Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

Функции нескольких переменных

Методические указания к выполнению тестовых заданий и контрольных работ.
Для студентов всех форм обучения

Омск -2009

Составители: Галимова Лязат Аменевна, старший преподаватель
Панченко Елена Ивановна, старший преподаватель

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

Редактор
ИД___________ от ___________
Подписано в печать . Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .
Тираж 50 экз. Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

1. ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены для студентов и преподавателей, которые сталкиваются в своей деятельности с решением задач, содержащихся в тестах университетской системы «Прометей», интернет-экзаменах, а также при выполнении контрольных работ.

В методических указаниях приведены примеры решения задач экономического содержания, которые наглядно демонстрируют применение данной главы курса высшей математики в выбранной профессии.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Наиболее часто используются в экономике следующие функции:

1. Функция ***полезности*** (функция предпочтений) – в широком смысле зависимость полезности (т.е. результата, эффекта) некоторого действия от уровня этого действия.
2. ***Производственная*** функция – зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов. Понятие производственной функции имеет широкий смысл. Рассмотрим два частных вида производственной функции: это функция ***выпуска*** – зависимость объёма производства от наличия или потребления ресурсов, также рассмотрим функцию ***издержек*** – зависимость издержек производства от объёма продукции.
3. Часто встречаются функции ***спроса***, ***потребления*** и ***предложения*** – зависимость объёма спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (например, цены, дохода и т.п.).

Если учесть, что экономические процессы обусловливаются действием нескольких факторов, то для их исследований широко используются функции нескольких переменных.

Среди этих функций в экономической теории выделяются ***мультипликативные функции***, позволяющие представить зависимую переменную в виде произведения факторных переменных, обращающих его в нуль при отсутствии действия хотя бы одного фактора.

Так общий вид мульпликативной производственной функции может выглядеть следующим образом $Y = A\cdot K^{\alpha_1}\cdot L^{\alpha_2}$, где

$Y-$ выпуск продукции;

$A-$ нейтральный коэффициент технического прогресса;

$K-$объём используемого капитала;

$L-$ затраты живого труда;

$\alpha_1,\ \alpha_2-$ параметры, причём $\alpha_1+\alpha_2=1$.

3. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть имеется n переменных величин, каждому набору их значений $(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n)$ из некоторого множества X соответствует одно вполне определенное значение переменной величины z. Тогда говорят, что задана ***функция нескольких переменных*** $z = f\left(x_1, \dots, x_n\right)$. Здесь

$x_1, \dots, x_n -$ независимые переменные;

$z -$ зависимая переменная;

$f -$ означает закон соответствия. Множество X называется областью определения функции.

Чаще всего рассматривается на практике случай, когда $n = 2$, т.к. такое рассмотрение позволяет лучше приводить наглядную геометрическую иллюстрацию основных понятий главы.

Итак, для начала введём ***обозначение*** функции двух переменных: $z = f\left(x;\ y\right)$ или $z = z\left(x;\ y\right)$, или $z = F\left(x;\ y\right)$ и т.д.

Частным значением функции $z = f\left(x;\ y\right)$ называется её значение, соответствующее какой-либо определенной паре аргументов.

Например, задана производственная функция $Y = 3 \cdot K^{0,5} \cdot L^{0,5}$ тогда выпуск продукта при $K = 25$ и $L = 100$ равен $Y = 3 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{100} = 3 \cdot 5 \cdot 10 = 150$.

Область определения функции двух переменных $z = f\left(x;\ y\right)$ – это подмножество координатной плоскости $0xy -$ часто она называется областью D (см. рис. 1).

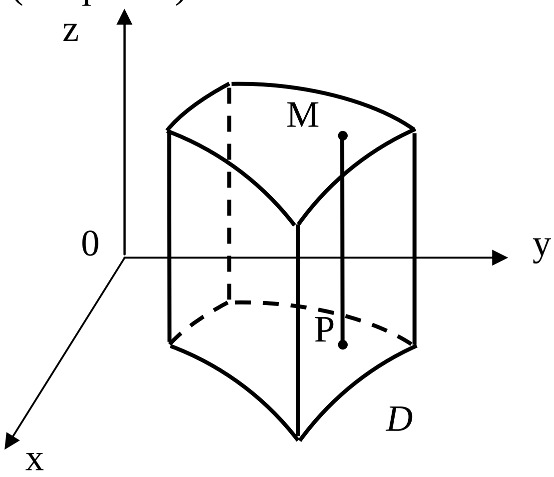


Рис. 1.

Здесь точка $P\left(x;\ y\right) \in 0xy$, а точка $M\left(x;\ y;\ z\right)$, где $z -$ это аппликата пространственной точки M. Тогда геометрическое место всех таких точек M есть поверхность, взаимооднозначно проектирующаяся в область D на плоскости $0xy$. Эта поверхность служит геометрическим изображением функции $f\left(x;\ y\right)$. Причём для нахождения области определения такой функции нужно найти множество тех точек координатной плоскости $0xy$, в которых существует аналитическое выражение функции.

ЗАМЕЧАНИЕ. Всегда следует иметь в виду, что хотя функции $z = f\left(x;\ y_0\right)$ и $z = f\left(x_0;\ y\right)$, где $x = x_0$, а $y = y_0$ – это фиксированные значения x и y, внешне выглядят одинаково, но их суть может существенно различаться.

Рассмотрим функцию $z = K_0\left(1 + \dfrac{x}{100}\right)^y$, которая выражает величину вклада через y лет при ставке $x\%$. Очевидно, что это функция ***степенная*** по

x и ***показательная*** по y.

Теперь рассмотрим понятие ***окрестности точки*** $M_0(x_0; y_0) \in X$ как двумерный аналог интервала на прямой. В случае двух переменных окрестностью такой точки M_0 является круг, содержащий точку M_0 (см. рис.2).

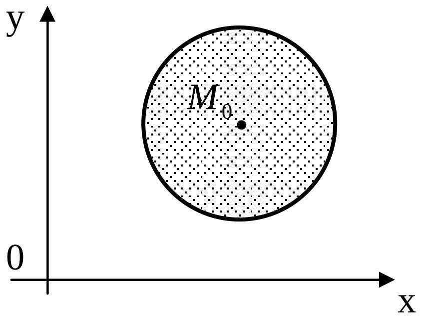


Рис.2

Также в случае двух переменных для изучения поведения функции используются линии уровня функции $z = f(x; y)$. Таким образом, ***линией уровня функции*** двух переменных $z = f(x; y)$ называется множество таких точек на плоскости, что во всех этих точках значение функции одно и то же и равно C.

Число C в этом случае называется ***уровнем.***

Пусть дана функция $z = x^2 + y^2$. Если необходимо построить линии её уровня, то они определяются уравнением $x^2 + y^2 = C$, тогда при различных значениях C мы получаем семейство линий уровня, представляющие собой концентрические окружности (см. рис. 3)

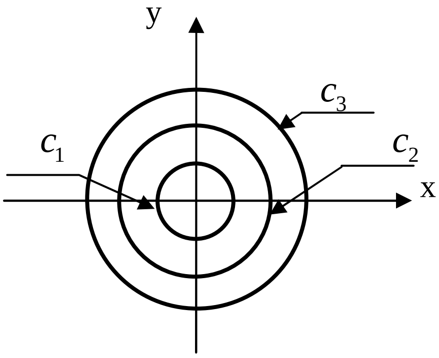


Рис. 3

В экономической теории примерами линий уровня служат кривые безразличия. Например, дана функция полезности $z = x + 4\sqrt{y}$, тогда кривая безразличия задаётся уравнением $x + 4\sqrt{y} = c$.

При изучении функций нескольких переменных во многом используется уже разработанный в предыдущих главах математический аппарат. Исходя из этого, рассмотрим понятие ***предела и непрерывности*** функции двух переменных.

Пусть $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, кроме, может быть, самой этой точки. Тогда число A называется ***пределом функции*** $z = f(x; y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$ $\left(\textit{или}\ \text{при}\ M(x; y) \to M_0(x_0; y_0)\right)$, если для $\forall\ \varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $\left| f(x; y) - A \right| < \varepsilon$.

ОБОЗНАЧЕНИЯ: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = A$.

Рассмотрим пример нахождения предела функции:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}=\left|\begin{array}{l}\textit{здесь } P(x;\,y)\to(0;\,2),\ \textit{а расстояние}\\ \textit{между точками } \rho=\sqrt{x^2+(y-2)^2}\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{\rho^2+1}-1}{\rho^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\left(\sqrt{\rho^2+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right)}{\rho^2\cdot\left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2+1-1}{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2}{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right)}=\frac{1}{2};$$

Если же говорить о непрерывности функции двух переменных $z=f(x;\,y)$, то она называется ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0;y)$, если она:

1) определена в этой точке и в некоторой её окрестности;
2) существует конечный $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$;
3) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$**,**т.е. этот предел равен значению функции z в т. M_0.

Точка M_0 называется ***точкой разрыва*** функции $z=f(x;\,y)$, если для неё не выполняется хотя бы одно из трёх перечисленных условий.

Функция $z=f(x;\,y)$ ***непрерывна в некоторой области*** D**,** если она непрерывна во всякой точке этой области. Пользуясь определением непрерывности и теоремами о пределах, можно доказать, что арифметические операции над непрерывными функциями и построение сложной функции из непрерывных функций приводит к непрерывным функциям – подобные теоремы имеют место для функций одной переменной.

4. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частные производные функции $z=f(x;\,y)$ определяются следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x;\,y)-f(x;\,y)}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x;\,y+\Delta y)-f(x;\,y)}{\Delta y},$$

т.е. частная производная функции $z=f(x;\,y)$ по аргументу x есть производная этой функции по x при постоянном значении y, а её частная производная по y есть производная этой функции по y при постоянном значении x.

ОБОЗНАЧЕНИЯ: $\dfrac{\partial z}{\partial x};\ \dfrac{\partial f}{\partial x};\ z'_x;\ f'_x;\ f'_x(x;\,y);\quad \dfrac{\partial z}{\partial y};\ \dfrac{\partial f}{\partial y};\ z'_y;\ f'_y;\ f'_y(x;\,y).$

Нужно заметить, что частные производные функции $z = f(x; y)$ сами могут представлять собой некоторые функции переменных x и y. Поэтому при вычислении частных производных в какой-либо точке $M_0(x_0; y_0)$ сначала вычисляются частные производные по общим правилам, а затем в полученные функции подставляются координаты т. M_0.

ПРИМЕР. Поток пассажиров z выражается формулой $z = \dfrac{x^2}{y}$, где $x-$ число жителей, $y-$ расстояние между городами. Тогда частная производная $z'_x = \dfrac{2x}{y}$ показывает, что при одном и том же расстоянии поток пассажиров пропорционален удвоенному числу жителей. А частная производная $z'_y = x^2 \cdot \left(y^{-1}\right)' = x^2\left(-y^{-2}\right) = -\dfrac{x^2}{y^2}$ показывает, что при неизменной численности жителей увеличение потока пассажиров обратно пропорционально квадрату расстояния между городами.

ПРИМЕР. Пусть функция полезности потребления имеет вид $z = x^{0,4} \cdot y^{0,5}$. Тогда при $x = y$ норма замещения продукта x продуктом y равна $K = -\dfrac{z'_x}{z'_y}$. Вычислим K: Найдём $z'_x = y^{0,5} \cdot 0,4x^{-0,6}$; $z'_y = x^{0,4} \cdot 0,5y^{-0,5}$.

Тогда $K = -\dfrac{y^{0,5} \cdot 0,4 \cdot x^{-0,6}}{x^{0,4} \cdot 0,5 \cdot y^{-0,5}} = -\dfrac{0,4}{0,5} \cdot y^{(0,5+0,5)} \cdot x^{(-0,6-0,4)} = -\dfrac{0,4}{0,5} \cdot \dfrac{y}{x}$.

Найдём K при $x = y$, тогда $K_{x=y} = -\dfrac{0,4}{0,5} = -\dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{10}{5} = -0,8$.

Иногда необходимо найти полный дифференциал функции двух переменных. В этом случае обозначение полного дифференциала: dz и находится он следующим образом: $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$.

Рассмотрим вычисление dz на **примере.**

ПРИМЕР. Пусть $z = x^2y - y^2x$, найти dz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 2xy; \quad \Rightarrow dz = \left(2xy - y^2\right) \cdot dx + \left(x^2 - 2xy\right)dy;$$

Самым простым случаем вычисления полного дифференциала функции служит вариант, когда функция зависит от одной переменной. Рассмотрим этот случай на примере.

ПРИМЕР. Зависимость между издержками производства C и объёмом продукции Q выражается функцией $C = 30 \cdot Q - 0,9 \cdot Q^3$. Тогда предельные издержки производства при объёме производства $Q = 10$ равны

$$\left.\frac{dC}{dQ}\right|_{Q=10}=\left(30-0,09\cdot 3\cdot Q^2\right)\Big|_{Q=10}=\left(30-0,27Q^2\right)\Big|_{Q=10}=30-0,27\cdot 100=30-27=3.$$

5. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Пусть $z=f(x;\,y)$ - имеет частные производные, тогда ***производной*** этой функции по заданному направлению $\vec{\ell}$ является следующее выражение:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{\ell}}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\beta,$$

где $\{\cos\alpha;\ \cos\beta\}-$ направляющие косинусы вектора $\vec{\ell}$. Таким образом, производная по направлению $\frac{\partial z}{\partial \vec{\ell}}$ характеризует скорость изменения функции в заданном направлении.

Рассмотрим функцию $z=x^2+y^2x.$ Вычислим производную этой функции в т. $M(1;\,2)$ по направлению $\overrightarrow{MM_1}$, где $M_1(3;\,0)$.

Найдём координаты вектора $\vec{\ell}=\overrightarrow{MM_1}=\{3-1;\ 0-2\}=\{2;\ -2\}=2\vec{i}-2\vec{j}.$ Для нахождения направляющих косинусов этого вектора найдём длину вектора $\left|\overrightarrow{MM_1}\right|=\sqrt{(2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 4}=2\sqrt{2},$ тогда координаты единичного вектора, имеющего данное направление, находим по формулам:

$$\vec{\ell^0}=\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\left|\overrightarrow{MM_1}\right|}=\left\{\frac{2}{2\sqrt{2}};\ \frac{-2}{2\sqrt{2}}\right\}=\{\cos\alpha;\ \cos\beta\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Найдём

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2+y^2x\right)'_x=2x+y^2,\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=2\cdot 1+2^2=6$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2+y^2x\right)'_y=2y\,x,\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=2\cdot 1\cdot 2=4.$$

Вычислим $\displaystyle\frac{\partial z}{\partial \vec{\ell}}=6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{6}{\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$

Градиентом функции z в т. $M(x;y)$ является вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным, вычисленным в т. M.

Обозначение: $\displaystyle qrad\,z\big|_M=\left\{\frac{\partial z}{\partial x}(M);\ \frac{\partial z}{\partial y}(M)\right\}.$

Пусть $z=x^2+2y^2-5,$ тогда градиентом функции в т. $M(2;\ -1)$ является вектор $qrad\,z\big|_M=\{4;-4\}$, т.к $\displaystyle\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=2x\big|_M=2\cdot 2=4;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=4y\big|_M=4\cdot(-1)=-4;$

6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Если $z=f(x;\,y)-$ дифференцируемая функция своих аргументов x и y, а x и y – также дифференцируемые от функции некоторого аргумента t, то ***сложная функция*** $z=f\big(x(t);\ y(t)\big)=z(t)$ имеет производную, которая находится по формуле:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Если же $z=f(x,\,y)$, а $y=y(x)$, то есть $z=f\big(x;\,y(x)\big)$, то тогда $z-$это функция от одной независимой переменной x, тогда

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Однако заметим, что в обоих случаях функция z может рассматриваться как функция от ***одной переменной.***

Рассмотрим примеры таких случаев.

ПРИМЕР. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, если $z=x+xy+y$, где $x=t^2$; $y=t^3$.

Найдём $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(x+xy+y)'_x=1+y$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x+xy+y)'_y=x+1,$$

$$\frac{dx}{dt}=\left(t^2\right)'=2t,\qquad \frac{dy}{dt}=3t^2.$$

Тогда $\dfrac{dz}{dt}=(1+y)\cdot 2t+(x+1)\cdot 3t^2=\left(1+t^3\right)\cdot 2t+\left(t^2+1\right)\cdot 3t^2=2t+2t^4+3t^4+3t^2=$

$=5t^4+3t^2+2t.$

Если же рассматривать изначально функцию z как функцию от t, то $z(t)$ можно вычислить следующим образом: $z(t)=t^2+t^2\cdot t^3+t^3=t^2+t^5+t^3$, тогда $\dfrac{dz}{dt}=\left(t^2+t^5+t^3\right)'=2t+5t^4+3t^2$.

ПРИМЕР. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=\ln\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$, $y=x^2$.

Сначала найдём $\dfrac{dz}{dx}$, пользуясь формулой $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left[\ln\left(\frac{x}{y^2}\right)\right]'_x=\frac{y^2}{x}\cdot\frac{1}{y^2}=\frac{1}{x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left[\ln\left(\frac{x}{y^2}\right)\right]'_y=\frac{y^2}{x}\cdot\left(-2xy^{-3}\right)=\frac{y^2}{x}\cdot\left(\frac{-2x}{y^3}\right)=-\frac{2}{y};$$

$\dfrac{dy}{dx}=\left(x^2\right)'=2x.$

Тогда $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{x}+\left(-\dfrac{2}{y}\right)\cdot 2x=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4x}{x^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x}=-\dfrac{3}{x}.$

Однако этого же результата можно достичь проще, сводя функцию z к переменной x, т.е. $z(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x^4}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right),$

тогда $\dfrac{dz}{dx}=\left[\ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right]'_x=x^3\cdot\left(x^{-3}\right)'=x^3\cdot\left(-3x^{-4}\right)=-\dfrac{3x^3}{x^4}=-\dfrac{3}{x}.$

Если $z=f(x;\,y)-$ дифференцируемая функция аргументов $x,\,y$, а x и y зависят в свою очередь от нескольких переменных, например $x(u,\,v)$, $y(u,\,v)$, то формулы частных производных ***сложной функции*** $z=z(u;\,v)=z\big(x(u;\,v);\,y(u;\,v)\big)$ имеют аналогичный вид:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Рассмотрим такие частные производные на примере.

ПРИМЕР. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u},\ \dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\dfrac{x^2}{y};\ x=u+v;\quad y=u-v$.

Найдём: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(\dfrac{x^2}{y}\right)'_x=\dfrac{2x}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x^2}{y}\right)'_y=x^2\cdot\left(y^{-1}\right)'_y=x^2\cdot\left(-y^{-2}\right)=-\frac{x^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=(u+v)'_u=1;\quad \frac{\partial y}{\partial u}=(u-v)'_u=1$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=(u+v)'_v=1;\quad \frac{\partial y}{\partial v}=(u-v)'_v=-1\,.$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x}{y}\cdot 1+\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot 1=\frac{2x}{y}-\frac{x^2}{y^2}=\frac{2(u+v)}{u-v}-\frac{(u+v)^2}{(u-v)^2}=\frac{2(u+v)\cdot(u-v)-(u+v)^2}{(u-v)^2}=$$

$$=\frac{(u+v)\cdot(2u-2v-u-v)}{(u-v)^2}=\frac{(u+v)(u-3v)}{(u-v)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{y}\cdot 1+\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot(-1)=\frac{2x}{y}+\frac{x^2}{y^2}=\frac{2xy+x^2}{y^2}=\frac{2(u+v)(u-v)+(u+v)^2}{(u-v)^2}=$$

$$\frac{(u+v)\cdot(2u-2v+u+v)}{(u-v)^2}=\frac{(u+v)(3u-v)}{(u-v)^2}.$$

Неявная функция двух переменных.

Функция z является ***неявной*** функцией от x и y, если она задаётся уравнением $F(x;\, y;\, z)=0$, не разрешённым относительно z.

Тогда частные производные функции z находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x;\, y;\, z)}{F'_z(x;\, y;\, z)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x;\, y;\, z)}{F'_z(x;\, y;\, z)}.$$

ПРИМЕР. Найти частные производные функции $z(x;\, y)$, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, где $a, b, c=const$. В этом случае $F(x;\, y;\, z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$

Тогда $F'_x=\frac{2x}{a^2};\ F'_y=\frac{2y}{b^2};\ F'_z=\frac{2z}{c^2};\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{c^2}{2z}=-\frac{c^2x}{a^2z};$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{c^2}{2z}=-\frac{c^2y}{b^2z}.$$

7. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

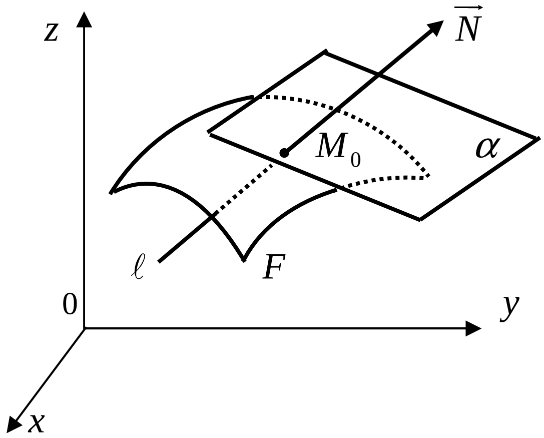


Рис. 4

Пусть F – некоторая поверхность, а $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)\in F$. Тогда ***касательной плоскостью*** α к поверхности F в т. M_0 является плоскость, в которой расположены касательные прямые к линиям на поверхности, проходящей через эту точку. А ***нормалью*** ℓ к поверхности является прямая, проходящая через т. M_0 перпендикулярно касательной плоскости.

Если $\vec{N}=\{A;\, B;\, C\}$ – вектор, идущий по нормали, то уравнение касательной плоскости α имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

а уравнение нормали ℓ имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C},$$

где: $A=\dfrac{\partial F\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)}{\partial x}$; $\qquad B=\dfrac{\partial F\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)}{\partial y}$; $\qquad C=\dfrac{\partial F\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)}{\partial z}$.

Если же поверхность задана уравнением, разрешённым относительно z, т. е. $z=f\left(x;\ y\right)$, то

$$A=\frac{\partial f\left(x_0;\ y_0\right)}{\partial x};\qquad B=\frac{\partial f\left(x_0;\ y_0\right)}{\partial y};\qquad C=-1.$$

Рассмотрим на примере нахождение уравнений касательной плоскости и нормали. Пусть дано уравнение поверхности: $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$, найти уравнения касательной плоскости и нормали к этой поверхности в т. $M\left(1;\ 2;\ -1\right)$.

Найдём $F'_x=3x^2+yz$, $F'_y=3y^2+xz$, $F'_z=3z^2+xy$.

Тогда $F'_x(M_0)=3-2=1$, т.е. $A=1$,

$F'_y(M_0)=12-1=11$, т.е. $B=11$,

$F'_z(M_0)=3+2=5$, т.е. $C=5$.

$$1(x-1)+11(y-2)+5(z+1)=0$$

$$x-1+11y-22+5z+5=0$$

$x+11y+5z-18=0$ – уравнение ***касательной плоскости,***

$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+1}{5}$ – уравнение ***нормали.***

8. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Частными производными второго порядка функции $f\left(x;\ y\right)$ называются частные производные от её первых производных. Таким образом:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}\left(x;\ y\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{xy}\left(x;\ y\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{yx}\left(x;\ y\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x;\, y).$$

Дифференциал 2-го порядка функции $z = f(x;\, y)$ находится по формуле:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2.$$

При этом смешанные производные, т.е. отличающиеся только порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности. Производные и дифференциалы высших порядков функции большего числа переменных определяются аналогично. Рассмотрим пример.

ПРИМЕР. Найти частные производные второго порядка для функции $z = 3x^2 y - 2xy + y^2 - 1$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3x^2 y - 2xy + y^2 - 1\right)'_x = 6xy - 2y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(3x^2 y - 2xy + y^2 - 1\right)'_y = 3x^2 - 2x + 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(6xy - 2y\right)'_x = 6y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \left(6xy - 2y\right)'_y = 6x - 2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(3x^2 - 2x + 2y\right)'_y = 2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \left(3x^2 - 2x + 2y\right)'_x = 6x - 2;$$

9. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Как и в случае одной переменной, функция $z = f(x; y)$ имеет узловые, определяющие структуру графика, точки. Рассмотрим, прежде всего точки ***экстремума,*** т.е. точка $M_0(x_0;\, y_0)$ является:

а) точкой ***максимума*** $z = f(x;\, y)$, если существует окрестность точки M такая, что для всех точек из этой окрестности $f(x_0;\, y_0) \geq f(x;\, y)$;

б) в свою очередь, точкой ***минимума*** функции $z = f(x; y)$, если для аналогичной ситуации $f(x_0;\, y_0) \leq f(x;\, y)$.

Таким образом, пусть т. $M_0(x_0,\, y_0)$ является точкой экстремума функции $z = f(x; y)$, тогда $f'_x(x_0;\, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0;\, y_0) = 0$. И если $z = f(x; y)$:

а) определена в некоторой окрестности т. M_0;

б) имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка $f''_{xx}(M_0) = A$

$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0) = B$

$f''_{yy}(M_0) = C$, то

в) если $\Delta = AC - B^2 > 0$ и $A > 0 \Rightarrow$ т. M_0 – точка минимума если $\Delta > 0,\ A < 0 \Rightarrow$ т. M_0 – точка максимума

если $\Delta = 0,$ то вопрос о наличии экстремума открыт.

Рассмотрим примеры исследования функций двух переменных на экстремум.

ПРИМЕР. Пусть $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y,$ найдём экстремумы этой функции.

Итак $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 2x + y - 2$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = z'_y = x + 2y - 3$.

Теперь найдём точки возможных экстремумов:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3};\quad y = \frac{4}{3} \Rightarrow M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right) - \text{ точка возможного экстремума.}$$

Осталось выяснить, является ли т. M_0 точкой минимума или максимума, или в ней экстремума нет

$z''_{xx} = 2, \Rightarrow A = 2,\quad z''_{xy} = 1 \Rightarrow B = 1,\quad z''_{yy} = 2 \Rightarrow C = 2$ тогда

$\Delta = A\cdot C - B^2 = 2\cdot 2 - 1^2 = 3 > 0,$ т.к $A = 2 > 0$ также, $\Rightarrow M_0 - \text{т.}\min$.

ПРИМЕР. Пусть $z = x^2 - y^2,$ найдём экстремумы для этой функции:

$$\begin{matrix} z'_x = 2x \\ z'_y = -2y \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(0;\,0) - \text{ точка возможного экстремума.}$$

Т.к. $z''_{xx} = 2 \Rightarrow A = 2,\quad z''_{xy} = 0, \Rightarrow B = 0,\quad z''_{yy} = -2 \Rightarrow C = -2,$ тогда

$\Delta = 2\cdot(-2) - 0^2 = -4 < 0, \Rightarrow$ эта точка не является точкой экстремума.

ПРИМЕР. Пусть $z = x^4 + y^4,$ найдём экстремумы для z;

$$\begin{matrix} z'_x = 4x^3 \\ z'_y = 4y^3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(0;\,0) - \text{точка возможного экстремума.}$$

Определим характер этой точки: $z''_{xx} = 12x^2,\quad z''_{xy} = 0,\quad z''_{yy} = 12y^2$.

Найдём

$z''_{xx}(M_0) = 12\cdot 0^2 = 0, \Rightarrow A = 0,\quad z''_{xy}(M_0) = 0 \Rightarrow B = 0,\ z''_{yy}(M_0) = 12\cdot 0^2 = 0, \Rightarrow C = 0$,

тогда $\Delta = AC - B^2 = 0\cdot 0 - 0^2 = 0, \Rightarrow$ экстремум может быть в этой точке, а может и не быть. Однако в этом случае $z > 0$ во всех точках, кроме $M_0,$ и $z(M_0) = 0 \Rightarrow$ данная функция имеет в т. M_0 – минимум.

10. НАИМЕНЬШЕЕ И НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ранее рассмотренные экстремумы имели локальный характер, т.е. функция принимает максимальное или минимальное значение в некоторой окрестности т. M_0.

В ряде задач требуется найти ***глобальный экстремум***, т.е. найти наибольшее или наименьшее значения функции в некоторой замкнутой области. Для этого ищем все локальные экстремумы, принадлежащие области, а также границе области, и находим значения функции в них. Затем среди полученных значений выбираются наибольшее и наименьшее. Рассмотрим эту последовательность действий на примере.

ПРИМЕР. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y(2 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

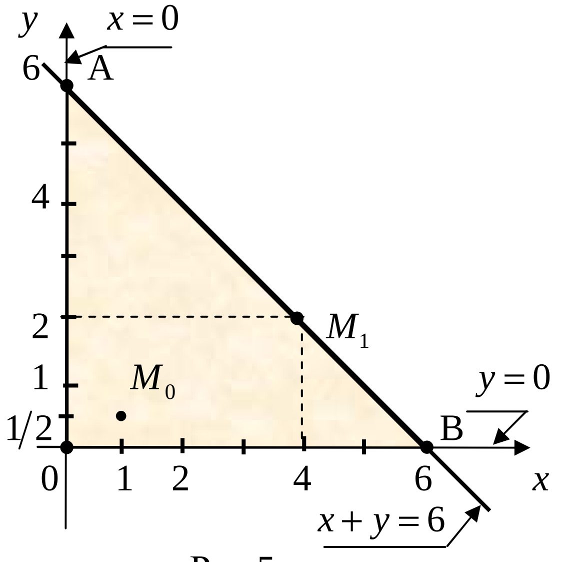


Рис.5

РЕШЕНИЕ.

1) Найдём точки возможного экстремума данной функции, которые лежат внутри области:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2x^2 \cdot y - x^3 y - x^2 y^2\right)'_x =$$

$$= 4xy - 3x^2 y - 2xy^2 =$$

$$= xy(4 - 3x - 2y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2\right)'_y =$$

$$= 2x^2 - x^3 - 2yx^2 =$$

$$= x^2(2 - x - 2y),$$

теперь решим систему уравнений:

$$\begin{cases} xy(4 - 3x - 2y) = 0 \\ x^2(2 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Сократим первое уравнение на $xy \neq 0$, второе на $x^2 \neq 0$. Это возможно, т.к. внутри области $x > 0$, $y > 0$.

Тогда $\begin{cases} 4-3x-2y=0 \\ 2-x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2-2x=0 \\ -2x=-2 \\ x=1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4-3\cdot 1-2y=0 \\ -2y=-1 \\ y=1/2 \end{matrix}, \Rightarrow M_0\left(1;\frac{1}{2}\right)$ – точка возможного экстремума, принадлежащая области. Найдём значение функции в этой точке:

$$z(M_0)=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(2-1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

2) Найдём значения функции на сторонах треугольника:

на стороне OA: $x=0, \quad 0\le y\le 6,$

на стороне OB: $y=0, \quad 0\le x\le 6,$ очевидно, что на сторонах OA и OB $z=0.$

на стороне AB: $x+y=6.$

Здесь $y=6-x$ (где $0\le x\le 6$), найдём стационарные точки функции $z(x)=x^2(6-x)(2-x-6+x)=-4x^2(6-x)$ на заданном интервале.

Следовательно, $z'(x)=\left(-24x^2+4x^3\right)'=-48x+12x^2=0$, $12x(x-4)=0$, так как

$x=0-$ граничная точка, причём $z(0)=0,$

тогда при $x=4$ найдём $y=6-4=2, \Rightarrow M_1(4;\,2)\in AB \Rightarrow z(M_1)=$

$=-4\cdot 16(6-4)=-128,$ а $x=6-$ также граничная точка, $\Rightarrow z(6)=0;$

3) Таким образом, наибольшее и наименьшее значения функции z в треугольнике OAB надо искать среди следующих значений:

$z=\frac{1}{4}$ внутри треугольника в точке M_0;

$z=0$ на сторонах $x=0,\ y=0$ (в том числе в вершинах);

$z=-128$ на стороне AB в точке M_1.

ОТВЕТ. $z=\frac{1}{4}-$ наибольшее значение функции z

$z=-128-$ наименьшее значение z.

11. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Если экстремум функции двух переменных ищется не на всей области определения, а на множестве, удовлетворяющем некоторому условию, то он является ***условным.*** Таким образом, пусть $z=f(x;\,y)$ и её аргументы x и y удовлетворяют условию $g(x;\,y)=c$, которое называется ***уравнением связи.*** Тогда $(x_0;\,y_0)$ называется точкой ***условного максимума (минимума),*** если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $(x;\,y)$ из этой окрестности, удовлетворяющих условию $g(x;\,y)=c$, выполняется неравенство:

$$f(x_0;\,y_0)\ge f(x;\,y)\quad \big(f(x_0;\,y_0)\le f(x;\,y)\big).$$

На рис. 6 изображена точка условного максимума $(x_0;\,y_0)$. Она не является точкой безусловного экстремума функции $z=f(x;\,y)$, т.к. это точка $(x_1;\,y_1)$.

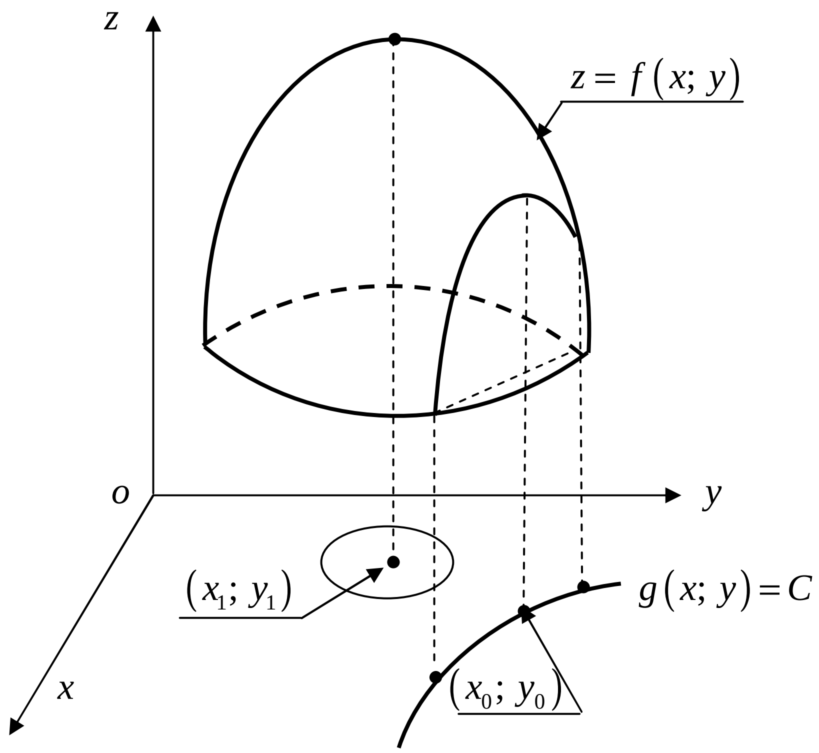


Рис.6

Наиболее простым способом нахождения условного экстремума функции двух переменных является сведение задачи к отысканию экстремума функции одной переменной. Это происходит в том случае, когда уравнение связи $g(x;\,y)=c$ удаётся разрешить относительно одной из переменных, например, выразить y через x, т.е. найти $y=\varphi(x)$. Подставив полученное выражение в функцию двух переменных, получаем функцию одной переменной, т.е. $z=f\big(x;\,\varphi(x)\big)$.

Экстремум этой функции и будет ***условным экстремумом*** функции $z=f(x;\,y)$. Рассмотрим этот процесс на примере.

ПРИМЕР. Найти точки максимума и минимума функции $z=\sqrt{xy}$ при условии $5x+10y=200$.

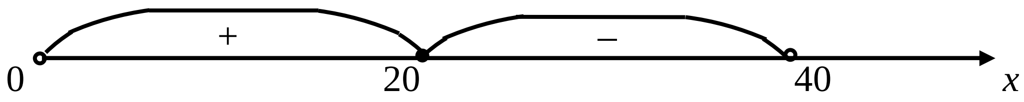
Выразим $y=20-\dfrac{x}{2}$ и подставим в функцию $z=\sqrt{x\cdot\left(20-\dfrac{x}{2}\right)}=\sqrt{20x-\dfrac{x^2}{2}}$;

Найдём $z'=\dfrac{1}{2\sqrt{20x-\dfrac{x^2}{2}}}\cdot\left(20x-\dfrac{x^2}{2}\right)'=\dfrac{20-x}{2\sqrt{20x-\dfrac{x^2}{2}}}$;

$$\frac{20-x}{2\sqrt{20x-\frac{x^2}{2}}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 20-x=0 \\ 2\sqrt{20x-\frac{x^2}{2}}\neq 0 \end{cases}, \Rightarrow \begin{matrix} 20-x=0 \\ x=20 \end{matrix}.$$

При этом $20x-\frac{x^2}{2}\neq 0,\;\; 40x-x^2\neq 0,\;\; x(40-x)\neq 0 \Rightarrow x\neq 0$ и $x\neq 40.$

Тогда исследуем полученную критическую точку функции $x=20$ на экстремум:



Пусть $x=10,$ тогда $z'(10)>0,$

$x=30,$ тогда $z'(30)<0.$

Т.к. при переходе через точку $x=20$ производная меняет знак с «$+$» на «$-$», $\Rightarrow x=20-$ т. max для функции $z(x)$, а точка $(20;10)-$ т. max для функции $z(x;\,y)=\sqrt{xy};$

ОТВЕТ. Точка $(20;10)$ – ***условный максимум функции*** z**.**

Так как в рассмотренном примере уравнение связи оказалось линейным, поэтому оно легко разрешилось относительно одной переменной. Однако в более сложных случаях для отыскания условного экстремума используется ***метод Лагранжа.***

В этом случае рассматривается функция трёх переменных:
$L(x;\,y;\,\lambda)=f(x;\,y)+\lambda\cdot\left[g(x;\,y)-c\right]-$ эта функция называется функцией Лагранжа, а $\lambda-$ множителем Лагранжа. Тогда, если $(x_0;\,y_0)-$ точка условного экстремума функции $z=f(x;\,y)$ при условии $g(x;\,y)=c,$ то существует значение λ_0 такое, что точка $(x_0;\,y_0;\,\lambda_0)$ является точкой экстремума функции $L(x;\,y;\,\lambda).$

Таким образом, для нахождения условного экстремума функции $z=f(x;\,y)$ при условии $g(x;\,y)=c$ требуется найти решение системы

$$\begin{cases} L'_x=f'_x(x;\,y)+\lambda\cdot g'_x(x;\,y)=0 \\ L'_y=f'_y(x;\,y)+\lambda\cdot g'_y(x;\,y)=0 \\ L'_\lambda=g(x;\,y)-c=0. \end{cases}$$

Рассмотрим использование ***метода множителей Лагранжа*** для решения предыдущей задачи.

Пусть функция полезности потребления имеет вид $z=\sqrt{xy}$. Цена на благо x равна 5, цена на благо y равна 10, доход потребителя равен 200. Найти оптимальный набор благ потребления.

Составляем функцию Лагранжа

$L=z(x;\,y)+\lambda\cdot\varphi(x;\,y)=\sqrt{xy}+\lambda(5x+10y-200)$, тогда частные производные имеют вид:

$$L'_x=\frac{\partial z}{\partial x}+\lambda(5x+10y-200)'_x=\frac{1}{2\sqrt{xy}}\cdot y+5\lambda,$$

$$L'_y=\frac{\partial z}{\partial y}+\lambda(5x+10y-200)'_y=\frac{1}{2\sqrt{xy}}\cdot x+10\lambda,$$

$$L'_\lambda=5x+10y-200.$$

Приравнивая к нулю частные производные, получим систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{xy}}\cdot y+5\lambda=0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{xy}}\cdot x+10\lambda=0,\ \text{тогда}\\ 5x+10y-200=0\end{cases}\quad \begin{matrix}\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}}=-5\lambda\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}=-10\lambda\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}\sqrt{\dfrac{y}{x}}=-10\lambda\Rightarrow\quad \lambda=-\dfrac{1}{10}\sqrt{\dfrac{y}{x}}\\ \sqrt{\dfrac{x}{y}}=-20\lambda\Rightarrow\quad \lambda=-\dfrac{1}{20}\sqrt{\dfrac{x}{y}}\end{matrix}$$

$$-\frac{1}{10}\sqrt{\frac{y}{x}}=-\frac{1}{20}\sqrt{\frac{x}{y}}\Rightarrow-\frac{1}{10}\sqrt{\frac{y}{x}}=-\frac{1}{20\sqrt{\dfrac{y}{x}}},\ \text{где}\quad \begin{matrix}x\neq 0\\ y\neq 0\end{matrix},$$

$$\text{тогда}\ \ 2\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2=1,\ \Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{x}{2}$$

$$5\cdot x+10\cdot\frac{x}{2}=200$$

$$10x=200$$

$$x=20,\ \text{тогда}$$

$$y=10,$$

т.е. $(20;\,10)-$ единственное решение системы; таким образом, точкой условного максимума является т.$(20;\,10)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант № 1.

1.	Найти область определения функции: $z = y + \sqrt{x}$.
2.	Найти частные производные функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} arctg \dfrac{3y}{4x^3}$.
3.	Найти $\dfrac{du}{dx}$, если $u = e^{z^2 - y^2}$, $\begin{matrix} z = \cos x \\ y = \sin x \end{matrix}$.
4.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $\sin^2\left(x + y^2\right) - \sin^2\dfrac{z}{2} + \cos^2 2y = 0$.
5.	Найти градиент функции $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ в точке $M_0\left(1;\ 2;\ \dfrac{1}{5}\right)$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $B(1;\ 2;\ 5)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z = ctg\left(3x \cdot y\right)$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + 2xy - 4x - 8y$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = -x^2 + xy - y^2 - 9y + 6x$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $y = -x;\ x = -2;\ y = -6$.

Вариант № 2

1.	Найти область определения функции: $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$.
2.	Найти частные производные функции $z = \dfrac{5x^2 - 2y}{x + 3y}$.
3.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = u^v$, $\begin{matrix} u = \sin x \\ v = \cos x \end{matrix}$.
4.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $y^3 - x^2 = arctg\dfrac{x}{z}$.
5.	Найти градиент функции $z = 3x^2y - 3xy^2 + y^4$ в точке $M\left(1;\ 2;\ 0\right)$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2} - x$ в точке $A(3;\ 4;\ 2)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z = xy \cdot \left(1 - \sqrt{xy}\right)$.

8.	Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 + 6x + 2y$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x = -5;\ y = x;\ y = 0$.

Вариант № 3

1.	Найти область определения функции: $z = \sqrt{y \cdot \sin x}$.
2.	Найти частные производные функции $z = \dfrac{2xy}{\sqrt{\sin x}}$.
3.	Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = arc\sin(x - y)$, $\begin{matrix} x = 3t \\ y = 4t^3 \end{matrix}$.
4.	Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $y^3 - xy = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
5.	Найти градиент функции $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M\left(1; 1; 3\sqrt{2}\right)$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \dfrac{x^2}{2} - y^2$ в точке $N(2; -1; 1)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z = \ln\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3xy + y^2 - 3x - 2y$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $y = -x;\ \ y = 2;\ \ x = 1$.

Вариант № 4

1.	Найти область определения функции: $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$.
2.	Найти частные производные функции $z = \sqrt[3]{1 + 4xy + x^2 + 3y^3}$.
3.	Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \dfrac{x}{y}$, $\begin{matrix} x = e^t \\ y = \ln t \end{matrix}$.

4.	Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)+arctg\frac{y^2}{x}=0$.
5.	Найти градиент функции $z=2x^2+xy$ в точке $A(1;\,2;\,4)$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=xy$ в точке $(-1;\,-1;\,1)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z=\sin\left(\sqrt{x}+y\right)$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+y^2-12x+16y$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=27x-6y-x^3+y^2$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x+y=5;\ y-x=5;\ y=0$.

Вариант № 5

1.	Найти область определения данной функции: $z=x+\arccos y$.
2.	Найти частные производные функции $u=x^{\frac{y}{z}}$.
3.	Найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$, $\begin{matrix} x=5t^2 \\ y=\sqrt{t^2+1} \end{matrix}$.
4.	Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $e^{2x^2}-e^{-3y}+\frac{\sqrt{z}}{x^2}=1$.
5.	Найти градиент функции $z=x^2+xy+y^2$ в точке $M\,(0;\ 2;\ 4)$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2-z^2-5$ в точке $(2;\,-1;\,1)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z=\cos\left(x^2-y^2\right)$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2+3xy$ в треугольнике с вершинами $A(0;\ 1)$, $B(2;\ -1)$, $C(-2;\ -1)$.

Вариант № 6

1.	Найти область определения функции: $z=\sqrt{1+y-x^2}-\sqrt{1-y-x^2}$.

2.	Найти частные производные функции $z = \ln tg\frac{x}{y}$.
3.	Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = e^{3x+2y}$, $\begin{matrix} x = \cos t \\ y = t^2 \end{matrix}$.
4.	Найти $\frac{dy}{dx}$, если $\arcsin\frac{x}{y^2} + \frac{z}{xy} = 0$.
5.	Найти градиент функции $z = arctg\frac{x}{y}$ в точке $\left(1;\ 1;\ \frac{\pi}{4}\right)$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sin\frac{y}{x}$ в точке $K(1;\ \pi;\ 0)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z = 3xy(1 - x - y)$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 4xy + 8(x + y)$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x = -3;\ y = -3;\ x = 0;\ y = 0$.

Вариант № 7

1.	Найти область определения функции: $z = \arcsin\frac{y}{x^2}$.
2.	Найти частные производные функции $z = \left(x^2 + 2y\right) \cdot e^{-xy^2}$.
3.	Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \sqrt{\frac{\ln x}{\cos y}}$, $\begin{matrix} x = \sin t \\ y = t^2 \end{matrix}$.
4.	Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $xtgz - 2x^2 + 3y^2 = 4$.
5.	Найти производную функции $z = arcctg\left(x^2 y\right)$ в точке $B\left(1;\ 1;\ \frac{\pi}{4}\right)$ в направлении градиента.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - y^2$ в точке $C(1;\ 1;\ 0)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z = y \cdot \ln x$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2$.

Вариант № 8

1.	Найти область определения функции: $z = \log_2\left(x^2 + y^2 - 1\right) + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
2.	Найти частные производные функции $z = 2\cos^2\left(x - \dfrac{y}{2}\right)$.
3.	Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = e^{x-3y}$, $\begin{matrix} x = \sin t \\ y = t^3 \end{matrix}$.
4.	Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $\left(x^2 + y^2\right)^2 - a^2\left(x^2 - y^2\right) = 0$, где $a = const$.
5.	Найти производную функции $z = \dfrac{x}{y^2}$ в точке $C(5;\ -1;\ 5)$ в направлении градиента.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 - 4y^2$ в точке $D(2;\ 1;\ 4)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z = \ln(3x - y)$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 6y(1 - y) - x(x - 2)$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x = 0,\ \ y = 0,\ x + y = 4$.

Вариант № 9

1.	Найти область определения функции: $z = arc\cos\dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$.
2.	Найти частные производные функции $z = \dfrac{2xy}{\sqrt{xy + 9}}$.
3.	Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = z^2 + y^2 + z \cdot y$, $\begin{matrix} z = \sin t \\ y = e^t \end{matrix}$.
4.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y = -3$.

5.	Найти производную функции $z=\ln(2x+3y)$ в точке $D(-1;\ 1;\ 0)$ в направлении градиента.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2yz+2x^2z-3xyz+2=0$ в точке $N(1;\ 0;\ -1)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z=\dfrac{y^2}{2x-1}$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z=2xy-3x^2-2y^2+10$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2y(2-x-y)$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $-2\le x\le 2,\quad -3\le y\le 3$.

Вариант № 10

1.	Найти область определения функции: $z=\sqrt{\cos\left(x^2+y^2\right)}$
2.	Найти частные производные функции $z=\dfrac{2xy}{\sqrt{\sin x}}$.
3.	Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\arcsin(x-y)$, $\begin{matrix} x=3t \\ y=4t^3 \end{matrix}$.
4.	Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $x^3y^3-x^2-y^2=a^3$, где $a=const$.
5.	Найти производную функции $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ в точке $F(-1;\ 0;\ -1)$ в направлении градиента.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2-4z^2=5$ в точке $(1;\ 2;\ 1)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z=e^y\cdot\cos x$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z=4(x-y)-x^2-y^2$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-xy+y^2-4x$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x=0,\ \ y=0,\ \ x-y=4$.

Вариант № 11

1.	Найти область определения функции: $z=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

2.	Найти частные производные функции $z=\ln tg^3\left(\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y}{6}\right)$.
3.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\dfrac{x^2}{y}$, $\begin{matrix} x=u-2v \\ y=v+2u \end{matrix}$.
4.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z^2=4a^2b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)$, где $a=const$, $b=const$.
5.	Найти производную функции $z=x\cdot e^y$ в точке $A(-1;\ 0;\ -1)$ в направлении градиента.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3xyz-z^3=8$ в точке $D(0;\ 2;-2)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z=e^y\cdot\cos x$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+3y^2+x-y$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x=0$, $y=0$, $-x+y=1$.

Вариант № 12

1.	Найти область определения функции: $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$.
2.	Найти частные производные функции $u=\left(z^x+\ln\dfrac{y}{z}\right)^3$
3.	Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=2x^2+xy+y^2$, $\begin{matrix} x=3\sin t \\ y=\cos t \end{matrix}$.
4.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $e^{y^2}+ax^2e^{-y}=2bz^2$, где $a=const$, $b=const$.
5.	Найти производную функции $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$ в точке $K(0;\ 1;\ 0)$ в направлении градиента.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2+\dfrac{y^2}{2}$ в точке $M(-1;\ 2;\ 3)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z=y\cdot\sin\sqrt{x}$.

8.	Исследовать на экстремум функцию $z=-x^2+xy-y^2-9y+3x-17$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=-10xy^2+x^2+10x+1$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $-5\le x\le 0;\ \ -1\le y\le 1$.

Вариант № 13

1.	Найти область определения функции: $z=\ln x-\ln\cos y$.
2.	Найти частные производные функции $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$.
3.	Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=xyz,\quad x=t^2+1,\quad y=\ln t,\quad z=tgt$.
4.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $e^{3z}\left(3\sin 2x-3\cos 2y\right)=1$.
5.	Найти производную функции $z=x^2y-xy^2$ в точке $N\left(1;\ 1;\ 0\right)$ в направлении градиента.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^4-4y^3z+4z^2xy-4z^3x+1=0$ в точке $K\left(1;\ 1;1\right)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z=x\cdot\cos\sqrt{y}$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z=5x^2-4xy+2y^2+9x-3y$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2$ в замкнутой области, ограниченной квадратом с вершинами: $A(1;\ 1),\ \ B(-1;\ 1),\ \ C(-1;\ -1),\ \ D(1;\ -1)$.

Вариант № 14

1.	Найти область определения функции: $z=\sqrt{9-3x^2-y^2}+\sqrt{y+4x}$.
2.	Найти частные производные функции $z=arctg\sqrt{x^y}$.
3.	Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=y^2+yx^2$, $x=\sin t$, $y=e^{2t}$.
4.	Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $\left(e^y-3x\right)^2=x^2+a^2$, где $a=const$.
5.	Найти производную функции $z=\sqrt{x^2y+xy^2}$ в точке $D\left(1;\ 2;\ \sqrt{6}\right)$ в направлении градиента.

6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\left(z^2-x^2\right)xyz-y^5=5$ в точке $N(1;\ 1;\ 2)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z=\dfrac{x^3}{1-y}$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z=x^2-xy+y^2+8x+2y$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=xy-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{2}y$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $1\le x\le 2;\quad 2\le y\le 3$.

Вариант № 15

1.	Найти область определения функции: $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$.
2.	Найти частные производные функции $u=\sqrt{2\sin^2 x+\cos y}+z$.
3.	Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\arcsin(x-y)$, $\begin{array}{l} x=3t \\ y=4t^3. \end{array}$
4.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $(x+2y+3z)e^{-xyz}=0$.
5.	Найти производную функции $z=\ln\left(5x^2-4y^2\right)$ в точке $E(1;\ -1;\ 0)$ в направлении градиента.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=arctg\dfrac{y}{x}$ в точке $\left(1;\ 1;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z=\cos(2x-3y)$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z=5x-x^2-y^2+3y$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-xy+2y^2+3x+2y+1$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x=0,\ \ y=0,\ \ x+y=-5$.

Вариант № 16

1.	Найти область определения функции: $z=\sqrt{\ln(2x+y)}$.
2.	Найти частные производные функции $z=x^{xy}$.

3.	Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = arctg\frac{y}{x}$, $x = e^{2t}+1$, $y = e^{2t}-1$.
4.	Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $y^2 = x^2 + x\cos^2 z$.
5.	Найти производную функции $z = \ln\left(5x^2 - 4y^2\right)$ в точке $E(1;\ -1;\ 0)$ в направлении вектора $\vec{e} = 2\vec{i} - \vec{j}$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ в точке $C(1;\ 2;\ -1)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z = x \cdot \ln\frac{y}{x}$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z = xy(1 - x - y)$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в замкнутой области, ограниченной прямоугольником с вершинами: $A(4;\ -3)$, $B(4;\ 2)$, $C(1;\ 2)$, $D(1;\ -3)$.

Вариант № 17

1.	Найти область определения функции: $z = 3^{\sqrt{x^2+y^2-9}} + \frac{2x}{y-4}$.
2.	Найти частные производные функции $u = \ln\left(x + \frac{y}{2z}\right)$.
3.	Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \cos\left(2t + 4x^2 - y\right)$, $x = \frac{1}{t}$; $y = \frac{\sqrt{t}}{\ln t}$.
4.	Найти $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $3^{z+y^2} - xy^3\ln 3 = 15$.
5.	Найти производную функции $z = \frac{x}{x^2+y^2}$ в точке $M\left(1;\ 2;\ \frac{1}{5}\right)$ в направлении вектора $\vec{e} = 3\vec{i} - \vec{j}$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$ в точке $B(2;\ 1;\ 2)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z = \ln(x - 2y)$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + 3xy + y^2 - 3x - 2y$.

9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + 1$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x = 0,\ \ y = 0,\ \ x + y + 3 = 0$.

Вариант № 18

1.	Найти область определения функции: $z = \sqrt{x - y^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x - y - 2}}$.
2.	Найти частные производные функции $u = (\sin x)^{y \cdot z}$.
3.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = arctg\dfrac{x}{y}$, $x = u + v;$ $y = u - v$.
4.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $y \cdot x^2 - e^y = z.$
5.	Найти производную функции $z = 3x^2y - 3xy^2 + y^4$ в точке $C(1;\ 2;\ 0)$ в направлении вектора $\vec{e} = \vec{i} + \vec{j}$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ в точке $A(1;\ 2;\ 2)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z = \dfrac{x^2}{y^2}$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x = 0,\ \ y = 0,\ \ 2x + 3y = 6$.

Вариант № 19

1.	Найти область определения функции: $z = \arccos\dfrac{x}{y} + \sqrt[3]{xy}$.
2.	Найти частные производные функции $z = \sqrt{1 - \ln\dfrac{\cos x}{y}}$.
3.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \dfrac{x^2 y}{\ln\left(\dfrac{y^2}{x}\right)}$, $x = 2u;$ $y = v^2$.

4.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $\left(x^3y\right)^2 - a^2\left(z^3 - y\right) = 0$, где $a = const$.
5.	Найти производную функции $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $N\left(1;\ 1;\ 3\sqrt{2}\right)$ в направлении вектора $\vec{e} = 2\vec{i} - \vec{j}$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $xy^2 + z^3 = 12$ в точке $M\left(1;\ -2;\ 2\right)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z = \ln\left(x + e^{xy}\right)$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z = 7y^2 + 6x^2 - 11$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x - 8y$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x = 0,\ \ y = 0,\ \ -x + y = -6$.

Вариант № 20

1.	Найти область определения функции: $z = \arcsin y - arc\cos\left(x + 2\right)$.
2.	Найти частные производные функции $u = \sqrt[3]{x^2y + \dfrac{y^2}{x} + z}$.
3.	Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = e^{xy} + 2xy,\quad x = 2\cos t;\quad y = \sin t$.
4.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x \cdot \cos y + y \cdot \cos z + z \cdot \cos x = -1$.
5.	Найти производную функции $z = 2x^2 + xy$ в точке $C\left(1;\ 2;\ 4\right)$ в направлении вектора $\vec{e} = 3\vec{i} - \vec{j}$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = arcctg\dfrac{x}{y}$ в точке $N\left(1;\ 1;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z = y^{3x}$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + 3y^2 + x - y$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x = 3,\ \ y = 0,\ \ y = x + 1$.

Вариант № 21

1.	Найти область определения функции: $z=\dfrac{\arccos(2x+3)}{\sqrt{x-2+y^2}}$.
2.	Найти частные производные функции $u=\sin\left(x^2+y^2+z^2\right)$.
3.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^2\cdot y-y^2\cdot x$, $x=u\cdot\cos v$; $y=v\cdot\sin u$.
4.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x+y+z=e^z$.
5.	Найти производную функции $z=x^2+xy+y^2$ в точке $C(0;\ 2;\ 4)$ в направлении вектора $\vec{e}=\{1;\ 2\}$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+y^2-z^2=1$ в точке $K(1;\ 2;\ 2)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z=x^{2y}$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z=x^2-xy+y^2-4x$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-2\cdot y^2+4xy-6x-18$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x=0$, $y=0$, $x+y=3$.

Вариант № 22

1.	Найти область определения функции: $z=\dfrac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{\ln(xy-1)}$.
2.	Найти частные производные функции $u=3\sqrt[3]{\dfrac{1-xy}{-xy-1}}$.
3.	Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^2\cdot\ln y$, $x=2u\cdot v$; $y=\dfrac{u}{v}$.
4.	Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $x+arctg(x\cdot y)-y=0$.
5.	Найти производную функции $z=\mathrm{ar}\,ctg\dfrac{x}{y}$ в точке $\left(1;\ 1;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ в направлении вектора $\vec{e}=\{-1;\ 1\}$.

6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+y^2+z^2=26$ в точке $N(3;\ 4;\ 1)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z=arctg\dfrac{x+y}{x}$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z=xy+x+y$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^3+y^3-3yx-15$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x=0,\ \ y=0,\ \ x+y=4$.

Вариант № 23

1.	Найти область определения функции: $z=\sqrt{\left(x^2+y^2-4\right)\cdot\left(9-x^2-y^2\right)}$.
2.	Найти частные производные функции $u=\sqrt[3]{\ln\left(xy^2+yx^2+z^2\right)}$.
3.	Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\ln\dfrac{x}{y}$, $x=t^4$; $y=\sqrt{t}$.
4.	Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $x+y=e^{\frac{y}{x}}$.
5.	Найти производную функции $z=\mathrm{ar}cctg\left(x^2y\right)$ в точке $\left(1;\ 1;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ в направлении вектора $\vec{e}=2\vec{i}+\vec{j}$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $e^z-z+xy=3$ в точке $C(2;\ 1;\ 0)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z=x\cdot e^y$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z=6x(1-x)-y(y-2)$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2+6x+2y$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x=0,\ \ y=0,\ \ x+y+5=0$.

Вариант № 24

1.	Найти область определения функции: $z=\dfrac{\cos xy}{xy}+\sqrt{1-y}$.
2.	Найти частные производные функции $u=\left(arctg\dfrac{y}{x}\right)^z$.

3.	Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2 - 2xy + y^2$, $x = e^u$; $y = \ln v$.
4.	Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x + y + z = \cos(x + y + z)$.
5.	Найти производную функции $z = \frac{x}{y^2}$ в точке $D(5;\ -1;\ 5)$ в направлении вектора $\vec{e} = 4\vec{i} + \vec{j}$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3y - y^3x - 6 = z$ в точке $B(2;\ 1;\ 0)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z = x + y + \frac{xy}{x - y}$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 5$.
9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 7y^2 + 6x^2 - 11$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $x = 0;\quad y = 0;\quad 1{,}5y + 2x + 3 = 0$.

Вариант № 25

1.	Найти область определения функции: $z = \frac{x + y}{2x + 3y} + arctgx$.
2.	Найти частные производные функции $z = \ln\frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$.
3.	Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \cos\left(x - \sqrt{y}\right)$, $x = t^3$; $y = t^2$.
4.	Найти $\frac{dy}{dx}$, если $xy - \ln y = a$, где $a = const$.
5.	Найти производную функции $z = \ln(2x + 3y)$ в точке $K(-1;\ 1;\ 0)$ в направлении вектора $\vec{e} = \vec{i} - \vec{j}$.
6.	Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2y^2 - x^4 - y^4 + 13$ в точке $A(2;\ 1;\ 0)$.
7.	Найти частные производные второго порядка функции $z = \sin x \cdot \cos y$.
8.	Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

9.	Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy(1 - x - y)$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $y - x = 1;\quad x = 2;\quad y = 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. М.: 2004. Второе издание. 470с.
2. Сборник задач по курсу высшей математики / Под редакцией Кручковича Г.И. М.: Высш. школа. 1973. 586с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985. 380с.
4. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис-Пресс, 2003. Ч.1. 269с.
5. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике. М.: Высш. школа.2000. 303 с.
6. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. М.: Айрис-Пресс, 2007. 576 с.
7. Герасимович А.И. Справочное пособие. М.: Высш. школа, 1990. Ч.2. 272с.