Составители: Горяга Александр Васильевич, доцент;
Рогозин Андрей Владимирович, к.ф.-м.н.;
Соколовский Мирон Наумович, доцент.

*Печатается по решению редакционно-издательского совета*
*Омского государственного технического университета*

Содержание

## Предисловие

В течение нескольких десятилетий кафедра высшей математики каждый год организует и проводит внутривузовскую олимпиаду по математике для студентов 1 и 2-го курсов технических и экономических специальностей.

В последние годы кафедра проводит командные олимпиады (команда до 5-ти человек), при этом студенты организуют свои команды сами, как правило, по специальностям. Ежегодно в олимпиаде участвуют 250-350 студентов младших курсов.

В изложенных в работе олимпиадных заданиях (2005-2009 гг) задачи имеют различную степень трудности, но их содержания и решения в любом случае не выходят за рамки изучаемого в ОмГТУ общего курса математики. Мы стремились изложить решение задач так, чтобы студенты могли разобраться в них самостоятельно.

Методические указания могут быть использованы как преподавателями, готовящими студентов к различным математическим олимпиадам, так и студентами при подготовке к участию в них.

**Задания**

**ОЛИМПИАДА -2005 год**

**1-й курс**

| | |
|---|---|
| 1 | Найти все тройки действительных чисел $a, b, c,$ для которых $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^n = E$, где $n$ - некоторое натуральное число, $E$ - единичная матрица. |
| 2 | Найти все действительные корни уравнения $x \cdot e^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0$. |
| 3 | Пусть $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$. Показать, что существует число $c$ из $(0,1)$ такое, что $f'(c) = 0$. |
| 4 | Две вершины треугольника зафиксированы, а третья движется по плоскости так, что один из углов при основании треугольника остается вдвое больше другого. Какую линию описывает третья вершина? |
| 5 | Пусть $O, A, B, C$ - четыре точки пространства, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ и $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$. Показать, что точки $A, B, C$ лежат на одной прямой. |
| 6 | Вычислить $\int \frac{\sin 2x \, dx}{\sqrt{\sin^4 x + 2\sin^2 x + 2}}$. |
| 7 | В произвольном выпуклом шестиугольнике соединены середины противоположных сторон. Всегда ли из полученных отрезков можно сложить треугольник? |
| 8 | Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \frac{x + 2^{1/x}}{x + 3^{1/x}} \right)^{x^2}$. |
| 9 | Найти значение производной 2005-го порядка функции $y = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 5x$ в точке $x = 0$. |
| 10 | Функция $f(x)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет равенству $f''(x) + x \cdot q(x) f'(x) + f(x) = 0$, где $q(x) \ge 0$ на всей числовой оси. Доказать, что $f(x)$ и $f'(x)$ - ограничены на всей числовой оси. |

## 2-й курс

| | |
|---|---|
| 1 | Найти все тройки действительных чисел $a,\ b,\ c,$ для которых $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^n = E$, где $n$ - некоторое натуральное число, $E$ - единичная матрица. |
| 2 | Вычислить $\iint\limits_D e^{x/y^2}dxdy$, где $D$ ограничена линиями: $y=\sqrt{x}$, $x=0$, $y=1$. |
| 3 | Пусть $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$. Показать, что существует число $c$ из $(0,1)$ такое, что $f'(c)=0$. |
| 4 | Две вершины треугольника зафиксированы, а третья движется по плоскости так, что один из углов при основании треугольника остается вдвое больше другого. Какую линию описывает третья вершина? |
| 5 | Функция $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$. Показать, что $\int\limits_0^\pi x\cdot f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\cdot\int\limits_0^\pi f(\sin x)dx$. |
| 6 | Показать, что $\int\limits_0^1 x^x dx > 0,69$. |
| 7 | Найти значение производной 2005-го порядка функции $y=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 5x$ в точке $x=0$. |
| 8 | Функция $f(x)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет равенству $f''(x)+x\cdot q(x)f'(x)+f(x)=0$, где $q(x)\ge 0$ на всей числовой оси. Доказать, что $f(x)$ и $f'(x)$ - ограничены на всей числовой оси. |
| 9 | Доказать равенство $\int\limits_0^1 x^{-x}dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-n}$. |
| 10 | Сколько положительных корней имеет многочлен $P(x)=x^{2005}-a_{2004}x^{2004}-a_{2003}x^{2003}-\ldots-a_1x-a_0$, если $a_0,a_1,\ldots,a_{2004}$ - положительные числа? |

**ОЛИМПИАДА -2006 год**

**1-й курс**

| | |
|---|---|
| 1 | Вычислить $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$. |
| 2 | Можно ли через прямые $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$ $\begin{cases} x=11+8t \\ y=6+4t \\ z=2+t \end{cases}$ провести плоскость? |
| 3 | Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}$. |
| 4 | Построить линию $4x^4-y^4-4x^2+1=0$. |
| 5 | Решить уравнение $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $x\in(0,1)$. |
| 6 | Координаты всех вершин многоугольника на плоскости – рациональные числа. Доказать, что площадь многоугольника – рациональное число. |
| 7 | Найти все ограниченные в окрестности нуля функции $f(x)$, удовлетворяющие тождеству $f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2$. |
| 8 | Через точку (0,0,1) проведены все прямые с направляющими векторами $\vec{l}=(a,a^2,-1)$, где $a$ – любое действительное число. По каким линиям пересекается полученная поверхность с плоскостями, перпендикулярными осям координат? |
| 9 | Все элементы квадратной матрицы $A$ порядка $n$ – числа 0; 1 или -1, причем каждая строка и столбец содержат ровно один ненулевой элемент. Доказать, что $A^m=E$, где $E$ – единичная матрица, а $m$ – некоторое натуральное число. |
| 10 | Вертолет должен пролететь 25 км на север, затем 200 км на восток при постоянном по направлению и величине векторе скорости, причем скорость ветра равна собственной скорости вертолета. При каком направлении ветра на полет уйдет минимальное время? |

## 2-й курс

| | |
|---|---|
| 1 | Вычислить $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$. |
| 2 | Можно ли через прямые $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$ $\begin{cases} x=11+8t \\ y=6+4t \\ z=2+t \end{cases}$ провести плоскость? |
| 3 | При каких значениях действительного числа $\alpha$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}$? |
| 4 | Решить уравнение $x\cdot y\cdot y''+x\cdot\left(y'\right)^2=3y\cdot y'$. |
| 5 | Координаты всех вершин многоугольника на плоскости – рациональные числа. Доказать, что площадь многоугольника – рациональное число. |
| 6 | Найти площадь эллипса, образованного пересечением цилиндра $\pi x^2+\frac{y^2}{l^2}=1$ и плоскости $x+2y+2z-5=0$. |
| 7 | Найти все ограниченные в окрестности нуля функции $f(x)$, удовлетворяющие тождеству $f\left(x\right)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2$. |
| 8 | Вычислить $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{e^x+1}dx$. |
| 9 | Все элементы квадратной матрицы $A$ порядка $n$ – числа 0; 1 или -1, причем, каждая строка и столбец содержит ровно один ненулевой элемент. Доказать, что $A^m=E$, где $E$ – единичная матрица, а $m$ – некоторое натуральное число. |
| 10 | Функция $f(x,y)$ – дифференцируема и удовлетворяет тождеству $x\cdot f'_x(x,y)+y\cdot f'_y(x,y)=f(x,y)$. Доказать, что при $t>0$ $f(t\cdot x,t\cdot y)=t\cdot f(x,y)$. |

**ОЛИМПИАДА -2007 год**

**1-й курс**

| | |
|---|---|
| 1 | Построить график функции $f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. |
| 2 | Вычислить $\int\dfrac{x^{2007}}{x^{1004}+1}dx$. |
| 3 | Составить уравнения всех окружностей, проходящих через точки $A(2;4)$ и $B(6;-4)$. |
| 4 | Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Вычислить $\left\|\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_1A_n}\right\|$. |
| 5 | Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$. Доказать, что $f(x)$ нельзя представить в виде отношения двух многочленов. |
| 6 | Изобразить множество точек $(x;y)$ плоскости, для которых выполнено неравенство $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>1$. |
| 7 | Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$. |
| 8 | Действительная функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и удовлетворяет тождеству $f(x+a)=\sqrt{0,25-\left(f(x)\right)^2}$, где $a$ – заданная постоянная, $a>0$. Доказать, что $f(x)$ – периодическая и привести пример непостоянной функции с указанными свойствами. |
| 9 | На маленьком острове стоит прожектор, освещающий отрезок моря длиной 1 км. Прожектор вращается равномерно вокруг вертикальной оси, делая один оборот в минуту. Сможет ли подплыть к острову незаметно катер, имеющий скорость 0,9 км/мин? |
| 10 | В невырожденной квадратной матрице $A$ порядка $n$ сумма элементов любой строки равна 1. Найти сумму всех элементов обратной матрицы $A^{-1}$. |

## 2-й курс

| | |
|---|---|
| 1 | Найти все функции, у которых вторая производная совпадает с пятой. |
| 2 | Доказать, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$ отсекают на осях координат отрезки, сумма длин которых не зависит от выбора точки касания. |
| 3 | Составить уравнения всех окружностей, проходящих через точки $A(2;4)$ и $B(6;-4)$. |
| 4 | Привести пример такого сходящегося знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n \ln n$ расходится. |
| 5 | Построить интегральную кривую (график решения) задачи Коши $\begin{cases} y'\left(x+y^2\right)=y \\ y(1)=1 \end{cases}$. |
| 6 | Изобразить множество точек $(x;y)$ плоскости, для которых выполнено неравенство $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>1$. |
| 7 | Вычислить $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$. |
| 8 | Действительная функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и удовлетворяет тождеству $f(x+a)=\sqrt{0,25-\left(f(x)\right)^2}$, где $a$ – заданная постоянная, $a>0$. Доказать, что $f(x)$ – периодическая и привести пример непостоянной функции с указанными свойствами. |
| 9 | На маленьком острове стоит прожектор, освещающий отрезок моря длиной 1 км. Прожектор вращается равномерно вокруг вертикальной оси, делая один оборот в минуту. Сможет ли подплыть к острову незаметно катер, имеющий скорость 0,9 км/мин? |
| 10 | В невырожденной квадратной матрице $A$ порядка $n$ сумма элементов любой строки равна 1. Найти сумму всех элементов обратной матрицы $A^{-1}$. |

**ОЛИМПИАДА -2008 год**

**1-й курс**

| | |
|---|---|
| 1 | У студента стал «глючить» его любимый калькулятор. Он может только складывать и вычитать данные числа и вычислять обратное к данному числу $a$, т.е. $a^{-1}$. Как ему, используя только этот калькулятор, для данного числа $a$ вычислить $a^2$? |
| 2 | Существует ли $x \neq 1$, при котором определитель порядка 2008, в котором $a_{ii} = x$, $a_{ij} = 1 \left(i \neq j\right)$, равен нулю ? |
| 3 | Построить график функции $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x}{1+x^n} (x \geq 0)$. |
| 4 | Доказать, что уравнение $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx = 0$ имеет хотя бы одно решение в интервале $\left(0, \pi\right)$. |
| 5 | Вычислить $\int x^3 \left(x^2 - a\right)^{2007} dx, \quad \left(a = \mathrm{const}\right)$. |
| 6 | В треугольной пирамиде $S_k$ - площадь $k$-ой грани, $\vec{n}_k$ - единичная внешняя нормаль $k$-ой грани $\left(k = 1, 2, 3, 4\right)$. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{4} S_k \cdot \vec{n}_k = \vec{0}$. |
| 7 | Решить уравнение $e^{\frac{2x}{1+x^2}} = \dfrac{\ln y}{y}$. |
| 8 | Доказать, что на плоскости существует единственный равносторонний треугольник, координаты всех вершин которого удовлетворяют уравнению $x^3 + 3x \cdot y + y^3 = 1$ и найти его площадь. |

## 2-й курс

| | |
|---|---|
| 1 | У студента стал «глючить» его любимый калькулятор. Он может только складывать и вычитать данные числа и вычислять обратное к данному числу $a$, т.е. $a^{-1}$. Как ему, используя только этот калькулятор, для данного числа $a$ вычислить $a^2$ ? |
| 2 | Существует ли $x \neq 1$, при котором определитель порядка 2008, в котором $a_{ii} = x$, $a_{ij} = 1 (i \neq j)$, равен нулю ? |
| 3 | Могут ли функции $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \sin 2x$ быть решением на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ дифференциального уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ с непрерывными коэффициентами $p(x)$ и $q(x)$? |
| 4 | Доказать, что уравнение $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx = 0$ имеет хотя бы одно решение в интервале $(0, \pi)$. |
| 5 | Пусть $f(x) \geq 0$, $f''(x) \geq 0$ на $[0,1]$ и $f'(0) = 1$, $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0,5$. Найти $f(x)$. |
| 6 | Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. |
| 7 | Решить уравнение $e^{\frac{2x}{1+x^2}} = \frac{\ln y}{y}$. |
| 8 | Вычислить $\iint\limits_D \frac{1}{x^3 + y^3} dxdy$, где $D: x \geq 0,\ y \geq 0, x + y \geq 1$ . |

## ОЛИМПИАДА -2009 год
## 1-й курс

| | |
|---|---|
| 1 | Найти уравнения всех общих касательных к окружностям радиусов 3 и 4 с центрами в точках (0,5) и (5,0) соответственно. |
| 2 | Найти площадь четырехугольника, стороны которого лежат на прямых $x-y+1=0$, $2x-2y+3=0$, $x+y+3=0$, $2x+2y+5=0$. |
| 3 | Сколько действительных решений имеет уравнение $x^{2009}+x^{2007}+x^{2005}+\ldots+x+1=0$? |
| 4 | Найти максимальное значение определителя $\left\|A+\|A\|\cdot A\right\|$, где $A$ - квадратная матрица, в каждой строке и столбце которой одна единица, а остальные элементы – нули. |
| 5 | Построить график функции $y=\dfrac{\sin(3\arcsin x)}{x}$. |
| 6 | Вычислить $\displaystyle\int\frac{x\sin x+\cos x}{x^2+\cos^2 x}\,dx$. |
| 7 | При каких $n$ система $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_2+x_3=2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}+x_n=n-1 \\ x_n+x_1=n \end{cases}$ имеет решение? |
| 8 | Найти наибольшее значение функции $y=\sqrt{n}\cdot\sin x\cdot\cos^n x$ на $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ($n$ - любое натуральное число). |
| 9 | Найти все $f(x)$ такие, что для любых $x,y\neq 0$ выполняется $x\cdot f(y)-y\cdot f(x)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. |
| 10 | При каком $\alpha\neq 0$ абсцисса точки перегиба функции $y=x\cdot e^{-\alpha x}$ имеет наименьшее натуральное значение? |

## 2-й курс

| | |
|---|---|
| 1 | Записать уравнение круговой цилиндрической поверхности радиуса 1, ось которой проходит через точки (0, 0, 0) и (1, 1, 1) |
| 2 | Решить задачу Коши $y' = y + \int\limits_0^1 y(x)dx,\ y(0) = 1.$ |
| 3 | Вычислить $\int\limits_1^{2009} (x-1)(x-2)...(x-2009)dx$ |
| 4 | Найти все решения матричного уравнения $A \cdot X + X \cdot A = 2 \cdot A$, где $A^3 = E$, $E$ - единичная матрица. |
| 5 | Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(S - S_n)$, где $S$ - сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, а $S_n$ - его частичные суммы. |
| 6 | Вычислить предел $\lim\limits_{n->\infty} \frac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \frac{4^3+1}{4^3-1} \cdot ... \cdot \frac{n^3+1}{n^3-1}$ |
| 7 | При каких $n$ система $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ ............... \\ x_{n-1} + x_n = n-1 \\ x_n + x_1 = n \end{cases}$ имеет решение? |
| 8 | Найти наибольшее значение функции $y = \sqrt{n} \cdot \sin x \cdot \cos^n x$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ($n$ - любое натуральное число). |
| 9 | Найти все $f(x)$ такие, что для любых $x, y \neq 0$ выполняется $x \cdot f(y) - y \cdot f(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$. |
| 10 | При каком $\alpha \neq 0$ абсцисса точки перегиба функции $y = x \cdot e^{-\alpha x}$ имеет наименьшее натуральное значение? |

## Решения

## ОЛИМПИАДА -2005 год
## 1-й курс

1. Индукцией по степени $n$ легко проверяется, что

$$A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & b_n \\ 0 & c^n \end{pmatrix},$$

где

$$b_1 = b,\ b_{n+1} = ba^n + cb_n,\ n \ge 1. \qquad (*)$$

По условию $a^n = c^n = 1,\ b_n = 0$ при некотором $n$, первое из этих равенств возможно только при $a = \pm 1,\ b = \pm 1.$

Если $a = -c = \pm 1,$ то из (*) следует $b_2 = ba + cb = b(a + c) = 0$ и $A^2 = E$, т.е. тройки $(-1, b, 1)$ и $(1, b, -1)$ удовлетворяют условию при любых $b \in R$.

Если $a = c = 1,$ (*) запишется в виде $b_1 = b,\ b_{n+1} = b + b_n \Rightarrow b_n = nb$ и $b_n = 0$ возможно только при $b = 0,$ а при $b = 0\quad A^2 = E$.

Если $a = c = -1,$ то $b_{n+1} = b(-1)^n - b_n \Rightarrow b_n = (-1)^n nb,\ b_n = 0$ только при $b = 0$, а при $b = 0\ A^2 = E$.

**Ответ:** $(-1, b, 1), (1, b, -1),\ b \in R; (1, 0, 1),\ (-1, 0, -1)$.

2. $$\left( x \cdot e^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1 \right)' = x(1 - e^{-x}) > 0 \quad \text{при} \quad x \ne 0.$$

Следовательно левая часть уравнения строго возрастает.

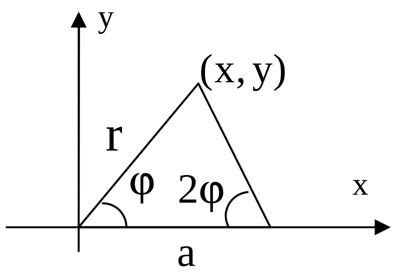
$$\left. \left( x \cdot e^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1 \right) \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow x = 0$$ - единственный корень.

3. $f(0) = 0$ т.к. третья строка определителя становится пропорциональной первой;

$f(1) = 0$ т.к. вторая строка определителя становится пропорциональной первой.

Так как $f(0) = f(1)$, то утверждение следует из теоремы Ролля.

4. Введем систему координат и необходимые обозначения




По теореме синусов

$$\frac{r}{\sin 2\varphi}=\frac{a}{\sin(\pi-3\varphi)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\sin 3\varphi = a\sin 2\varphi =$$

$$=2a\sin\varphi\cos\varphi,\ 0<\varphi<\frac{\pi}{3}.$$

Т.к. $\sin 3\varphi=\sin\varphi(3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$, то $r(3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=2a\cos\varphi$. Далее с учетом $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$ получаем

$$3x^2-y^2=2ax\Rightarrow 3\left(x^2-\frac{2}{3}ax+\frac{a^2}{9}\right)-y^2=\frac{a^2}{3}\Rightarrow\frac{\left(x-a/3\right)^2}{\left(a/3\right)^2}-\frac{y^2}{\left(a/\sqrt{3}\right)^2}=1 \text{ -}$$

уравнение гиперболы.

5. Зададим векторную функцию четырех точек пространства равенством

$$g(O,A,B,C)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$$

$$\vec{b}=\vec{a}+\overrightarrow{AB},\ \vec{c}=\vec{a}+\overrightarrow{AC}$$

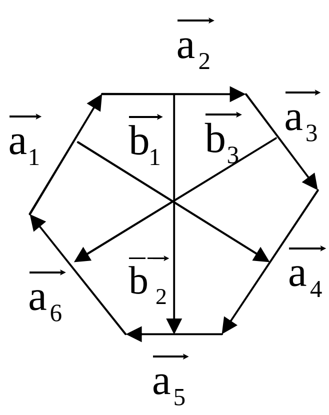
$$g=\vec{a}\times\left(\vec{a}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\vec{a}+\overrightarrow{AB}\right)\times\left(\vec{a}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\vec{a}+\overrightarrow{AC}\right)\times\vec{a}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}\Rightarrow A,B,C$ лежат на одной прямой.

6. $$\int\frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{\sin^4 x+2\sin^2 x+2}}=\left|\begin{matrix}t=\sin^2 x+1\\ dt=\sin 2x dx\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c=\ln\left|\sin^2 x+1+\sqrt{\sin^4 x+2\sin^2 x+2}\right|+c$$

7.




$$\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2}+\overrightarrow{b_3}=\left(\frac{\overrightarrow{a_1}}{2}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\frac{\overrightarrow{a_4}}{2}\right)-$$

$$-\left(\frac{\overrightarrow{a_2}}{2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}+\frac{\overrightarrow{a_5}}{2}\right)+\left(\frac{\overrightarrow{a_3}}{2}+\overrightarrow{a_4}+\overrightarrow{a_5}+\frac{\overrightarrow{a_6}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}+\overrightarrow{a_5}+\overrightarrow{a_6}\right)=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2}+\overrightarrow{b_3}=0$$

**Ответ:** да, всегда.

8. Пусть $A$ - искомый предел. Тогда

$$\ln A=\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\ln\left(1+\frac{2^{1/x}-3^{1/x}}{x+3^{1/x}}\right)\right)=$$

$$=\left|\alpha=\frac{2^{1/x}-3^{1/x}}{x+3^{1/x}}\to 0, x\to\infty; \ln(1+\alpha)\sim\alpha, \alpha\to 0\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+3^{1/x}}\cdot\left(\frac{2^{1/x}-1}{\left(1/x\right)}-\frac{3^{1/x}-1}{\left(1/x\right)}\right)=1(\ln 2-\ln 3)=\ln\frac{2}{3}\Rightarrow A=\frac{2}{3}$$

9. Функция преобразуется по тригонометрическим формулам в сумму:

$$y=\frac{1}{4}(-\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x-\sin 8x)$$

$$\left(\sin ax\right)^{(2005)}=a^{2005}\cos ax\Rightarrow y^{(2005)}(0)=\frac{1}{4}\left(-2^{2005}+4^{2005}+6^{2005}-8^{2005}\right)=$$

$$=2^{2003}\left(-1+2^{2005}+3^{2005}-4^{2005}\right).$$

10. Умножим дифференциальное уравнение на $2f'(x)$:

$$2f'(x)f''(x)+2f'(x)f(x)=-2xq(x)\left(f'(x)\right)^2$$

или

$$\left[\left(f'(x)\right)^2+\left(f(x)\right)^2\right]'=-2xq(x)\left(f'(x)\right)^2\Rightarrow \text{функция}$$

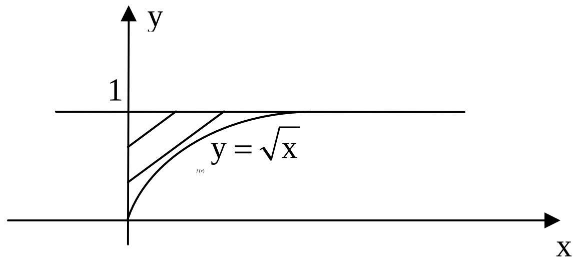
$\varphi(x)=\left(f'(x)\right)^2+\left(f(x)\right)^2$ не убывает при $x<0$ и не возрастает при $x>0\Rightarrow$

$\varphi(x)\le\varphi(0)=M=\text{const}$ т.е.

$\left(f'(x)\right)^2+\left(f(x)\right)^2\le M\Rightarrow\left|f(x)\right|\le\sqrt{M},\left|f'(x)\right|\le\sqrt{M}$ ч.т.д.

## 2-й курс

1. см. 2005, 1 курс, №1.
2. Область $D$ имеет вид




$$\iint\limits_D e^{x/y^2}dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{y^2} e^{x/y^2}dx=\int\limits_0^1\left[\left. y^2e^{x/y^2}\right]\right|_{x=0}^{x=y^2}dy=\int\limits_0^1 y^2(e-1)dy=\frac{e-1}{3}.$$

3. см. 2005, 1 курс, №3.
4. см. 2005, 1 курс, №4.
5.

$$I=\int\limits_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx=\left|\begin{matrix} t=\pi-x\\ dx=-dt\end{matrix}\right|=-\int\limits_{\pi}^{0}(\pi-t)\cdot f(\sin t)dt=$$

$$=\pi\int\limits_0^{\pi} f(\sin t)dt-I\Rightarrow 2I=\pi\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

ч.т.д.

6. Исследуем $y=x^x,\ x\in(0,1]$ и используем неравенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx\ge(b-a)\min_{a\le x\le b}\{f(x)\}.$$

$y'=y(x\ln x)'=x^x(\ln x+1)$, т.е. $y'<0$ при $x<\frac{1}{e}$, и $y'>0$ при $x>\frac{1}{e}$.

Тогда $y(x)\ge y\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\approx 0,6922\Rightarrow\int\limits_0^1 x^x dx>0,69$ ч.т.д.

7. см. 2005, 1 курс, №9.
8. см. 2005, 1 курс, №10.
9. $x^{-x}=e^{-x\ln x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(x\ln x)^n\Rightarrow\int\limits_0^1 x^{-x}dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}I_{n,n}$, где

$$I_{n,m}=\int\limits_0^1 x^n\ln^m x dx.$$

Имеем $I_{n,0}=\int\limits_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$, а при $m\ge 1$

$$I_{n,m}=\begin{vmatrix} u=\ln^m x & du=\dfrac{m\ln^{m-1}x}{x}dx \\ dv=x^n dx & v=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\end{vmatrix}=$$

$$=\left.\frac{x^{n+1}\ln^m x}{n+1}\right|_0^1-\frac{m}{n+1}I_{n,m-1}=\frac{m}{n+1}I_{n,m-1}\Rightarrow \text{по индукции}$$

$$I_{n,m}=\frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}\Rightarrow I_{n,n}=\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}\Rightarrow \int_0^1 x^{-x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{(-1)^n n!}{\left(n+1\right)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$$

ч.т.д.

10. Очевидно, что

$$P^{(k)}(0)<0,\ 0\le k\le 2004$$

$$P^{(k)}(+\infty)=+\infty,\ 0\le k\le 2004$$

$$P^{(2005)}(x)=2005!>0\Rightarrow$$

$P^{(2004)}(x)$ один раз меняет знак с – на + на $(0,+\infty)$, $\Rightarrow$ $P^{(2003)}(x)$ один раз меняет знак с – на + на $(0,+\infty),\ldots,$ $P(x)$ один раз меняет знак с – на + на $(0,+\infty)$, т.е. $P(x)=0$ имеет ровно 1 положительный корень.

## ОЛИМПИАДА -2006 год
## 1-й курс

1. $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{\frac14-\left(x-\frac12\right)^2}}dx=\arcsin(2x-1)+c$.

2. Через прямые $L_1$ и $L_2$ можно провести плоскость в двух случаях: 1) $L_1\| L_2$ 2) $L_1\cap L_2\ne\varnothing$.

В данной задаче $L_1$ и $L_2$ не параллельны, т.к. их направляющие векторы $l_1\{2;2;1\}$, $l_2\{8;4;1\}$. Ищем точку пересечения $L_1$ и $L_2$ ($t$ и $s$ - обозначения параметров в уравнениях $L_1$ и $L_2$):

$$\begin{cases} x=1+2t=11+8s \\ y=2t=6+4s \\ z=t=2+s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=1,s=-1 \\ x=3,y=2,z=1\end{cases}\Leftrightarrow L_1\cap L_1=M(3;2;1)$$

**Ответ:** можно, т.к. $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$.

3. а) $$\frac{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1}{\frac{1}{n}}$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=(\text{правило Лопиталя})=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha.$$

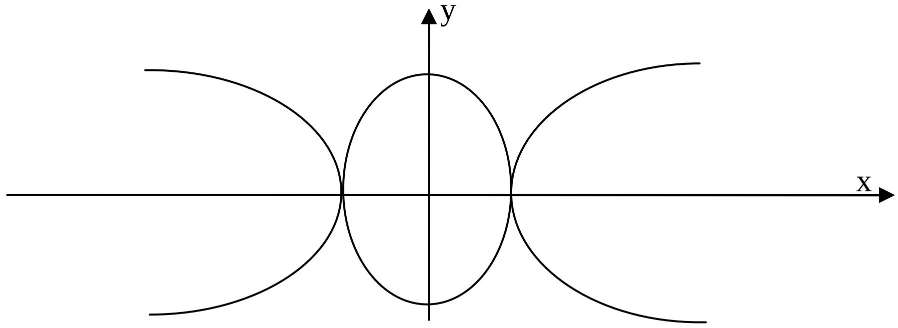
**Ответ:** $\alpha$.

4. $$4x^4-y^4-4x^2+1=0\Leftrightarrow(2x^2-1)^2-y^4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2-y^2-1\right)\left(2x^2+y^2-1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2-y^2-1\right)=0 \text{ или } \left(2x^2+y^2-1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{y^2}{1}=1 \text{ (гипербола) или } \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{y^2}{1}=1 \text{ (эллипс)}$$




5.

$$\begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix}^{2k}=\begin{pmatrix}x^{2k} & 0\\ 0 & x^{2k}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix}^{2k-1}=\begin{pmatrix}0 & x^{2k-1}\\ x^{2k-1} & 0\end{pmatrix}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix}^{n}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^{2k} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}x^{2k-1}\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}x^{2k-1} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}x^{2k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x^2}{1-x^2} & \frac{x}{1-x^2}\\ \frac{x}{1-x^2} & \frac{x^2}{1-x^2}\end{pmatrix}$$

(сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии). Матричное равенство из условия эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{1-x^2} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x}{1-x^2} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

6. Для треугольника с вершинами $A(x_1, y_1, 0)$, $B(x_2, y_2, 0)$, $C(x_3, y_3, 0)$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right| - \text{рациональное.}$$

Площадь многоугольника равна сумме площадей треугольников, т.е. сумме рациональных чисел.

7. По условию $f(x) = x^2 + \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$ для *любого* $x$.

В частности,

$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \left(\frac{x}{2^n}\right)^2 + \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$, $n \geq 0$. Отсюда последовательно получаем

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{4}\right)\right) = x^2\left(1 + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} f\left(\frac{x}{4}\right);$$

$$f(x) = x^2\left(1 + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{16} + \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{8}\right)\right) = x^2\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2}\right) + \frac{1}{8} f\left(\frac{x}{8}\right);$$

..........................................................................................

$$f(x) = x^2\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{1}{8^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right), \ n \geq 1 \qquad (*)$$

При $n \to \infty$ имеем $\frac{x}{2^n} \to 0$, и в силу ограниченности $f(x)$ в окрестности $x = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=0.$$

Теперь из (*) при $n\to\infty$ и формулы суммы геометрической прогрессии получаем

$$f(x)=x^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(1/8\right)^n}{1-\left(1/8\right)}=\frac{8}{7}x^2.$$

8. Параметрические уравнения прямых имеют вид:

$$\begin{cases} x=at \\ y=a^2t \quad a,t\in R \\ z=1-t \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{x^2}{y}=1-z\Leftrightarrow x^2-y+yz=0$$ - уравнение поверхности из условия задачи.

1) $x=c: y(1-z)=c^2$ - пара перпендикулярных прямых ($c=0$), гипербола ($c\neq 0$).

2) $y=c: x^2=c(1-z)$ - прямая ($c=0$), парабола ($c\neq 0$).

3) $z=c: x^2=y(1-c)$ - прямая ($c=1$), парабола ($c\neq 1$).

9. Пусть $M_n$ - множество всех матриц указанного вида. Тогда

1) $A\in M_n, B\in M_n\Rightarrow AB\in M_n$, т.к. для любой строки $A$ (любого столбца $B$) существует ровно один столбец $B$ (строка $A$) такие, что произведение строки $A$ на столбец $B$ не равно 0 (и равно $\pm 1$).

2) Число различных матриц в $M_n$ конечно ($\leq 2^n\cdot n!$) т.к. число различных первых строк равно $2n$, для каждого выбора первой строки $2(n-1)$ выборов второй и т.д.

Из 1) и 2) следует, что при $k>2^n\cdot n!$ в последовательности $A, A^2, \ldots, A^k$ есть по крайней мере две совпадающие $A^i=A^j$, $i>j$. Т.к. $A$ - невырожденная матрица ($\det A=\pm 1$), то $A^{i-j}=E$. Ч.т.д.

10. Введем систему координат, в которой OX направлена на восток, OY – на север. Пусть $v$ - собственная скорость вертолета, $\varphi$ - угол вектора скорости ветра $\vec{u}$ с направлением на север. Очевидно, что для минимального времени полета $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ и $\vec{u}=\left(v\sin\varphi, v\cos\varphi\right)$ (т.к. $\left|\vec{u}\right|=v$).

Пусть $\vec{v}=\left(v_x, v_y\right)$ - вектор собственной скорости вертолета при полете на север. Тогда $v_x+v\sin\varphi=0$, $v_y=\sqrt{v^2-(v\sin\varphi)^2}=v\cos\varphi$, и время полета на север $t_1=\dfrac{25}{v\cos\varphi+v\cos\varphi}=\dfrac{25}{2v}\dfrac{1}{\cos\varphi}$.

Аналогично, $t_2=\dfrac{200}{2v}\dfrac{1}{\sin\varphi}$ - время полета на восток. Общие затраты времени $t=t_1+t_2=\dfrac{25}{2v}\left(\dfrac{1}{\cos\varphi}+\dfrac{8}{\sin\varphi}\right)$ и min времени достигается при

$$\frac{dt}{d\varphi}=\frac{25}{2v}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{8\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right)=0\Rightarrow\sin^3\varphi=8\cos^3\varphi\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=2.$$

**2-й курс**

1. см. 2006, 1 курс, №1.
2. см. 2006, 1 курс, №2.
3. 1) $\alpha\le 0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}=\infty$ - расходится по необходимому признаку.

2) $0<\alpha\le 1\Rightarrow a_n=\dfrac{\ln n}{n^\alpha}\ge\dfrac{\ln 2}{n^\alpha}$ -расходится по признаку сравнения т.к. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ - расходится при $0<\alpha\le 1$.

3) При $\alpha>1$ положим $\delta=\dfrac{\alpha-1}{2}>0$ и сравним наш ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\delta}}$ (обобщенный гармонический ряд):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}\cdot\frac{n^{1+\delta}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\delta}=(\text{правило Лопиталя})=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\delta n^{\delta-1}}=0\Rightarrow$ для любого $c>0$ $a_n<cb_n$ начиная с некоторого номера $n\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ - сходится.

**Замечание.** При $\alpha > 1$ функция $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$ положительна (при $x > 1$), убывает (при $x > e$ и тем более при $x > 3$) и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; для сходимости исследуемого ряда можно использовать интегральный признак.

**Ответ:** $\alpha > 1$.

4. Введем новую неизвестную функцию $p = yy'$. Тогда

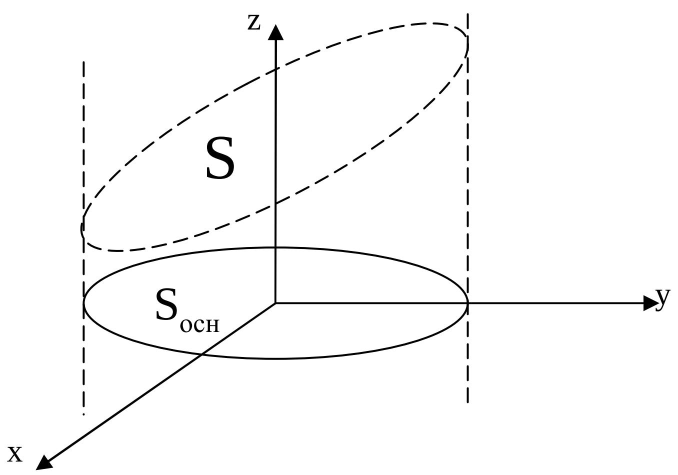
$$xp' = 3p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{3}{x}dx \Rightarrow \ln p = 3\ln x + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = c_1x^3 \Rightarrow yy' = c_1x^3 \Rightarrow ydy = c_1x^3dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = c_1x^4 + c_2 \Rightarrow y^2 = c_1x^4 + c_2.$$

5. см. 2006, 1 курс, №6.

6.




Пусть $\alpha$ - угол между плоскостью и OXY,

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}.$$

$$S\cos\alpha = S_{осн} = \pi ab\frac{2}{3} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} a = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}, b = l - \text{полуоси} \\ \text{эллипса в основании} \end{array} \right| =$$

$$= \pi\frac{1}{\sqrt{\pi}}l \Rightarrow S = \frac{3l\sqrt{\pi}}{2}.$$

7. см. 2006, 1 курс, №7.

8. $$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{e^x + 1}dx = \left| \begin{array}{c} x = -t \\ dx = -dt \end{array} \right| = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{\sin^2 t}{e^{-t} + 1}(-dt) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \sin^2 x}{e^x + 1}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{e^x + 1}dx + \int_0^{\pi} \frac{e^x \sin^2 x}{e^x + 1}dx = \int_0^{\pi} \frac{(1 + e^x)\sin^2 x}{e^x + 1}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}$$

9. см. 2006, 1 курс, №9.

10. Фиксируем $x, y$ и рассмотрим $g(t)=\frac{1}{t}f(tx,ty),\ t>0$.

Имеем $g'(t)=-\frac{1}{t^2}f(tx,ty)+\frac{1}{t}\left[xf'_x(tx,ty)+yf'_y(tx,ty)\right]=$

$=\frac{1}{t^2}\left[-f(tx,ty)+txf'_x(tx,ty)+tyf'_y(tx,ty)\right]=0$ ( из условия с заменой $(x,y)$ на $(tx,ty)$ ).

Теперь из $g'(t)=0,\ t>0$ следует, что $g(t)=\mathrm{const}=g(1),\ t>0$ т.е. $\frac{1}{t}f(tx,ty)=f(x,y)$ ч.т.д.

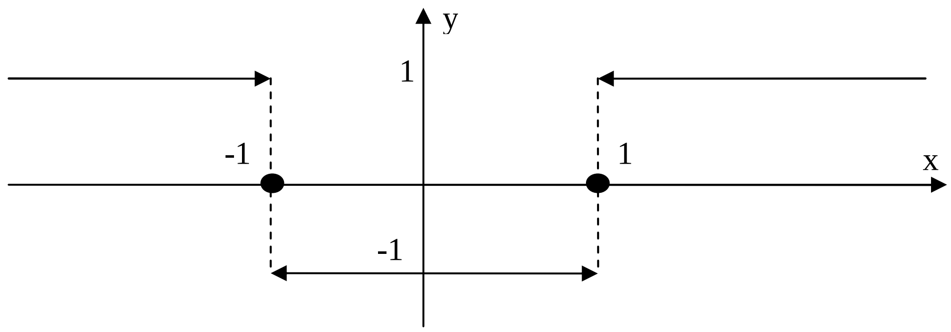
## ОЛИМПИАДА -2007 год
## 1-й курс

1. При $|x|<1$ $f(x)=-1$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=0$

При $|x|=1$ $f(x)=0$;

При $|x|>1$ $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=1$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$

Отсюда график




2.

$$\int\frac{x^{2007}}{x^{1004}+1}dx=\frac{1}{1004}\int\frac{x^{1004}d\left(x^{1004}\right)}{x^{1004}+1}=\left|x^{1004}=t\right|=\frac{1}{1004}\int\frac{tdt}{1+t}=$$

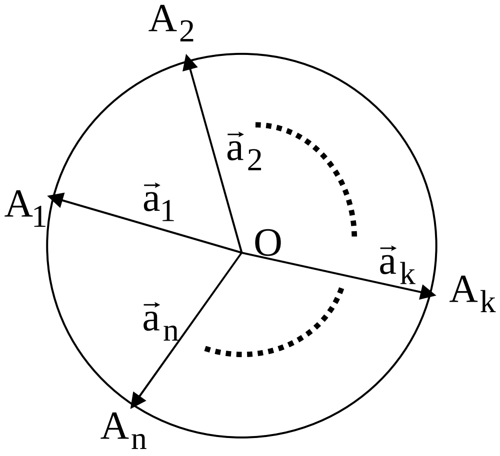
$$=\frac{1}{1004}\left(t-\ln|1+t|\right)+c=\frac{x^{1004}-\ln\left|1+x^{1004}\right|}{1004}+c$$

3. Точка $C(4;0)$ - середина отрезка $AB$,

$\overrightarrow{AB}=\{4,-8\}\perp\{2,1\}\Rightarrow\begin{cases}x=4+2t\\ y=t\end{cases}$ - параметрическое уравнение серединного перпендикуляра к отрезку $AB$, т.е. точки $O(4+2t;t),\ t\in\mathbb{R}$ - центры искомых окружностей. Уравнения искомых окружностей имеют вид $(x-4-2t)^2+(y-t)^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=(2-4-2t)^2+(4-t)^2$ или

$$x^2+y^2-4(t+2)x-2ty+16t-4=0.$$

4. Обозначим: $O$ – центр окружности, $\overrightarrow{a_k}=\overrightarrow{OA_k},\ 1\le k\le n$. Все векторы $\overrightarrow{a_k}$ имеют одинаковую длину 1, угол между любыми двумя соседними (в том числе между $\overrightarrow{a_n}$ и $\overrightarrow{a_1}$) равен $\dfrac{2\pi}{n}$. При повороте каждого $\overrightarrow{a_k}$ на угол $\dfrac{2\pi}{n}$ против часовой стрелки их сумма $\vec{b}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\ldots+\overrightarrow{a_n}$ также повернется на угол $\dfrac{2\pi}{n}$ (очевидно из правила сложения векторов) и в то же время не изменится ($\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\ldots+\overrightarrow{a_n}$ заменится на $\overrightarrow{a_n}+\overrightarrow{a_1}+\ldots+\overrightarrow{a_{n-1}}=\vec{b}$). Свойством не меняться при повороте на ненулевой угол обладает только нулевой вектор, поэтому $\vec{b}=\vec{0}$.




Теперь находим

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_1A_n}\right|=$$
$$=\left|\left(\overrightarrow{a_2}-\overrightarrow{a_1}\right)+\left(\overrightarrow{a_3}-\overrightarrow{a_1}\right)+\ldots+\left(\overrightarrow{a_n}-\overrightarrow{a_1}\right)\right|=$$
$$=\left|\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\ldots+\overrightarrow{a_n}-n\overrightarrow{a_1}\right|=$$
$$=\left|\vec{b}-n\overrightarrow{a_1}\right|=\left|-n\overrightarrow{a_1}\right|=n\left|\overrightarrow{a_1}\right|=n$$

5. Пусть $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m},\ a_0,b_0\ne 0.$

Рассмотрим старшие степени числителя и знаменателя у первой производной $f'(x)=\dfrac{a_0b_0(n-m)x^{n+m-1}+\ldots}{b_0^2x^{2m}+\ldots}$ .

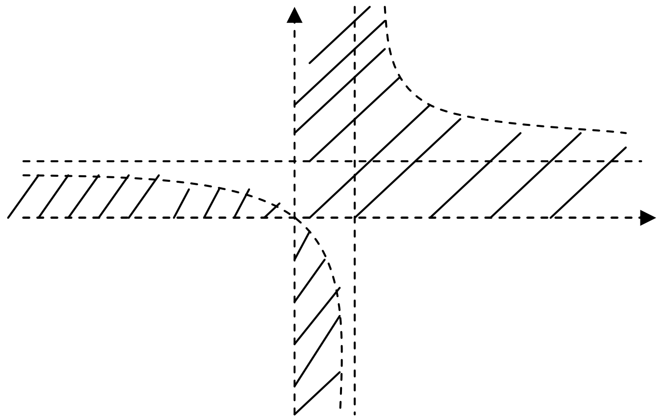
Но $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow n>m$, а $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0 \Leftrightarrow m+n-1<2m \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n<m+1$. Для целых $n$ и $m$ $m<n<m+1$ невозможно. Получили противоречие. Ч.т.д.

6. 1) $x>0,\ y>0:\ \ x+y>xy \Leftrightarrow (x-1)(y-1)<1$

2) $x<0,\ y<0:\ \ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>1$ невозможно

3) $x>0,\ y<0:\ \ x+y<xy \Leftrightarrow (x-1)(y-1)>1$

4) $x<0,\ y>0:$ симметрично 3) относительно прямой $y=x$



7. Так как. функция $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ имеет период $T=\pi$ и непрерывна, то

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt[3]{n^3+n^2}-\pi n\right)=$$

$=\Big|$ домножим и разделим на $\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2$ $\Big|=$

$$=\sin^2\left[\lim_{n\to\infty}\left(\pi\frac{n^3+n^2-n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2}\right)\right]=\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}$$

8. Условие задачи эквивалентно следующему: для любого $x \in R$

$$\begin{cases} 0 \le f(x) \le 0,5 \\ \left(f(x+a)\right)^2 + \left(f(x)\right)^2 = 0,25 \end{cases}$$

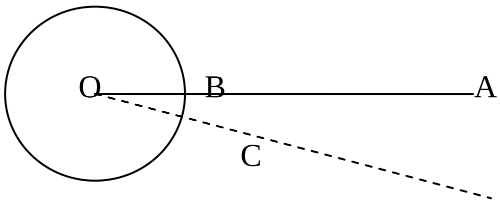
Тогда

$$\left(f(x+2a)\right)^2 = 0,25 - \left(f(x+a)\right)^2 = 0,25 - \left(0,25 - \left(f(x)\right)^2\right) = \left(f(x)\right)^2$$

и с учетом $f(x) \ge 0$, получаем $f\left(x+2a\right) = f(x)$, т.е. $f(x)$ имеет период $T = 2a$.

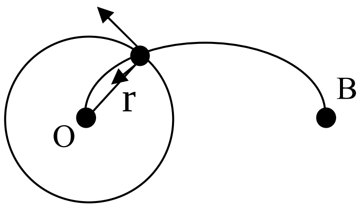
Пример: $f(x) = \dfrac{1}{2}\left|\sin\dfrac{\pi x}{2a}\right|$.

9.




Катер может начать движение из точки А на расстоянии $OA = 1$ от острова О после прохождения луча через А. Пусть В – точка на ОА, для которой $OB = \dfrac{0,9}{2\pi}$

Сначала движемся от А к О по прямой и достигаем В через $t_1 = \dfrac{\left(1 - \dfrac{0,9}{2\pi}\right)}{0,9} = \dfrac{10}{9} - \dfrac{1}{2\pi} < 1$(прожектор не успел сделать полный оборот и не "догнал" катер).




При $t \ge t_1$ двигаемся так, чтобы при $r \le OB = \dfrac{0,9}{2\pi}$ "касательная" составляющая скорости в точке на расстоянии $r$ от острова была равна $2\pi r < 0,9$ (вращение с угловой скоростью $2\pi$ как и у прожектора), а "радиальная" составляющая скорости (в направлении к точке О) была равна $\sqrt{0,9^2 - \left(2\pi r\right)^2}$ .Эта скорость растет с убыванием $r$ и через некоторое время катер достигнет острова.

(Методами ДУ можно вывести уравнение движения катера в полярных координатах при $t \ge t_1$: $\begin{cases} \varphi = 2\pi(t - t_1) \\ r = \dfrac{0,9}{2\pi}\cos(2\pi(t - t_1)) \end{cases}$ - окружность, $r = 0$ при $t = t_1 + \dfrac{1}{4}$).

**Ответ:** да.

10. Сумма элементов любой строки в невырожденной квадратной матрице $A$ порядка $n$ равна 1 тогда и только тогда, когда $AI = I$, где $I$ - столбец “высоты” $n$, в котором все элементы равны 1.. Но тогда $A^{-1}I = A^{-1}(AI) = A^{-1}AI = I$, т.е. в $A^{-1}$ сумма элементов любой строки тоже равна 1, и, следовательно, сумма всех элементов обратной матрицы равна $n$.

## 2-й курс

1. $y^{(5)} - y'' = 0$ - линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами;

$k^5 - k^2 = 0$ (характеристическое уравнение) $\Rightarrow$

$\Rightarrow k_1 = k_2 = 0,\ k_3 = 1,\ k_{4,5} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i \Rightarrow$

$\Rightarrow y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} x\right) + c_5 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} x\right)$

2. По условию $x > 0, y > 0, z > 0$ для любой точки $(x, y, z)$ на поверхности. Пусть $(x_0, y_0, z_0)$ - точка касания. Тогда $x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0$, $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}$, а уравнением касательной плоскости будет

П: $\dfrac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} + \dfrac{y - y_0}{\sqrt{y_0}} + \dfrac{z - z_0}{\sqrt{z_0}} = 0$

Если $(x_1, 0, 0)$ - точка пересечения П с Ox, то

$\dfrac{x_1 - x_0}{\sqrt{x_0}} + \dfrac{0 - y_0}{\sqrt{y_0}} + \dfrac{0 - z_0}{\sqrt{z_0}} = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \sqrt{x_0}\left(\sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}\right) =$

$= \sqrt{x_0}\left(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}\right) = \sqrt{x_0} \cdot \sqrt{a}$

Аналогично получается $y_1 = \sqrt{y_0} \cdot \sqrt{a}$ и $z_1 = \sqrt{z_0} \cdot \sqrt{a}$, для точек пересечения $(0, y_1, 0)$ и $(0, 0, z_1)$ плоскости П с осями Oy и Oz соответственно. Отсюда $x_1 + y_1 + z_1 = \left(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}\right) \cdot \sqrt{a} = a$ ч.т.д.

3. см. 2007, 1 курс, №3.

4. Условиям задачи удовлетворяет ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$, для которого $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n \ln n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Сходимость первого из рядов и расходимость второго доказываются с помощью интегрального признака сходимости знакоположительных рядов:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{N \to +\infty} \left[ -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^N \right] = \frac{1}{\ln 2} \text{ - сходится.}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{N \to +\infty} \left[ \ln(\ln x)\Big|_2^N \right] = +\infty \text{ - расходится.}$$

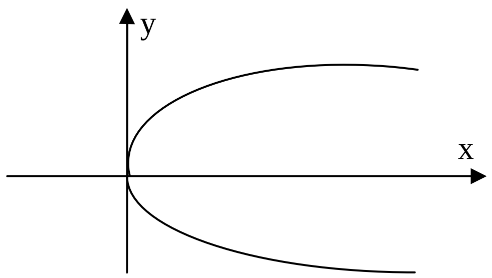
5. Дифференциальное уравнение линейное относительно $x = x(y)$.

$$x'_y y = x + y^2 \Rightarrow x'_y - \frac{1}{y} x = y$$

$$x = u(y) \cdot v(y)$$

$$\begin{cases} v' - \frac{1}{y} v = 0 \\ u'v = y \end{cases} \Rightarrow v = y \Rightarrow u = y + c \Rightarrow x = y(y + c)$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow x = y^2$$




6. см. 2007, 1курс, №6.

7. Домножим и разделим на “сопряженное”: $1 + \sin x - \sqrt{1 + \sin^2 x}$.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x\left(1+\sin x-\sqrt{1+\sin^2 x}\right)}{2\sin x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}1-\text{ый и } 3-\text{ий интегралы равны } 0\\ -\text{интегралы от нечетных функций}\\ \text{на симметричном интервале}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}dx-\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x dx=\frac{\pi}{2}$$

8. см. 2007, 1 курс, № 8.
9. см. 2007, 1 курс, № 9.
10. см. 2007, 1 курс, № 10.

## ОЛИМПИАДА -2008 год
## 1-й курс

1. Алгоритм вычисления дает тождество

$$a^2=\left(a^{-1}-(a+1)^{-1}\right)^{-1}-a.$$

2.

$$\begin{vmatrix}x & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & x & 1 & \dots & 1\\ . & . & . & . & .\\ 1 & \dots & 1 & x & 1\\ 1 & \dots & 1 & 1 & x\end{vmatrix}=\left|\begin{array}{c}\text{прибавим к 1 строке}\\ \text{все остальные}\end{array}\right|=$$

$$=\begin{vmatrix}x+2007 & \dots & \dots & \dots & x+2007\\ 1 & x & 1 & \dots & 1\\ . & . & . & . & .\\ 1 & \dots & 1 & x & 1\\ 1 & \dots & 1 & 1 & x\end{vmatrix}=0$$

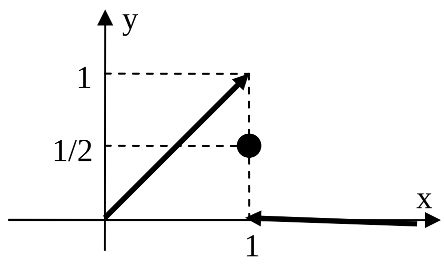
**Ответ:** да, при $x=-2007$

3. $x<1;\ \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \Rightarrow y = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+x^n} = x.$

$x=1;\quad y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+x^n}=\dfrac{1}{2}.$

$x>1;\quad \lim\limits_{n\to\infty} x^n = +\infty \Rightarrow y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+x^n}=0.$

Таким образом $y=\begin{cases} x, & 0\le x<1,\\ 1/2, & x=1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$




4. Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx = \left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\sin kx\right)'.$

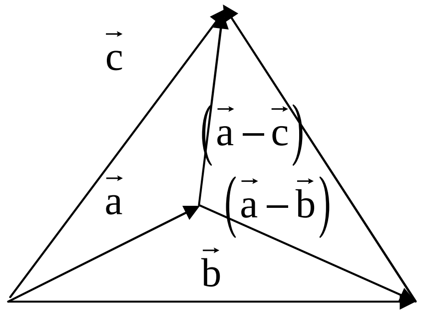
Утверждение задачи – результат применения теоремы Ролля к функции $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\sin kx$, для которой 1) $f(x)$ непрерывна, $x\in[0;\pi]$; 2) $f'(x)$ - существует, $x\in(0;\pi)$; 3) $f(0)=f(\pi)=0$.

5. $$\int x^3\left(x^2-a\right)^{2007}dx=\int\left(x^2-a+a\right)\left(x^2-a\right)^{2007}x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(x^2-a\right)^{2008}d\left(x^2-a\right)+\frac{a}{2}\int\left(x^2-a\right)^{2007}d\left(x^2-a\right)=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2009}\left(x^2-a\right)^{2009}+\frac{1}{2\cdot a\cdot 2008}\left(x^2-a\right)^{2008}+c.$$

6.




$$\sum_{k=1}^{4} S_k\cdot\vec{n}_k=$$

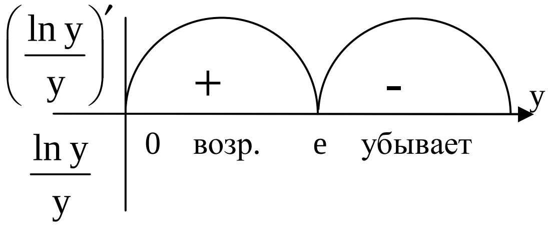
$$=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=$$

$$=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+$$

$$+\left(-\vec{a}\times\vec{b}\right)+\left(-\vec{c}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)=0$$

7. Исследуем правую часть как функцию от $y$ $(y>0)$

$$\left(\frac{\ln y}{y}\right)' = \frac{1-\ln y}{y^2} \Rightarrow$$




Таким образом $y=e$ - точка глобального максимума функции

$$\frac{\ln y}{y}\ (y>0).$$

$$\frac{\ln e}{e} = e^{-1} \Rightarrow e^{\frac{2x}{1+x^2}} \le e^{-1} \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} \le -1 \Rightarrow (x+1)^2 \le 0 \Rightarrow x=-1$$

**Ответ:** $x=-1,\ y=e$.

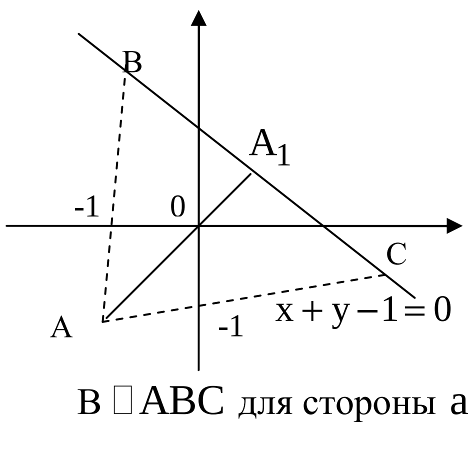
8. Преобразуем уравнение из условия

$$x^3 + 3x\cdot y + y^3 - 1 = 0;$$

$$(x+y)^3 - 1 + 3xy - 3x^2y - 3xy^2 = 0;$$

$$(x+y-1)\left[(x+y)^2 + (x+y) + 1\right] - 3xy(x+y-1) = 0;$$

$(x+y-1)\left[x^2+y^2-xy+x+y+1\right]=0 \Rightarrow$ вершины треугольника принадлежат множеству, состоящему из прямой $x+y-1=0$ и множества точек, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2-xy+x+y+1=0$. Последнее уравнение можно записать в виде (умножив сначала на 2) $(x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2=0$. Этому уравнению удовлетворяет, очевидно, единственная точка $A(-1;-1)$.




Теперь единственность искомого правильного треугольника очевидна: $A(-1;-1)$ - одна из его вершин; сторона $BC$ лежит на прямой $x+y-1=0$; $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ - основание высоты (и медианы, и биссектрисы) из вершины $A$.

В $\triangle ABC$ для стороны $a$, высоты $h$ и площади $S$ имеем

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$
.

$$\Rightarrow a=\sqrt{6}\Rightarrow S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

## 2-й курс

1. См. 2008, 1 курс, №1.
2. См. 2008, 1 курс, №2.
3. Подставим $y_1$ и $y_2$ в уравнение:

$$\begin{cases} p\cos x+q\sin x=\sin x \\ 2p\cos 2x+q\sin 2x=4\sin 2x \end{cases}$$

Домножим первое на $(-2\cos x)$ и прибавим второе:

$$2p\left(\cos 2x-\cos^2 x\right)=3\sin 2x$$

$$p=-3\mathrm{ctg}x$$

$$q=1-p\cdot\mathrm{ctg}x=1+3\mathrm{ctg}^2x$$

Обе $p(x)$ и $q(x)$ - непрерывны на $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

**Ответ:** да при указанных $p(x),q(x)$.

4. См. 2008, 1 курс, №4.
5. По условию график $f(x)$ на $[0,1]$ лежит выше касательной в точке $x=0$, т.е. $y=f(0)+f'(0)\cdot x=x+b,\ b\geq 0$.

Поэтому $\int\limits_0^1 f(x)dx\geq\int\limits_0^1(x+b)dx=0{,}5+b$

Отсюда $b=0$, т.е. касательная к $f(x)$ в точке $x=0$ будет $y=x$.

Если $f(x)>x$ в какой либо точке $x$, то

$$\int\limits_0^1 f(x)dx>\int\limits_0^1 xdx=0{,}5\Rightarrow f(x)=x.$$

**Ответ:** $f(x)=x$.

6. По условию

$$a_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \ln(n-1) - 2\ln n + \ln(n+1)$$ и при

$n = 2,3,...N$ имеем

$$a_2 = \ln 1 - 2\ln 2 + \ln 3$$

$$a_3 = \ln 2 - 2\ln 3 + \ln 4$$

$$a_4 = \ln 3 - 2\ln 4 + \ln 5$$

…………………..

$$a_{N-1} = \ln(N-2) - 2\ln(N-1) + \ln N$$

$$a_N = \ln(N-1) - 2\ln N + \ln(N+1)$$

Складывая эти равенства, получим после сокращений

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2 - \ln N + \ln(N+1) =$$

$$= -\ln 2 + \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) \Rightarrow S = \lim_{N\to\infty} S_N = -\ln 2 + \ln 1 = -\ln 2$$

7. См. 2008, 1 курс, №7.

8. В полярных координатах $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$,

$$D = \left\{(\rho,\varphi) : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}; 1 \le \rho(\cos\varphi + \sin\varphi) < \infty\right\}$$ и

$$\iint_D \frac{1}{x^3+y^3}dxdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{(\cos\varphi+\sin\varphi)^{-1}}^{\infty} \frac{\rho d\rho}{\rho^3\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)} =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\cdot\left(-\frac{1}{\rho}\right)\Bigg|_{(\cos\varphi+\sin\varphi)^{-1}}^{\infty}\right]d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}d\varphi = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi} =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-\mathrm{tg}\varphi+\mathrm{tg}^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \left|t = \mathrm{tg}\varphi\right| = \int_0^{\infty}\frac{dt}{1-t+t^2} =$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

## ОЛИМПИАДА -2009 год
## 1-й курс

1. Прямая $L: Ax+By+C=0$ - касается окружности тогда и только тогда, когда расстояние от центра до $L$ равно радиусу. Отсюда

$$\begin{cases}\dfrac{|5B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3\\[2ex]\dfrac{|5A+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(5B+C)^2=9(A^2+B^2)\\(5A+C)^2=16(A^2+B^2)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\text{сложить})\Rightarrow 5C(A+B)+C^2=0$$

1) $C=0\Rightarrow(5B)^2=9(A^2+B^2)\Rightarrow 4B=\pm 3A\Rightarrow$

$\Rightarrow L:4x+3y=0$ или $L:4x-3y=0$.

2) $C\neq 0\Leftrightarrow$ можно считать, что $C=5\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=-1\\25(B+1)^2=9(A^2+B^2)\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=-1\\25A^2=9(A^2+B^2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=-1\\4A=\pm 3B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-3/7\\B=-4/7\\C=5\end{cases}\text{ или }\begin{cases}A=3\\B=-4\\C=5\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow L:3x+4y-35=0$ или $L:3x+4y-35=0$ $\quad 3x-4y+5=0$

**Ответ:** $1)\,4x+3y=0,\ 2)\,4x-3y=0,\ 3)\,3x+4y-35=0,$ $4)\,3x-4y+5=0$.

2. Из условия видно, что первые две прямые параллельны между собой и перпендикулярны третьей и четвертой. Поэтому четырехугольник является прямоугольником со сторонами $a$ и $b$, где $a(b)$ - расстояние между первой и второй (третьей и четвертой) прямыми. Расстояние между параллельными

прямыми равно расстоянию от любой точки на одной из них до другой прямой. Выбрав точки $(0;1)$ и $(0;-3)$ на первой и третьей прямых, находим

$$a=\frac{|2\cdot 0-2\cdot 1+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{8}},\; b=\frac{|2\cdot 0+2\cdot(-3)+5|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{8}},\; S=\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{8}$$

**Ответ:** $\frac{1}{8}$.

3. Пусть $f(x)$ - левая часть уравнения. Тогда

$f'(x)=2009x^{2008}+2007x^{2006}+\ldots+1>0$ на всей оси $\Rightarrow f(x)$ - строго возрастает на всей оси. Кроме того, $f(-1)=-1004<0$, $f(0)=1>0$. Отсюда уравнение $f(x)=0$ имеет единственное действительное решение $x_0$, $x_0\in(-1;0)$.

**Ответ:** 1.

4. Разложив определитель $|A|$ по любой строке или столбцу, получим $|A|=\pm 1\cdot|B|$, $B$ - матрица с единственной единицей в каждой строке и каждом столбце (остальные элементы 0), порядок $B$ на 1 меньше порядка $A$.

Продолжая "понижение порядка", легко понять, что $|A|$ равен 1 или $-1$. При умножении квадратной матрицы порядка $n$ на числовой множитель $a$ ее определитель умножится на $a^n$ (множитель $a$ выносится из всех $n$ строк). Поэтому

$$|A+|A|\cdot A|=|(1+|A|)\cdot A|=(1+|A|)^n|A|=\begin{cases}2^n, & |A|=1\\ 0, & |A|=-1\end{cases}$$

**Ответ:** $2^n$.

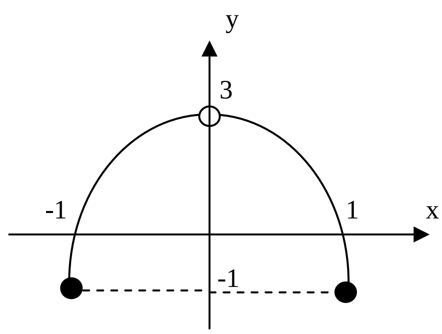
5.

$\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi;$

$\sin(\arcsin x)=x\Rightarrow y=\dfrac{3x-4x^3}{x}=3-4x^2$

для любого $x$ из области определения $[-1,0)\cup(0,1]$ данной функции.

График имеет вид




6. Заметим, что

$$\left(\cos x/x\right)'=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}\Rightarrow(x\sin x+\cos x)dx=-x^2d\left(\cos x/x\right)$$

$$\int \frac{x\sin x + \cos x}{x^2 + \cos^2 x}dx = -\int \frac{x^2 d\left(\cos x/x\right)}{x^2 + \cos^2 x} = -\int \frac{d\left(\cos x/x\right)}{1+\left(\cos x/x\right)^2} =$$

$$= -\operatorname{arctg}\left(\cos x/x\right) + c$$

Ответ: $-\operatorname{arctg}\left(\cos x/x\right) + c$.

7. Определитель $\Delta_n$ матрицы коэффициентов системы разложим по первому столбцу,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} M_{11} + 1\cdot(-1)^{n+1} M_{n1} = 1 + (-1)^{n+1}$$

Здесь минор $M_{11}$ - определитель верхней треугольной матрицы (все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны 0), $M_{n1}$ - определитель нижней треугольной матрицы. Определитель треугольной матрицы равен произведению всех ее диагональных элементов, в нашем случае $M_{11} = M_{n1} = 1$.

Если $n$ - нечетно, то $\Delta_n = 2 \Rightarrow$ система имеет единственное решение (крамеровская).

Если $n$ - четно, то при сложении уравнений с нечетными номерами

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 + 3 + \dots + (n-1)$,

а при сложении уравнений с четными номерами

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2 + 4 + \dots + n$,

Эти два равенства противоречат друг другу, т.к. $1 + 3 + \dots + (n-1) \neq 2 + 4 + \dots + n,\ n \geq 2$, и, следовательно, система не совместна.

**Ответ:** при $n$ - нечетных.

8. Наибольшее значение достигается на концах промежутка или в одной из внутренних критических точек ($y'$ равно нулю или не существует). Далее находим:

1) $y' = \sqrt{n}\cos^{n-1}x\left(\cos^2 x - n\sin^2 x\right)$ - существует при любых $x$; $\cos x \neq 0$ при $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_0$, для которой $\operatorname{ctg} x_0 = \sqrt{n},\ x_0 \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ - единственная критическая точка $\left(y'\left(x_0\right)=0\right)$;

2) $\frac{1}{\sin^2 x_0} = 1+\operatorname{ctg}^2 x_0 = 1+n \Rightarrow \sin x_0 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \cos x_0 = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y\left(x_0\right) = \sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

3) $y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, y\left(x_0\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}$.

**Ответ:** $y_{\text{наиб.}} = y\left(x_0\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}$.

**Замечание** $y_{\text{наиб.}} = \left(\left[1+\frac{1}{n}\right]^n\right)^{-\frac{n+1}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{e}}$

9. Если равенство верно при всех действительных значениях переменных, то оно останется верным при всех действительных значениях переменных после замены одной из переменных на любое действительное число или выражение с действительными значениями. Из исходного равенства находим

1) $x=1 \Rightarrow f(1)=0$;

2) $y=1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$;

3) $y=\frac{1}{x} \Rightarrow xf\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}f(x) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow f(x^2) = \left(x+\frac{1}{x}\right)f(x)$.

В исходном равенстве заменим $x$ на $x^2$ и $y$ на $y^2$

$$x^2\cdot f(y^2) - y^2\cdot f(x^2) = f\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$$

затем применим 3) и снова исходное равенство,

$$x^2\cdot\left(y+\frac{1}{y}\right)f(y)-y^2\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)f(x)=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)f\left(\frac{y}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(xf(y)-yf(x)\right).$$

После упрощений получим равенство

$$y\left(x^2-1\right)\cdot f(y)=x\left(y^2-1\right)\cdot f(x),$$

в котором можно “разделить” переменные,

$$\frac{f(x)}{x-1/x}=\frac{f(y)}{y-1/y}.$$

Последнее означает, что функция $\frac{f(x)}{x-1/x}$ принимает одно и тоже значение при всех $x$ $(x\neq 0, x\neq 1)$, т.е. равна некоторой постоянной $c$,

$$f(x)=c\left(x-\frac{1}{x}\right),\ (x\neq 0, x\neq 1).$$

Легко проверяется, что эта функция действительно удовлетворяет условию задачи.

**Ответ:** $f(x)=c\left(x-\frac{1}{x}\right),\ c=\mathrm{const}$.

10. При фиксированном $\alpha\neq 0$ находим:

$$y'=e^{-\alpha x}+xe^{-\alpha x}(-\alpha)=(1-\alpha x)e^{-\alpha x}$$

$$y''=(-\alpha)e^{-\alpha x}+(1-\alpha x)e^{-\alpha x}(-\alpha)=(-2\alpha+\alpha^2x)e^{-\alpha x}\Rightarrow$$

$y''=0$ при $x=\frac{2}{\alpha}$, $y''$ меняет знак при переходе через точку $x=\frac{2}{\alpha}\Rightarrow x=\frac{2}{\alpha}$ - абсцисса единственной точки перегиба. Наименьшее натуральное значение этой абсциссы достигается очевидно, при $\alpha=2$

**Ответ.** 2.

## 2-й курс

1. Искомая цилиндрическая поверхность – множество всех точек всех окружностей радиуса 1 с центрами на оси и лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси

$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ - параметрическое уравнение оси; $x + y + z = 3t$ - уравнение плоскости, перпендикулярной оси и проходящей через точку $(t,\ t,\ t)$;

$\begin{cases} x + y + z = 3t \\ (x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2 = 1 \end{cases}$ - уравнения окружностей – сечений цилиндрической поверхности плоскостями перпендикулярными оси, $t \in R$. Преобразуем систему.

$$\begin{cases} x + y + z = 3t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2t(x+y+z) + 3t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3t \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 3t^2 \end{cases}$$

исключим параметр $t$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2.$$

**Ответ:** $3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = 3$.

2. Рассмотрим уравнение $y' - y = \int_0^1 y(x)dx$. Решим его методом вариации произвольной постоянной:

$$y' - y = 0 \Rightarrow y_{о.о} = C \cdot e^x$$

$$y_{ч.р} = -\int_0^1 y(x)dx \Rightarrow y = y_{о.о} + y_{ч.р} = C \cdot e^x - \int_0^1 y(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 y(x)dx = \int_0^1 \left( C \cdot e^x - \int_0^1 y(x)dx \right)dx \Rightarrow 2\int_0^1 y(x)dx = C \cdot (e-1) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 y(x)dx = \frac{C \cdot (e-1)}{2} \Rightarrow y = Ce^x - \frac{C(e-1)}{2}$$ - общее решение

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C - \frac{C(e-1)}{2} \Rightarrow C = \frac{2}{3-e}$$

**Ответ:** $y = \frac{2}{3-e}e^x - \frac{e-1}{3-e}$.

3. $\int_1^{2009} (x-1)(x-2)...(x-2009)dx = \left| \begin{matrix} x = t + 1005 \\ dx = dt \end{matrix} \right| =$

$$= \int_{-1004}^{1004} (t+1004)(t+1003)...(t+1)t(t-1)...(t-1004)dt = \int_{-1004}^{1004} \prod_{n=1}^{1004} (t^2-n^2)tdt =$$

(интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку)$=0$.

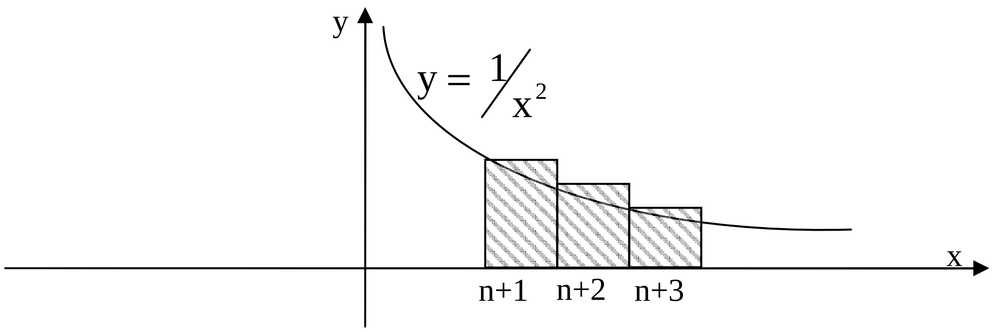
4. Умножим равенство из условия на $A^2$ сначала слева, затем справа. С учетом $A^3=E$ получим:

$$\begin{cases} A^2\left(A\cdot X + X\cdot A\right) = 2\cdot A^3 \\ \left(A\cdot X + X\cdot A\right)A^2 = 2\cdot A^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X + A^2XA = 2E \\ AXA^2 + X = 2E \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A^2XA = AXA^2 \Rightarrow$ (умножим на $A^2$ слева и справа; учтем $A^3=E$) $\Rightarrow AX = XA \Rightarrow$ исходное уравнение запишется в виде $2AX = 2A \Rightarrow X = E$

**Ответ:** $X = E$.

5.




$$a_n = S - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... >$$

$$> (\text{см.рис.}) > \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{n+1}^{\infty} = \frac{1}{n+1} = b_n.$$

По признаку сравнения из $a_n > b_n$ и из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (гармонический ряд) следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

**Ответ:** расходится.

6. Формулы суммы и разности кубов запишем в виде

$k^3+1=(k+1)a_k$, $a_k = k^2-k+1$;

$k^3-1=(k-1)b_k$, $b_k = k^2+k+1$.

Заметим, что

$$a_{k+1} = (k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1 = b_k$$

$$\frac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n^3+1}{n^3-1} = \frac{(2+1)(3+1)\left(4+1\right)\ldots(n+1)}{(2-1)(3-1)\left(4-1\right)\ldots(n-1)} \cdot \frac{a_2 a_3 \ldots a_n}{b_2 b_3 \ldots b_n} =$$

$$= \frac{a_2 \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot b_n} = \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{n_2 + n + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{2}$$

**Ответ:** 3/2.

7. См. 2009, 1 курс, №7.
8. См. 2008, 1 курс, №8.
9. См. 2008, 1 курс, №9.
10. См. 2008, 1 курс, №10.

## Библиографический список

1. Гичев В.М., Добровольский С.М., Николаева Н.И. Всесоюзная олимпиада “Студент и научно-технический прогресс” по математике. Методические рекомендации./ Омск, ОмПИ – 1984.

2. Горяга А.В., Стругов Ю.Ф.. Всесоюзная олимпиада “Студент и научно-технический прогресс” по математике. Методические рекомендации./ Омск, ОмПИ – 1985.

3. Волынец И.А., Гичев В.М., Сергеев В.Н., Симонженков С.Д. Методические указания к решению олимпиадных задач по математике. /Омск, ОмПИ-1980.

4. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. /М: Наука, 1978.

5. Сергеев В.Н. Сборник олимпиадных задач по высшей математике. /Омск, ОмПИ, 1975.

6. Сергеев В.Н., Сизиков В.П., Добровольский С.М. Методические материалы по проведению внутривузовских и межвузовских математических олимпиад. /Омск, ОмПИ, 1977.

Редактор
Компьютерная верстка
ИД № 06039 от 12.01.2001
Свод. Темплан 2010 г.

Подписано в печать Формат $60\text{x}84\ {}^{1}\!/_{16}$. Отпечатано на дубликаторе.

Бумага офсетная. Усл.печ.л. Уч.-изд.л. . Тираж 200 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. Омск, пр. Мира , 11. Т. 23-02-12
Типография ОмГТУ