является линейным;

в) $\sin x\,dy-\left(y\operatorname{tg}x+\cos^2 x\right)dx=0$. Разделив обе части этого дифференциального уравнения на dx, получим $y'\sin x-y\operatorname{tg}x-\cos^2 x=0 \Rightarrow$

$y'\sin x=y\operatorname{tg}x+\cos^2 x$ – линейное дифференциальное уравнение;

г) $y\,y'=y\ln x+1$ – не является линейным.

Одним из методов решения уравнений вида (10.6) является *метод подстановки*. Идея метода состоит в том, что любая функция может быть представлена в виде произведения двух функций, одна из которых произвольная. Например, $x=\sin 2x\cdot\dfrac{x}{\sin 2x}=(3x+5)\cdot\dfrac{x}{3x+5}$ и т.д.

Будем искать решение дифференциального уравнения (10.6) в виде произведения двух функций: $y(x)=u(x)\,v(x)$. Найдем $y'=u'v+uv'$ и подставим в уравнение:

$$u'v+uv'=puv+q \Rightarrow v(u'-pu)+uv'=q.$$

Так как первый сомножитель в произведении $y=uv$ можно выбрать произвольно, потребуем, чтобы функция $u(x)$ обращала в ноль первое слагаемое в последнем равенстве: $u'-pu=0$. Тогда для нахождения функций $u(x)$ и $v(x)$ получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u'(x)-p(x)\,u(x)=0 \\ v'(x)\,u(x)=q(x) \end{cases}. \qquad (10.7)$$

Так как функция $u(x)$ выбирается в известном смысле произвольно, то она является каким-либо *частным* решением первого уравнения системы (10.7). Заметим, что оно является линейным однородным дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Решив первое уравнение, подставим найденную функцию $u(x)$ во второе дифференциальное уравнение и найдем $v(x)$, как *общее* решение этого уравнения.

ПРИМЕР. Решить задачу Коши $y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$.

Пусть $y = uv \Rightarrow u'v + uv' + uv\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow v(u' + u\operatorname{tg} x) + uv' = \dfrac{1}{\cos x}$.

Отсюда

$$\begin{cases} u' + u\operatorname{tg} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = -u\operatorname{tg} x \Rightarrow \displaystyle\int \frac{du}{u} = -\int \operatorname{tg} x\, dx \Rightarrow \ln|u| = \ln|\cos x| \Rightarrow u = \cos x, \\[2ex] v'u = \dfrac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dv}{dx}\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \displaystyle\int dv = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow v = \operatorname{tg} x + C. \end{cases}$$

Заметим, что функция $y(x) = 0$ не является решением дифференциального уравнения $y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$, поэтому при разделении переменных в первом из уравнений системы обоснованно полагалось, что $u(x) \neq 0$.

Таким образом, общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \cos x(\operatorname{tg} x + C) = \sin x + C\cos x.$$

Найдем теперь решение задачи Коши:

$$y(0) = C = 0 \Rightarrow y = \sin x \text{ – искомое частное решение.}$$

10.2.4. УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением Бернулли*, если может быть приведено к виду

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}, \ \alpha \neq 0, \ \alpha \neq 1, \tag{10.8}$$

При $\alpha = 0$ уравнение (10.8) является линейным, а при $\alpha = 1$ – уравнением с разделяющимися переменными.

ПРИМЕРЫ.

а) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$ – уравнение Бернулли ($\alpha = -1$). Это уравнение, кроме того, является однородным дифференциальным уравнением первого порядка;

б) $y^2 y' = y^3 \ln x + 1 \Rightarrow y' = y \ln x + \dfrac{1}{y^2}$ – уравнение Бернулли ($\alpha = -2$);

в) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$ – уравнение Бернулли ($\alpha = \dfrac{1}{2}$).

Уравнения вида (10.8) могут быть решены так же, как и линейные, *методом подстановки*: будем искать решение в виде $y(x) = u(x)\,v(x)$. Подставим эту функцию в уравнение: $u'v + uv' = puv + q(uv)^\alpha \Rightarrow v(u' - pu) + uv' = q(uv)^\alpha$. Тогда функции $u(x), v(x)$ найдутся как решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u' - pu = 0 \\ v'u = q(uv)^\alpha. \end{cases}$$

Сначала решим первое уравнение этой системы, причем $u(x)$ – его *частное* решение. Подставив $u(x)$ во второе уравнение, найдем $v(x)$ как *общее* решение этого дифференциального уравнения.

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

Пусть $y = uv \Rightarrow u'v + v'u + 4xuv = 2xe^{-x^2}\sqrt{uv} \Rightarrow v(u' + 4xu) + v'u = 2xe^{-x^2}\sqrt{uv}$. Отсюда

$$\begin{cases} u' + 4xu = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx} = -4xu \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \frac{du}{u} = -4\int x\,dx,\; u \neq 0 \Rightarrow \ln|u| = -2x^2 \;\Rightarrow\; u = e^{-2x^2} \\ v'u = 2xe^{-x^2}\sqrt{uv} \;\Rightarrow\; v'e^{-2x^2} = 2xe^{-x^2}\sqrt{ve^{-2x^2}} \;\Rightarrow\; v' = 2x\sqrt{v} \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2\int x\,dx \end{cases}.$$

Интегрируя, получаем $2\sqrt{v} = x^2 + C$, или $v = \dfrac{\left(x^2 + C\right)^2}{4}$. Заметим, что при разделении переменных в первом из этих уравнений было потеряно решение $u(x) = 0$, а, значит, и решение $y(x) = 0$ исходного дифференциального уравнения.

Следовательно, общее решение имеет вид $y = e^{-2x^2}\dfrac{\left(x^2+C\right)^2}{4}$, $y=0$.

Отметим, что решение $y=0$ не содержится в решении $y = e^{-2x^2}\dfrac{\left(x^2+C\right)^2}{4}$ ни при каком значении постоянной C.

10.2.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

называется *уравнением в полных дифференциалах,* если левая часть его является полным дифференциалом некоторой функции $\upsilon(x,y)$. Это имеет место, если $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

ПРИМЕРЫ.

а) $\left(x^2+y^2\right)y' + 2xy = 0$ – это уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Перепишем его таким образом: $2xy\,dx + \left(x^2+y^2\right)dy = 0$. Тогда

$$P(x,y) = 2xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2x;\ Q(x,y) = x^2+y^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

Значит, это не только однородное дифференциальное уравнение, но и уравнение в полных дифференциалах.

б) $2xy\,dx - \left(x^2+y^2\right)dy = 0$. Так как для этого дифференциального уравнения $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x \ne \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2x$, оно не является уравнением в полных дифференциалах, хотя, так же как и предыдущее, является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

По теореме о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования (см.гл. 9) для того, чтобы выражение $f_x\,dx + f_y\,dy$ было полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, необходимо и достаточно выполнение равенства $\dfrac{\partial f_y}{\partial x} = \dfrac{\partial f_x}{\partial y}$. Поэтому, если $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, то существует функция

$U(x,y)$ такая, что ее полный дифференциал $dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. Но нулевым является полный дифференциал лишь постоянной функции, значит, если $y = y(x)$ – решение уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, то $U(x, y(x)) = C,\ C = const$.

Таким образом, для того чтобы решить дифференциальное уравнение в полных дифференциалах, надо найти функцию $U(x,y)$, после чего общий интеграл уравнения запишется в виде $U(x,y) = C$.

ПРИМЕР. Решить задачу Коши $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0,\ y(1) = -2$.

В данном уравнении $P = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x};\quad Q = y^3 + \ln x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x}$, поэтому данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Так как условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено, то существует функция $U(x,y)$ такая, что $dU = \frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy$.

По определению полного дифференциала $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$.

Сравнив эти два выражения, получим систему дифференциальных уравнений для нахождения неизвестной функции $U(x,y)$: $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = y^3 + \ln x \end{cases}$.

Рассмотрим первое уравнение системы $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{x}$. Частная производная по x, как известно (см.гл.6), вычисляется при условии $y = const$, поэтому чтобы найти из этого равенства $U(x,y)$, проинтегрируем его в том же предположении:

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}dx = \int \frac{y}{x}dx\Big|_{y=const} \Rightarrow U(x,y) = y\ln x + C(y).$$

Подчеркнем, что в рамках условия $y = const$ постоянная интегрирования будет зависеть от y.

Подставим теперь найденную функцию во второе уравнение системы: $\frac{\partial U}{\partial y} = \ln x + C'(y) = y^3 + \ln x$. Отсюда получим $C'(y) = y^3$ – уравнение для определения неизвестной функции $C(y)$.

Найдем ее: $C(y)=\frac{y^4}{4}+C_1 \Rightarrow U(x,y)=y\ln x+\frac{y^4}{4}+C_1,\ C_1\in\mathbb{R}$.

Таким образом, общий интеграл исходного дифференциального уравнения имеет вид $y\ln x+\frac{y^4}{4}+C_1=C_2$, или $y\ln x+\frac{y^4}{4}=C$, где $C=C_2-C_1$.

По начальному условию $y(1)=-2$, поэтому $-2\ln 1+\frac{16}{4}=C \Rightarrow C=4$ и

$y\ln x+\frac{y^4}{4}=4$ – решение поставленной задачи Коши.

10.3. Дифференциальные уравнения старших порядков

Уравнение вида $F\left(x,y,y'...,y^{(n)}\right)=0$ называется дифференциальным уравнением n-го порядка. Если возможно выразить из этого равенства $y^{(n)}$, то получим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',..,y^{(n-1)}\right), \tag{10.9}$$

которое называется уравнением, разрешенным относительно старшей производной.

График какого-либо решения дифференциального уравнения (10.9) называется его *интегральной кривой*.

ТЕОРЕМА Коши *(о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка).* Пусть функция $f\left(x,y,y',..,y^{(n-1)}\right)$ непрерывна вместе с $\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y'},...,\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ в некоторой области D изменения переменных $\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$. Тогда для любой точки $M\left(x_0,y_0,y'_0,...,y_0^{(n-1)}\right)\in D$ существует, причем единственное решение дифференциального уравнения (10.9), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,...,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{10.10}$$

Без доказательства.

Задачей Коши для дифференциального уравнения n-го порядка называется задача отыскания его решения, *удовлетворяющего начальным условиям* (или условиям Коши) (10.10).

Для дифференциального уравнения второго порядка, например, задача Коши ставится таким образом: найти решение дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Геометрический смысл этой задачи состоит в следующем: требуется найти интегральную кривую данного дифференциального уравнения, которая проходит через точку $A(x_0, y_0)$ и имеет в этой точке заданную касательную (касательную с угловым коэффициентом $k = y'_0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Общим* решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) при любых значениях постоянных C_k, $k = 1,...,n$ из некоторого множества она является решением дифференциального уравнения;

2) для любых начальных условий $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, удовлетворяющих условиям теоремы Коши, существует единственный набор постоянных C_k^0, $k = 1,...,n$ такой, что функция $y = y(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ является решением, удовлетворяющим этим начальным условиям.

10.3.1. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений старшего порядка, порядок которых можно понизить, сделав подходящую замену переменной.

1. *Дифференциальные уравнения вида* $y^{(n)} = f(x)$.

Чтобы решить уравнение такого вида, надо обе его части проинтегрировать последовательно n раз.

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' = \sin\frac{x}{2}$.

$$y'' = \int \sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2} + C_1 \Rightarrow y' = \int\left(-2\cos\frac{x}{2} + C_1\right)dx = -4\sin\frac{x}{2} + C_1 x + C_2 \Rightarrow$$

$$y = 8\cos\frac{x}{2} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

2. *Дифференциальные уравнения вида* $y'' = f(x, y')$.

Эти уравнения второго порядка, в которых явно не присутствует y (или в общем виде $y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right)$.

Подстановка $y' = p(x)$ приводит данное уравнение к дифференциальному уравнению первого порядка: $y'' = \dfrac{dy'}{dx} = p'(x) \Rightarrow p' = f(x, p)$. Решив это уравнение, найдем функцию $p(x) = y'$, а затем $y(x)$.

ПРИМЕР. Найти решение дифференциального уравнения (10.2)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{H}\sqrt{1+y'^2},$$

которое удовлетворяет начальным условиям $y(0)=b,\ y'(0)=0$ (см. пример на стр. 4 из п. 10.1).

Обозначим $\dfrac{\rho}{H} = a$. Уравнение $\dfrac{d^2y}{dx^2} = a\sqrt{1+y'^2}$ не содержит явно y, поэтому сделаем подстановку $y' = p(x)$, после которой получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$p' = a\sqrt{1+p^2} \Rightarrow \int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = a\int dx \Rightarrow \ln\left|p+\sqrt{1+p^2}\right| = ax + C_1.$$

Из начального условия $y'(0)=0$ следует, что $C_1 = 0$. Отсюда $p+\sqrt{1+p^2} = e^{ax}$.

Чтобы выразить из этого равенства p, умножим обе его части на сопряженное выражение: $-1=\left(p-\sqrt{1+p^2}\right)e^{ax} \Rightarrow p-\sqrt{1+p^2} = -e^{-ax}$.

Сложим $\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)+\left(p-\sqrt{1+p^2}\right)=e^{ax}-e^{-ax}$, откуда получим

$$p = y'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ax}-e^{-ax}\right) = \operatorname{sh} ax \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{a}\operatorname{ch} ax + C_2.$$

По условию $y(0)=b \Rightarrow b = \dfrac{1}{a}\operatorname{ch}0 + C_2 = \dfrac{1}{a}+C_2 \Rightarrow C_2 = b-\dfrac{1}{a} \Rightarrow$

$$y = \frac{1}{a}(\operatorname{ch} ax - 1) + b$$ – искомое *уравнение цепной линии.*

3. *Дифференциальное уравнение вида* $y'' = f(y, y')$.

Это уравнение второго порядка, в котором явно не присутствует x. Подстановка $y' = p(y(x)) = p(y)$ приводит данное уравнение к дифференциальному уравнению первого порядка:

$y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dp(y)}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy} = p\,p'$ и $p\,p' = f(y, p)$ – уравнение относительно новой переменной $p(y)$.

ПРИМЕР. Решим задачу о второй космической скорости: найти с какой наименьшей скоростью v_0 надо бросить тело вертикально вверх, чтобы оно не вернулось на Землю.

Пусть $r(t)$ – расстояние от центра Земли до центра массы тела, тогда $\dfrac{dr}{dt}$ – скорость тела, а $\dfrac{d^2r}{dt^2}$ – ускорение. Согласно закону Ньютона $m\dfrac{d^2r}{dt^2} = -k\dfrac{mM}{r^2}$, где m – масса тела, M – масса Земли, k – гравитационная постоянная.

Таким образом, уравнение движения тела имеет вид: $r'' = -\dfrac{kM}{r^2}$. Оно не содержит явно время t, поэтому обозначим скорость $\dfrac{dr}{dt} = v(r(t)) \Rightarrow r'' = \dfrac{dv}{dr}v \Rightarrow$

$$\frac{dv}{dr}v = -\frac{kM}{r^2} \Rightarrow \int v\,dv = -kM\int\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{kM}{r} + C.$$

На поверхности Земли $v(R) = v_0$, поэтому $C = \dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{kM}{R} \Rightarrow \dfrac{v^2}{2} = \dfrac{kM}{r} + \dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{kM}{R}$.

Если тело неограниченно удаляется от поверхности Земли, то $r \to \infty$, при этом $v^2 > 0$, значит

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{kM}{r} + \frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}\right) = \frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} > 0 \Rightarrow v_0 > \sqrt{\frac{2kM}{R}} = \sqrt{2gR} \approx 11{,}2\left(\frac{км}{сек}\right),$$

где R – радиус Земли, g – ускорение силы тяжести на ее поверхности.

10.3.2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линейным дифференциальным уравнением* n-го порядка называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_0(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$.

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением*, если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*.

ПРИМЕРЫ.

а) $x^2 y''' + x y'' + 2y' = x^2 - 2x + 3$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка с переменными коэффициентами;

б) $y'' + 2y' - 3y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами;

в) $y y'' + 3y' = \sin 2x$ – нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{10.11}$$

$a_0(x) \neq 0 \ \forall \ x \in [a, b]$.

Уравнение

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{10.12}$$

называется однородным дифференциальным уравнением, соответствующим линейному неоднородному уравнению (10.11). Это уравнение имеет решение $y(x) \equiv 0$, которое называется нулевым или тривиальным.

ТЕОРЕМА 1 (*о линейной комбинации решений линейного однородного дифференциального уравнения*). Пусть $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ – два решения линейного однородного дифференциального уравнения (10.12). Тогда для любых постоянных C_1, C_2 линейная комбинация $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ также является решением (10.12).

Доказать самостоятельно.

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение $y'' + 4y = 0$. Легко проверить непосредственной подстановкой, что функции $y_1 = \cos 2x,\ y_2 = 3\cos 2x,\ y_3 = \sin 2x$ – его решения.

По теореме 1 при любых C_1, C_2 функция

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos 2x + 3C_2 \cos 2x$$

– решение этого дифференциального уравнения.

Функция $y = C_1 y_1 + C_3 y_3 = C_1 \cos 2x + C_3 \sin 2x, \quad C_1, C_3 \in \mathbb{R}$ тоже является решением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два решения однородного дифференциального уравнения (10.12) называются *линейно независимыми*, если их отношение постоянно. В противном случае эти решения называются *линейно независимыми*.

ПРИМЕР. Для решений уравнения из предыдущего примера имеем:

$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{\cos 2x}{3\cos 2x} = \dfrac{1}{3} = const \ \Rightarrow y_1, y_2$ – линейно зависимы;

$\dfrac{y_1}{y_3} = \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} \neq const \ \Rightarrow y_1, y_3$ – линейно независимы;

$\dfrac{y_2}{y_3} = \dfrac{3\cos 2x}{\sin 2x} \neq const \ \Rightarrow y_2, y_3$ – линейно независимы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Определителем Вронского* n функций называется функциональный определитель вида

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Для двух функций определитель Вронского имеет вид $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

ПРИМЕР. Для рассмотренных выше решений

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos 2x & 3\cos 2x \\ -2\sin 2x & -6\sin 2x \end{vmatrix} = 0; \quad W(y_1, y_3) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 2 (о *необходимом и достаточном условии линейной зависимости решений линейного однородного дифференциального уравнения*). Пусть $a_i(x),\ i=0,1,2$ непрерывны, а $a_0(x)\neq 0\quad \forall x\in[a,b]$. Тогда для того, чтобы решения $y=y_1(x), y=y_2(x)$ дифференциального уравнения (10.12) были линейно зависимы на $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского $W(y_1(x),y_2(x))$ был равен нулю хотя бы для одного значения $x_0\in[a,b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. *Необходимость*: решения y_1,y_2 линейно зависимы $\Rightarrow W(y_1(x),\ y_2(x))=0$ хотя бы при одном значении $x_0\in[a,b]$.

По определению линейной зависимости двух решений $\dfrac{y_1}{y_2}=k=const\Rightarrow$

$$y_1=k\,y_2\Rightarrow\ W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}k\,y_2 & y_2\\ k\,y_2' & y_2'\end{vmatrix}=0\quad \forall x\in[a,b].$$

2. *Достаточность*: $W(y_1(x_0),\ y_2(x_0))=0,\ x_0\in[a,b]\Rightarrow$ решения $y_1,\ y_2$ дифференциального уравнения (10.12) линейно зависимы.

Так как (10.12) – линейное однородное дифференциальное уравнение, то оно имеет нулевое решение $\overline{y}(x)\equiv 0$, для которого $\overline{y}(x_0)=\overline{y}'(x_0)=0\quad \forall\ x_0\in[a,b]$.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}C_1\,y_1(x_0)+C_2\,y_2(x_0)=0\\ C_1\,y_1'(x_0)+C_2\,y_2'(x_0)=0\end{cases}. \tag{10.13}$$

Ее основной определитель $\Delta=W(y_1(x_0),\ y_2(x_0))=0$ по условию, поэтому она имеет бесконечное множество решений (см.гл.1). Пусть (C_1^0,C_2^0) – некоторое нетривиальное решение (10.13). Тогда функция $y(x)=C_1^0\,y_1(x)+C_2^0\,y_2(x)$ по теореме 1 – решение (10.12), причем вследствие (10.13) $y(x_0)=y'(x_0)=0$.

Таким образом, одним и тем же начальным условиям удовлетворяют два решения уравнения (10.12), что противоречит теореме Коши. Следовательно, $y(x)=\overline{y}(x)\Rightarrow\ C_1^0\,y_1(x)+C_2^0\,y_2(x)=0\Rightarrow\ y_1=-\dfrac{C_2^0}{C_1^0}y_2$, то есть решения y_1,y_2 линейно зависимы.

Что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для линейной зависимости n решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского был равен нулю хотя бы в одной точке.

ТЕОРЕМА 3 (*о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка*). Пусть $a_i(x),\ i=0,1,2$ непрерывны $\forall x\in[a,b],\ a_0(x)\neq 0$ и $y=y_1(x),\ y=y_2(x)$ – произвольные линейно независимые решения дифференциального уравнения (10.12). Тогда общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y=C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x),\ \ C_1,C_2\in\mathbb{R}\ .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 $y=C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x)$ – решение (10.12) $\forall C_1,C_2\in\mathbb{R}$. Покажем, что оно общее.

Зададим произвольные начальные условия $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0'$, удовлетворяющие условиям теоремы Коши. Тогда для определения постоянных C_1, C_2 получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y(x_0)=C_1\,y_1(x_0)+C_2\,y_2(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=C_1\,y_1'(x_0)+C_2\,y_2'(x_0)=y_0', \end{cases}$$

основной определитель которой $\Delta=W\big(y_1(x_0),\,y_2(x_0)\big)\neq 0$ по теореме 2.

Значит, система имеет единственное решение $\left(C_1^0,\,C_2^0\right)$, а функция $y(x)=C_1^0\,y_1(x)+C_2^0\,y_2(x)$ – решение дифференциального уравнения (10.12), удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Таким образом, $y(x)=C_1\ y_1(x)+C_2\ y_2(x)$ по определению – общее решение дифференциального уравнения (10.12).

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР. Ранее были найдены линейно независимые решения дифференциального уравнения $y''+4y=0$. Теперь можно записать *общее* решение этого уравнения:

$$y=C_1\cos 2x+C_3\sin 2x \quad \text{или} \quad y=3C_2\cos 2x+C_3\sin 2x\,,\ \ C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}\ .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Совокупность n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения (10.12) называется его *фундаментальной системой решений* (ф.с.р.).

ПРИМЕР. Фундаментальную систему решений (ф.с.р.) уравнения $y'' + 4y = 0$ образуют, например, функции $y_1 = \cos 2x,\ y_3 = \sin 2x$, или функции $y_3 = \sin 2x,\ y_2 = 3\cos 2x$.

ТЕОРЕМА 4 (*о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения*). Пусть $y = y_ч(x)$ – некоторое частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (10.11) с непрерывными коэффициентами $a_i(x),\ i = 0,1,2,\ a_0(x) \neq 0$, а $y = y_0(x)$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения (10.12). Тогда общее решение дифференциального уравнения (10.11) имеет вид: $y = y_0(x) + y_ч(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $y = y_0 + y_ч$ – решение дифференциального уравнения (10.11). Подставим эту функцию в уравнение:

$$a_0\left(y_0 + y_ч\right)'' + a_1\left(y_0 + y_ч\right)' + a_2\left(y_0 + y_ч\right) =$$
$$= \left(a_0 y_0'' + a_1 y_0' + a_2 y_0\right) + \left(a_0 y_ч'' + a_1 y_ч' + a_2 y_ч\right) = 0 + f(x) = f(x).$$

Покажем, что это решение – общее. Зададим произвольные начальные условия $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$, удовлетворяющие условиям теоремы Коши.

По теореме 3 $y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, где решения y_1, y_2 дифференциального уравнения (10.12) образуют ф.с.р. Тогда для определения постоянных C_1, C_2 получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y_ч(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + y_ч'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

или
$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - y_ч(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' - y_ч'(x_0) \end{cases},$$

основной определитель которой $\Delta = W\left(y_1(x_0),\ y_2(x_0)\right) \neq 0$ по теореме 2.

Значит, эта система имеет единственное решение $\left(C_1^0, C_2^0\right)$, а функция $y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + y_ч(x)$ – решение дифференциального уравнения (10.11), удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Таким образом, по определению $y = y_0(x) + y_ч(x)$ – общее решение дифференциального уравнения (10.11).

Что и требовалось доказать.

10.3.3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{10.14}$$

где $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$.

Будем искать решение дифференциального уравнения (10.14) в виде $y = e^{kx}$. Подставим эту функцию в уравнение:

$$y' = k e^{kx},\ y'' = k^2 e^{kx} \ \Rightarrow\ a_0 k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_2 e^{kx} = 0 \ \Rightarrow$$

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \tag{10.15}$$

Если k удовлетворяет уравнению (10.15), то функция $y = e^{kx}$ является решением дифференциального уравнения (10.14).

Уравнение (10.15) называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения (10.14).

Решение дифференциального уравнения (10.14) будет зависеть от характера корней квадратного уравнения (10.15). Как всякое квадратное уравнение, оно может иметь либо пару действительных различных корней $(D > 0)$, либо совпадающие (двукратные) корни $(D = 0)$, либо пару комплексно-сопряженных корней $(D < 0)$.

Рассмотрим всевозможные случаи.

1) Пусть характеристическое уравнение имеет *различные действительные* корни $k_1 \neq k_2$. Тогда $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ – решения дифференциального уравнения (10.14), причем $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} \neq const$. Следовательно, y_1, y_2 линейно независимы, а потому образуют ф.с.р. По теореме 3 общее решение (10.14) в этом случае имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 8y = 0$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 - 2k - 8 = 0 \Rightarrow$ $k_1 = 4,\ k_2 = -2 \Rightarrow y_1 = e^{4x},\ y_2 = e^{-2x}$ – ф.с.р.

Тогда $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$ – общее решение этого дифференциального уравнения.

2) Пусть характеристическое уравнение имеет *действительные равные* корни $k_1 = k_2 = k$. Тогда $y_1 = e^{kx}$ – решение дифференциального уравнения (10.14). Покажем, что в качестве второго решения, линейно независимого с этим, можно взять функцию $y_2 = xe^{kx}$.

Подставим эту функцию в уравнение:

$$y' = e^{kx} + kxe^{kx},\ \ y'' = ke^{kx} + ke^{kx} + k^2xe^{kx} = 2ke^{kx} + k^2xe^{kx} \ \Rightarrow$$

$$a_0\left(2ke^{kx} + k^2xe^{kx}\right) + a_1\left(e^{kx} + kxe^{kx}\right) + a_2xe^{kx} = 0 \Rightarrow$$

$$x\left(a_0k^2 + a_1k + a_2\right) + 2a_0k + a_1 = 0,$$

где k – двукратный корень уравнения (10.15). По теореме Виета $k_1 + k_2 = 2k = -\dfrac{a_1}{a_0} \ \Rightarrow\ 2a_0k + a_1 = 0$, поэтому $y_2 = xe^{kx}$ удовлетворяет уравнению (10.14). Кроме того, $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{kx}}{xe^{kx}} \neq const$, то есть y_1, y_2 образуют ф.с.р., и общее решение дифференциального уравнения (10.14) в этом случае имеет вид:

$$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2x\right).$$

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 10y' + 25y = 0$.

Характеристическое уравнение

$$k^2 + 10k + 25 = 0 \Rightarrow (k+5)^2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -5.$$

Отсюда ф.с.р. состоит из функций $y_1 = e^{-5x}$, $y_2 = xe^{-5x}$ и общее решение имеет вид $y = e^{-5x}\left(C_1 + C_2x\right)$.

3) Пусть характеристическое уравнение (10.15) имеет *комплексные* корни $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Так как $k_1 \neq k_2$, то решения $\overline{y_1} = e^{(\alpha+\beta i)x}$, $\overline{y_2} = e^{(\alpha-\beta i)x}$ линейно независимы, значит, образуют ф.с.р. Но по теореме 1 при любых C_1, C_2 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ – решение (10.14), поэтому подберем постоянные C_1 и C_2 так, чтобы получить пару *действительных* линейно независимых решений уравнения. Воспользуемся для этого *формулой Эйлера* (она будет доказана позже в гл.13)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{10.16}$$

Из (10.16) имеем:

$$\overline{y_1} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right),$$

$$\overline{y_2} = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right).$$

Отсюда новая *действительная* фундаментальная система решений может быть составлена из функций $y_1 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_1 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$, а общее решение дифференциального уравнения (10.14) тогда имеет вид:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$$

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 5 = 0$ имеет комплексные корни $k_{1,2} = 1 \pm 2i$: $\alpha = \operatorname{Re} k_1 = 1,\ \beta = \operatorname{Im} k_1 = 2$.

Следовательно, ф.с.р. данного уравнения состоит из функций $y_1 = e^x\cos 2x,\ y_2 = e^x\sin 2x$, а $y = e^x\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$ – общее решение.

Все вышесказанное можно систематизировать в виде таблицы:

Дифференциаль-ное уравнение	$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$		
Характеристиче-ское уравнение	$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$		
Корни	$k_1 \neq k_2,\ k_{1,2} \in \mathbb{R}$	$k_1 = k_2 = k,\ k \in \mathbb{R}$	$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
Ф.с.р.	$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}$	$y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx}$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$
Общее решение	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$y = e^{kx}\left(C_1 + xC_2\right)$	$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$

10.3.4. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ n–го ПОРЯДКА

Для линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{10.17}$$

$a_i \in \mathbf{R}$, $i = 0,1,\ldots,n$, характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \qquad (10.18)$$

Чтобы решить дифференциальное уравнение (10.17), надо решить уравнение n-ой степени (10.18), которое имеет ровно n корней – действительных или комплексных. По виду найденных корней выписывается ф.с.р. с учетом того, что

1) каждому *простому* действительному корню k соответствует одно решение $y = e^{kx}$;
2) каждому действительному корню k *кратности* r соответствует r линейно независимых решений $y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx}, \ldots,\ y_r = x^{r-1}e^{kx}$;
3) каждой паре *простых* комплексных корней $\alpha \pm i\beta$ соответствует пара решений $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x;$
4) каждой паре комплексно сопряженных корней *кратности* r соответствует $2r$ линейно независимых решений

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ y_{2r-1} = x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ y_{2r} = x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Подчеркнем, что ф.с.р. линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка содержит n линейно независимых решений. После нахождения ф.с.р. общее решение дифференциального уравнения (10.17) запишется в виде $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$.

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y^{IV} + 6y''' + 9y'' = 0$, б) $y^{V} + 2y''' + y' = 0$.

а) характеристическое уравнение: $k^4 + 6k^3 + 9k^2 = 0 \Rightarrow k^2(k+3)^2 = 0$. Это уравнение имеет две пары действительных корней кратности $r = 2$: $k_{1,2} = 0,\ k_{3,4} = -3$. В соответствии с п. 2) ф.с.р. состоит из функций $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = e^{-3x},\ y_4 = xe^{-3x}$, а общее решение имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-3x} + C_4 xe^{-3x}.$$

б) характеристическое уравнение: $k^5 + 2k^3 + k = 0 \Rightarrow k\left(k^2+1\right)^2 = 0$. Это уравнение имеет простой действительный корень $k_1 = 0$ и две пары комплексных корней $k_{2,3} = i,\ k_{4,5} = -i$. В соответствии с п. 1) и п. 4) составим ф.с.р.: $y_1 = 1,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x,\ y_4 = x\cos x,\ y_3 = x\sin x$. Отсюда общее решение имеет вид:

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + C_4 x\cos x + C_5 x\sin x.$$

10.4. Методы отыскания частных решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений

ТЕОРЕМА 5. Пусть $y = y_1(x)$ – некоторое решение дифференциального уравнения

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x),$$

а $y = y_2(x)$ – некоторое решение дифференциального уравнения

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x).$$

Тогда функция $y = y_1(x) + y_2(x)$ – решение дифференциального уравнения

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно подставить $y = y_1(x) + y_2(x)$ в уравнение:

$$a_0(x)(y_1'' + y_2'') + a_1(x)(y_1' + y_2') + a_2(x)(y_1 + y_2) =$$

$$= \left(a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right) + \left(a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right) = f_1(x) + f_2(x).$$

Что и требовалось доказать.

10.4.1. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (10.11)

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x).$$

По теореме 4 его общее решение $y = y_0(x) + y_ч(x)$, где $y = y_0(x)$ – общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (10.12), а $y = y_ч(x)$ – некоторое частное решение (10.11).

По теореме 3 $y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – ф.с.р. линейного однородного дифференциального уравнения (10.12), а C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Идея метода вариации произвольных постоянных состоит в следующем: будем искать *частное решение* дифференциального уравнения (10.11) *в виде, «похожем» на* y_0, именно: $y_ч(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, где $C_1(x), C_2(x)$ – некоторые пока неизвестные функции. Подберем эти функции так, чтобы $y_ч(x)$ удовлетворяло уравнению (10.11).

Вычислим производные $y_ч(x)$:

$$y'_ч = C'_1(x)y_1 + y'_1C_1(x) + C'_2(x)y_2 + y'_2C_2(x).$$

Пусть $$C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0. \qquad (10.19)$$

Тогда $y'_ч = y'_1C_1(x) + y'_2C_2(x)$, откуда $y''_ч = C'_1(x)y'_1 + y''_1C_1(x) + C'_2(x)y'_2 + y''_2C_2(x)$.

Подставляя найденные производные в дифференциальное уравнение (10.11), получим:

$$a_0\left(C'_1y'_1 + y''_1C_1 + C'_2y'_2 + y''_2C_2\right) + a_1\left(y'_1C_1 + y'_2C_2\right) + a_2\left(C_1y_1 + C_2y_2\right) = f(x).$$

Перегруппируем слагаемые в этом равенстве:

$$C_1\left(a_0y''_1 + a_1y'_1 + a_2y_1\right) + C_2\left(a_0y''_2 + a_1y'_2 + a_2y_2\right) + a_0\left(C'_1y'_1 + C'_2y'_2\right) = f(x).$$

Так как $y_1(x),\ y_2(x)$ – ф.с.р. однородного дифференциального уравнения (10.12), то первые два слагаемые в левой части равны нулю, поэтому

$$a_0\left(C'_1y'_1 + C'_2y'_2\right) = f(x). \qquad (10.20)$$

(10.19) и (10.20) – два уравнения для определения двух неизвестных функций $C_1(x),\ C_2(x)$.

Таким образом, если $C_1(x), C_2(x)$ удовлетворяют системе двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0 \\ C'_1y'_1 + C'_2y'_2 = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}, \qquad (10.21)$$

то $y_ч(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ – частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (10.11).

Основной определитель системы (10.21) $\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0$ по теореме 2, так как решения y_1, y_2 линейно независимы. Следовательно, система (10.21) имеет единственное решение $\left(C'_1(x), C'_2(x)\right)$. Проинтегрировав найденные функции, найдем $C_1(x), C_2(x)$ и запишем частное решение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),\ a_0(x) \neq 0$, частное решение находится в виде $y_ч(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$,

где $y = y_i(x),\ i = 1,2,\ldots,n$ – ф.с.р. соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Неизвестные функции $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ являются решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Рассмотренный метод отыскания частного решения называется *методом вариации произвольных постоянных.*

ПРИМЕР. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - \dfrac{y'}{x} = 2x$.

Составим и решим соответствующее однородное дифференциальное уравнение $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$.

Это уравнение допускает понижение порядка, поэтому сделаем подстановку:

$$p(x) = y' \Rightarrow p' - \frac{p}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln C \Rightarrow p = Cx$$

или $y' = Cx \Rightarrow y_0 = C\dfrac{x^2}{2} + C_2 = C_1x^2 + C_2$, $C_1 = \dfrac{C}{2}$ – общее решение однородного уравнения. В соответствии с теоремой 3 функции $y_1 = x^2$, $y_2 = 1$ образуют ф.с.р. этого уравнения.

Будем искать частное решение исходного неоднородного дифференциального уравнения в виде $y_ч(x) = C_1(x)x^2 + C_2(x)$. Для того, чтобы найти неизвестные функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, составим и решим систему (10.21):

$$\begin{cases} C_1'x^2 + C_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + C_2' = 0 \ \Rightarrow \ C_2' = -\dfrac{x^3}{3} \\ C_1' \cdot 2x + C_2' \cdot 0 = 2x \quad \Rightarrow \quad C_1' = 1 \ \Rightarrow \ C_1 = x \end{cases}.$$

Заметим, что, так как в данном случае находится *частное* решение исходного неоднородного дифференциального уравнения, то *достаточно найти некоторые частные решения для каждого из двух уравнений системы* (10.21).

Итак, $y_ч(x)=x\cdot x^2-\dfrac{x^3}{3}=\dfrac{2x^3}{3}$, а $y=C_1x^2+C_2+\dfrac{2x^3}{3}$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$ – искомое общее решение.

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+4y=2\operatorname{tg}x.$$

Решим соответствующее однородное дифференциальное уравнение

$$y''+4y=0.$$

Характеристическое уравнение $k^2+4=0$ имеет комплексные корни $k_{1,2}=\pm2i \;\Rightarrow\; y_1=\cos2x,\;\; y_2=\sin2x$ – ф.с.р., а $y_0=C_1\cos2x+C_2\sin2x$.

Будем искать частное решение в виде $y_ч(x)=C_1(x)\cos2x+C_2(x)\sin2x$. Составим систему уравнений (10.21):

$$\begin{cases}C_1'\cos2x+C_2'\sin2x=0\\-2C_1'\sin2x+2C_2'\cos2x=2\operatorname{tg}x\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}C_1'\cos2x+C_2'\sin2x=0\\-C_1'\sin2x+C_2'\cos2x=\operatorname{tg}x\end{cases}.$$

Решим последнюю систему методом Крамера (см.гл.1):

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos2x & \sin2x\\-\sin2x & \cos2x\end{vmatrix}=1,\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \sin2x\\\operatorname{tg}x & \cos2x\end{vmatrix}=-\operatorname{tg}x\sin2x,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\cos2x & 0\\\sin2x & \operatorname{tg}x\end{vmatrix}=\operatorname{tg}x\cos2x\;\Rightarrow\begin{cases}C_1'=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\operatorname{tg}x\sin2x\\C_2'=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\operatorname{tg}x\cos2x\end{cases}.$$

Отсюда

$$C_1=-\int\operatorname{tg}x\sin2x\,dx=-2\int\sin^2x\,dx=\int(\cos2x-1)\,dx=\frac{1}{2}\sin2x-x,$$

$$C_2=\int\operatorname{tg}x\cos2x\,dx=\int\operatorname{tg}x\left(2\cos^2x-1\right)dx=\int(\sin2x-\operatorname{tg}x)\,dx=-\frac{1}{2}\cos2x+\ln|\cos x|.$$

Таким образом,

$$y_ч(x)=\left(\frac{1}{2}\sin2x-x\right)\cos2x+\left(-\frac{1}{2}\cos2x+\ln|\cos x|\right)\sin2x=$$
$$=-x\cos2x+\sin2x\ln|\cos x|,$$

а общим решением данного дифференциального уравнения является функция $y=(C_1-x)\cos2x+(C_2+\ln|\cos x|)\sin2x$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

10.4.2. МЕТОД ПОДБОРА ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ (МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ)

Этот метод применим только к линейным уравнениям с *постоянными коэффициентами*

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = f\left(x\right), \quad a_i \in \mathbf{R},\ i = 0,1,\ldots,n$$

и только в том случае, когда правая часть имеет следующий *специальный* вид:

I. $f\left(x\right) = e^{\alpha x} P_n\left(x\right),\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\qquad P_n\left(x\right) = b_0\, x^n + b_1\, x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\, x + b_n$ – многочлен n-ой степени, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,n$

или

II. $f\left(x\right) = e^{\alpha x}\left(P_n\left(x\right)\cos\beta x + Q_m\left(x\right)\sin\beta x\right),\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $P_n\left(x\right), Q_m\left(x\right)$ – многочлены n-ой и m-ой степеней соответственно.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида I типа:

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = e^{\alpha x} P_n\left(x\right), \tag{10.22}$$

где $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Будем полагать, что некоторое частное решение дифференциального уравнения (10.22) имеет вид, аналогичный правой части, то есть представляется произведением $e^{\alpha x}$ и многочлена n-ой степени $M_n\left(x\right) = A_0\, x^n + A_1\, x^{n-1} + \ldots + A_n$. Неизвестные коэффициенты $A_i,\ i = 1,\ldots,n$ многочлена $M_n\left(x\right)$ подберем так, чтобы функция

$$y_ч\left(x\right) = e^{\alpha x} M_n\left(x\right) \tag{10.23}$$

обращала дифференциальное уравнение (10.22) в тождество. Для этого найдем производные

$$y_ч' = \alpha e^{\alpha x} M_n\left(x\right) + e^{\alpha x} M_n'\left(x\right) \Rightarrow y_ч'' = \alpha^2 e^{\alpha x} M_n\left(x\right) + 2\alpha e^{\alpha x} M_n'\left(x\right) + e^{\alpha x} M_n''\left(x\right)$$

и подставим в (10.22):

$$a_0\left(\alpha^2 e^{\alpha x} M_n + 2\alpha e^{\alpha x} M_n' + e^{\alpha x} M_n''\right) + a_1\left(\alpha e^{\alpha x} M_n + e^{\alpha x} M_n'\right) + a_2\, e^{\alpha x} M_n = e^{\alpha x} P_n.$$

Сократив на $e^{\alpha x}$ и перегруппировав слагаемые, получим:

$$M_n\left(a_0\,\alpha^2 + a_1\,\alpha + a_2\right) + M_n'\left(2a_0\,\alpha + a_1\right) + a_0\, M_n'' = P_n. \tag{10.24}$$

Заметим, что так как $M_n(x)$ – многочлен n-ой степени, то $M'_n(x)$ имеет степень $(n-1)$, а $M''_n(x)$ – степень $(n-2)$.

Рассмотрим следующие случаи:

а) α *не является корнем характеристического уравнения* (10.15), то есть $a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 \neq 0$. Тогда в правой части (10.24) стоит многочлен n-ой степени и в левой – также многочлен n-ой степени, но с неопределенными коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x справа и слева, получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных $A_i,\ i = 1,...,n$.

б) α *– простой корень характеристического уравнения* (10.15), то есть $a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$. Тогда (10.24) не может быть тождеством: в левой части стоит многочлен степени $(n-1)$. Поэтому в данном случае частное решение надо искать в виде произведения $e^{\alpha x}$ и многочлена $(n+1)$-ой степени без свободного члена, который при вычислении производной M'_n пропадает:

$$y_ч(x) = xe^{\alpha x}M_n(x). \tag{10.25}$$

в) α *– корень кратности 2 характеристического уравнения* (10.15), то есть, $a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$. Как было показано ранее, из теоремы Виета следует, что в этом случае $2a_0\alpha + a_1 = 0$. Тогда в левой части (10.24) стоит многочлен степени $(n-2)$, и чтобы (10.24) было тождеством, частное решение следует искать в виде произведения $e^{\alpha x}$ и многочлена $(n+2)$-ой степени без двух последних слагаемых, которые при вычислении M''_n пропадают.

Таким образом,

$$y_ч(x) = x^2e^{\alpha x}M_n(x). \tag{10.26}$$

ПРИМЕР. Найти вид частного решения дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = f(x)$ в случаях, когда

а) $f(x) = 3x^2 + x - 4$, б) $f(x) = xe^x$, в) $f(x) = 4e^{-x}$.

Составим и решим характеристическое уравнение однородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$: $k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = 3$.

а) Специальная правая часть I типа в общем случае имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$. В данном случае $n = 2$, а $\alpha = 0$ *не является* корнем характеристического уравнения. В соответствии с (10.23) $y_ч = M_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, где A, B, C – неопределенные коэффициенты.

б) В этом случае $n=1$, а $\alpha=1$ – *простой корень* характеристического уравнения, поэтому частное решение имеет вид (10.25):

$$y_ч = xe^x M_1(x) = xe^x(Ax+B),$$

где A и B – неопределенные коэффициенты.

в) Эта правая часть также имеет специальный вид: 4 – многочлен нулевой степени, а $\alpha=-1$ среди корней не встречается. Отсюда $y_ч = e^{-x} M_0(x) = Ae^{-x}$, где A – неопределенный коэффициент.

ПРИМЕР. Найти вид частного решения дифференциального уравнения $y''-6y'+9y=f(x)$ в случаях, когда

а) $f(x)=x^3e^{-3x}$, б) $f(x)=(2x+1)e^{3x}$.

Характеристическое уравнение: $k^2-6k+9=0 \Rightarrow k_{1,2}=3$.

а) $n=3$, $\alpha=-3$ корнем *не является*, поэтому в соответствии с (10.23)

$$y_ч = e^{-3x} M_3(x) = e^{-3x}\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right).$$

б) $n=1$, $\alpha=3$ – *корень кратности 2*, поэтому частное решение имеет вид (10.26):

$$y_ч = x^2e^{3x}M_1(x) = x^2e^{3x}(Ax+B) = e^{3x}\left(Ax^3+Bx^2\right).$$

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-4y'+3y=3x^2+x-4$.

Выше были найдены корни характеристического уравнения $k_1=1$, $k_2=3$, поэтому по теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения $y_0=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

Частное решение этого дифференциального уравнения имеет вид $y_ч=M_2(x)=Ax^2+Bx+C$. Чтобы найти коэффициенты A,B,C, подставим эту функцию в уравнение: $y_ч'=2Ax+B$, $y_ч''=2A \Rightarrow$

$$2A-4(2Ax+B)+3\left(Ax^2+Bx+C\right)=3x^2+x-4.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим:

$$\begin{array}{c||l} x^2 & 3A=3 \\ x^1 & -8A+3B=1 \\ x^0 & 2A-4B+3C=-4 \end{array} \quad\Rightarrow\quad A=1,\ B=3,\ C=2 \Rightarrow y_ч=x^2+3x+2.$$

Таким образом, по теореме о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + x^2 + 3x + 2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ является искомым общим решением.

Рассмотрим теперь правую часть специального вида II типа

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right),$$

где $P_n(x),\ Q_m(x) -$ многочлены соответственно n-ой и m-ой степеней.

По формуле Эйлера (10.16): $\cos\beta x = \dfrac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin\beta x = \dfrac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$,

отсюда

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + Q_m(x)\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}\right) =$$

$$= e^{(\alpha + i\beta)x}\left(\frac{P_n(x)}{2} + \frac{Q_m(x)}{2i}\right) + e^{(\alpha - i\beta)x}\left(\frac{P_n(x)}{2} - \frac{Q_m(x)}{2i}\right).$$

Заметим, что степень многочленов $\dfrac{P_n(x)}{2} \pm \dfrac{Q_m(x)}{2i}$ равна $\max(n, m) = p$.

После такого преобразования правой части рассмотрение случая II сводится уже к рассмотренному случаю I, именно:

а) если $\alpha + \beta i$ *не является корнем* характеристического уравнения (10.15), то

$$y_ч(x) = e^{\alpha x}\left(M_p(x)\cos\beta x + N_p(x)\sin\beta x\right), \qquad (10.27)$$

где $M_p(x), N_p(x)$ – многочлены степени $p = \max(n, m)$ с неопределенными коэффициентами;

б) если $\alpha + \beta i$ – *корень* характеристического уравнения и $p = \max(n, m)$, то

$$y_ч(x) = x e^{\alpha x}\left(M_p(x)\cos\beta x + N_p(x)\sin\beta x\right). \qquad (10.28)$$

ПРИМЕР. Найти вид частного решения дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = f(x)$ в случаях, когда

а) $f(x) = e^{3x}(2\cos 2x - x\sin 2x)$, б) $f(x) = \sin 3x$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 3$.

а) Специальная правая часть II типа в общем виде имеет вид

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right).$$

В данном случае $f(x)=e^{3x}\left(2\cos 2x-x\sin 2x\right)$, поэтому $\alpha=3,\ \beta=2,\ n=0,$ $m=1$. Комплексное число $\alpha+\beta i=3+2i$ корнем не является, а $p=\max(0,1)=1$. Поэтому частное решение запишется по формуле (10.27):

$$y_ч=e^{3x}\left(M_1(x)\cos 2x+N_1(x)\sin 2x\right)=e^{3x}\left((Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x\right),$$

где A, B, C, D – неопределенные коэффициенты.

б) В этом случае $\alpha=0,\ \beta=3,\ n=m=0$. Комплексное число $\alpha+\beta i=3i$ корнем не является, поэтому и здесь частное решение имеет вид (10.27):

$$y_ч=M_0(x)\cos 3x+N_0(x)\sin 3x=A\cos 3x+B\sin 3x,$$

где A, B – коэффициенты, которые надо определить.

Следует обратить внимание на то, что, несмотря на отсутствие в правой части уравнения $\cos 3x$, частное решение ищется как линейная комбинация *обеих функций* $\sin 3x$ и $\cos 3x$.

ПРИМЕР. Найти вид частного решения дифференциального уравнения $y''-2y'+2y=f(x)$ в случаях, когда

а) $f(x)=e^{x}\left(2\cos x-3\sin x\right)$, б) $f(x)=x^2e^{-x}\sin x$.

Характеристическое уравнение $k^2-2k+2=0$ имеет корни $k_{1,2}=1\pm i$.

а) $\alpha=\beta=1,\ n=m=0$. Комплексное число $\alpha+\beta i=1+i$ является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение в этом случае записывается по формуле (10.28):

$$y_ч=xe^{x}\left(M_0(x)\cos x+N_0(x)\sin x\right)=xe^{x}\left(A\cos x+B\sin x\right),$$

где A, B – неопределенные коэффициенты.

б) $\alpha=-1,\ \beta=1,\ n=0,\ m=2$. Комплексное число $\alpha+\beta i=-1+i$ не является корнем характеристического уравнения, $p=\max(0,2)=2$, поэтому частное решение имеет вид (10.27):

$$y_ч=e^{-x}\left(M_2(x)\cos x+N_2(x)\sin x\right)=$$

$$=e^{-x}\left(\left(A_1x^2+A_2x+A_3\right)\cos x+\left(B_1x^2+B_2x+B_3\right)\sin x\right),$$

где $A_i,\ B_i,\ \ i=1,2,3$ – коэффициенты, подлежащие определению.

ПРИМЕР. Уравнение вынужденных колебаний груза, подвешенного к концу пружины, под действием периодической возмущающей силы $f(t)=a\sin\beta t$ имеет вид: $y''+\omega^2 y=a\sin\beta t$, где ω – собственная частота пружины, β – частота возмущающей силы.

Найти закон движения груза, если $y(0)=y'(0)=0$.

Пусть $\omega=2$, $\beta=1$, $a=2$, тогда решение этой задачи сводится к решению задачи Коши $y''+4y=2\sin t$, $y(0)=y'(0)=0$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2+4=0 \Rightarrow k_{1,2}=\pm 2i$. Отсюда $y_0=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения (см. п.10.3.3).

Правая часть $f(t)=2\sin t$ неоднородного дифференциального уравнения является правой частью специального вида II типа. Сравнение этой функции с общим видом такой правой части показывает, что $\alpha=0, \beta=1, n=m=0$. Комплексное число $\alpha+\beta i=i$ *не является* корнем характеристического уравнения, поэтому в соответствии с (10.27)

$$y_ч=A\sin t+B\cos t \Rightarrow y_ч'=A\cos t-B\sin t \Rightarrow y_ч''=-A\sin t-B\cos t .$$

После подстановки в исходное дифференциальное уравнение получим:

$$-A\sin t-B\cos t+4(A\sin t+B\cos t)=2\sin 2t \Rightarrow 3A\sin t+3B\cos t=2\sin t.$$

Отсюда $A=\frac{2}{3}$, $B=0$ и $y_ч=\frac{2}{3}\sin t$. По теореме 4 о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения общее решение имеет вид

$$y(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+\frac{2}{3}\sin t.$$

По условию $y(0)=0 \Rightarrow C_1=0$; $y'(0)=2C_2+\frac{2}{3}=0 \Rightarrow C_2=-\frac{1}{3}$.

Откуда $y(t)=-\frac{1}{3}\sin 2t+\frac{2}{3}\sin t$ – по такому закону совершаются колебания груза в рассматриваемом примере, когда *частота возмущающей силы не совпадает с собственной частотой* пружины. В этом случае амплитуда колебаний – наибольшее отклонение груза от положения равновесия – с течением времени не меняется и остается ограниченной: $|y(t)|\le 1$.

Выясним, каким будет уравнение движения груза, если $\beta=\omega=2$.

Для этого решим аналогичную задачу Коши для уравнения $y'' + 4y = 2\sin 2t$. Сравнивая правую часть $f(t) = 2\sin 2t$ с общим видом специальной правой части II типа, видим, что $\alpha = 0,\ \beta = 2,\ n = m = 0$. Комплексное число $\alpha + \beta i = 2i$ *является* корнем характеристического уравнения, потому в соответствии с (10.28)

$$y_ч = t\left(A\sin 2t + B\cos 2t\right) \Rightarrow$$

$$y_ч' = A\sin 2t + B\cos 2t + t\left(2A\cos 2t - 2B\sin 2t\right) \Rightarrow$$

$$y_ч'' = 4A\cos 2t - 4B\sin 2t + t\left(-4A\sin 2t - 4B\cos 2t\right).$$

После подстановки в уравнение получим: $4A\cos 2t - 4B\sin 2t = 2\sin 2t$, откуда $A = 0,\ B = -\dfrac{1}{2}$ и частным решением в этом случае является функция $y_ч = -\dfrac{t}{2}\cos 2t$. Тогда $y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t - \dfrac{t}{2}\cos 2t$ – общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 2\sin 2t$.

По условию $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$; $y'(0) = 2C_2 - \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow C_2 = \dfrac{1}{4}$. Следовательно $y = \dfrac{1}{4}\sin 2t - \dfrac{t}{2}\cos 2t$ – уравнение движения груза. Очевидно, что с течением времени амплитуда этих колебаний неограниченно растет: $\left|y(t)\right| \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$. В таком случае говорят, что наступает *резонанс.*

Итак, резонанс наступает тогда, когда частота внешней силы совпадает с собственной частотой колебаний пружины.

10.4.3. МЕТОД КОШИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод Коши имеет два несомненных преимущества перед всеми ранее рассмотренными методами поиска частного решения линейного дифференциального уравнения. Во-первых, этим методом можно решать линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и *любой кусочно-непрерывной правой частью*, во-вторых, при решении практических задач (в механике, математической физике, сопротивлении материалов и т.д.) метод Коши позволяет, не находя общего решения, *сразу найти частное решение,* удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

Рассмотрим этот метод на примере линейного дифференциального уравнения второго порядка. Оно должно быть *приведенным*, то есть коэффициент при старшей производной должен быть равен единице:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{10.29}$$

$y = y(x),\ \ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

По теореме 4 о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения общее решение уравнения (10.29) имеет вид $y = y_0 + y_ч$, где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0, \tag{10.30}$$

а $y_ч$ – некоторое частное решение уравнения (10.29). Общее решение y_0 дифференциального уравнения (10.30) содержит две произвольные постоянные и находится в виде $y_0 = C_1\, \overline{y}_1 + C_2\, \overline{y}_2$, где решения $\overline{y}_{1,}$ $\overline{y}_2$ образуют фундаментальную систему решений.

Так как линейная комбинация любых решений линейного однородного дифференциального уравнения (10.30) – тоже решение (п.10.3.2, теорема 1), то можно найти сколько угодно ф.с.р.. Из всех них выделим одну систему фундаментальных функций $y_1,\ y_2$, каждая из которых, являясь решением однородного уравнения (10.30), удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{matrix} y_1(0) = 1 & y_1'(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 & y_2'(0) = 1 \end{matrix}. \tag{10.31}$$

Такая система называется *нормальной системой фундаментальных функций с единичной матрицей в нуле.*

Заметим, что $W^T(0)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \end{pmatrix}$, где $W^T(0) = \begin{pmatrix} \overline{y}_1(0) & \overline{y}_1'(0) \\ \overline{y}_2(0) & \overline{y}_2'(0) \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица Вронского для решений $\overline{y}_1, \overline{y}_2$, вычисленная в точке $x = 0$. Поэтому нормальная система фундаментальных функций с единичной матрицей в нуле может быть найдена из произвольной таким образом:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(W^T\right)^{-1}(0)\begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \end{pmatrix}.$$

Если общее решение однородного дифференциального уравнения (10.30) составить из фундаментальных функций с единичной матрицей в нуле, именно

$$y_0 = A_1\, y_1 + A_2\, y_2, \tag{10.32}$$

$A_1, A_2 \in \mathbf{R}$, то вследствие (10.31) такая форма представления решения будет обладать замечательным свойством: $y_0(0) = A_1,\ \ y_0'(0) = A_2$. Это означает, что произвольные постоянные равны значению функции $y_0(x)$ и ее производной в точке $x = 0$.

Особо подчеркнем свойства последней фундаментальной функции $y_2(x)$: она является решением однородного дифференциального уравнения (10.30) и, кроме того, $y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1$.

Частное решение неоднородного уравнения (10.29) может быть представлено в виде

$$y_ч(x)=\int_0^x f(t)\,y_2(x-t)\,dt\,. \tag{10.33}$$

Покажем это, для чего подставим (10.33) в уравнение (10.29).

$\int_0^x f(t)\,y_2(x-t)\,dt$ представляет собой интеграл с переменным верхним пределом, зависящий от параметра x. Выведем формулу вычисления производной такого интеграла.

Рассмотрим функцию $F(x)=\int_0^x \varphi(x,t)\,dt$. По определению производной

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

$F(x+\Delta x)=\int_0^{x+\Delta x}\varphi(x+\Delta x,t)\,dt=\int_0^x \varphi(x+\Delta x,t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x}\varphi(x+\Delta x,t)\,dt$ вследствие свойства аддитивности определенного интеграла. Полагая функцию $\varphi(x,t)$ непрерывной, применим к последнему интегралу теорему о среднем значении (см. п.8.2):

$$\int_x^{x+\Delta x}\varphi(x+\Delta x,t)\,dt=\varphi\left(x+\Delta x,\bar{t}\right)\Delta x,$$

где $\bar{t}$ находится между x и $x+\Delta x$.

Тогда

$$\Delta F(x)=\int_0^{x+\Delta x}\varphi(x+\Delta x,t)dt-\int_0^x\varphi(x,t)\,dt=\int_0^x\left(\varphi(x+\Delta x,t)-\varphi(x,t)\right)dt+\varphi\left(x+\Delta x,\bar{t}\right)\Delta x.$$

Отсюда имеем:

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\frac{\int_0^x\left(\varphi(x+\Delta x,t)-\varphi(x,t)\right)dt}{\Delta x}+\varphi\left(x+\Delta x,\bar{t}\right)=$$

$$=\int_0^x\frac{\varphi(x+\Delta x,t)-\varphi(x,t)}{\Delta x}\,dt+\varphi\left(x+\Delta x,\bar{t}\right),$$

так как Δx не зависит от t. Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим, что

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\int_0^x \frac{\varphi(x+\Delta x,t)-\varphi(x,t)}{\Delta x}dt+\varphi\left(x+\Delta x,\bar{t}\right)\right)=$$

$$=\int_0^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi_x(x,t)}{\Delta x}dt+\varphi(x,t)\Big|_{t=x}=\int_0^x \varphi'_x(x,t)\,dt+\varphi(x,t)\Big|_{t=x}. \qquad (10.34)$$

Пользуясь формулой (10.34), найдем производные частного решения (10.33):

$$y_ч(x)=\int_0^x f(t)\,y_2(x-t)\,dt \;\Rightarrow$$

$$y'_ч(x)=\int_0^x f(t)\,y'_2(x-t)\,dt+\left(f(t)\,y_2(x-t)\right)\Big|_{t=x}\overset{(10.31)}{=}\int_0^x f(t)\,y'_2(x-t)\,dt,$$

$$y''_ч(x)=\int_0^x f(t)\,y''_2(x-t)\,dt+\left(f(t)\,y'_2(x-t)\right)\Big|_{t=x}\overset{(10.31)}{=}\int_0^x f(t)\,y''_2(x-t)\,dt+f(x).$$

Заметим, что $y_ч(0)=\int_0^0 f(t)\,y_2(-t)\,dt=0$, а также $y_ч{}'(0)=\int_0^0 f(t)\,y_2{}'(-t)\,dt=0$.

Подставим $y_ч(x)$ и найденные производные в (10.29):

$$\int_0^x f(t)\left(y''_2(x-t)+a_1\,y'_2(x-t)+a_2\,y_2(x-t)\right)dt+f(x)\equiv f(x),$$

так как $y_2(x)$ – решение однородного дифференциального уравнения (10.30). Итак, (10.33) – действительно, одно из частных решений уравнения (10.29), а потому общее решение этого дифференциального уравнения получаем в виде:

$$y(x)=y(0)\,y_1(x)+y'(0)\,y_2(x)+\int_0^x f(t)\,y_2(x-t)\,dt. \qquad (10.35)$$

Представление решения дифференциального уравнения (10.29) в виде (10.35) удобно по двум причинам:

1) *произвольные постоянные имеют вполне определенный смысл, а потому решение задачи Коши можно найти сразу, не находя общего решения уравнения;*

2) *частное решение в виде (10.33) может быть найдено не только для непрерывной, но и для кусочно-непрерывной правой части.*

Такой метод решения задачи Коши для дифференциального уравнения (10.29) называется методом Коши, а решение (10.35) – *решением в форме Коши*.

ПРИМЕР. Решить задачу Коши: $y''-2y'+2y=4e^x$, $y(0)=0, y'(0)=5$.

1. Решим соответствующее данному однородное дифференциальное уравнение $y''-2y'+2y=0$. Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2-2k+2=0 \Rightarrow k_{1,2}=1\pm i \Rightarrow \quad \overline{y_1}=e^x\cos x, \quad \overline{y_2}=e^x\sin x \ .$$

2. Проверим, является ли найденная ф.с.р. нормальной системой фундаментальных функций с единичной матрицей в нуле (см.(10.31):

$\overline{y_1}(0)=1 \quad \overline{y_1'}(0)=1$ – значит, решение $\overline{y_1}$ не подходит;

$\overline{y_2}(0)=0 \quad \overline{y_2'}(0)=1$ – значит, решение $\overline{y_2}$ подходит.

Заметим, что так как по условию $y(0)=0$, в решении (10.35) функция $y_1(x)$ не будет использоваться, а потому мы ее и не будем искать.

3. Выпишем решение задачи Коши (10.35) при $y_2(x)=\overline{y_2}(x)=e^x\sin x$, $f(x)=4e^x$:

$$y(x)=5e^x\sin x+\int\limits_0^x 4e^t\, e^{x-t}\sin(x-t)\,dt=5e^x\sin x+4e^x\cos(x-t)\Big|_0^x=$$

$$=5e^x\sin x+4e^x-4e^x\cos x.$$

ПРИМЕР. Решить задачу Коши: $y''-2y'+y=f(x)$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, где $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$ (рис. 3).

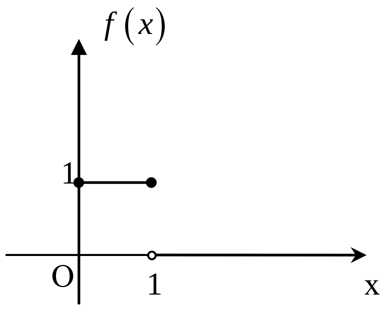


Рис. 3

1. Решим соответствующее данному однородное дифференциальное уравнение $y''-2y'+y=0$. Его характеристическое уравнение имеет вид: $k^2-2k+1=0 \Rightarrow k_{1,2}=1 \Rightarrow \overline{y_1}=e^x$, $\overline{y_2}=xe^x$.

2. Проверим, является ли найденная ф.с.р. нормальной системой фундаментальных функций с единичной матрицей в нуле:

$\overline{y_1}(0)=1 \quad \overline{y_1'}(0)=1$ – не подходит; (10.36)

$\overline{y_2}(0)=0 \quad \overline{y_2'}(0)=1$ – подходит. (10.37)

3. Найдем нормальную систему фундаментальных функций с единичной матрицей в нуле $y_1(x), y_2(x)$. Очевидно, $y_2(x)=\overline{y_2}(x)$, а $y_1(x)$ будем искать в виде $y_1=C_1\overline{y_1}+C_2\overline{y_2}$. Для определения неизвестных постоянных C_1, C_2 получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_1(0) = C_1\,\overline{y}_1(0) + C_2\,\overline{y}_2(0) = 1 \\ y_1'(0) = C_1\,\overline{y}_1{}'(0) + C_2\,\overline{y}_2{}'(0) = 0 \end{cases} \underset{(10.37)}{\overset{(10.36)}{\Rightarrow}} \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1,\, C_2 = -1.$$

Таким образом, $\qquad y_1 = e^x - x e^x = e^x(1-x), \quad y_2 = x e^x$.

4. Выпишем решение задачи Коши (10.35):

$$y = y(0)\,y_1 + y'(0)\,y_2 + \int_0^x f(t)(x-t)\,e^{x-t}\,dt = e^x(1-x) + \int_0^x f(t)(x-t)\,e^{x-t}\,dt.$$

Вычислим интеграл:

если $x \in [0,1]$, то (см. рис.3)

$$y(x) = \int_0^x (x-t)\,e^{x-t}\,dt = -(x-t)e^{x-t}\Big|_0^x + e^{x-t}\Big|_0^x = xe^x + 1 - e^x = 1 + (x-1)e^x;$$

если $x \in (1,+\infty)$, то

$$y(x) = \int_0^1 (x-t)e^{x-t}\,dt + \int_1^x 0\,dt = -(x-t)e^{x-t}\Big|_0^1 + e^{x-t}\Big|_0^1 =$$

$$= -(x-1)e^{x-1} + xe^x + e^{x-1} - e^x = (x-1)e^x - (x-2)e^{x-1}.$$

Таким образом, решение поставленной задачи Коши имеет вид:

$$y(x) = \begin{cases} e^x(1-x) + 1 + (x-1)e^x = 1, & \textit{если } 0 \le x \le 1 \\ e^x(1-x) + (x-1)e^x - (x-2)e^{x-1} = (2-x)e^{x-1}, & \textit{если } x > 1 \end{cases}.$$

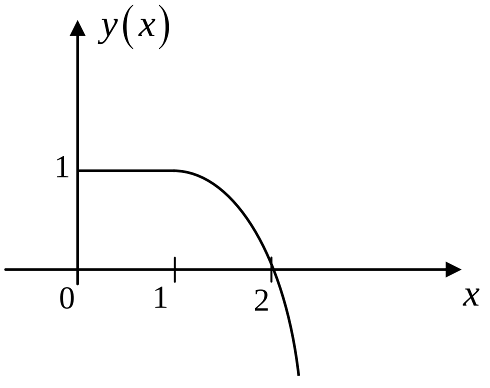


Рис. 4

Заметим, что $y(1-) = y(1+) = 1$, то есть найденное решение непрерывно в точке $x = 1$, где правая часть уравнения имеет разрыв первого рода. Легко убедиться в непрерывности и производной $y'(x)$ при $x = 1$. График решения представлен на рис. 4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для линейных дифференциальных уравнений n-го порядка *нормальная система фундаментальных функций с единичной матрицей в нуле* определяется аналогично (10.31):

$$\begin{array}{cccc} y_1(0)=1 & y_1'(0)=0 & \cdots & y_1^{(n-1)}(0)=0 \\ y_2(0)=0 & y_2'(0)=1 & \cdots & y_2^{(n-1)}(0)=0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n(0)=0 & y_n'(0)=0 & \cdots & y_n^{(n-1)}(0)=1. \end{array}$$

При этом для нахождения частного решения используется последняя из этих функций:

$$y_ч(x)=\int\limits_0^x f(t)\,y_n(x-t)\,dt\,.$$

Глава 11. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

11.1. Основные определения

Любое дифференциальное уравнение n-го порядка можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка, вводя новые переменные.

ПРИМЕР. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'''+x^2\,y''-2x\,y'+y=x^3+2x\,.$$

Пусть $z=y'$, $u=y''=z'$, тогда уравнение равносильно системе трех дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций y,z,u:

$$\begin{cases} y'=z \\ z'=u \\ u'+x^2\,u-2x\,z+y=x^3+2x\,. \end{cases}$$

Уравнение 2-го порядка $x''-3x'=x^2+t\sin t,\ x=x(t)$ можно свести к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x'=y \\ y'-3y=x^2+t\sin t\,. \end{cases}$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{dX}{dt} = F(X, t) \qquad (11.1)$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец неизвестных, $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец правых частей.

Система дифференциальных уравнений вида (11.1) называется *нормальной*: производные 1-го порядка стоят только в левых частях уравнений, правые части производных не содержат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Порядком системы* дифференциальных уравнений называется сумма порядков уравнений, входящих в систему.

Система дифференциальных уравнений (11.1) – система n-го порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Решением* системы (11.1) называется совокупность n функций $x_k = x_k(t)$, $k = 1, 2, ..., n$, подстановка которых в систему обращает каждое ее уравнение в тождество.

Если полагать, что $(x_1(t),\ x_2(t),\ ...,\ x_n(t))$ – координаты движущейся точки, то решение системы $X = X(t)$ – закон ее движения, а кривая, заданная параметрически $\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$ – траектория движения. Эту кривую также называют *интегральной кривой* системы (11.1).

Производная $\dfrac{dX}{dt}$ характеризует скорость движения. Если в системе (11.1) правая часть не зависит от t, то есть $\dfrac{dX}{dt} = F(X)$, то скорость не меняется с течением времени. Такое движение называется *установившимся*, а система – *автономной* или *стационарной.*

ТЕОРЕМА Коши. Пусть функции f_k и их производные $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}$, $k,\ j=1,2,...,n$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных $t, x_1,..., x_n$. Тогда для любой точки $M_0\left(t_0, x_{10},..., x_{n0}\right)\in D$ существует, причем единственное, решение системы (11.1), удовлетворяющее начальному условию

$$X\left(t_0\right)=X_0\text{, или }\begin{cases} x_1\left(t_0\right)=x_{10} \\ x_2\left(t_0\right)=x_{20} \\ \quad\vdots \\ x_n\left(t_0\right)=x_{n0}\ . \end{cases}$$

Без доказательства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Нормальная система дифференциальных уравнений называется *линейной*, если неизвестные функции и их производные входят в нее линейно.

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}\left(t\right)x_1+a_{12}\left(t\right)x_2+...+a_{1n}\left(t\right)x_n+f_1\left(t\right) \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}\left(t\right)x_1+a_{22}\left(t\right)x_2+...+a_{2n}\left(t\right)x_n+f_2\left(t\right) \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}\left(t\right)x_1+a_{n2}\left(t\right)x_2+...+a_{nn}\left(t\right)x_n+f_n\left(t\right) \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X+F\left(t\right), \qquad (11.2)$$

где
$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}\left(t\right) & \dots & a_{1n}\left(t\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\left(t\right) & \cdots & a_{nn}\left(t\right) \end{pmatrix},\quad F\left(t\right)=\begin{pmatrix} f_1\left(t\right) \\ \vdots \\ f_n\left(t\right) \end{pmatrix}.$$

Линейная система вида

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X \qquad (11.3)$$

называется *однородной*. Система (11.2), если ее правая часть $F\left(t\right)\neq 0$, *неоднородная.*

ТЕОРЕМА (*о линейной комбинации решений линейной однородной системы*).

Пусть $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$ и $X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$ – два решения линейной однородной системы (11.3). Тогда для любых постоянных C_1 и C_2 вектор-функция $X = C_1 X_1 + C_2 X_2$ – также решение системы (11.3).

Доказать самостоятельно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $X = X_1 + i X_2$ (i – мнимая единица) – решение системы (11.3), то $\operatorname{Re} X = X_1$ и $\operatorname{Im} X = X_2$ – также решения системы (11.3). Действительно, так как X – решение системы (11.3), то

$$\frac{dX}{dt} = AX \Rightarrow \frac{d\left(X_1 + i X_2\right)}{dt} = A\left(X_1 + i X_2\right) \Rightarrow \frac{dX_1}{dt} + i\frac{dX_2}{dt} = A X_1 + i A X_2 .$$

Отсюда по определению равенства комплексных чисел получаем: $\dfrac{dX_1}{dt} = A X_1$ и $\dfrac{dX_2}{dt} = A X_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Решения* $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$, …, $X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$ однородной системы (11.3) называются *линейно независимыми*, если определитель Вронского

$$W\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор-функция $X = X(t, C_1, ..., C_n)$ называется *общим решением* системы (11.1), если

1) при любых значениях постоянных $C_k,\ k = 1, 2, ..., n$ функция $X = X(t, C_1, ..., C_n)$ – решение (11.1);
2) какое бы начальное условие $X(t_0) = X_0$, удовлетворяющее условиям теоремы Коши, ни было задано, найдется единственный набор постоянных $C_k^0,\ k = 1, 2, ..., n$, такой что $X = X(t, C_1^0, ..., C_n^0)$ – решение, удовлетворяющее этому начальному условию.

ТЕОРЕМА *(о структуре общего решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений).* Пусть $X_1, ..., X_n$ – линейно независимые решения системы (11.3) с непрерывными коэффициентами $a_{lj}(t),\ l, j = 1,.., n.$ Тогда ее общее решение имеет вид: $X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + ... + C_n X_n$, где $C_k,\ k = 1, 2, ..., n$ – произвольные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о линейной комбинации решений вектор-функция $X = C_1 X_1 + ... + C_n X_n$ является решением системы (11.3).

Зададим начальное условие, удовлетворяющее условиям теоремы Коши

$$X(t_0) = X_0 \ \Rightarrow\ C_1 X_1(t_0) + ... + C_n X_n(t_0) = X_0 \ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 x_{11}(t_0) + ... + C_n x_{1n}(t_0) = x_{10} \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ C_1 x_{n\,1}(t_0) + ... + C_n x_{nn}(t_0) = x_{n0} \end{cases}$$ – система линейных уравнений, основной определитель которой $\Delta = W(X_1(t_0), ..., X_n(t_0)) \neq 0$, так по условию решения $X_1, ..., X_n$ линейно независимы. Значит, система имеет единственное решение $C_1^0, ..., C_n^0$, а $X = X(t, C_1^0, ..., C_n^0)$ – решение (11.3), удовлетворяющее поставленному начальному условию.

Что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА (*о структуре общего решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений*). Пусть $X_ч$ – некоторое частное решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений (11.2), а X_{00} – общее решение соответствующей однородной системы (11.3). Тогда общее решение системы (11.2) имеет вид: $X = X_{00} + X_ч$.

Доказать самостоятельно.

11.2. Решение систем линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейную однородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dX}{dt} = AX\ , \tag{11.4}$$

где $A = \left(a_{lj}\right),\ l, j = 1, 2, \ldots, n,\ a_{lj} = const$.

Будем искать решение (11.4) в виде $X = \Upsilon e^{kt}$, или $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} e^{kt}$, где $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ – некоторый постоянный вектор. Очевидно, $\dfrac{dX}{dt} = \Upsilon k\,e^{kt}$, поэтому после подстановки X в (11.4) получим:

$$\Upsilon k\,e^{kt} = A\Upsilon e^{kt} \;\Rightarrow\; A\Upsilon - \Upsilon k = 0 \;\Rightarrow \left(A - k\,E\right)\Upsilon = 0,$$

где E – единичная матрица n-го порядка. Запишем последнее равенство в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$:

$$\begin{cases} \left(a_{11} - k\right)\gamma_1 + a_{12}\,\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\,\gamma_n = 0 \\ a_{21}\,\gamma_1 + \left(a_{22} - k\right)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\,\gamma_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\,\gamma_1 + a_{n2}\,\gamma_2 + \ldots + \left(a_{nn} - k\right)\gamma_n = 0. \end{cases} \tag{11.5}$$

Как известно (см.гл.1), однородная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|A - k\,E\right| = 0\,. \tag{11.6}$$

Уравнение (11.6) называется *характеристическим уравнением* матрицы A. Оно является уравнением n-ой степени относительно k и потому имеет ровно n корней – действительных или комплексных.

Корни характеристического уравнения (11.6) называются *собственными значениями* матрицы A.

Решим (11.6) и найдем все собственные значения матрицы A.

Подставляя каждое из них в (11.5), будем получать систему линейных однородных уравнений с нулевым определителем. Любое нетривиальное решение этой системы $\Upsilon^j = \begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \gamma_{2j} \\ \vdots \\ \gamma_{nj} \end{pmatrix}$ называется *собственным вектором* матрицы A, соответствующим собственному значению $k = k_j$, $j = 1, 2, ..., n$.

Можно показать, что если уравнение (11.6) не имеет кратных корней, то существует n линейно независимых собственных векторов Υ^j, $j = 1, 2, ..., n$, то есть таких векторов, ни один из которых не выражается через другие с помощью линейной комбинации.

Найдя для каждого собственного значения матрицы A собственный вектор, получим n линейно независимых решений системы (11.4): $X_j = \Upsilon^j e^{k_j t}$, $j = 1, 2, ..., n$. Тогда по теореме о структуре общего решения линейной однородной системы общее решение запишется в виде $X = C_1 \Upsilon^1 e^{k_1 t} + ... + C_n \Upsilon^n e^{k_n t}$.

Решение системы (11.4) зависит от характера корней характеристического уравнения (11.6): они могут быть действительными или комплексными, простыми или кратными.

Рассмотрим на примерах всевозможные случаи.

1) Все корни (11.6) *действительны и различны*.

ПРИМЕР. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2' = -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 - x_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение (11.6) $|A - k E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-k & -2 & -1 \\ -1 & 1-k & 1 \\ 1 & 0 & -1-k \end{vmatrix} = (1-k)^2(-1-k) - 2 + 1 - k + 2 + 2k = 0 \quad \Rightarrow$$

$-k^3+k^2+2k=0 \;\Rightarrow\; k\left(k^2-k-2\right)=0 \;\Rightarrow\; k_1=0,\; k_2=2,\; k_3=-1$ – собственные значения матрицы A.

Найдем собственные векторы.

а) $k_1=0$. Подставим это значение в (11.5):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ – векторная запись системы (11.5),

или $\begin{cases} \gamma_{11}-2\gamma_{21}-\gamma_{31}=0 \\ -\gamma_{11}+\gamma_{21}+\gamma_{31}=0 \\ \gamma_{11}-\gamma_{31}=0 \end{cases}$ – система трех линейных уравнений с определителем $\Delta=0$. Заметим, что ранг основной матрицы этой системы равен 2, поэтому система имеет одну свободную переменную. Выберем любые два уравнения, зададим одну из переменных произвольно (например, $\gamma_{31}=1$) и найдем *частное* решение: $\gamma_{11}=1,\; \gamma_{21}=0 \Rightarrow \Upsilon^1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{0t}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как основной определитель Δ системы (11.5) равен нулю, то алгебраические дополнения элементов любой ее строки являются частными решениями: $\gamma_1=A_{i1},\; \gamma_2=A_{i2},\; \gamma_3=A_{i3},\; i=1,2,3$ (напомним, что $A_{ik}=\left(-1\right)^{i+k}M_{ik}$, где M_{ik} – дополнительный минор). Действительно, полагая, например, $i=1$, получим:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left(a_{11}-k\right)A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \\ a_{21}A_{11}+\left(a_{22}-k\right)A_{12}+a_{23}A_{13} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+\left(a_{33}-k\right)A_{13} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– по свойствам 7, 8 определителей (см. гл.1). Следовательно, $\gamma_1=A_{11},\; \gamma_2=A_{12}$, $\gamma_3=A_{13}$ – одно из частных решений системы (11.5).

Таким образом, чтобы найти частное решение системы (11.5), можно найти алгебраические дополнения к элементам любой, например, первой *строки ее основной матрицы*.

б) $k_2=2$. Подставим это значение в (11.5):

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\gamma_{12}-2\gamma_{22}-\gamma_{32}=0 \\ -\gamma_{12}-\gamma_{22}+\gamma_{32}=0 \\ \gamma_{12}-3\gamma_{32}=0 \end{cases} \Rightarrow \Delta=0,\; r_{A-2E}=2.$$

Найдем алгебраические дополнения к элементам первой строки матрицы системы: $A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}=3,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-2,\ A_{13}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1.$

Отсюда $\Upsilon^2=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow X_2=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 1\end{pmatrix}e^{2t}.$

в) $k=-1\ \Rightarrow\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_{13}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{cases}2\gamma_{13}-2\gamma_{23}-\gamma_{33}=0\\ -\gamma_{13}+2\gamma_{23}+\gamma_{33}=0\\ \gamma_{13}=0\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \Upsilon^3=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}\Rightarrow X_3=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}e^{-t}.$$

Таким образом, общее решение данной системы дифференциальных уравнений имеет вид: $X=C_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 1\end{pmatrix}e^{2t}+C_3\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}e^{-t}$, или $\begin{cases}x_1=C_1+3C_2\,e^{2t}\\ x_2=-2C_2\,e^{2t}+C_3\,e^{-t}\\ x_3=C_1+C_2\,e^{2t}-2C_3\,e^{-t}\end{cases}.$

ЗАМЕЧАНИЕ. При решении характеристического уравнения можно пользоваться формулой:

$$\begin{vmatrix}a_{11}-k & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k\end{vmatrix}=-k^3+I_2\,k^2-I_1\,k+I_0,$$

где $I_2=a_{11}+a_{22}+a_{33}$, $I_1=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ – сумма главных диагональных миноров, $I_0=\Delta A$.

2) Характеристическое уравнение (11.6) имеет *простые комплексные* корни.

ПРИМЕР. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}x_1'=3x_1+2x_2\\ x_2'=-x_1+x_2\end{cases}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение $|A-k\,E|=0$:

$$\begin{vmatrix} 3-k & 2 \\ -1 & 1-k \end{vmatrix} = k^2-4x+5=0 \Rightarrow k_{1,2}=2\pm i$$ – собственные значения матрицы A.

Так как найденные собственные значения комплексные, то решение данной системы также будет комплексным. Однако ранее было доказано, что и действительная часть X_1, и мнимая часть X_2 комплексного решения $X = X_1 + i\,X_2$ также являются решениями линейной однородной системы дифференциальных уравнений. Поэтому для того, чтобы получить в таком случае пару *действительных* линейно независимых решений, найдем решение X, соответствующее *одному* из собственных значений, и примем $X_1 = \operatorname{Re} X$, $X_2 = \operatorname{Im} X$.

Итак, $k = 2+i \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-i)\gamma_{11}+2\gamma_{21}=0 \\ -\gamma_{11}-(1+i)\gamma_{21}=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\gamma_{11} = A_{11} = -1-i,\ \gamma_{21} = A_{12} = 1 \Rightarrow \Upsilon = \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2+i)t}$ – комплексное решение, соответствующее собственному значению $k = 2+i$.

По формуле Эйлера $e^{(2+i)t} = e^{2t}(\cos t + i\,\sin t) \Rightarrow$

$$X = e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos t - i\,\sin t - i\,\cos t + \sin t \\ \cos t + i\,\sin t \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i\,e^{2t}\begin{pmatrix} -\sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} X = X_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},\ \operatorname{Im} X = X_2 = e^{2t}\begin{pmatrix} -\sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Общее решение имеет вид: $X = e^{2t}\left(C_1\begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -\sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right).$

3) Характеристическое уравнение (11.6) имеет *кратные действительные* корни.

ПРИМЕР. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение $|A-k\,E|=0$:

$$\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ -1 & 1-k \end{vmatrix} = k^2-4x+4=0 \Rightarrow k_{1,2}=2$$ – собственные значения матрицы A.

Найдем собственный вектор, соответствующий $k=2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{cases} \gamma_{11}+\gamma_{21}=0 \\ -\gamma_{11}-\gamma_{21}=0 \end{cases} \Rightarrow \Upsilon^1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t}$ – первое частное решение системы.

Так как второго собственного вектора, отличного от найденного Υ^1, матрица A не имеет, будем искать X_2 в таком виде: $X_2=\begin{pmatrix} a+bt \\ c+dt \end{pmatrix}e^{2t} \Rightarrow \begin{cases} x_1=(a+bt)e^{2t} \\ x_2=(c+dt)e^{2t} \end{cases}$.

Подставим эти функции в исходную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} be^{2t}+2(a+bt)e^{2t}=3(a+bt)e^{2t}+(c+dt)e^{2t} \\ de^{2t}+2(c+dt)e^{2t}=-(a+bt)e^{2t}+(c+dt)e^{2t} \end{cases}.$$

Сокращая на e^{2t} и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим:

$$\begin{array}{c|l} t & 2b=3b+d \\ & 2d=-b+d \\ t^0 & b+2a=3a+c \\ & d+2c=-a+c \end{array} \Rightarrow \begin{cases} b+d=0 \\ b+d=0 \\ a+c+d=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+d=0 \\ a+c+d=0 \\ a-b+c=0 \end{cases}. \qquad (11.7)$$

Нетрудно убедиться, что ранг основной матрицы полученной системы линейных уравнений равен 2, а так как число неизвестных 4, то система имеет две свободные переменные и два линейно независимых решения (см. гл.1). Пусть $b=1 \Rightarrow d=-1 \Rightarrow a+c=1$. Полагая $c=0$, получим, что $a=1$.

Итак, второе частное решение исходной системы дифференциальных уравнений имеет вид $X_2=\begin{pmatrix} 1+t \\ -t \end{pmatrix}e^{2t}$, а общее решение – $X=\left(C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 1+t \\ -t \end{pmatrix}\right)e^{2t}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в (11.7) задать $b=0$, то получим уже найденное решение $X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t}$. Поэтому в случае кратных собственных значений для системы дифференциальных уравнений *второго порядка* можно, не находя X_1, сразу искать решения в виде $X_{1,2}=\begin{pmatrix} a+bt \\ c+dt \end{pmatrix}e^{kt}$. Найдя два линейно независимых решения системы уравнений, аналогичной (11.7), получим X_1 и X_2.

Однако, если система линейных однородных дифференциальных уравнений имеет *порядок, больший двух*, кратным собственным значениям кратности r могут соответствовать r линейно независимых собственных векторов.

ПРИМЕР. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 + x_3 \\ x_3' = x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = -k^3 + 3k + 2 = 0.$$

Очевидно, что $k = -1$ – корень этого уравнения. Разделив $k^3 - 3k - 2$ на $k+1$, получим: $k^3 - 3k - 2 = (k+1)\left(k^2 - k - 2\right) = 0$. Откуда $k_{1,2} = -1, k_2 = 2$.

а) $k = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = 0,\ r_{A+E} = 1$. Так как ранг матрицы полученной системы равен 1, то она имеет две свободные переменные и два линейно независимых решения (см.гл.1), а потому существует два линейно независимых собственных вектора для собственного значения $k = -1$:

$$\gamma_{11} + \gamma_{21} + \gamma_{31} = 0 \Rightarrow \Upsilon^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \Upsilon^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t},\ X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

б) $k = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = 0, r_{A-2E} = 2 \Rightarrow A_{11} = A_{12} = A_{13} = 3$.

Так как все собственные векторы, соответствующие одному собственному значению, отличаются на постоянный множитель, то примем $\Upsilon^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Отсюда $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ и общее решение этой системы дифференциальных уравнений имеет вид: $X = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$

Таким образом, можно сделать следующий вывод: *если собственному значению* k *кратности* r *соответствует только* s *линейно независимых собственных векторов* $(s<r)$ *и, соответственно,* s *решений системы дифференциальных уравнений, то недостающие* $(r-s)$ *решений следует искать в виде векторного многочлена степени* $(r-s)$*, умноженного на* e^{kt}:

$$X=\left(A_0+A_1t+A_2t^2+\ldots+A_{r-s}t^{r-s}\right)e^{kt}.$$

Чтобы найти векторы $A_0,\ldots,A_{r-s}$, надо это решение подставить в исходную систему.

Глава 12. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

12.1. Понятие устойчивости по Ляпунову

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(X,t)\\ \vdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(X,t)\end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{dX}{dt}=F(X,t). \tag{12.1}$$

Пусть $X=\Phi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \vdots\\ \varphi_n(t)\end{pmatrix}$ – решение системы (12.1), соответствующее начальным условиям $\Phi(t_0)=\Phi_0$, или $\begin{pmatrix}\varphi_1(t_0)\\ \vdots\\ \varphi_n(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_{10}\\ \vdots\\ \varphi_{n0}\end{pmatrix}$.

Кроме того, $X=X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}$ – решение системы (12.1), соответствующее измененным начальным условиям $X(t_0)=X_0$, или $\begin{pmatrix}x_1(t_0)\\ \vdots\\ x_n(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{10}\\ \vdots\\ x_{n0}\end{pmatrix}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решение системы (12.1) $X=\Phi(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из совокупности неравенств $\left|x_i(t_0)-\varphi_i(t_0)\right|<\delta$ следуют неравенства $\left|x_i(t)-\varphi_i(t)\right|<\varepsilon \quad \forall t\ge t_0,\ i=1,2,...,n$.

Из определения следует, что если $X=\Phi(t)$ – устойчивое решение, то *всякое решение, достаточно близкое к нему в начальный момент* $t=t_0$, *остается близким к нему с ростом* t.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решение системы (12.1) $X=\Phi(t)$ называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову,* если существует $\delta>0$ такое, что из совокупности неравенств $\left|x_i(t_0)-\varphi_i(t_0)\right|<\delta$ следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|x_i(t)-\varphi_i(t)\right|=0$, $i=1,2,...,n$.

Из определения следует, что *всякое решение, достаточно близкое к* $X=\Phi(t)$ *в начальный момент* $t=t_0$, *неограниченно сближается с ним с ростом* t.

ПРИМЕР. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка $\dfrac{dx}{dt}=a\,x$, где $a\in\mathbb{R}$ – параметр. Очевидно, что это уравнение имеет тривиальное решение $x(t)=0$, удовлетворяющее при любом $t=t_0$ начальному условию $x(t_0)=0$.

Исследуем на устойчивость это решение. Для этого зададим другое начальное условие $x(t_0)=x_0$ и найдем решение, которое ему удовлетворяет.

$\displaystyle\int\frac{dx}{x}=a\int dt \;\Rightarrow\; \ln|x|=a\,t+C \;\Rightarrow\; x=C_1e^{at}$ – общее решение уравнения.

$x(t_0)=C_1e^{at_0}=x_0 \;\Rightarrow\; C_1=x_0e^{-at_0} \;\Rightarrow\; x(t)=x_0e^{a(t-t_0)}$ – искомое частное решение.

Отсюда $\left|x(t)-0\right|=\left|x_0\right|e^{a(t-t_0)}$.

1) Пусть $a>0 \Rightarrow e^{a(t-t_0)}\xrightarrow[t\to+\infty]{}\infty$, поэтому каким бы близким к нулю ни было значение x_0, $\left|x(t)\right|$ неограниченно возрастает, то есть найденное решение неограниченно удаляется от решения $x(t)=0$. А это по определению означает, что при $a>0$ нулевое решение свойством устойчивости не обладает, или является неустойчивым (рис.5).

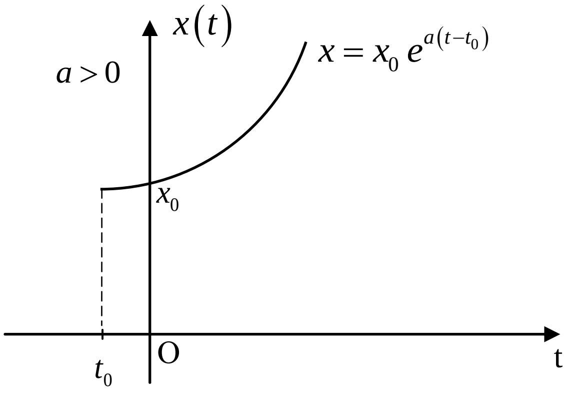


Рис. 5

2) Пусть $a \le 0 \Rightarrow e^{a(t-t_0)} \le 1$ при всех $t \ge t_0$, значит $\left|x(t)-0\right| = \left|x_0\right| e^{a(t-t_0)} \le \left|x_0\right|$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда при $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ получим, что если $\left|x_0 - 0\right| < \varepsilon$, то $\left|x(t)-0\right| \le \left|x_0\right| < \varepsilon$. Определение устойчивости выполнено, поэтому при $a \le 0$ нулевое решение устойчиво по Ляпунову (рис.6, 7).
Заметим, что если $a < 0$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{a(t-t_0)} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\left|x(t)-0\right| = 0$, то есть в этом случае нулевое решение асимптотически устойчиво (рис.7).

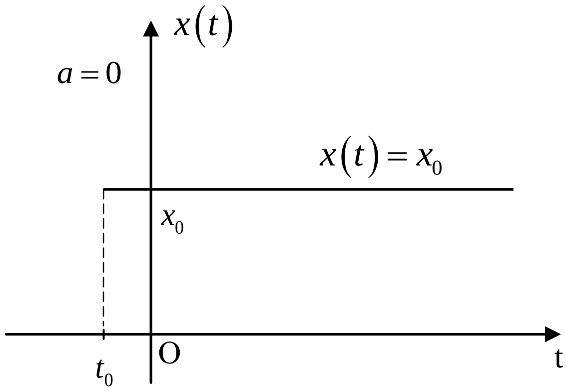


Рис. 6

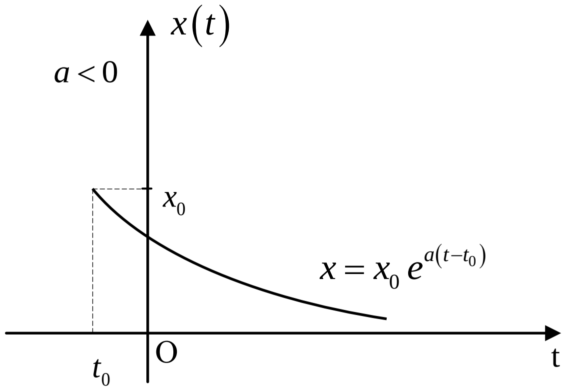


Рис. 7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решение системы (12.1) $X = \Phi(t)$ называется *асимптотически устойчивым в целом*, если $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|x_i(t) - \varphi_i(t)\right| = 0,$ где $x_i(t)$ – решение, определяемое *любыми* начальными условиями, а не только значениями, близкими к начальным значениям $\varphi_i(t_0)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Как было показано выше, при $a<0$ нулевое решение д.у. $\frac{dx}{dt}=ax$ асимптотически устойчиво в целом.

Рассмотрим систему уравнений (12.1). Каждому решению (12.1) соответствует интегральная кривая $X=\Phi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \vdots\\ \varphi_n(t)\end{pmatrix}$, или *траектория*. Если эта система имеет не зависящее от t решение $X=X_0=\begin{pmatrix}x_{10}\\ \vdots\\ x_{n0}\end{pmatrix}$, $X_0=const$, то соответствующая траектория будет точкой. Она называется *точкой покоя* системы (12.1), или ее *положением равновесия*. В частности, тривиальное решение $X=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ называется точкой *покоя* этой системы*, расположенной в начале координат* (она существует, лишь если $F(0,...,0,t)=0$).

Сформулируем определение устойчивой точки покоя, расположенной в начале координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тривиальное решение системы (12.1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из совокупности неравенств $|x_i(t_0)|<\delta$ следуют неравенства $|x_i(t)|<\varepsilon\ \forall t\ge t_0,\ i=1,...,n$.

Такому определению можно дать другую, эквивалентную формулировку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка покоя, расположенная в начале координат, называется устойчивой по Ляпунову, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из неравенства $|X(t_0)|^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t_0)<\delta^2$ следует, что

$$|X(t)|^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t)<\varepsilon^2\ \forall t\ge t_0.$$

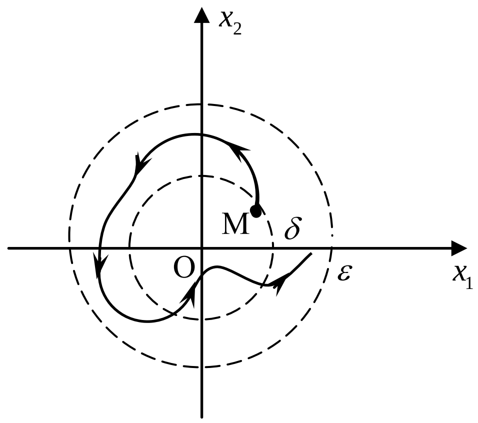


Рис. 8

Геометрически это означает, что если тривиальное решение устойчиво, то всякая траектория, определяемая начальной точкой $M\left(x_1(t_0), x_2(t_0)\right)$ и начинающаяся внутри круга (сферы) радиуса δ, не покидает при $t \geq t_0$ круга (сферы) радиуса ε (рис. 8) с центром в начале координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тривиальное решение системы (12.1) *называется асимптотически устойчивым*, если существует $\delta > 0$ такое, что из совокупности неравенств $\left|x_i(t_0)\right| < \delta$ следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|x_i(t)\right| = 0,\ i = 1,\dots,n$, или, другими словами, если из неравенства $\left|X(t_0)\right|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(t_0) < \delta^2$ следует, что

$$\lim_{t\to+\infty}\left|X(t)\right|^2 = \lim_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) = 0 .$$

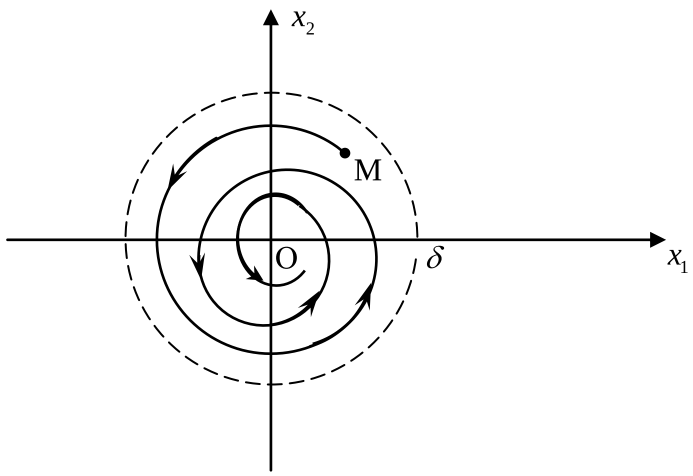


Рис. 9

Геометрическая иллюстрация этого определения – рис. 9: если тривиальное решение асимптотически устойчиво, то любая траектория, которая определяется начальной точкой $M\left(x_1(t_0), x_2(t_0)\right)$ в круге радиуса δ, не только не выйдет из этого круга, но и будет стремиться к его центру $O(0,0)$.

Оказывается, что исследование на устойчивость любого частного решения системы (12.1) можно заменить исследованием устойчивости тривиального решения некоторой другой системы. Покажем это.

Пусть $X = \Phi(t)$ – исследуемое решение. Введем новую переменную $Y(t) = X(t) - \Phi(t)$. Если решение $\Phi(t)$ устойчиво, то любое решение $X(t)$, близкое к нему в начальный момент $t=t_0$, остается близким к нему и при $t>t_0$. Отсюда следует, что если при $t=t_0$ $Y(t)$ близко к началу координат, то $Y(t)$ не удаляется от $O(0,0)$ и с ростом t.

Выясним, какой системе уравнений удовлетворяет функция $Y(t)$, если $\Phi(t)$ удовлетворяет (12.1):

$$X=Y+\Phi \Rightarrow \frac{dX}{dt}=\frac{dY}{dt}+\frac{d\Phi}{dt}=F(Y+\Phi,t) \Rightarrow$$

$$\frac{dY}{dt}=F-\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (12.2)$$

Система (12.2) имеет тривиальное решение $Y=0$. Если оно устойчиво, то устойчиво любое частное решение системы (12.1).

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\frac{dX}{dt}=AX+F \qquad (12.3)$$

и соответствующую ей однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt}=AX. \qquad (12.4)$$

Исследуем на устойчивость частное решение системы (12.3) $X=\Phi(t)$. Пусть $Y(t)=X(t)-\Phi(t) \Leftrightarrow y_i(t)=x_i(t)-\varphi_i(t),\ i=1,...,n$ – это отклонение точек на произвольной траектории $X=X(t)$ от соответствующих точек исследуемой траектории $X=\Phi(t)$. Такое отклонение называется *возмущением.*

$$X=Y+\Phi \Rightarrow \frac{dX}{dt}=\frac{dY}{dt}+\frac{d\Phi}{dt}=AY+A\Phi+F \Rightarrow \frac{dY}{dt}=AY,$$

так как $X=\Phi(t)$ удовлетворяет (12.3).

Таким образом, если решение $X=\Phi(t)$ неоднородной системы (12.3) устойчиво, то устойчиво и тривиальное решение соответствующей однородной системы (12.4) и наоборот: из устойчивости нулевого решения однородной системы (12.4) следует устойчивость решения $X=\Phi(t)$ неоднородной системы (12.3).

Итак, *все частные решения неоднородной системы (12.3) в смысле устойчивости ведут себя так же, как тривиальное решение соответствующей однородной системы (12.4). Поэтому исследование устойчивости произвольного решения системы (12.3) можно заменить исследованием устойчивости точки покоя, расположенной в начале координат, однородной системы (12.4).*

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость решения дифференциального уравнения $\dfrac{dx}{dt}+x e^{t}=0$.

Это линейное однородное уравнение, оно имеет тривиальное решение $x(t)=0$, которое удовлетворяет начальному условию $x(0)=0$.

Исследуем устойчивость этого решения. Изменим начальное условие: $x(0)=x_0$ – и найдем соответствующее ему решение.

$$\int\frac{dx}{x}=-\int e^{t}\,dt \Rightarrow x=Ce^{-e^{t}} \Rightarrow x(0)=C e^{-1}=x_0 \Rightarrow C=e x_0 \Rightarrow x(t)=x_0 e^{-e^{t}+1}.$$

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} x_0 e^{-e^{t}+1}=0 \quad \forall x_0\in\mathbb{R}$, то тривиальное решение асимптотически устойчиво в целом, а это означает, что асимптотически устойчивы в целом и все частные решения данного дифференциального уравнения.

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость решения системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'=-y \\ y'=x \end{cases}$.

Сведем систему к одному дифференциальному уравнению 2-го порядка: из второго уравнения получаем

$$x'=y'' \Rightarrow y''+y=0 \Rightarrow y=C_1\cos t+C_2\sin t.$$

Тогда $x=y'=-C_1\sin t+C_2\cos t$.

Итак, $\begin{cases} x=-C_1\sin t+C_2\cos t \\ y=C_1\cos t+C_2\sin t \end{cases}$ – общее решение системы.

Очевидно, что данная система имеет точку покоя, расположенную в начале координат. Такое решение удовлетворяет условию $x(0)=y(0)=0$. Чтобы исследовать его устойчивость, рассмотрим произвольное решение, определяемое начальным условием $\begin{cases} x(0)=x_0 \\ y(0)=y_0 \end{cases}$. Оно имеет вид $\begin{cases} x=-y_0\sin t+x_0\cos t \\ y=y_0\cos t+x_0\sin t \end{cases}$.

При достаточно малых значениях $|x_0|,|y_0|$ значения $|x(t)|,|y(t)|$ также будут достаточно малы, потому что $|\cos t|\le 1, |\sin t|\le 1$. А это означает, что тривиальное решение и вместе с ним все частные решения данной системы устойчивы, хотя асимптотической устойчивости нет.

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость решения дифференциального уравнения $x'' + 4x' + 5x = 0$.

Найдем общее решение: характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 4k + 5 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -2 \pm i \Rightarrow x(t) = e^{-2t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \ \forall C_1, C_2 .$$

Отсюда следует, что нулевое решение этого дифференциального уравнения $x(t) = 0$ асимптотически устойчиво в целом, а это значит, что асимптотически устойчивы в целом не только все частные решения данного однородного дифференциального уравнения, но и все частные решения неоднородного уравнения $x'' + 4x' + 5x = f(t)$.

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость решения дифференциального уравнения $x''' - x' = 0$.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^3 - k = 0 \Rightarrow \quad k_1 = 0, \quad k_{2,3} = \pm 1 .$$

Отсюда $x_1 = 1, x_2 = e^t, x_3 = e^{-t}$ – ф.с.р.. Зададим следующее начальное условие: $x(0) = x'(0) = x''(0) = \varepsilon \Rightarrow x(t) = \varepsilon e^t$ – соответствующее частное решение. При достаточно малом значении $|\varepsilon|$ $|x(t)| = |\varepsilon|\, e^t \xrightarrow[t \to +\infty]{}$, то есть траектория, начинаясь вблизи начала координат, с ростом t неограниченно от него удаляется. По определению это означает, что тривиальное решение $x(t) = 0$ устойчивым не является, значит, неустойчивы и все частные решения данного дифференциального уравнения, а также неоднородного уравнения $x''' - x' = f(t)$.

Из рассмотренных примеров можно заключить, что для линейных уравнений и систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами устойчивость или неустойчивость их решений зависит от вида корней соответствующих характеристических уравнений. Исследуем этот вопрос подробно.

12.2. Условия устойчивости для систем линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \end{cases}. \tag{12.5}$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0 \tag{12.6}$$

является квадратным уравнением и имеет два корня, которые могут быть действительными – различными или совпадающими – комплексными.

Рассмотрим всевозможные случаи.

1. $k_{1,2} \in \mathbf{R},\ \ k_1 \neq k_2,\, k_1 < 0,\, k_2 < 0.$

Так как собственные значения различны, то им соответствуют два различных собственных вектора $\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix}$ и общее решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} e^{k_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} e^{k_2 t}.$$

Исследуем на устойчивость тривиальное решение, то есть точку покоя, расположенную в начале координат.

Пусть $C_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_2\,\gamma_{12}\,e^{k_2 t} \\ x_2 = C_2\,\gamma_{22}\,e^{k_2 t} \end{cases}$. Эти равенства могут трактоваться как параметрические уравнения соответствующей траектории. Разделив первое из них на второе, получим $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} \Rightarrow \gamma_{22}\,x_1 - \gamma_{12}\,x_2 = 0$, то есть данная траектория является прямой линией.

Аналогично, полагая $C_2 = 0$, получим: $\begin{cases} x_1 = C_1\,\gamma_{11}\,e^{k_1 t} \\ x_2 = C_1\,\gamma_{21}\,e^{k_1 t} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\gamma_{11}}{\gamma_{21}} \Rightarrow$

$\gamma_{21}\,x_1 - \gamma_{11}\,x_2 = 0$. Значит, и эта траектория – прямая. Заметим, что в обоих случаях $x_1, x_2 \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Рассмотрим теперь всевозможные варианты, когда $C_1 \neq 0,\, C_2 \neq 0$.

Будем считать, что $k_1 < k_2$. Тогда $\dfrac{e^{k_1 t}}{e^{k_2 t}} = e^{(k_1 - k_2)t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, следовательно,

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{C_1\gamma_{11}e^{k_1t}+C_2\gamma_{12}e^{k_2t}}{C_1\gamma_{21}e^{k_1t}+C_2\gamma_{22}e^{k_2t}}=\frac{C_1\gamma_{11}e^{(k_1-k_2)t}+C_2\gamma_{12}}{C_1\gamma_{21}e^{(k_1-k_2)t}+C_2\gamma_{22}}\xrightarrow[t\to+\infty]{}\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}}.$$

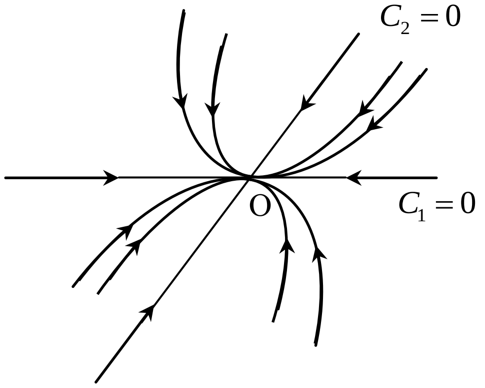


Рис. 10

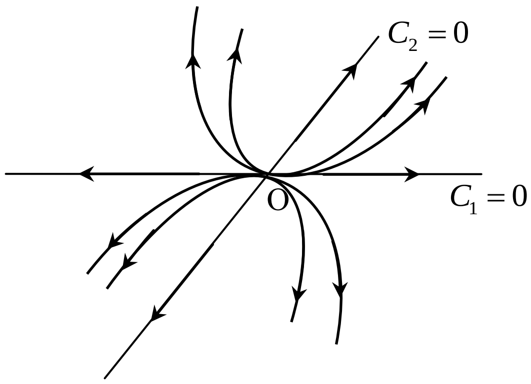


Рис. 11

Это означает, что все траектории, кроме той, что определяется значением $C_2=0$, имеют общую касательную и с ростом t неограниченно приближаются к началу координат, так как и в этом случае $x_1,x_2\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ (рис. 10).

Таким образом, точка покоя такого типа асимптотически устойчива в целом. Она называется *устойчивым узлом*.

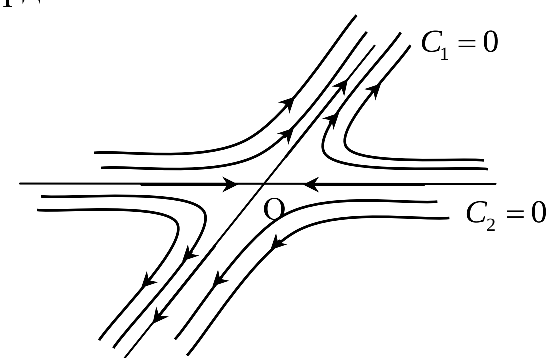
2. $k_{1,2}\in\mathbf{R},\ k_1\neq k_2,\ k_1>0,\ k_2>0.$

Анализ траекторий в этом случае аналогичен предыдущему. Точка покоя неустойчива. Она называется *неустойчивым узлом* (рис. 11).

3. $k_{1,2}\in\mathbf{R},\ k_1\neq k_2,\ k_1<0,\ k_2>0.$

Так как общее решение системы в этом случае имеет вид $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}\gamma_{11}\\\gamma_{21}\end{pmatrix}e^{k_1t}+C_2\begin{pmatrix}\gamma_{12}\\\gamma_{22}\end{pmatrix}e^{k_2t}$, то при $t\to+\infty$ точки на всех траекториях (кроме той, которая соответствует $C_2=0$) удаляются от точки покоя $O(0,0)$.

Если $C_2=0$, то аналогично п.1 имеем $\begin{cases}x_1=C_1\gamma_{11}e^{k_1t}\\x_2=C_1\gamma_{21}e^{k_1t}\end{cases}\Rightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{21}}$, то есть траекторией является прямая линия, вдоль которой точки приближаются к началу координат.



Если $C_1=0$, то $\frac{x_1}{x_2}=\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}}$ – прямая, вдоль которой точки удаляются от

точки покоя (рис. 12).
Точка покоя такого типа неустойчива, она называется *седлом.*

4. $k_{1,2} = \pm \beta i$ – корни характеристического уравнения (12.6) чисто мнимые.

Общее решение системы в этом случае имеет вид (см.гл.11):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \\ \overline{C_1} \cos \beta t + \overline{C_2} \sin \beta t \end{pmatrix},$$

где $\overline{C_1}, \overline{C_2}$ – некоторые линейные комбинации произвольных постоянных C_1, C_2.

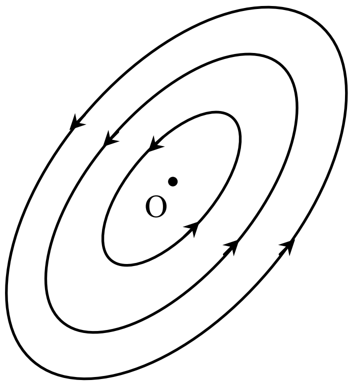


Рис. 13

Так как x_1, x_2 задаются периодическими функциями, то траектории – замкнутые линии (рис. 13). Можно показать, что это эллипсы с центром в начале координат.
В этом случае точка покоя устойчива, но не асимптотически. Она называется *центром.*

5. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \operatorname{Re} k_{1,2} = \alpha < 0$.

Решение в этом случае имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \\ \overline{C_1} \cos \beta t + \overline{C_2} \sin \beta t \end{pmatrix}.$$

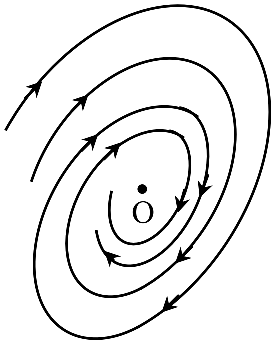


Рис. 14

Если t изменится на величину периода $T_0 = \dfrac{2\pi}{\beta}$, то точка на траектории вернется не в прежнее положение, а станет ближе к точке покоя, так как $\alpha < 0$ и $e^{\alpha t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, то есть движение будет происходить по спиралям (рис.14).

Такая точка покоя асимптотически устойчива в целом и называется *устойчивым фокусом*.

6. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \operatorname{Re} k_{1,2} = \alpha > 0$.

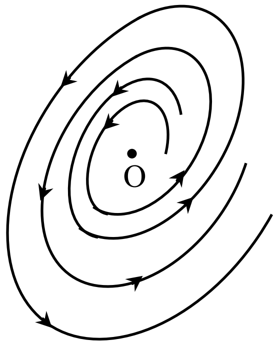


Рис. 15

Движение будет происходить также по спиралям, но в обратную сторону (рис.15). Точка покоя в этом случае называется *неустойчивым фокусом*.

7. $k_{1,2} \in \mathbf{R}, k_1 = k_2,\ k_{1,2} < 0.$

В этом случае решение системы имеет вид (см.гл.11):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} e^{kt},\ k = k_1 = k_2 .$$

Для системы второго порядка $b^2 + d^2 \neq 0$, поэтому

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{(a + bt)e^{kt}}{(c + dt)e^{kt}} = \frac{a + bt}{c + dt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{b}{d},$$

а $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{b}{d}$ – прямая линия, значит, что все траектории имеют касательную $d\,x_1 - b\,x_2 = 0$.

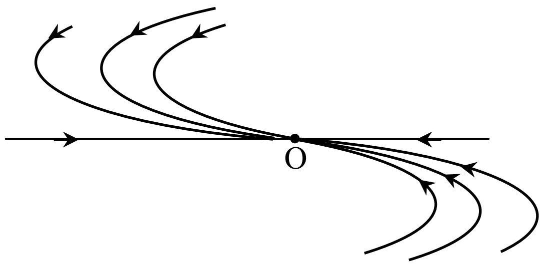


Рис. 16

Если $a = c = 0$, то $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{bte^{kt}}{dte^{kt}} = \dfrac{b}{d}$ и касательная $d\,x_1 - b\,x_2 = 0$ сама является траекторией (рис. 16). Заметим, что так как $k < 0$, то с ростом t точки всех траекторий стремятся к началу координат.

Точка покоя такого типа называется *вырожденным устойчивым узлом.*

8. $k_{1,2} \in \mathbf{R},\ k_1 = k_2,\ k_{1,2} > 0.$

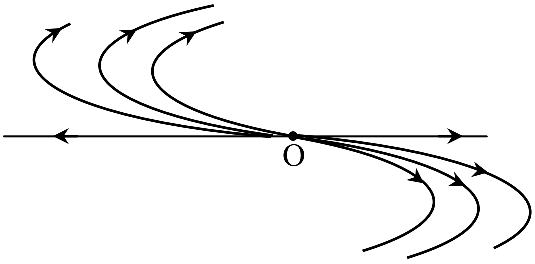


Рис. 17

В этом случае точка покоя является *неустойчивым вырожденным узлом* (рис.17).

9. $k_1 = 0,\ k_2 < 0$.

Общее решение системы имеет вид: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} e^{k_2 t}$.

Если $C_2 = 0,$ то $\begin{cases} x_1 = C_1 \gamma_{11} \\ x_2 = C_1 \gamma_{21} \end{cases}$ – точки покоя, расположенные на прямой $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\gamma_{11}}{\gamma_{21}}$.

Если $C_2 \neq 0,$ то $\dfrac{x_1 - C_1 \gamma_{11}}{x_2 - C_1 \gamma_{21}} = \dfrac{C_2 \gamma_{12} e^{k_2 t}}{C_2 \gamma_{22} e^{k_2 t}} = \dfrac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}}$, или $x_1 - C_1 \gamma_{11} = \dfrac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} \left(x_2 - C_1 \gamma_{21} \right)$,

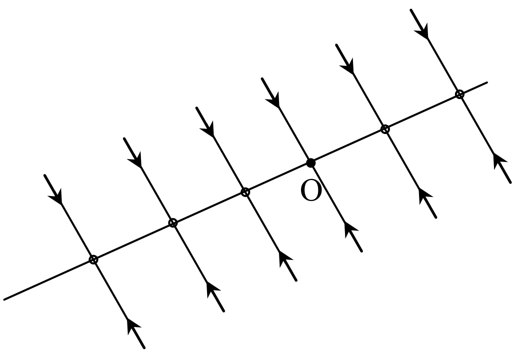


Рис. 18

то есть траекториями являются прямые линии, параллельные прямым $x_1 = \dfrac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} x_2$ (рис. 18). С ростом t точки на этих траекториях приближаются к точкам на прямой $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\gamma_{11}}{\gamma_{21}}$, потому что $e^{k_2 t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

В этом случае точка покоя устойчива, но не асимптотически.

10. $k_1 = 0,\ k_2 > 0$.

Точка покоя такого типа неустойчива вследствие того, что $e^{k_2 t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \infty$.

11. $k_1 = k_2 = 0$.

Общее решение имеет вид $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b\,t \\ c + d\,t \end{pmatrix}$ и точка покоя неустойчива.

Вывод. Для системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами справедливо следующее:

1. *если у всех корней характеристического уравнения (12.6)* $\operatorname{Re} k_i < 0$, *то тривиальное решение системы асимптотически устойчиво в целом, откуда следует, что все частные решение также асимптотически устойчивы в целом;*
2. *если хотя бы один корень имеет* $\operatorname{Re} k_i > 0$, *то тривиальное решение неустойчиво;*
3. *если среди корней есть простые корни с* $\operatorname{Re} k_i = 0$, *а остальные корни имеют* $\operatorname{Re} k_i < 0$, *то тривиальное решение устойчиво, но не асимптотически;*
4. *если среди корней есть кратные корни с* $\operatorname{Re} k_i = 0$, *то решение практически всегда неустойчиво;*
5. *вышесказанное справедливо не только для систем дифференциальных уравнений, но и для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* n*-го порядка.*

12.3. Признаки отрицательности действительных частей корней многочлена

Рассмотрим многочлен n-ой степени с действительными коэффициентами

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n, \qquad (12.7)$$

$a_0 > 0,\ \ a_i \in \mathbb{R},\ \ i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

ТЕОРЕМА (*необходимое условие отрицательности действительных частей корней многочлена*). Для того чтобы действительные части всех корней многочлена с действительными коэффициентами были отрицательны, необходимо, чтобы все коэффициенты многочлена были одного знака.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многочлен (12.7) и будем считать, что $a_0 > 0$. Данный многочлен имеет ровно n корней, действительных или комплексных, а так как все его коэффициенты действительны, то комплексные корни встречаются комплексно сопряженными парами, то есть корни (12.7) имеют вид: $z = a,\ a < 0$ или $z = \alpha \pm \beta i,\ \ \alpha < 0$.

При разложении (12.7) на множители корню $z = a$ соответствует множитель вида $(z - a)$, коэффициенты которого положительны.

Паре комплексно сопряженных корней соответствуют два множителя $\big(z - (\alpha + \beta i)\big)\big(z - (\alpha - \beta i)\big) = z^2 - 2\alpha + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)$. Так как по условию $\alpha < 0$, то и здесь все коэффициенты положительны.

Таким образом, при разложении $P_n(z)$ на множители получим произведение линейных и квадратичных сомножителей с положительными коэффициентами. Следовательно, после раскрытия скобок все коэффициенты многочлена будут положительными. Кроме того, так как $\alpha \neq 0$, многочлен $P_n(z)$ будет содержать все степени z от n-ой до нулевой, то есть среди его коэффициентов нулевых тоже не будет. Что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сформулированное необходимое условие *не является достаточным* для всех многочленов *старше* второй степени. *Для квадратного трехчлена положительность всех его коэффициентов – необходимое и достаточное условие того, что* $\operatorname{Re} k_{1,2} < 0$. Это очевидным образом следует из теоремы Виета.

ПРИМЕР. Нетрудно проверить, что корнями многочлена третьей степени $P_3(z) = z^3 + z^2 + 4z + 30$ являются числа $z_1 = -3,\ z_{2,3} = 1 \pm 3i,\ \operatorname{Re} z_{2,3} = 1 > 0$, хотя все его коэффициенты положительны.

Сформулируем (без доказательства) две теоремы, которые дают необходимые и достаточные условия отрицательности действительных частей корней многочлена. Такие теоремы называются *критериями*.

ТЕОРЕМА (*Критерий Рауса-Гурвица*). Необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей всех корней многочлена (12.7) является положительность всех главных диагональных миноров матрицы Рауса-Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}. \tag{12.8}$$

Матрица Гурвица устроена следующим образом: на ее главной диагонали стоят все коэффициенты многочлена, начиная с a_1, в столбцах стоят коэффициенты с номерами соответствующей четности, именно: в первом – нечетные, во втором – четные и т.д. Когда нужные коэффициенты заканчиваются, оставшиеся места в столбце заполняются нулями. Таким образом, в последней строке матрицы Рауса-Гурвица только один ненулевой элемент a_n.

Главными диагональными минорами матрицы Γ являются

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots, \quad \Delta_n = \Delta\Gamma .$$

Критерий Рауса-Гурвица не очень удобен для исследования корней многочлена достаточно высокой степени, так как требует вычисления, как минимум, $(n-2)$ главных диагональных миноров матрицы n-го порядка (без первого и последнего, знак которых очевиден). Более удобным является эквивалентный ему критерий Льенара-Шипара.

ТЕОРЕМА (*критерий Льенара-Шипара*). Для того чтобы действительные части всех корней многочлена (12.7) были отрицательны, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0, \ldots$, где $\Delta_k,\ k = n-1, n-3, \ldots$ – главные диагональные миноры матрицы Гурвица k-го порядка.

ПРИМЕР. Проверить, являются ли отрицательными действительные части корней многочлена $z^6 - 2z^5 + 3z^4 + 10z^3 + 7z + 9 = 0$.

У этого многочлена $a_0 = 1,\ a_1 = -2 < 0,\ a_2 = 3,\ a_3 = 10,\ a_4 = 0,\ a_5 = 7,\ a_6 = 9$. Необходимое условие отрицательности действительных частей корней не выполнено, значит, среди корней есть такие, у которых $\operatorname{Re} k_i > 0$.

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость решения дифференциального уравнения

$$\text{а) } x''' + 2x'' + 3x' + 10x = f(t); \qquad \text{б) } x^{IV} + x''' + 6x'' + 2x' + x = f(t).$$

а) Все решения неоднородного линейного дифференциального уравнения в смысле устойчивости ведут себя, как нулевое решение соответствующего однородного уравнения $x''' + 2x'' + 3x' + 10x = 0$. Его характеристическое уравнение имеет вид: $k^3 + 2k^2 + 3k + 10 = 0$.

Необходимое условие отрицательности действительных частей корней этого многочлена выполнено, поэтому составим матрицу Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 10 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

По критерию Льенара-Шипара вычислим главный диагональный минор второго порядка ($n=3$): $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = -4 < 0$. Значит, среди корней есть числа с положительной действительной частью, а потому нулевое решение однородного дифференциального уравнения неустойчиво, что, в свою очередь, означает неустойчивость всех решений исходного неоднородного уравнения.

б) Рассуждая аналогично, составим характеристическое уравнение соответствующего однородного дифференциального уравнения:

$$k^4 + k^3 + 6k^2 + 2k + 1 = 0.$$

Матрица Гурвица для этого многочлена – матрица четвертого порядка:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0,\ \Delta_1 = 1 > 0.$$

Следовательно, по критерию Льенара-Шипара все $\operatorname{Re} k_i < 0$, поэтому все частные решения исследуемого дифференциального уравнения асимптотически устойчивы.

12.4. Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1,\dots,x_n). \end{cases} \tag{12.9}$$

Будем полагать, что (12.9) имеет тривиальное решение, то есть $f_i(0,\dots,0) = 0\ \forall i = 1,\dots,n$, и все функции $f_i(x_1,\dots,x_n)$ дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат.

В этой окрестности по определению дифференцируемой функции нескольких переменных (см.гл.6)

$$\Delta f_i = f_i(x_1,\dots,x_n) - f_i(0,\dots,0) = f_i(x_1,\dots,x_n) =$$

$$=\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(0,...,0)x_1+...+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(0,...,0)x_n+\alpha_{1i}(x_1,...,x_n)x_1+...+\alpha_{ni}(x_1,...,x_n)x_n,$$

где $\lim\limits_{\sum_{k=1}^{n}x_k^2\to 0}\alpha_{ji}(x_1,...,x_n)=0\quad \forall i,\ j=1,...,n$.

Поэтому вблизи начала координат слагаемые $\alpha_{ji}(x_1,...,x_n)x_j$ имеют более высокий порядок малости, чем линейные слагаемые $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,...,0)x_j \quad i,j=1,...,n$.

В некоторых случаях при исследовании устойчивости тривиального решения системы (12.9) нелинейными слагаемыми правой части можно пренебречь, считая, что $f_i(x_1,...,x_n)\approx\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,...,0)x_j$.

Тогда систему дифференциальных уравнений (12.9) можно заменить на близкую ей *при достаточно малых* $x_1,...,x_n$ систему

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,...,0)x_1+...+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(0,...,0)x_n\\ \vdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(0,...,0)x_1+...+\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(0,...,0)x_n\ .\end{cases}$$

Обозначим $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,...,0)=a_{ij}$ и вместо системы (12.9) рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+...+a_{nn}x_n\ .\end{cases}\tag{12.10}$$

Линейная однородная система (12.10) называется *системой первого приближения системы* (12.9).

Замена исследования устойчивости тривиального решения системы (12.9) исследованием устойчивости тривиального решения системы (12.10) называется *исследованием устойчивости* решения системы (12.9) *по первому приближению.*

При составлении системы первого приближения можно пользоваться тем, что в окрестности нуля (при $t\to 0$) следующие величины эквивалентны (см.гл.4):

$$\boxed{\begin{array}{llll} \sin t \sim t & \operatorname{tg} t \sim t & e^t - 1 \sim t & \sqrt[m]{1+t} - 1 \sim \dfrac{t}{m} \\ \arcsin t \sim t & \operatorname{arctg} t \sim t & \ln(1+t) \sim t & \end{array}}. \qquad (12.11)$$

ПРИМЕР. Исследовать устойчивость нулевого решения системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = x + e^{2y} - \cos y - x^2 y \\ y' = 3x - y - \sin 3y + x\,y \end{cases}$.

Исследуем по первому приближению устойчивость решения $x = 0, y = 0$ этой системы

При x, y *достаточно близких к нулю* слагаемые $x\,y$ и $x^2 y$ имеют более высокий порядок малости, чем x и y, поэтому ими можно пренебречь при составлении системы первого приближения. Кроме того, в соответствии с (12.11) в окрестности нуля $\sin 3y \sim 3y$,

$$e^{2y} - \cos y = \left(e^{2y} - 1\right) + \left(1 - \cos y\right) = \left(e^{2y} - 1\right) + 2\sin^2 \frac{y}{2} \sim 2y + \frac{2y^2}{4} \sim 2y.$$

Таким образом, система первого приближения имеет вид: $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x - 4y \end{cases}$.

Составим ее характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 3 & -4-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$k^2 + 3k - 10 = 0$. Один из корней этого уравнения положительный, значит, тривиальное решение обеих систем неустойчиво.

ПРИМЕР. Исследовать устойчивость нулевого решения системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = tg\left(z - y\right) - 2x \\ y' = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y \\ z' = -3y \end{cases}$.

В соответствии с (12.11)

$$\sqrt{9 + 12x} - 3e^y = \left(3\sqrt{1 + \frac{4}{3}x} - 3\right) + \left(3 - 3e^y\right) \sim 3\left(\frac{4}{3 \cdot 2}x - y\right) = 2x - 3y,$$

отсюда система первого приближения имеет вид:

$$\begin{cases} x' = -2x - y + z \\ y' = 2x - 3y \\ z' = -3y \end{cases}.$$

Характеристическое уравнение этой системы:

$$\begin{vmatrix} -2-k & -1 & 1 \\ 2 & -3-k & 0 \\ 0 & -3 & -k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -k^3 - 5k^2 - 8k - 6 = 0.$$

Применим к многочлену $P_3(k) = k^3 + 5k^2 + 8k + 6$ критерий Льенара-Шипара: $\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} > 0$. Следовательно, $\operatorname{Re} k_{1,2,3} < 0$, поэтому нулевое решение системы первого приближения, а также и исходной системы асимптотически устойчиво.

Исследование устойчивости решения системы (12.9) по первому приближению возможно, если

1. *все собственные значения* системы первого приближения (12.10) *имеют отрицательные действительные части*. В этом случае тривиальное решение системы (12.10) асимптотически устойчиво, откуда следует асимптотическая устойчивость тривиального решения исходной системы (12.9);
2. *среди собственных значений системы* (12.10) *есть хотя бы одно с положительной действительной частью*. В этом случае тривиальное решение (12.10) неустойчиво, поэтому неустойчиво и тривиальное решение исходной системы (12.9).

Если окажется, что среди собственных значений есть такие, что $\operatorname{Re} k_i = 0$, а остальные собственные значения, если они есть, имеют $\operatorname{Re} k_i < 0$, то на устойчивость нулевого решения начинают влиять нелинейные слагаемые, которые отбрасываются при составлении системы первого приближения.

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -2y - x^3 \\ y' = 3x - y^3 \end{cases}$.

Составим систему первого приближения, отбросив нелинейные слагаемые: $\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 3x \end{cases}$. Характеристическое уравнение $k^2 + 6 = 0$ имеет чисто мнимые корни $k_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$, поэтому для системы первого приближения точка покоя –

центр, она устойчива, но не асимптотически. Траекториями являются замкнутые линии (эллипсы) (рис.19).

Но так как в исходной системе есть нелинейные слагаемые, то в результате их влияния траектории перестанут быть замкнутыми, однако как именно они себя поведут, исследуя систему первого приближения, узнать нельзя (рис.20).

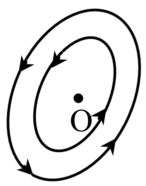


Рис.19

Рис. 20

Поэт ком случае метод исследования ус ти решения по первому приолижению неприменим, и надо воспользоьатьсл оолее общим, но гораздо более сложным *методом функций Ляпунова.*

12.5. Метод функций Ляпунова

Метод функций Ляпунова позволяет исследовать устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с помощью специально построенных функций, так называемых функций Ляпунова, не находя самих решений системы.

Обсудим *идею* метода.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (12.1):

$$\frac{dX}{dt} = F(X,t) \Leftrightarrow \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,...,x_n,t), \quad i = 1,...,n.$$

Пусть эта система имеет тривиальное решение, то есть $F(0,...,0,t) = 0$. Как было показано ранее, все решения системы в смысле устойчивости ведут себя так же, как тривиальное решение.

Пусть $x_i = x_i(t),\ i = 1,...,n$ – некоторое решение (12.1), которое определяет соответствующую ему траекторию. $\rho(X,t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)}$ – расстояние от точек на этой траектории до начала координат. Найдем его полную производную по времени (см.гл.6 и рис. 21):

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial x_i} f_i(X,t).$$

Заметим, что даже если сама траектория неизвестна, найденная производная – известная функция.

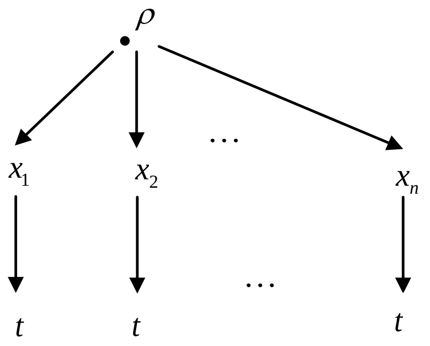


Рис. 21

Если $\frac{d\rho}{dt} \le 0$, то расстояние от точек

на траектории до начала координат не увеличивается, то есть все траектории, определяемые частными решениями, близкими к $O(0,...,0)$в начальный момент, остаются близкими к началу координат и с ростом t. Это по определению означает, что тривиальное решение устойчиво.

Если $\frac{d\rho}{dt} > 0$, то расстояние с ростом t увеличивается, следовательно, нулевое решение неустойчиво.

Функция $\rho(X,t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)}$ в этих рассуждениях может быть заменена на более удобную в вычислениях функцию $\rho^2(X,t) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)$.

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -y - t\,x^3 \\ y' = x - t\,y^3 \end{cases}$.

Пусть $\rho^2 = x^2 + y^2$. Найдем производную этой функции вдоль траекторий системы:

$$\frac{d(\rho^2)}{dt} = \frac{\partial\rho^2}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho^2}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(-y - t\,x^3) + 2y(x - t\,y^3) = -2t\,x^4 - 2t\,y^4 \le 0 \quad \forall t \ge 0.$$

Таким образом, $\rho^2 = x^2 + y^2$ – невозрастающая функция, то есть точки на произвольной траектории не удаляются от начала координат, поэтому тривиальное решение системы устойчиво, а, значит, устойчивы все решения этой системы.

Отметим, что из неравенства $\frac{d(\rho^2)}{dt} \le 0$ следует, что ρ^2 – монотонная функция. Но точка покоя может быть устойчивой и при немонотонном приближении к ней траекторий, соответствующих произвольным решениям (центр или устойчивый фокус (рис. 13, 14)). Поэтому в качестве функций, с помощью которых исследуется устойчивость, Ляпунов рассмотрел функции, некоторые свойства которых схожи со свойствами расстояния, но сами они расстояниями не являются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Производной* функции $V = V(X,t)$ *в силу системы* (12.1) называется полная производная $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(X,t)$.

Рассмотрим автономную систему

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \Leftrightarrow \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,...,x_n), \quad i = 1,...,n. \tag{12.12}$$

Будем считать, что для такой системы функция V не зависит от времени и ее производная в силу системы (12.12) имеет вид: $\dfrac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $V = V(x_1,...,x_n)$ называется *положительно* (*отрицательно*) *определенной* в некоторой h-окрестности начала координат, если всюду в этой окрестности $V(x_1,...,x_n) \geq 0$ $\big(V(x_1,...,x_n) \leq 0\big)$ и только $V(0,...,0) = 0$. Положительно или отрицательно определенные функции называются *знакоопределенными*.

Напомним, что h-окрестностью начала координат называется множество точек, определяемое неравенством $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < h^2$. Если $n = 2$, то это круг радиуса h с центром в начале координат, если $n = 3$ – то шар радиуса h.

ПРИМЕРЫ. а) $V_1 = x^2 + y^2 > 0$ всюду, кроме начала координат, а $V_1(0,0) = 0$. Отсюда $V_1(x,y)$ – положительно определенная функция.

б) $V_2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 = \left(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2\right) + x_2^2 + x_3^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$,

причем $V_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$. Значит, по определению $V_2(x_1,x_2,x_3)$ – положительно определенная функция.

в) $V_3 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2\right) + x_3^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 + x_3^2 \geq 0$.

Но $V_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$, поэтому $V_3(x_1,x_2,x_3)$ положительно определенной функцией не является: она равна нулю не только в начале координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $V = V(x_1,...,x_n)$ называется *неотрицательной (неположительной)* в некоторой h-окрестности начала координат, если всюду в этой окрестности $V(x_1,...,x_n) \ge 0$ $\left(V(x_1,...,x_n) \le 0\right)$, причем $V(x_1,...,x_n) = 0$ не только при $x_i = 0,\ \ i = 1,...,n$. Неотрицательные или неположительные функции называются *знакопостоянными*.

ПРИМЕР. Функция $V_3 = x_1^2 + 2x_1\,x_2 + x_2^2 + x_3^2$ является по определению неотрицательной.

ПРИМЕР. $V_4 = x^4 - y^4 > 0 \Leftrightarrow x^4 > y^4 \Leftrightarrow |x| > |y|$, $V_4 = x^4 - y^4 < 0 \Leftrightarrow |x| < |y|$.

По определению функция $V_4(x, y)$ не является ни знакоопределенной, ни знакопостоянной.

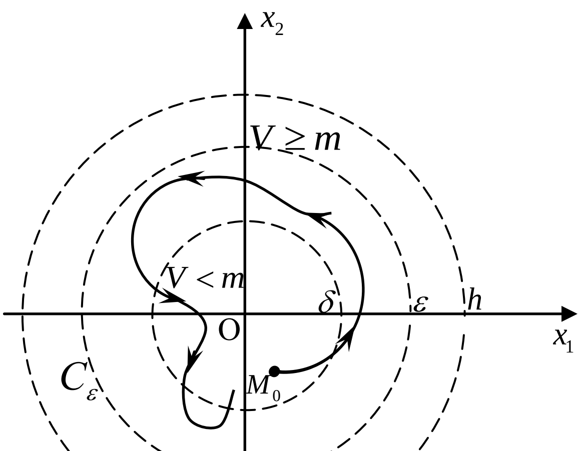
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $V = V(x_1,...,x_n)$ называется функцией Ляпунова автономной системы (12.12), если

1) V дифференцируема в некоторой окрестности начала координат;
2) V положительно определена (отрицательно определена) в этой окрестности;
3) ее производная в силу системы (12.12) $\dfrac{dV}{dt} \le 0$ $\left(\dfrac{dV}{dt} \ge 0\right)$ всюду в этой окрестности.

Рассмотрим систему (12.12) и будем считать, что она имеет тривиальное решение $x_i = 0,\ i = 1,...,n$, то есть $f_i(0,...,0) = 0\ \forall i = 1,...,n$.

ТЕОРЕМА (*Ляпунова об устойчивости*). Пусть существует дифференцируемая функция $V = V(x_1,...,x_n)$, знакоопределенная в некоторой окрестности начала координат, производная которой в силу системы (12.12) знакопостоянна в этой окрестности и противоположного с V знака или тождественно равная нулю. Тогда тривиальное решение системы (12.12) устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $V = V(x_1,...,x_n)$ дифференцируема и положительно определена в некоторой h-окрестности начала координат, а ее производная в силу системы (12.12) $\dfrac{dV}{dt} \le 0$ или $\dfrac{dV}{dt} \equiv 0$. Зададим $\varepsilon < h,\ \varepsilon > 0$ и пусть C_ε – граница ε-окрестности начала координат (рис. 22). Из дифференцируемости V следует ее непрерывность как внутри ε-окрестности, так и на ее границе C_ε.



Граница C_ε – ограниченное и замкнутое множество, поэтому непрерывная функция V достигает на ней своих наибольшего и наименьшего значений. Обозначим m – наименьшее значение V на C_ε. Отметим, что, так как V положительно определена, то $m>0$. Функция V непрерывна в ε-окрестности начала координат, $V\left(0,...,0\right)=0$, а на C_ε имеет место неравенство $V\geq m$. Поэтому существует такая δ-окрестность ($\delta>0$), во всех точках которой $V<m$.

Пусть $M_0\left(x_{10},...,x_{n0}\right)$ – произвольная точка этой δ-окрестности.

Начальные условия $\begin{cases} x_1\left(t_0\right)=x_{10} \\ \vdots \\ x_n\left(t_0\right)=x_{n0} \end{cases}$ определяют некоторое решение системы (12.12). Соответствующая траектория начинается в точке M_0 (рис. 22). При движении вдоль этой траектории функция V не убывает, так как по условию $\dfrac{dV}{dt}\leq 0$ или $\dfrac{dV}{dt}\equiv 0$, поэтому $V<m$. Это означает, что траектория не выйдет за пределы ε-окрестности, так как в противном случае она пересечет границу C_ε, на которой $V\geq m$.

Таким образом, по определению точка покоя системы (12.12) устойчива.

Что и требовалось доказать.

Вернемся к ранее рассмотренному, но нерешенному примеру (см.стр. 78).

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'=-2y-x^3 \\ y'=3x-y^3 \end{cases}$.

Как было показано, исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение этой системы нельзя. Поэтому воспользуемся методом функций Ляпунова.

Будем искать функцию Ляпунова в виде $V=a\,x^2+b\,y^2,\ a>0,\ b>0$. Найдем ее производную в силу системы:

$$\frac{dV}{dt}=2a\,x\left(-2y-x^3\right)+2b\,y\left(3x-y^3\right)=2x\,y\left(-2a+3b\right)-2a\,x^4-2b\,y^4.$$

Произведение $x\,y$ может принимать значения разных знаков, поэтому подберем параметры a и b так, чтобы $-2a+3b=0$. Например, $a=3,\,b=2$. Тогда производная положительно определенной функции $V=3x^2+2y^2$ в силу данной системы $\frac{dV}{dt}=-6x^4-4y^4\le 0$.

По теореме Ляпунова об устойчивости нулевое решение данной системы устойчиво.

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'=-3y+6x\,y^2 \\ y'=7x-14x^2\,y \end{cases}$.

Система первого приближения имеет вид $\begin{cases} x'=-3y \\ y'=7x \end{cases}$. Легко убедиться, что ее собственные значения чисто мнимые, значит, для исследования устойчивости следует воспользоваться методом функций Ляпунова.

Снова попробуем найти функцию Ляпунова в виде $V=a\,x^2+b\,y^2$.

$$\frac{dV}{dt}=2a\,x\left(-3y+6x\,y^2\right)+2b\,y\left(7x-14x^2\,y\right)=2x\,y\left(-3a+7b\right)+4x^2\,y^2\left(3a-7b\right).$$

При $a=7,\,b=3\quad -3a+7b=0\Rightarrow\frac{dV}{dt}\equiv 0$, а функция $V=7x^2+3y^2$ положительно определена.

Следовательно, по теореме Ляпунова об устойчивости нулевое решение данной системы устойчиво.

ТЕОРЕМА (*Ляпунова об асимптотической устойчивости*). Пусть в некоторой h-окрестности начала координат существует дифференцируемая функция $V=V\left(x_1,...,x_n\right)$, положительно определенная в этой окрестности, производная в силу системы которой отрицательно определена. Тогда тривиальное решение системы (12.12) асимптотически устойчиво.

Без доказательства.

ПРИМЕР. Вернемся еще раз к системе $\begin{cases} x'=-2y-x^3 \\ y'=3x-y^3 \end{cases}$. Выше для нее была найдена функция Ляпунова $V=3x^2+2y^2$ и найдена производная в силу системы $\frac{dV}{dt}=-\left(6x^4+4y^4\right)$, которая является отрицательно определенной функцией. Следовательно, по теореме об асимптотической устойчивости тривиальное решение этой системы асимптотически устойчиво.

ПРИМЕР. Для системы $\begin{cases} x'=-3y+6xy^2 \\ y'=7x-14x^2y \end{cases}$ также была найдена функция Ляпунова $V=7x^2+3y^2$, производная которой в силу системы $\frac{dV}{dt}\equiv 0$. В этом случае сразу утверждать, что точка покоя устойчива, но не асимптотически нельзя, так как сформулированная теорема дает достаточное, но не необходимое условие асимптотической устойчивости. Однако из равенства $\frac{dV}{dt}\equiv 0$ следует, что вдоль траекторий $V=7x^2+3y^2=const$, а это означает, что все траектории – эллипсы. Поэтому точка покоя устойчива, но асимптотической устойчивости нет.

ТЕОРЕМА (*Лассаля об асимптотической устойчивости в целом*). Если существует функция $V=V\left(x_1,...,x_n\right)$, определенная на всем пространстве и удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, причем $V\to\infty$ при $\sum_{i=1}^{n}x_i^2\to\infty$, то тривиальное решение системы (12.12) асимптотически устойчиво в целом.

Без доказательства.

ПРИМЕР. Функция Ляпунова $V=3x^2+2y^2\to\infty$ при $x^2+y^2\to\infty$. Как было отмечено выше, она удовлетворяет условиям теоремы об асимптотической устойчивости, поэтому по теореме Лассаля нулевое решение системы $\begin{cases} x'=-2y-x^3 \\ y'=3x-y^3 \end{cases}$ асимптотически устойчиво в целом.

ТЕОРЕМА (*Четаева о неустойчивости*). Пусть для системы (12.12) существует дифференцируемая функция $V=V\left(x_1,...,x_n\right)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) в любой ε-окрестности начала координат существует область G, во всех внутренних точках которой $V>0$, причем $V=0$ в тех граничных точках G, которые являются внутренними для данной окрестности;
2) начало координат $O(0,...,0)$ является граничной точкой области G;

3) всюду в G производная в силу системы $\dfrac{dV}{dt} > 0$.

Тогда нулевое решение системы (12.12) неустойчиво.

Без доказательства.

ПРИМЕР. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = y^3 + x^5 \\ y' = x^3 + y^5 \end{cases}$.

Рассмотрим функцию $V = x^4 - y^4$. Убедимся, что она удовлетворяет условиям 1) – 3) теоремы Четаева.

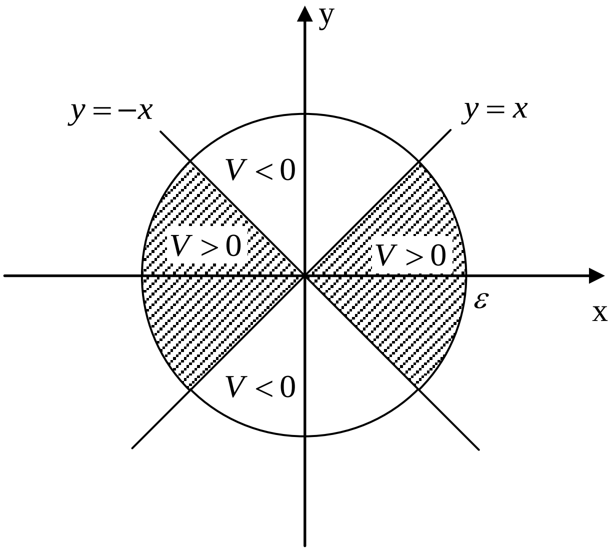


Рис. 23

1. $V \ge 0 \Leftrightarrow |x| \ge |y|$. Часть любой ε-окрестности, задаваемая этим неравенством, является областью G (рис. 23): действительно, на границе G, то есть при $y = \pm x$, $V = 0$, а во внутренних точках G $V > 0$.

2. Начало координат $x = 0, y = 0$ является граничной точкой G.

3. Производная в силу данной системы

$\dfrac{dV}{dt} = 4x^3\left(y^3 + x^5\right) - 4y^3\left(x^3 + y^5\right) = 4x^8 - 4y^8 > 0$, если $|x| > |y|$, то есть $\dfrac{dV}{dt} > 0$ во всех внутренних точках G. Поэтому нулевое решение системы неустойчиво.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в некоторой окрестности начала координат *функция* $V = V\left(x_1, ..., x_n\right)$ *и ее производная в силу системы* $\dfrac{dV}{dt}$ *положительно определены*, то все условия теоремы Четаева выполнены, следовательно, *точка покоя* $x_i = 0,\ i = 1, ..., n$ *неустойчива.*

ЗАМЕЧАНИЕ. *Метод функций Ляпунова универсален и эффективен, но, недостаток метода в том, что не существует конструктивного алгоритма построения функции Ляпунова для произвольной системы дифференци-*

альных уравнений. В простейших случаях можно искать функцию Ляпунова в виде $V = a\,x^2 + b\,y^2$, $V = a\,x^2 + b\,y^4$, $V = a\,x^4 + b\,y^4$ и т.д.. Для системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} x' = -a\,y - b\,x^{2n+1} \\ y' = c\,x - d\,y^{2m+1} \end{cases}, \quad a,b,c,d > 0$$

функция $V = c\,x^2 + a\,y^2$ является функцией Ляпунова. Точка покоя $x = 0, y = 0$ такой системы асимптотически устойчива.

ЗАМЕЧАНИЕ. При исследовании устойчивости *произвольного* решения системы дифференциальных уравнений $x_i = \varphi_i(t),\ i = 1,\ldots,n$ следует сделать замену переменной $y_i = x_i - \varphi_i,\ i = 1,..,n$, преобразовав исходную систему к системе дифференциальных уравнений, имеющей *нулевое* решение.

ПРИМЕР. Найти все положения равновесия системы $\begin{cases} x' = \ln\left(-x + y^2\right) \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$ и исследовать их на устойчивость.

Чтобы найти все положения равновесия данной системы, надо найти точки, в которых правые части обоих дифференциальных уравнений одновременно обращаются в нуль:

$$\begin{cases} \ln\left(-x + y^2\right) = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 - 1 \\ x = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - y - 2 = 0 \\ x = y + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$A(3,2),\ B(0,-1)$ – положения равновесия, или точки покоя.

1) Исследуем на устойчивость точку $A(3,2)$.

Пусть $u = x - 3,\ v = y - 2$, то есть $x = u + 3,\ y = v + 2$. Подставив x, y в систему дифференциальных уравнений, получим: $\begin{cases} u' = \ln\left(-u + v^2 + 4v + 1\right) \\ v' = u - v \end{cases}$.

Легко убедиться, что эта система имеет тривиальное решение $u = 0,\ v = 0$. Чтобы исследовать его на устойчивость, составим систему первого приближения в соответствии с (12.11): $\begin{cases} u' = -u + 4v \\ v' = u - v \end{cases}$. Характеристическое уравнение этой системы: $\begin{vmatrix} -1-k & 4 \\ 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 + 2k - 3 = 0$. Так как $k_1 k_2 < 0$, то нулевое решение неустойчиво, а, значит, точка $A(3,2)$ – неустойчивое положение равновесия.

2) Исследуем на устойчивость точку $B(0,-1)$.

Аналогично, сделав замену переменных $x = u,\ v = y + 1$, получим систему дифференциальных уравнений: $\begin{cases} u' = \ln\left(-u + v^2 - 2v + 1\right) \\ v' = u - v \end{cases}$, для которой система первого приближения имеет вид: $\begin{cases} u' = -u - 2v \\ v' = u - v \end{cases}$. Характеристическое уравнение этой системы: $\begin{vmatrix} -1-k & -2 \\ 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 3 = 0$. Все коэффициенты квадратного уравнения положительны, значит $\operatorname{Re} k_{1,2} < 0$ и точка $B(0,-1)$ – положение устойчивого равновесия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов.– М.: Интеграл–пресс, 2005.– Т.1, 2.
2. Араманович И. Г ., Лунц Г . Л ., Эльсгольц Л . Э . Функции комплексного переменного . Операционное исчисление . Теория устойчивости . М.: Наука, 1970.– 415 с.
3. Краснов М. Л ., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление . Теория устойчивости . М.: Наука, 1981.– 304 с.
4. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.–176 с.

Редактор

Компьютерная верстка, дизайн обложки
ИД № 06039 от 12.10.2001 г.
Сводный темплан 2011 г.
Подписано в печать . . . Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .
Тираж . Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ