ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Омск
Издательство ОмГТУ
2012

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное электронное издание
локального распространения

Омск
Издательство ОмГТУ
2012

Автор А. И. Фирдман (текст издания)
Редактор Ю. Ю. Аптрашева
Компьютерная верстка О. Н. Савостеевой

Рекомендовано редакционно-издательским советом
Омского государственного технического университета

Издательство ОмГТУ
644050, Омск, пр. Мира, 11
E-mail:info@omgtu.ru

ВВЕДЕНИЕ

Многие прикладные и теоретические задачи современного естествознания приводят к дифференциальным уравнениям. Исследование задачи может считаться законченным только после того, как эти уравнения решены. Здесь излагается теория численного решения дифференциальных уравнений с помощью метода конечных разностей.

На практике простейшие разностные уравнения возникают при исследовании величины банковского вклада. Эта величина является переменной Y_n, представляющей сумму, которая накапливается по установленному закону при целочисленных значениях аргумента n.

Пусть сумма Y_0 положена в банк при условии начисления r сложных процентов в год. Начисление процентов производится в конце каждого года. Тогда изменение величины вклада производится по закону $Y_n = (1+0,01r)Y_{n-1}$. Так как начальная сумма составляет Y_0, то мы приходим к задаче отыскания решения полученного разностного уравнения с начальным условием $Y\big|_{n=0} = Y_0$.

Разностные уравнения также возникают при построении динамической модели равновесия спроса и предложения.

Сущность метода конечностных разностей состоит в том, что в качестве решения принимается таблица значений решения в точках некоторого множества, называемого обычно сеткой. Для вычисления искомой таблицы используются алгебраические уравнения, приближённо заменяющие исходные дифференциальные уравнения.

Поясним это на примере разностной схемы для приближённого вычисления решения уравнения $u'(x) + A \cdot u(x) = 0$, удовлетворяющего начальному условию $u(0)=1$.

Зададим $h > 0$, и вместо функции $u(x)$ будем искать таблицу её значений $u(0), u(h), u(2h), ..., u(nh), ...$

Уравнения, полученные заменой производных разностными отношениями, называются *разностными схемами.*

Заменим производную разностным отношением $u'(x) \sim \dfrac{u(x+h) - u(x)}{n}$, его приближающим. Шаг h таблицы должен быть выбран достаточно малым. После такой замены вместо дифференциального уравнения мы получим приближающую его разностную схему $\frac{u(x+h)-u(x)}{n}+Au(x)=0$, которое позволяет вычислить искомую таблицу. Для этого перепишем разностную схему в виде рекуррентной формулы $u(x+h)=(1-Ah)u(x)$. Полагая последовательно $x=0,h,2h,\ldots$, получим

$$u(h)=(1-Ah),$$
$$u(2h)=(1-Ah)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u(Nh)=(1-Ah)^N.$$

Выбрав $h=\frac{1}{N}$, получим $u(1)=\left(1-\frac{A}{N}\right)^N$ вместо точного решения $u(1)=e^{-A}$. Из определения второго замечательного предела следует, что $\lim\limits_{N\to\infty}\left(1-\frac{A}{N}\right)^N=e^{-A}$. Тем самым показано, что приближённое решение, полученное по этой разностной схеме и зависящее от шага h, при измельчении шага сходится к точному решению дифференциального уравнения.

Другой пример разностной схемы, приближающей то же дифференциальное уравнение $u'(x)+Au(x)=0$, получим, заменяя производную разностным отношением $u'(x)\sim\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$. Эта схема имеет вид

$$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}+Au(x)=0.$$

Для дифференциального уравнения 2-го порядка

$$u''(x)+Au'(x)+Bu(x)=f(x)$$

можно построить разностную схему, заменяя $u''(x)$, например, следующим приближённым выражением:

$$u''(x)\sim\frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-\frac{u(x)-u(x-h)}{h}}{h}=\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}.$$

Первую производную $u'(x)$ можно заменить одним из применяемых ранее разностных отношений. После таких замен получим разностную схему

$$\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}+A\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}+Bu(x)=f(x).$$

Большое преимущество разностных схем решения дифференциальных уравнений по сравнению с нахождением решения аналитическими методами состоит в неусложнении этих схем в случаях переменных коэффициентов и нелинейных уравнений.

Если, например, требуется найти решение уравнения $u'(x)+A(x)u(x)=0$, у которого коэффициент A является функцией от x, то это можно сделать с помощью разностной схемы

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+A(x)u(x)=0.$$

Нелинейное уравнение $u'(x)+\sin(x\cdot u(x))=0$ может быть решено приближённо по схеме

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\sin(x\cdot u(x))=0\ .$$

ПРОСТЕЙШИЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для линейного дифференциального уравнения первого порядка $u'(x)+Au(x)=f(x)$ мы построили во введении две разностные схемы:

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+Au(x)=f(x),$$

$$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}+Au(x)=f(x),$$

которые можно записать, соответственно, в виде

$$-\frac{1-Ah}{h}u(x)+\frac{1}{h}u(x+h)=f(x),$$

$$-\frac{1}{2h}u(x-h)+Au(x)+\frac{1}{2h}u(x+h)=f(x).$$

Для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$u''(x)+Au'(x)+Bu(x)=f(x)$$

во введении было построено разностное уравнение

$$\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}+A\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}+Bu(x)=f(x)$$

или, в другой записи,

$$\frac{1}{h^2}\left(1-\frac{Ah}{2}\right)u(x-h)-\frac{1}{h^2}\left(2-Bh^2\right)u(x)+\frac{1}{h^2}\left(1+\frac{Ah}{2}\right)u(x+h)=f(x).$$

Приведённые здесь примеры разностных схем, приближающих линейные дифференциальные уравнения, принадлежат к одному из следующих двух видов:

$$a\,u(x)+b\,u(x+h)=f(x), \tag{1}$$

$$a\,u(x-h)+b\,u(x)+c\,u(x+h)=f(x). \tag{2}$$

Если последовательность точек, делящих ось OX на отрезки длины h, занумеровать слева направо так, чтобы $x_n = x_{n-1} + h$, и обозначить $u(x_n)$ через u_n, а $f(x_n)$ через f_n, то можно переписать наши разностные схемы в виде уравнений

$$a\,u_n + b\,u_{n+1} = f_n, \tag{3}$$

$$a\,u_{n-1} + b\,u_n + c\,u_{n+1} = f_n. \tag{4}$$

В уравнениях (3) и (4) неизвестные u_n образуют последовательность $\{u_n\}$:

$$\ldots, u_{-3}, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$$

Мы будем сопоставлять эту последовательность с последовательностью точек, занумерованных числами

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

или, как иногда говорят, с сеткой точек. Последовательность $\{u_n\}$ можно считать функцией u, заданной в точках сетки. Тогда u_k является значением сеточной функции u в точке с номером k.

Изучая разностные уравнения (3) и (4), не нужно уточнять, являются ли они разностными схемами для каких-то дифференциальных уравнений. Поэтому вовсе не обязательно считать, что расстояние между двумя соседними точками равно h. Можно, выбрав его произвольным, например, равным 1, положить $x_0 = 0$. Тогда сеточная функция u будет определена в точках с целыми координатами $x_k = k$.

Будем считать, для простоты, что коэффициенты a, b, c уравнений (3) и (4) постоянны. В уравнении (3) предполагается, что $a \neq 0, b \neq 0$, в уравнении (4) $a \neq 0, c \neq 0$.

Если предполагать, что последовательность $\{u_n\}$ определена во всех целых точках $n \in Z$, и не накладывать на эту последовательность никаких ограничений, то уравнения (3) и (4) имеют много решений, например, уравнение $q \cdot u_n - u_{n+1} = 0$ допускает как решение $u \equiv 0$, так и решение $u_n = q^n$. Чтобы выделить единственное решение уравнения (3), достаточно задать значение этого решения в какой-нибудь одной целой точке m, т.е. задать u_m. В самом деле, уравнение (3) можно записать в виде рекуррентной формулы $u_{n+1} = \frac{1}{b}\left(f_n - a \cdot u_n\right)$, из которой при $n = m, m+1, \ldots$ последовательно определяются $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots$, т.е. все u_n при $n > m$. Записывая уравнение (3) в виде другой рекуррентной формулы $u_{n-1} = \frac{1}{a}\left(f_n - b \cdot u_n\right)$, мы тем же путём определим все u_n при $n < m$.

Для выделения единственного решения уравнения (4) достаточно задать значения функции u в каких-нибудь двух последовательных целых точках, например, задав u_{m-1} и u_m. Доказательство следует из того, что уравнение (4) может быть переписано в виде следующих двух рекуррентных формул:

$$u_{n+1} = \frac{1}{c}\left(f_n - b \cdot u_n - a \cdot u_{n-1}\right), \quad u_{n-1} = \frac{1}{a}\left(f_n - b \cdot u_n - c \cdot u_{n+1}\right),$$

т.е. для нахождения u_{n+1} нужно знать u_n и u_{n-1}, а для нахождения u_{n-1} нужно знать u_n и u_{n+1}.

Итак, для выделения единственного решения уравнения (3) достаточно задать значение функции u в одной точке. Такое уравнение называется уравнением первого порядка. Для выделения единственного решения уравнения (4) достаточно знать значения решения в двух последовательных точках. Поэтому такое уравнение называется уравнением второго порядка. В связи с этим можно вспомнить, что для нахождения решения начальной задачи (задачи Коши) для дифференциального уравнения первого порядка нужно задать одно начальное условие вида $y(x_0) = y_0$, а для нахождения решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка нужно задать два начальных условия:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1.$$

Простейшая разностная схема, построенная во введении,

$$-\frac{1 - Ah}{h} u(x) + \frac{1}{h} u(x+h) = f(x)$$

для дифференциального уравнения $u' + Au = f$ является разностным уравнением первого порядка

$$\frac{1}{h^2}\left(1-\frac{Ah}{2}\right)u(x-h)-\frac{1}{h^2}\left(2-Bh^2\right)u(x)+\frac{1}{h^2}\left(1+\frac{Ah}{2}\right)u(x+h)=f(x),$$

для дифференциального уравнения второго порядка $u'' + Au' + Bu = f$ имеет второй порядок. Во введении для уравнения первого порядка $u' + Au = f$ была построена ещё одна разностная схема:

$$-\frac{1}{2h}u(x-h)+Au(x)+\frac{1}{2h}u(x+h)=f(x),$$

которая является разностным уравнением второго порядка. Отсюда следует, что нет взаимно-однозначного соответствия между порядком дифференциального уравнения и соответствующего ему разностного уравнения.

Уравнения (3) и (4) называются однородными, если $f_n \equiv 0$, и неоднородными – в противном случае. Общее решение неоднородного уравнения (3) имеет вид

$$u_n = u_n^* + \alpha Y_n \quad \text{или} \quad u_n = u_n^* + \tilde{u}_n,$$

где u_n^* – какое-то частное решение этого неоднородного уравнения,

$\tilde{u}_n = \alpha Y_n$ – общее решение однородного уравнения (3).

Здесь α – произвольная постоянная, Y_n – решение однородного уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $Y_0 = 1$.

Аналогично общее решение неоднородного уравнения второго порядка (4) может быть представлено в виде

$$u_n = u_n^* + \alpha Y_n + \beta Z_n \quad \text{или} \quad u_n = u_n^* + \tilde{u}_n,$$

где Y_n и z_n – частные решения однородного уравнения (4), удовлетворяющие начальным условиям $Y_0 = 1$, $Y_1 = 0$, $z_0 = 0$, $z_1 = 1$. Это же справедливо для линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами.

Общее решение однородного уравнения (3) $\tilde{u}_n$ представляет собой геометрическую прогрессию. В самом деле, из уравнения $a u_n + b u_{n+1} = 0$ имеем

$$u_{n+1} = -\frac{a}{b}u_n, \text{ т.е. } u_1 = \left(-\frac{a}{b}\right)u_0,\ u_2 = \left(-\frac{a}{b}\right)u_1 = \left(-\frac{a}{b}\right)^2, u_0, \ldots, u_n = \left(-\frac{a}{b}\right)^n u_0.$$

Отсюда следует справедливость формулы $\tilde{u}_n = \alpha Y_n$. Здесь $Y_n = \left(-\frac{a}{b}\right)^n$, $\alpha = u_0$.

Примеры решения однородных уравнений

Пример 1. Найти общее решение однородного уравнения $3u_n - 2u_{n+1} = 0$. Этим решением является функция $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \alpha$. Для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения второго порядка нужно составить характеристическое уравнение, заменив в уравнении (4) u_{n-1} на $q^0 = 1$, u_n на q^1, u_{n+1} на q^2, и решить полученное квадратное уравнение. Корни полученного уравнения

$$a + bq + cq^2 = 0 \tag{5}$$

могут быть:

1) вещественными различными $\left(D = b^2 - 4ac > 0\right)$;

2) вещественными кратными $\left(D = 0\right)$;

3) комплексно-сопряженными $\left(D < 0\right)$.

Рассмотрим все три случая.

1) Корни уравнения (5) вещественны и различны, $q_1 \neq q_2$. В этом случае общее решение однородного уравнения (4) имеет вид $\tilde{u}_n = \alpha \cdot q_1^n + \beta \cdot q_2^n$.

Пример 2. Для разностного однородного уравнения $u_{n-1} - 5u_n + 6u_{n+1} = 0$ характеристическое уравнение имеет вид $1 - 5q + 6q^2 = 0$.

$$D = 25 - 24 = 1 > 0, \quad q_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12}, \quad q_1 = \frac{1}{3}, \quad q_2 = \frac{1}{2},$$

$$\tilde{u}_n = \alpha\left(\frac{1}{3}\right)^n + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^n = \alpha \cdot 3^{-n} + \beta \cdot 2^{-n}.$$

2) Корни уравнения (5) кратные, $q_1 = q_2$. В этом случае общее решение однородного уравнения (4) имеет вид $\tilde{u}_n = \alpha \cdot q_1^n + \beta_n \cdot n \cdot q_1^n$.

Пример 3. Для разностного однородного уравнения $u_{n-1} - 6u_n + 9u_{n+1} = 0$ характеристическое уравнение имеет вид $1 - 6q + 9q^2 = 0$.

$$D = 36 - 36 = 0, \quad q_1 = q_2 = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}, \quad \tilde{u}_n = \alpha\left(\frac{1}{3}\right)^n + \beta n\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\alpha + \beta n\right) \cdot 3^{-n}.$$

3) Корни уравнения (5) комплексно-сопряжённые. Используя формулу Эйлера, общее решение однородного уравнения (4) можно записать так:

$$\tilde{u}_n = \gamma_1 \left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^n \cos n\varphi + \gamma_2 \left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^n \sin n\varphi,$$

где φ определяется равенством $\cos\varphi = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$, а γ_1, γ_2 – произвольные постоянные.

Пример 4. Для разностного однородного уравнения $9u_{n-1} + 3u_n + u_{n+1} = 0$ характеристическое уравнение имеет вид $9 + 3q + q^2 = 0$. $D = 9 - 36 = -27 < 0$.

Отсюда

$$\tilde{u}_n = \gamma_1 \left(\sqrt{\frac{9}{1}}\right)^n \cos n \cdot \varphi + \gamma_2 \left(\sqrt{\frac{9}{1}}\right)^n \sin n\varphi = 3^n \left(\gamma_1 \cos n\varphi + \gamma_2 \sin n\varphi\right),$$

$$\cos\varphi = -\frac{3}{2\sqrt{9 \cdot 1}} = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $\tilde{u}_n = 3^n \left(\gamma_1 \cos\frac{2\pi n}{3} + \gamma_2 \sin\frac{2\pi n}{3}\right)$.

Проведём проверку для случая $n = 2$:

$$\tilde{u}_1 = 3\left(\gamma_1 \cos\frac{2\pi}{3} + \gamma_2 \sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2\right),$$

$$\tilde{u}_2 = 9\left(\gamma_1 \cos\frac{4\pi}{3} + \gamma_2 \sin\frac{4\pi}{3}\right) = -9\left(\frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2\right),$$

$$\tilde{u}_3 = 27\left(\gamma_1 \cos 2\pi + \gamma_2 \sin 2\pi\right) = 27\gamma_1.$$

Подставим в исходное уравнение

$$9u_1 + 3u_2 + u_3 = 27\left(-\frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2\right) - 27\left(\frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2\right) + 27\gamma_1 =$$

$$= 27\left(-\frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2 + \gamma_1\right) \equiv 0.$$

Частное решение как уравнения (3), так и уравнения (4) ищется методом неопределённых коэффициентов для правых частей f_n специального вида. Это или многочлен по n

$$P_k(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k,$$

или прогрессия вида bq^n, или их произведение.

При этом если корень характеристического уравнения равен q, то искомое решение дополнительно умножается на n.

Если правая часть f_n состоит из нескольких слагаемых вида $P_k(n)\cdot q^n$, то частное решение ищется отдельно для каждого слагаемого, а затем они суммируются.

Примеры решения неоднородных уравнений

Пример 5. Найти общее решение уравнения $3u_n - 2u_{n+1} = 5\cdot 6^n$.

Характеристическое уравнение имеет вид $3-2q=0$, $q=\frac{3}{2}\neq 6$, и поэтому $u_n^* = A\cdot 6^n$. Для нахождения коэффициента A подставим u_n^* в исходное уравнение

$$3A\cdot 6^n - 2\cdot A\cdot 6^{n+1} = 5\cdot 6^n,\quad 6^n\cdot\left(3A-2A\cdot 6\right)=5\cdot 6^n.$$

Отсюда $A=-\frac{5}{9}$. Учитывая найденное в примере 1 $\tilde{u}_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot\alpha$, получим

$$u_n=-\frac{5}{9}\cdot 6^n+\alpha\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Пример 6. Найти общее решение уравнения $3u_n - 2u_{n+1} = \left(2n+6\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Здесь корень характеристического уравнения $q=\frac{3}{2}$ совпадает со знаменателем геометрической прогрессии в правой части. Поэтому частное решение ищем в виде $u_n^* = n\left(An+B\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n$. Для нахождения коэффициентов A и B подставим u_n^* в исходное уравнение

$$3n\left(An+B\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 2\left(n+1\right)\left(An+A+B\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} = \left(3An^2+3Bn\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n -$$

$$-2\cdot\frac{3}{2}\left(An^2+An+Bn+An+A+B\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n =$$

$$=\left(-6An-3A-3B\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(2n+6\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях n:

$n^0: \ -3(A+B)=6 \qquad B=-2+\frac{1}{3}=-\frac{5}{3};$

$n^1: \ -6A=2 \qquad A=-\frac{1}{3}.$

Учитывая, что $\tilde{u}_n=\alpha\left(\frac{3}{2}\right)^n$, получим

$$u_n=-\frac{1}{3}n(n+5)\left(\frac{3}{2}\right)^n+\alpha\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения

$$u_{n-1}-5u_n+6u_{n+1}=(15n-7)\cdot 2^n.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $1-5q+6q^2=0$. В примере 2 были найдены $q_1=\frac{1}{3}$, $q_2=\frac{1}{2}$. Оба не равны 2. Поэтому $u_n^*=(An+B)\cdot 2^n$. Для нахождения коэффициентов A и B подставим u_n^* в исходное уравнение. Получим

$$(An-A+B)\cdot 2^{n-1}-(5An+5B)\cdot 2^n+6(An+A+B)\cdot 2^{n+1}=$$
$$=2^{n-1}(An-A+B-10An-10B+24An+24A+24B)=$$
$$=(30n-14)\cdot 2^{n-1}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях n:

$n^0: 23A+15B=-14;$

$n^1: 15A=30,\ A=2,\ B=-4.$

Учитывая, что $\tilde{u}_n=\alpha\cdot 3^{-n}+\beta\cdot 2^{-n}$, получим

$$u_n=(2n-4)\cdot 2^n+\alpha\cdot 3^{-n}+\beta\cdot 2^{-n}.$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения

$$u_{n-1}-6u_n+9u_{n-n}=(6n-12)\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $1-6q+9q^2=0$. Здесь корень характеристического уравнения кратности 2, $q_1=q_2=\frac{1}{3}$, совпадает со знаменателем геометрической прогрессии в правой части. Поэтому частное решение ищем в виде $u_n^* = n^2 (An + B) \cdot 3^{-n}$. Для нахождения коэффициентов A и B подставим u_n^* в исходное уравнение. Получим

$$(n-1)^2 (An - A + B) \cdot 3^{-n+1} - 2 \cdot 3n^2 (An + B) \cdot 3^{-n} +$$

$$+ \ 3^2 (n+1)^2 (An + A + B) \cdot 3^{-n-1} = (6n - 12) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^{-n+1}.$$

Раскрыв скобки, получим, что коэффициенты при n^3 и n^2 взаимно уничтожаются.

$$\Big(An^3 - An^2 + Bn^2 - 2An^2 + 2An - 2Bn + An - A + B - 2An^3 - 2Bn^2 +$$

$$+ \ An^3 + An^2 + Bn^2 + 2An^2 + 2An + 2Bn + An + A + B \Big) \cdot 3^{-n+1} = (2n - 4) \cdot 3^{-n+1}.$$

Приравняем коэффициенты при степенях n^0 и n^1:

n^0 : $2B = -4, \ B = -2$;

n^1 : $6A = 2, \ A = \dfrac{1}{3}$.

Учитывая, что $\tilde{u}_n = (\alpha + \beta_n) \cdot 3^n$, получим

$$u_n = n^2 \left(\frac{1}{3} n - 2 \right) \cdot 3^{-n} + (\alpha + \beta_n) \cdot 3^{-n}.$$

Пример 9. Найти общее решение уравнения

$$9u_{n-1} + 3u_n + u_{n+1} = (19n + 4{,}5) \cdot 2^n.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $9 + 3q + q^2 = 0, \ D < 0$. Общее решение однородного уравнения было найдено в примере 4. Частное решение будем искать в виде $u_n^* = (An + B) \cdot 2^n$. Подставляя u_n^* в исходное уравнение, получим

$$(9An - 9A + 9B) \cdot 2^{n-1} + (3An + 3B) \cdot 2^n + (An + A + B) \cdot 2^{n+1} =$$

$$= (9An - 9A + 9B + 6An + 6B + 4An + 4A + 4B) \cdot 2^{n-1} = (19n + 4{,}5) \cdot 2 \cdot 2^{n-1}.$$

Приравняем коэффициенты при степенях n^0 и n^1:

n^0 : $-5A + 19B = 9$;

n^1 : $19A = 38, \ A = 2, B = 1$.

Учитывая $\tilde{u}_n$ из примера 4, получим

$$u_n = (2n + 1) \cdot 2^n + 3^n \cdot \left(\gamma_1 \cos \frac{2\pi n}{3} + \gamma_2 \sin \frac{2\pi n}{3} \right).$$

ЗАДАНИЯ

Найти общее решение неоднородного уравнения:

1. $u_{n-1} - 6u_n + 5u_{n+1} = 3n^2 + 2n - 4$.
2. $4u_{n-1} - 12u_n + 9u_{n+1} = (2n-5)\cdot 5^n$.
3. $4u_{n-1} + 3u_n + 9u_{n+1} = (5n-1)\cdot 3^n$.
4. $3u_{n-1} - 7u_n + 2u_{n+1} = (2n+3)\cdot 3^n$.
5. $u_{n-1} + 4u_n + 4u_{n+1} = (3n+2)\cdot 2^{-n}$.
6. $9u_{n-1} - 4u_n + u_{n+1} = (n-3)\cdot 4^n$.
7. $2u_{n-1} + 5u_n - 3u_{n+1} = (5n+2)\cdot 3^{-n}$.
8. $16u_{n-1} + 24u_n + 9u_{n+1} = (3n-4)\cdot 2^{-n}$.
9. $u_{n-1} - 5u_n + 9u_{n+1} = (12n+5)\cdot 4^{-n}$.
10. $-2u_{n-1} + 3u_n + 2u_{n+1} = (5n+4)\cdot 2^{-n}$.
11. $9u_{n-1} - 12u_n + 4u_{n+1} = (2n+3)\cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$.
12. $16u_{n-1} + 7u_n + u_{n+1} = (-2n+7)\cdot 3^{-n}$.
13. $5u_{n-1} + 6u_n - 8u_{n+1} = (5n-3)\cdot 2^{-n}$.
14. $u_{n-1} + 6u_n + 9u_{n+1} = (4n-7)\cdot 3^{-n}$.
15. $3u_{n-1} + 4u_n + 3u_{n+1} = (3n+1)\cdot 5^n$.
16. $-2u_{n-1} - 3u_n + 2u_{n+1} = (5n-7)\cdot 3^{-n}$.
17. $4u_{n-1} - 4u_n + u_{n+1} = (3n+2)\cdot 2^n$.
18. $5u_{n-1} + 3u_n + 5u_{n+1} = (-n+3)\cdot 5^{-n}$.
19. $u_{n-1} + 2u_n - 3u_{n+1} = (7n-4)\cdot 2^n$.
20. $4u_{n-1} - 20u_n + 25u_{n+1} = (-4n+1)\cdot 3^{-n}$.
21. $6u_{n-1} + 5u_n + 6u_{n+1} = (5n-4)\cdot 4^{-n}$.
22. $u_{n-1} + u_n - 12u_{n+1} = (3n-1)\cdot 3^{-n}$.
23. $25u_{n-1} + 20u_n + 4u_{n+1} = (5n-2)\cdot 2^n$.

24. $2u_{n-1} - u_n + 2u_{n+1} = (4n+3)\cdot 7^n$.

25. $3u_{n-1} - u_n - 4u_{n+1} = (5n-2)\cdot 3^{-n}$.

26. $9u_{n-1} + 12u_n + 4u_{n+1} = (3n-2)\cdot 2^{-n}$.

27. $7u_{n-1} - 4u_n + 7u_{n+1} = (5n+3)\cdot 6^{-n}$.

28. $7u_{n-1} + 2u_n - 5u_{n+1} = (3n+4)\cdot 2^n$.

29. $u_{n-1} - 10u_n + 25u_{n+1} = (5n-2)\cdot 5^{-n}$.

30. $8u_{n-1} + 3u_n + 8u_{n+1} = (3n+1)\cdot 6^n$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Годунов С.К. Разностные схемы: Введение в теорию : учеб. пособие для университетов и вузов по специальности «Прикладная математика» / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. – М. : Наука, 1977. – 439 с.

2. Самарский А.А. Теория разностных схем : учеб. пособие для вузов по специальности «Прикладная математика» / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1983. – 616 с.