Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

Лабораторные работы № 9 – 12 по вычислительному практикуму

Методические указания

Омск - 2007

Составители: Котюргина Александра Станиславовна, доцент;
Цветкова Валентина Дмитриевна, ст. преподаватель

Печатается по решению редакционно-издательского отдела Омского государственного технического университета.

Лабораторная работа № 9

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ПРОГОНКИ

Пусть на отрезке $[a,b]$ требуется найти решение дифференциального уравнения:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{1}$$

удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\begin{matrix} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A & \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \\ |\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0; & |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0 \end{matrix} \tag{2}$$

Численное решение задачи состоит в нахождении приближенных значений $y_0, y_1, ..., y_n$ искомого решения $y(x)$ в точках $x_0, x_1, ..., x_n$. Для этого разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей с шагом $h = \frac{b-a}{n}$. Полагая $x_i = x_0 + ih$, $x_0 = a;\ x_n = b\ (i = 0,1,....,n)$ и вводя обозначения $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$, $y(x_i) = y_i$ для внутренних точек $x = x_i$ $(i = 1,2,...,n-1)$ отрезка $[a,b]$ вместо дифференциального уравнения (1) – (2) получаем систему конечноразностных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \ (i = 1,2,....n-1) \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A, \ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_{n-1} - y_n}{-h} = B. \end{cases}$$

После соответствующих преобразований будем иметь

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = \hat{f}_i h^2 \ (i = 1,2,...,n-1), \tag{3}$$

где

$$m_i = -\frac{2 - q_i h^2}{1 + \frac{p_i}{2}h}, \quad n_i = \frac{1 - \frac{p_i}{2}h}{1 + \frac{p_i}{2}h}, \quad \hat{f}_i = \frac{f_i}{1 + \frac{p_i}{2}h}.$$

Полученная система имеет $(n+1)$ линейных уравнений с $(n+1)$ неизвестными. Решим эту систему методом прогонки.

Решая уравнение (3) относительно y_i, будем иметь

$$y_i = \frac{\hat{f}_i}{m_i}h^2 - \frac{1}{m_i}y_{i+1} - \frac{n_i}{m_i}y_{i-1}.$$

Предположим, что из этого уравнения исключена неизвестная y_{i-1}. Тогда это уравнение примет вид

$$y_i = c_i\left(d_i - y_{i+1}\right), \qquad (4)$$

где

$c_i,\ d_i \quad \left(i = 1, 2, ..., n-1\right)$ — некоторые коэффициенты. Отсюда

$$y_{i-1} = c_{i-1}\left(d_{i-1} - y_i\right).$$

Подставляя это выражение в (3), получим

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i c_{i-1}\left(d_{i-1} - y_i\right) - \hat{f}_i h^2$$

и, следовательно,

$$y_i = \frac{\left(\hat{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}\right) - y_{i+1}}{m_i - n_i c_{i-1}}. \qquad (5)$$

Сравнивая формулы (4) и (5), получим для определения c_i и d_i рекуррентные формулы:

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}, \qquad d_i = \hat{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}, \quad \left(i = 1, 2, ..., n-1\right).$$

Определим c_0 и d_0:

$$y_0 = \frac{Ah - \alpha_1 y_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}.$$

Из формулы (4) при $i = 0$ имеем

$$y_0 = c_0(d_0 - y_1). \qquad (6)$$

Поэтому

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{Ah}{\alpha_1}. \qquad (7)$$

На основании формул (6) и (7) последовательно определяются коэффициенты $c_i, d_i \ \left(i = 1, 2, ..., n-1\right)$ до c_{n-1} и d_{n-1} включительно (прямой ход). Обратный ход начинается с определения y_n. Решая систему

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n-1} - y_n}{-h} = B, \ \ y_{n-1} = c_{n-1}\left(d_{n-1} - y_n\right),$$

получим

$$y_n = \frac{Bh + \beta_1 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_1\left(c_{n-1} + 1\right)}$$

и по формуле (4) последовательно находим $y_{n-1}, y_{n-2}, ..., y_0$.

Для простейших краевых условий $y(a) = A,\ y(b) = B$ формулы для c_0, d_0, y_0 и y_n упрощаются.

Полагая $\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0,$

получим $c_0 = 0;\ d_0 = \infty,\ c_0 d_0 = A$.

Отсюда $c_1 = \dfrac{1}{m_1},\ d_1 = \hat{f}_1 h^2 - n_1 A,\ y_n = B,\ y_0 = A$.

Пример.

Методом перегонки решить краевую задачу: $y'' = x + y,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$.

Решение. Пусть $h = 0{,}1$.

$$y_{i+1} = m_i y_i + n_i y_{i-1} = \hat{f}_i h^2 \quad (i = 1, 2, ..., n-1);$$

$$y_0 = 0;\ \ y_{10} = 0;$$

$$m_i = -2 - h^2,\ n_i = 1;\ \hat{f}_i = x_i = ih;$$

$$c_1 = \frac{1}{m_1} = -0{,}498;\ d_1 = \hat{f}_1 h^2 - n_1 A = 0{,}001;$$

$$c_i = \frac{1}{-2 - h^2 - c_{i-1}};\ d_i = ih^3 - c_{i-1} d_{i-1}\ (i = 1, 2, ..., n-1).$$

Найденные значения c_i и d_i $(i = 1, 2, ..., 9)$ записываем в первых двух строках таблицы. Используя известное значение $y_{10} = 0$, вычисляем $y_9, y_8, ... y_1$ и запишем в таблицу.

Для значения в последней строке даны значения точного решения $\tilde{y} = \frac{2e}{e^2 - 1} \operatorname{sh} x = x$.

i	0	1	2	3	4	5
c_i	0	-0,498	-0,662	-0,878	-0,890	-0,900
d_i		0,001	0,002	0,004	0,008	0,012
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	0	-0,025	-0,049	-0,072	-0,078	-0,081
$\tilde{y}_i$	0	-0,015	-0,029	-0,041	-0,050	-0,057

i	6	7	8	9	10
c_i	-0,908	-0,915	-0,921	-0,926	
d_i	0,16	0,022	0,028	0,035	
x_i	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	-0,078	-0,070	-0,055	-0,032	0
$\tilde{y}_i$	-0,058	-0,054	-0,044	-0,026	0

Варианты заданий

На отрезке [a,b] решить методом прогонки линейную краевую задачу:

Вари-ант	p(x)	q(x)	a	b	A	B	ω_1	ω_2	Θ
1	$\frac{\omega_1+\omega_2}{x^2-1}$	$\frac{\Theta}{\sqrt{1-x^2}}$	0	0,8	-0,5	0,5	2	0	6
2			0	0,8	0	0,1	2	0	12
3			0	0,8	-0,375	-0,2	2	0	20
4			0	0,8	0	-0,4	2	0	30
5			0	0,8	0	-0,1	1,4	0	27
6			0	0,8	0	-0,3	1,8	0	29
7			0	0,8	0	-0,5	2,2	0	31
8			0	0,8	0	-0,8	2,6	0	33
9			0	0,8	0	-1,3	3	0	35
10			0	0,6	0,2	0,8	1,5	2,5	33
11			0	0,6	0,15	0,2	1,7	2,7	33,5
12			0	0,6	-0,05	0,2	1,9	2,9	34,5
13			0	0,6	-0,1	-0,6	2,1	3,1	35,5
14			0	0,6	-0,2	-1,2	2,3	3,3	36,5
15			0	0,6	-0,5	-1,2	2,5	3,5	37,5
16			0	0,6	0,4	-0,9	2,3	2,7	33,5
17			0	0,8	0	0,896	0	3	15
18			0	0,8	1	-0,1264	0	3	24
19			0	0,8	0	-1,09824	0	3	35
20			0	0,8	0	-0,352	0	1	9
21			0	0,8	0	-0,843	0	1	16
22			0	0,8	0	-0,997	0	1	25
23			0	0,8	-1	-0,7522	0	1	36
24			0	0,8	0	-0,2064	0	1	49
25	-2x	2	0,5	3	1	6			
26		4	0,5	3	-1	3,4			
27		6	0,5	3	-5	1,8			
28	$\frac{1-x}{x}$	$\frac{\Theta}{x}$	1	5	-0,5	3,5			2
29			1	5	-0,667	2,667			3
30			1	5	-0,625	-1,292			4

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$
$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A$$
$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B.$$

Здесь $\alpha_0 = \beta_0 = 1,\ \alpha_1 = \beta_1 = 0,\ f(x) = 0$.

Лабораторная работа № 10

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦЫ
МЕТОДОМ ДАНИЛЕВСКОГО

Сущность метода Данилевского заключается в том, что исходная матрица A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

после $n-1$ преобразования подобия приводится к матрице Фробениуса P:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть $P = S^{-1}AS$, где S — неособенная матрица. Так как подобные матрицы обладают одинаковыми характеристическими полиномами, то имеет:

$$\det(A-\lambda E) = \det(P-\lambda E) = (-1)^n \left(\lambda^n - P_1\lambda^{n-1} - P_2\lambda^{n-2} - \dots - P_n\right).$$

Вначале нужно строку $(a_{n1}\, a_{n2}\, \dots a_{n\,n-1}\, a_{nn})$ привести в строку $(0\ 0\ \dots\ 1\ 0)$. Предполагая, что $a_{n\,n-1} \neq 0$, разделим все элементы $(n-1)$ - го столбца матрицы A на $a_{n\,n-1}$. Тогда ее n - ая строка примет вид

$$a_{n1}\, a_{n2} \dots 1\, a_{nn}.$$

Затем вычтем $(n-1)$- й столбец преобразованной матрицы, умноженный соответственно на числа $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$, из всех остальных ее столбцов.

В результате получим матрицу, последняя строка которой имеет желаемый вид $0\ 0\ \dots 1\ 0$.

Произведя те же операции над единичной матрицей, получим матрицу

$$M_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ m_{n-11} & m_{n-12} & \dots & m_{n-1\,n-1} & m_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $m_{n-11} = -\dfrac{a_{ni}}{a_{n\,n-1}}$ при $i \neq n-1$. (1)

$$m_{n-1n-1} = \frac{1}{a_{n\,n-1}}. \qquad (1')$$

Эти операции равносильны умножению справа матрицы M_{n-1} на матрицу A.

$$A\,M_{n-1}=B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-11} & b_{n-12} & \dots & b_{n-1\,n-1} & b_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $b_{ij}=a_{ij}+a_{i\,n-1}+m_{n-1\,j}$ при $1\le i\le n,\ j\ne n-1,$

$b_{i\,n-1}=a_{i\,n-1}\,m_{n-1\,n-1}$ при $1\le i\le n$. $\qquad (2')$

Для подобия матриц нужно умножить полученную матрицу на M_{n-1}^{-1} слева:

$$M_{n-1}^{-1}A\,M_{n-1}=M_{n-1}^{-1}B.$$

Очевидно, обратная матрица имеет вид

$$M_{n-1}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $M_{n-1}^{-1}A\,M_{n-1}=C$, то есть

$$C=M_{n-1}^{-1}\,B=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1\,n-1} & C_{1\,n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2\,n-1} & C_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n-1\,1} & C_{n-2\,2} & \dots & C_{n-1\,n-1} & C_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $C_{ij}=b_{ij}$ при $1\le i\le n-2$ $\qquad (3)$

$$C_{n-1\,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\,b_{kj} \quad \text{при} \quad 1\le j\le n, \qquad (3')$$

то есть полученная матрица C подобна матрице A.

Продолжая этот процесс, получим матрицу Фробениуса.

$$P=M_1^{-1}M_2^{-1}\dots M_{n-1}^{-1}\,A\,M_{n-1}\dots M_2M_1,$$

если все $n-1$ промежуточных преобразований возможны.

Пример. Привести к виду Фробениуса матрицу:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение.

Вычисления будем располагать в таблицу. В строках 1-4 помещаем элементы $a_{ij}\,(i,j=1,2,3,4)$ данной матрицы и контрольные суммы $a_{i5}=\sum_{j=1}^{4}a_{ij}\ (i=1,2,3,4)$ в $(\sum\ )$.

Элемент $a_{43} = 8$. В строке I записываем элементы третьей строки матрицы $M_{n-1} = M_3$, вычисляемые по формулам (1), ($1'$):

$$m_{31} = -\frac{a_{41}}{a_{43}} = -\frac{8}{8} = -1, \qquad m_{33} = \frac{1}{a_{43}} = \frac{1}{8} = 0{,}125,$$

$$m_{32} = -\frac{a_{42}}{a_{43}} = -\frac{7}{8} = -0{,}875, \qquad m_{34} = -\frac{a_{44}}{a_{43}} = -\frac{4}{8} = -0{,}5.$$

Сюда же помещаем элемент $m_{35} = -\dfrac{a_{45}}{a_{43}} = -3{,}375$. Число -3,375 должно совпасть с элементами строки I , не входящими в контрольный столбец (после замены элемента m_{33} на -1).

В строках 5-8 в графе M^{-1} выписываем третью строку матрицы M^{-1}, которая совпадает с четвертой строкой исходной матрицы A. В строках 5-8 в соответствующих столбцах выписываем элементы матрицы $B = AM_3$, вычисляемые по формулам (2), ($2'$):

$$b_{11} = 1 + 2(-1) = -1,$$
$$b_{21} = 5 + 4(-1) = 1,$$
$$b_{31} = 7 + 2(-1) = 5,$$
$$b_{41} = 8 + 8(-1) = 0.$$

Преобразованные элементы третьего столбца получаются с помощью умножения исходных элементов на $m_{33} = 0{,}125$. Например,

$$b_{13} = 0{,}25, \quad b_{23} = 0{,}5,$$
$$b_{33} = 0{,}25, \quad b_{43} = 1.$$

Таблица

Номер строки	M^{-1}	Столбцы матрицы				Σ	Σ'
		1	2	3	4		
1		1	3	2	4	10	
2		5	9	4	1	19	
3		7	3	2	6	18	
4		8	7	$\boxed{8}$	4	27	
I	$\overline{M_3^{-1}}\,\vert\, M_3$	-1	-0,875	$\boxed{0{,}125}$ -1	-0,5	-3,375	
5	8	-1	1,25	0,25	3	3,5	3,25
6	7	1	5,5	0,5	-1	6,0	5,5 11,25
$\boxed{7}$	8	5	1,25	0,25	5	11,5	0
8	4	0	0	1	0	1	

Номер строки	M^{-1}	Столбцы матрицы				Σ	$\Sigma^{/}$
		1	2	3	4		
$\boxed{7^{/}}$		39	$\boxed{58{,}5}$	11,5	57	166	
I	$\overline{M_2^{-1}}\mid M_2$	-0,67	$\boxed{0{,}017}$- 1	-0,127	-0,97	-2,83	
9	39	-1,8333	0,021	0,004	1,782	-0,026	-0,047
$\boxed{10}$	58,5	-2,666	0,094	-0,5811	-6,3589	-9,512	-9,606
11	11,5	0	1	0	0	1	0
12	57	0	0	1	0	1	1
$\boxed{10'}$		$\boxed{-}$ 227,4597	17,818	23,16165	-302,497	-488,966	
III	$\overline{M_1^{-1}}\mid M_1$	$\boxed{0{,}0044}$ 1	0,0783	0,1	-1,3298	-2,14	
$\boxed{13}$	-227,45	0,008	-0,1226	-0,1827	4,22	3,9228	3,9114 8
	17,818	1	0	0	0	1	0
	23,16165	0	1	0	0	1	1
	-302,497	0	0	1	0	1	1
13′		16	51	-261	-960		

Соответственно, последняя строка матрицы B имеет вид (0 0 1 0). Для контроля пополним матрицу B преобразованными по аналогии элементами:

$$b_{16} = 10 + 2(-3{,}375) = 3{,}25 \quad b_{36} = 18 + 2(-3{,}375) = 11{,}25,$$

$$b_{26} = 19 + 4(-3{,}375) = 5{,}5 \quad b_{46} = 27 + 8(-3{,}375) = 0.$$

Полученные результаты записываем в столбце $\Sigma^{/}$. Прибавив к ним элементы третьего столбца, будем иметь контрольные суммы:

$$b_{i5} = \sum_{j=1}^{4} b_{ij} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \quad \text{для строк 5-8 (столбец } \Sigma) .$$

Преобразование M_3^{-1}, произведенное над матрицей B и дающее матрицу $C = M_3^{-1}B$, изменяет лишь третью строку матрицы B, то есть седьмую строку таблицы. Элементы строки $7'$ получаются по формулам (3), $(3')$. Например:

$$C_{31} = 8(-1) + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 5 = 39 .$$

Те же преобразования проводим над столбцом Σ:

$$C_{35} = 8 \cdot 3{,}5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 11{,}5 + 4 \cdot 1 = 166 .$$

В результате получаем матрицу C, состоящую из строк 5, 6, $7'$, 8 с контрольными суммами Σ.

Далее, приняв матрицу C за исходную и выделив элемент $C_{32} = 58{,}5$, продолжим процесс аналогичным образом.

Таким образом, матрица Фробениуса имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 16 & 51 & -261 & -960 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда, решая уравнение $\lambda^4 - 16\lambda^3 - 51\lambda^2 + 261\lambda + 960 = 0$, найдем собственные значения исходной матрицы.

Варианты заданий

Найти собственные значения матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \beta \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ \alpha & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1	$\alpha = 3;$	$\beta = 7;$	11	$\alpha = 5;$	$\beta = 9;$	21	$\alpha = 1;$	$\beta = 8;$
2	$\alpha = 5;$	$\beta = 3;$	12	$\alpha = 9;$	$\beta = 3;$	22	$\alpha = 1;$	$\beta = 5;$
3	$\alpha = 3;$	$\beta = 8;$	13	$\alpha = 8;$	$\beta = 5;$	23	$\alpha = -1;$	$\beta = -5;$
4	$\alpha = -3;$	$\beta = 5;$	14	$\alpha = -6;$	$\beta = -8;$	24	$\alpha = 7;$	$\beta = -1;$
5	$\alpha = 7;$	$\beta = 6;$	15	$\alpha = -4;$	$\beta = 7;$	25	$\alpha = 8;$	$\beta = -3;$
6	$\alpha = -3;$	$\beta = -5;$	16	$\alpha = 5;$	$\beta = -6;$	26	$\alpha = 9;$	$\beta = -5;$
7	$\alpha = 5;$	$\beta = -8;$	17	$\alpha = 3;$	$\beta = -9;$	27	$\alpha = -5;$	$\beta = 7;$
8	$\alpha = 6;$	$\beta = 7;$	18	$\alpha = -9;$	$\beta = 4;$	28	$\alpha = -5;$	$\beta = -9;$
9	$\alpha = 6;$	$\beta = -7;$	19	$\alpha = -8;$	$\beta = 2;$	29	$\alpha = -3;$	$\beta = -7;$
10	$\alpha = 7;$	$\beta = -5;$	20	$\alpha = 4;$	$\beta = -2;$	30	$\alpha = 9;$	$\beta = -7;$

Лабораторная работа № 11

МЕТОД СКОРЕЙШЕГО СПУСКА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Сущность метода скорейшего спуска заключается в том, что искомое решение системы

$$f_i(x_1, x_2, ... x_n) = 0, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

рассматривается как минимум некоторой функции U в n- мерном пространстве $\{x_1, ..., x_n\}$, и этот минимум ищется в направлении, противоположном направлению градиента функции U, то есть в направлении скорейшего убывания этой функции. Функция U связана с функциями f_i исходной системы соотношениями:

$$U(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x_1, ..., x_n)]^2 .$$

Пусть точка $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ является начальным приближением к искомому решению. Через эту точку проводится поверхность уровня $U = U\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$, а также нормаль к данной поверхности, которая указывает направление скорейшего убывания функции U. Точка, в которой нормаль касается новой поверхности уровня $U = U\left(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(1)}\right)$, будет следующим приближением к исходному решению. Нормаль, проведенная к этой поверхности через точку $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}\right)$, дает возможность дойти до точки $\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)}\right)$, в которой нормаль касается какой-то другой поверхности $U = U\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)}\right)$, и т. д. Так как $U\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_n^{(k+1)}\right) < U\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right)$, где $k = 0, 1, 2, ...$, то последовательность точек $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$, $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}\right)$, $\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)}\right)\ldots$ приведет к минимальному значению функции U, т. е. к искомому решению исходной системы.

Последовательные приближения определяются из матричного равенства

$$\overline{x}^{(k+1)} = \overline{x}^{(k)} - \lambda k \nabla U(\overline{x}^{(k)}),$$

где через $\overline{x}^{(k)}$ обозначен вектор в n-мерном пространстве, указывающий координаты точки $\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right)$, т. е. значение k-го приближения; λ — параметр, характеризующий изменение функции U вдоль соответствующей нормали, ∇U — градиент функции U в точке $\overline{x}^{(k)}$.

В общем случае параметр λ может быть найден из уравнения:

$$\frac{d}{d\lambda} U\left(\overline{x}^{(k)} - \lambda \nabla U\left(\overline{x}^{(k)}\right)\right) = 0, \tag{1}$$

где $U(\lambda) = U\left(\overline{x}^{(k)} - \lambda \nabla U(\overline{x}^{(k)})\right) = 0$ — скалярная функция, определяющая изменение функции U. При этом берется наименьший положительный корень уравнения (1).

Если считают λ малой величиной и не учитывают членов, содержащих λ во второй и высших степенях, то приближенно искомое решение можно найти из матричных равенств

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \mu_k W_k^{т} \bar{f}^{(k)} \quad (k = 0,1,\ldots),$$

$$\mu_k = 2\lambda_k = \frac{\left(\bar{f}^{(k)}, W_k W_k^{т} \bar{f}^{(k)}\right)}{\left(W_k W_k^{т} \bar{f}^{(k)},\ W_k W_k^{т} \bar{f}^{(k)}\right)} \quad (k = 0,1,\ldots),$$

Где $\bar{f}^{(k)} = \bar{f}(\bar{x}^{(k)}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}) \\ f_2(x_1^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}) \\ \ldots \\ f_n(x_1^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}) \end{pmatrix}$ $\qquad W_k = W\left(\bar{x}^{(k)}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\bar{x}^{(k)})}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial f_1(\bar{x}^{(k)})}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_n(\bar{x}^{(k)})}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial f_n(\bar{x}^{(k)})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

$$W_k^{т}\bar{f}^{(k)} = W^{т}\left(\bar{x}^{(k)}\right) \cdot \bar{f}\left(\bar{x}^{(k)}\right) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_1(\bar{x}^{(k)})}{\partial x_1} fi(\bar{x}^{(k)}) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_n(\bar{x}^{(k)})}{\partial x_n} fi(\bar{x}^{(k)}) \end{pmatrix}$$

Важным достоинством метода скорейшего спуска является его неизбежная сходимость. Поэтому его рекомендуется применять для уточнения решения в тех случаях, когда другие итерационные методы расходятся.

Пример.

Методом скорейшего спуска приближенно вычислить корни системы:

$$\begin{cases} -x^2 - 5xy = 6 \\ -2x^2 - y^2 = -9. \end{cases}$$

Решение.

Пусть $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -3 \end{bmatrix}$. Здесь $f = \begin{bmatrix} -x^2 - 5xy - 6 \\ -2x^2 - y^2 + 9 \end{bmatrix}$ и $W = \begin{bmatrix} -2x - 5y & -5x \\ -4x & -2y \end{bmatrix}$.

Подставляя нулевое приближение, будем иметь

$$f^{(0)} = \begin{bmatrix} 1{,}25 \\ -0{,}5 \end{bmatrix},\ W_0 = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ -2 & 6 \end{bmatrix},\ W_0^{т} = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ 15 & 6 \end{bmatrix},\ W_0^{т} \cdot f^{(0)} = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ 15 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}25 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18{,}5 \\ 15{,}75 \end{bmatrix},$$

$$W_0 W_0^{т} \cdot f^{(0)} = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18{,}5 \\ 15{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 495{,}25 \\ 57{,}5 \end{bmatrix},$$

$$\mu_0 = \frac{\left(f^{(0)}, W_0 W_0^{T} f^{(0)}\right)}{\left(W_0 W_0^{T} f^{(0)},\ W_0 W_0^{T} f^{(0)}\right)} = \frac{1{,}25 \cdot 495{,}25 + (-0{,}5) \cdot 57{,}5}{495{,}25^2 + 57{,}5^2} = \frac{590{,}312\ 5}{248\ 578{,}812\ 5} =$$

$$= 0{,}002\ 374\ 75,$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -3 \end{bmatrix} - 0{,}002\ 374\ 75 \begin{bmatrix} 18{,}5 \\ 15{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4560 \\ -3{,}0374 \end{bmatrix}.$$

Вычислим $f^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}6187 \end{bmatrix}$.

Аналогично найдем второе приближение

$$W_1 = \begin{bmatrix} 14{,}2315 & -2{,}315 \\ -1{,}852 & 6{,}063 \end{bmatrix}, \quad W_1^{т} = \begin{bmatrix} 14{,}2315 & -1{,}852 \\ -2{,}315 & 6{,}063 \end{bmatrix},$$

$$W_1^{т} f^{(1)} = \begin{bmatrix} 12{,}531 \\ -5{,}603 \end{bmatrix}, \quad W_1 W_1^{т} f^{(1)} = \begin{bmatrix} 191{,}3 \\ -57{,}178 \end{bmatrix},$$

$$\mu_1 = \frac{0{,}8 \cdot 191{,}3 + 0{,}6187 \cdot 57{,}178}{191{,}3^2 + 57{,}178^2} = \frac{188{,}416}{39\ 865} = 0{,}004.$$

Тогда

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}456 \\ -3{,}0374 \end{bmatrix} - 0{,}004 \begin{bmatrix} 12{,}531 \\ -5{,}603 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}412\ 876 \\ -3{,}009\ 08 \end{bmatrix}.$$

Для контроля вычислим невязку:

$$f^{(2)} = \begin{bmatrix} -0{,}04 \\ -0{,}3954 \end{bmatrix}$$ и так далее.

Получаем решение системы: $x^{(5)} = 0{,}4201$, $y^{(5)} = -2{,}9406.$

Задания для самостоятельного решения

Вариант		
1	$\begin{cases} -5x^2 - 4xy = -32 \\ -3x^2 - 3y^2 = -75 \end{cases}$	$\begin{cases} xy + yz = -4 \\ yz + xz = -9 \\ xy + xz = -1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x^2 + 2xy = -4 \\ -3x^2 + y^2 = -3 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy + yz + xz = -10 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 4x^2 + 5xy = 21 \\ -x^2 + 2y^2 = -7 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$

4	$\begin{cases}-3x^2-3xy=-30\\2x^2+5y^2=53\end{cases}$	$\begin{cases}x+y+z=9\\\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\\xy+xz+yz=27\end{cases}$
5	$\begin{cases}-2x^2+4xy=-54\\3x^2+y^2=36\end{cases}$	$\begin{cases}x^3=xyz+3\\y^3=xyz+3\\z^3=xyz-3\end{cases}$
6	$\begin{cases}-5x^2-xy=-64\\-2x^2+3y^2=16\end{cases}$	$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4\\x+y+z=6\\x^2+y^2+z^2=18\end{cases}$
7	$\begin{cases}-5x^2+3xy=-20\\-3x^2+4y^2=97\end{cases}$	$\begin{cases}x^2-yz=3\\y^2-zx=5\\z^2-xy=-1\end{cases}$
8	$\begin{cases}3x^2+4xy=0\\2x^2-2y^2=14\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+xy+y^2=7\\y^2+yz+z^2=3\\z^2+zx+x^2=1\end{cases}$
9	$\begin{cases}-x^2-3xy=-28\\3x^2-4y^2=-52\end{cases}$	$\begin{cases}x+y+z=6\\xy+xz=5\\xy+yz=8\end{cases}$
10	$\begin{cases}-5x^2+2xy=-104\\5x^2+4y^2=116\end{cases}$	$\begin{cases}x-y+z=6\\x^2+y^2+z^2=14\\x^3-y^3+z^3=36\end{cases}$
11	$\begin{cases}3x^2+4xy=-33\\2x^2+3y^2=93\end{cases}$	$\begin{cases}y+z=xyz\\z+x=xyz\\x+y=xyz\end{cases}$
12	$\begin{cases}-5x^2-4xy=-17\\5x^2-2y^2=-13\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{yz}{x}=\frac{10}{3}\\\frac{zx}{y}=\frac{15}{2}\\\frac{xy}{z}=\frac{6}{5}\end{cases}$

13	$\begin{cases} x^2 - xy = 32 \\ -5x^2 - 2y^2 = -112 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 91 \\ y^2 = xz \end{cases}$
14	$\begin{cases} -3x^2 + 3xy = -15 \\ -4x^2 - 3y^2 = -148 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ (x-1)^2 + (y+2)^3 + (z-3)^3 = 7 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 2x^2 - 4xy = -10 \\ -3x^2 + 5y^2 = -30 \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{3xy}{x+y} = 2 \\ \dfrac{4xz}{x+z} = 3 \\ \dfrac{5yz}{y+z} = 6 \end{cases}$
16	$\begin{cases} -2x^2 - xy = -18 \\ -3x^2 + 3y^2 = 63 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 3z \\ x^2 + y^2 = 5z \\ x^3 + y^3 = 9z \end{cases}$
17	$\begin{cases} x^2 + 3xy = 10 \\ -3x^2 - y^2 = -76 \end{cases}$	$\begin{cases} x - z = y^2 \\ x^2 - z^2 = 3y^4 \\ y^3 + 3y + x + z = 26 \end{cases}$
18	$\begin{cases} 4x^2 + 2xy = 12 \\ -2x^2 + y^2 = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3 \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 5 \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 4 \end{cases}$
19	$\begin{cases} -4x^2 + 4xy = -80 \\ 3x^2 + 5y^2 = 53 \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{x-4} + \sqrt{y} + \sqrt{z+4} = 6 \\ 2\sqrt{x-4} - \sqrt{y} - 4\sqrt{z+4} = -12 \\ x + y + z = 14 \end{cases}$
20	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{4x + y - 3z + 7} = 2 \\ \sqrt[3]{3y + 5x + z + 25{,}5} = 3 \\ \sqrt{y+z} - \sqrt{6x} = 0 \end{cases}$
21	$\begin{cases} x^2 - 2xy - 5y^2 = -2 \\ 3x^2 + 2xy + y^2 = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$

22	$\begin{cases} x^2-2y^2=-2 \\ xy+y^2=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=2 \\ xy+xz+yz=5 \\ x^2+y^2+z^2=6 \end{cases}$
23	$\begin{cases} 5x^2-2xy+y^2=4 \\ 3x^2-3xy+2y^2=2 \end{cases}$	$\begin{cases} xy+yz=9 \\ yz+xz=8 \\ xy+xz=5 \end{cases}$
24	$\begin{cases} x^2+3xy-y^2=1 \\ 2x^2-xy+y^2=2 \end{cases}$	$\begin{cases} xy=2 \\ xz=-3 \\ yx=-6 \end{cases}$
25	$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x^3-y^3=7(x-y) \end{cases}$	$\begin{cases} xy^2z^3=108 \\ x^2y^3z=24 \\ x^3yz^2=18 \end{cases}$
26	$\begin{cases} x+xy+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=2 \\ xy+yz+zx=-5 \\ x^2+y^2-z^2=12 \end{cases}$
27	$\begin{cases} x^2+y^2+5x+5y+3xy=15 \\ x^2+y^2-x-y+xy=1 \end{cases}$	$\begin{cases} xy+x+y=7 \\ yz+y+z=-3 \\ xz+x+z=-5 \end{cases}$
28	$\begin{cases} 2x^2+2y^2-3x-3y+xy=-1 \\ x^2+y^2-2x-2y+3xy=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2-yz=14 \\ y^2-xz=28 \\ z^2-xy=-14 \end{cases}$
29	$\begin{cases} 2x^8=x^4y^4+1 \\ 3y^8=x^4y^4+2 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y^2+yz+z^2=7 \\ z^2+xz+x^2=19 \end{cases}$
30	$\begin{cases} 2x^2-xy-3y^2+x+y=6 \\ 2x^2-5xy+3y^2+x-y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} xy+xz=8 \\ xy+yz=9 \\ xz+yz=-7 \end{cases}$

Лабораторная работа № 12

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть на отрезке $[a, в]$ в некоторой последовательности $(n+1)$ узлов $x_0, x_1, ..., x_n$ задана функция $y = f(x)$ своими значениями $y_0, y_1, ..., y_n$, где $y_i = f(x_i)$. Задача алгебраического интерполирования состоит в построении многочлена $P_n(x) = a_0x^4 + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ степени n, удовлетворяющего условию интерполирования: $P_n(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0, n}$.

Известно, что существует единственный полином степени не выше n, принимающий в исходных точках заданные значения. Коэффициенты a_i полинома $P_n(x_i)$ можно определить из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + ... + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + ... + a_nx_1^n = y_1 \\ ... \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + ... + a_nx_n^n = y_n. \end{cases}$$

Определитель этой системы есть определитель Вандермонда, и, следовательно, система имеет единственное решение.

Пример. Построить интерполяционный многочлен $P(x)$, совпадающий с функцией $f(x) = 3^x$ $(-1 \le x \le 1)$ в точках $x_0 = -1;\ x_1 = 0;\ x_2 = 1$.

Решение. Пусть $P(x) = a_0 + ax + a_2x^2$, поэтому имеем $\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 1/3 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 3. \end{cases}$

Отсюда $a_0 = 1;\ a_1 = 4/3;\ a_2 = 2/3$. Поэтому $3^x \approx 1 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x^2$ при $-1 \le x \le 1$.

Линейное интерполирование

Простейший интерполяционный многочлен представляет собой многочлен первой степени и приближенно определяет значение функции $f(x)$ в интервале $[x_i,\ x_{i+1}],\ i = \overline{0, n}$. Поскольку интерполяционный многочлен должен совпадать с $f(x)$ в точках x_i и x_{i+1} геометрически, то интерполяционный многочлен – это отрезок прямой, проходящий через точки (x_i, y_i) и $(x_{i+1},\ y_{i+1})$:

$$y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i),\ i = \overline{0, n} \qquad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Эта формула может быть представлена иначе:

$$y = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix}$$

Многочлен Лагранжа

Будем искать многочлен в виде линейной комбинации множеств степени n:

$$L(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \ldots + y_n l_n(x).$$

При этом потребуем, чтобы каждый многочлен $l_j\ (x) = 0$ во всех узлах интерполяции, за исключением одного $(j - \text{го})$, где он равен 1. Легко проверить, что этим условиям отвечает многочлен вида

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}.$$

Действительно, $l_0(x) = 1$ при $x = x_0$. При $x = x_1, \ldots, x_n$ числитель выражения равен 0. По аналогии получим:

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)},$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{j-1})\ (x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Подставив эти формулы в исходный многочлен, получим:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})\ (x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Эта формула называется интерполяционным многочленом Лагранжа.

Пример. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа $\alpha_4(x)$, совпадающий с функцией $y = 2\cos\frac{\pi x}{4}$ в точках $x_0 = -2;\ x_1 = -\frac{4}{3};\ x_2 = 0;\ x_3 = \frac{4}{3}; x_4 = 2$.

Решение. Составим таблицу

x	-2	-4/3	0	4/3	2
y	0	1	2	1	0

Подставляя эти значения в формулу Лагранжа, получим:

$$\alpha_4(x) = 1 \cdot \frac{(x+2)(x-0)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x-2)}{\left(-\frac{4}{3}+2\right)\left(-\frac{4}{3}-0\right)\left(-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}-2\right)} +$$

$$+2 \cdot \frac{(x+2)\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-2)}{(0+2)\left(0+\frac{4}{3}\right)\left(0-\frac{4}{3}\right)(0-2)} +$$

$$+1\cdot\frac{(x+2)\left(x+\frac{4}{5}\right)(x-0)(x-2)}{\left(\frac{4}{3}+2\right)\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}-0\right)\left(\frac{4}{3}-2\right)}=$$

$$=\frac{9x^4-196x^2+640}{320}=0{,}0281x^4-0{,}6125x^2+2.$$

Если функция $y=f(x)$ непрерывно дифференцируема до $(n+1)$- го порядка включительно, то остаточный член интерполяционного многочлена в форме Лагранжа имеет вид

$$R_n(x)=f(x)-\alpha_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

где ξ — внутренняя точка минимального отрезка, содержащего узлы интерполирования $x_0, x_1, \dots, x_n$ и точку x.

Многочлен Ньютона с конечными разностями

Рассмотрим случай равноотстоящих узлов интерполяции, т. е.
$x_j - x_{j-1} = \text{const} = h,\ i = 2n,\ h -$ называется шагом.

Введем понятие конечных разностей. Пусть известны значения функции в узлах $x_i : y_i = f(x_i)$. Составим разности значений функции:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_0+h)-f(x_0),$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_0+2h)-f(x_0+h),$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = f(x_0+3h)-f(x_0+2h),$$
$$\dots$$
$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_0+nh)-f(x_0+(n-1)h).$$

Эти разности называются разностями первого порядка.

Можно составить разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \dots, \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}.$$

Аналогично составляются разности k-го порядка:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i.$$

Выразим конечные разности непосредственно через значение функции:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,$$
$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0,$$
$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 2y_2 + y_1 - y_2 + 2y_1 - y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0,$$
$$\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0.$$

Таким образом, для любого k можно записать:

$$\Delta^k y_0 = y_k - k\,y_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!}y_{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}y_{k-3} +$$
$$+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}y_{k-4} - \ldots + (-1)^k y_0 .$$

Запишем эту формулу для значений разности в узле x_i:

$$\Delta^k y_i = y_{k+i} - k\cdot y_{k+i-1} + \frac{k(k-1)}{2!}y_{k+i-2} - \ldots + (-1)^k y_i .$$

Используя конечные разности, можно определить

$$y_k = y_0 + k\,\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\,\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^k y_0 .$$

Перейдем к построению интерполяционного многочлена Ньютона. Этот многочлен будем искать в виде

$$N(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) .$$

График многочлена должен проходить через заданные узлы, то есть $N(x_i) = y_i (i=\overline{0,n})$. Используем эти условия для нахождения коэффициентов многочлена:

$$N(x_0) = a_0 = y_0,$$
$$N(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_0 + a_1 h = y_1,$$
$$N(x_2) = a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = a_0 + 2a_1 h + 2a_2 h^2 = y_2 .$$

Найдем отсюда коэффициенты a_j:

$$a_0 = y_0,$$
$$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h},$$
$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - 2a_1 h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h_2} .$$

Таким образом, для любого k-го коэффициента формула примет вид

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k},\ \ k = \overline{0,n} .$$

Подставляя эти формулы в выражение многочлена Ньютона, получим его следующий вид:

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Полученную формулу можно записать в другом виде. Для этого введем переменную

$$q = \frac{x - x_0}{h} .$$

В этом случае

$$x = x_0 + qh,$$
$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = q - 1,$$
$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - x_1 - h}{h} = \frac{x - x_0 - h - h}{h} = q - 2,$$
....
$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = q - n + 1.$$

С учетом этих соотношений формулу многочлена Ньютона можно записать в виде
$$N(x_0 + qh) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{q(q-1)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 .$$

Полученное выражение может аппроксимировать данную функцию $y = f(x)$ на всем отрезке изменения аргумента $[x_0, x_n]$. Однако, более целесообразно (с точки зрения повышения точности расчетов и уменьшения числа слагаемых в полученной формуле) ограничиться случаем $q < 1$, то есть использовать эту формулу для всех $x \in [x_0, x_1]$. Для других случаев вместо x_0 принять x_j, если $x \in [x_i, x_{i+1}]$ при $i = \overline{0,\ n-1}$. В этом случае интерполяционный многочлен можно записать в виде
$$N(x_i + qh) = y_i + q\Delta y_i + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_i + ... + \frac{q(q-1)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_i, i = 0,1,..., n-1 .$$

Полученная формула называется первым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполяции вперед.

Эту интерполяционную формулу обычно используют для вычисления значений функции в точках левой половины рассматриваемого отрезка. Это объясняется следующим: разности $\Delta^k y_i$ вычисляются через значения функции $y_i, y_{i+1},..., y_{i+k}$, причем $i + k < n$. Из-за этого при больших значениях i мы не можем вычислить высших порядков $(k < n - i)$.

Для правой половины рассматриваемого отрезка разности лучше вычислять справа налево. В этом случае $q = (x - x_n)/h$, то есть $q < 0$, и интерполяционный многочлен Ньютона можно получить в виде:
$$N(x_n + qh) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + ... + \frac{q(q+1)\,q+n-1}{n!}\Delta^n y_0 .$$

Полученная формула называется вторым интерполяционным многочленом назад.

Пример. Используя интерполяционный полином Ньютона, вычислить $f(0{,}14)$, где функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	0	0,1002	0,2013	0,8045	0,4108	0,5211

Решение.

Составляем таблицу конечных разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	0					
		0,1002				
0,1	<u>0,1002</u>		0,0009			
		<u>0,1011</u>				
0,2	0,2013		<u>0,0021</u>	0,0012		
		0,1032				
0,3	0,3045		0,0031	<u>0,0010</u>	-0,0002	
		0,1063				
0,4	0,4108		0,0040	0,0009	<u>-0,0001</u>	0,0001
		0,1103				
0,5	0,5211					

Для вычисления $f(0{,}14)$ положим в интерполяционном многочлене Ньютона вперед $x_i = 0{,}1;\ h = 0{,}1,$ тогда $q = \dfrac{0{,}14 - 0{,}1}{0{,}1} = 0{,}4$ и

$$f(0{,}14) \approx 0{,}1002 + 0{,}1011 \cdot 0{,}4 + \frac{0{,}0021}{2} \cdot 0{,}4 \cdot (-0{,}6) + \frac{0{,}1010}{3!} 0{,}4 \cdot (-0{,}6)(-1{,}6) +$$

$$+ \frac{0{,}0001}{4!} 0{,}4(-0{,}6) \cdot (-1{,}6)(-2{,}6) \approx 0{,}1405.$$

Пример. Задана таблица. Найти $\sin 14^0$ и $\sin 36^0$.

x	$\sin x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
15^0	0,2588			
		0,0832		
20^0	0,3420		-0,026	
		0,0806		
25^0	0,4226		-0,032	0,0006
		0,0774		
30^0	0,5		0,038	0,0006
		0,0736		
35^0	0,5736			

При вычислении $\sin 14^0$ положим $x_0 = 15^0,\ x = 14^0;\ q = \dfrac{14^0 - 15^0}{5^0} = -0{,}2$.

$$\sin 14^0 = 0{,}2588 + (-0{,}2)\,0{,}0832 + \frac{(-0{,}2)(-0{,}0026)}{2!} +$$

$$+ \frac{(-0{,}2)(-1{,}2)(-2{,}2)}{3!}\cdot(-0{,}0006) = 0{,}241\,900\,8.$$

При вычислении $\sin 36^0$ положим $x_n = 35^0;\ x = 36^0,\ q = \dfrac{36^0 - 35^0}{5^0} = 0{,}2$.

$$\sin 36^0 = 0{,}5736 + 0{,}2\cdot 0{,}0736 + \frac{0{,}2\cdot 1{,}2}{2!}\cdot(-0{,}0038) +$$

$$+ \frac{0{,}2\cdot 1{,}2\cdot 2{,}2}{3!}\cdot(-0{,}0006) = 0{,}587\,811\,2.$$

Оценим погрешности формул Ньютона вперед и назад:

$$R_n(x) = h^{h+1}\,\frac{q(q-1)(q-2)\ldots-(q-n)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi),$$

где $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ и

$$R_n(x) = h^{h+1}\cdot\frac{q(q+1)(q+2)\ldots-(q+n)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi),$$

где $q = \dfrac{x - x_n}{h}$.

Формулы приближенного дифференцирования основаны на первой интерполяционной формуле Ньютона. Интерполяционный многочлен Ньютона имеет вид

$$N(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + .$$

где $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ и $h = x_{i+1} - x_i,\ i = 0,1\ldots$

Производя перемножение биномов, получим

$$N(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \ldots$$

так как $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dq}\cdot\dfrac{dq}{dx} = \dfrac{1}{h}\cdot\dfrac{dy}{dq}$, то

$$N'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3 - 9q^2 + 11q - 3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right]$$

Поскольку $y''(x) = \dfrac{d(y')}{dx} = \dfrac{d(y')}{dq}\cdot\dfrac{dq}{dx}$, то

$$N''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^3 - 18q + 11}{12}\Delta^4 y_0\right].$$

Аналогично можно вычислять производные функции любого порядка.

В некоторых случаях требуется находить производные функций y в основных табличных точках x_i. Так как табличное значение можно считать за начальное, то положив $x = x_0$, $q = 0$, имеем

$$N'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \dots\right),$$

$$N''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \dots\right).$$

Для производной многочлена Ньютона первого порядка погрешность может быть вычислена по формуле

$$R_k'(x_0) \approx \frac{(-1)^k \Delta^{k+1} y_0}{h\ \ k+1},$$

где k — число конечных разностей в многочлене Ньютона.

Пример. Найти $y'(50)$ функции $y = \lg x$, заданной таблично.

Решение.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1,6990			
		0,0414		
55	1,7404		-0,0036	
		0,0378		0,0005
60	1,7782		-0,0031	
		0,0347		
65	1,8129			

Здесь $h = 5$;

$$y'(50) = \frac{1}{5}(0{,}041\,4 + 0{,}001\,8 + 0{,}000\,2) = 0{,}008\,7.$$

Вычисляя погрешность, получим:

$$R_3'(50) = \frac{(-1)^3}{5} \cdot \frac{0{,}000\,5}{4} = 0{,}000\,025.$$

Действительно,

$$y_x' = \frac{M}{x} = \frac{0{,}434\,29}{x};\quad y'(50) = \frac{0{,}434\,29}{5} = 0{,}008\,7.$$

Таким образом, результаты совпадают до четвертого знака.

Варианты заданий

1. Протабулировать функцию с шагом $h = 0{,}1$ на [а, в].
2. Построить многочлен Лагранжа четвертого порядка.
3. По таблице с помощью интерполяционного многочлена Ньютона вычислить значение функции в точке x_0.
4. Вычислить значение производной в точке x_1.
5. Вычислить значение второй производной в точке x_2.

1,2	$\sin x^2$	17,18	$x\cos(x+\ln(1+x))$
3,4	$\cos x^2$	19,20	$\frac{10\ln 2x}{1+x}$
5,6	$e^{\sin x}$	21,22	$\sin x^2 \cdot e^{-(x/2)^2}$
7,8	$\frac{1}{0{,}5+x^2}$	23,24	$\cos\left(x+\cos^3 x\right)$
9,10	$e^{-(x+\sin x)}$	25,26	$\cos\left(x+e^{\cos x}\right)$
11,12	$\frac{1}{1+e^{-x}}$	27,28	$\cos\left(2x+x^2\right)$
13,14	$\sin\left(x+e^{\sin x}\right)$	29,30	$e^{\cos x^2} \cdot \cos x^2$
15,16	$e^{-(x+1/x)}$		

1	[0; 0,4]	$x_0 = 0{,}15$	$x_1 = 0{,}2$	$x_2 = 0{,}3$
2	[1; 1,4]	$x_0 = 1{,}18$	$x_1 = 1{,}2$	$x_2 = 1{,}4$
3	[0; 0,4]	$x_0 = 0{,}35$	$x_1 = 0{,}2$	$x_2 = 0{,}1$
4	[1; 1,4]	$x_0 = 1{,}28$	$x_1 = 1{,}4$	$x_2 = 1{,}1$
5	[0; 0,4]	$x_0 = 0{,}23$	$x_1 = 01$	$x_2 = 0{,}4$
6	[1; 1,4]	$x_0 = 1{,}18$	$x_1 = 1{,}2$	$x_2 = 1{,}4$
7	[0; 0,4]	$x_0 = 0{,}34$	$x_1 = 0{,}2$	$x_2 = 0{,}3$
8	[1; 1,4]	$x_0 = 1{,}25$	$x_1 = 1{,}3$	$x_2 = 1{,}1$
9	[2,4; 2,8]	$x_0 = 2{,}53$	$x_1 = 2{,}5$	$x_2 = 2{,}7$
10	[3; 3,4]	$x_0 = 3{,}26$	$x_1 = 3{,}3$	$x_2 = 3{,}4$
11	[0; 0,4]	$x_0 = 0{,}29$	$x_1 = 0{,}3$	$x_2 = 0{,}2$
12	[2; 2,4]	$x_0 = 2{,}31$	$x_1 = 2{,}1$	$x_2 = 2{,}4$
13	[0; 0,4]	$x_0 = 0{,}21$	$x_1 = 0{,}1$	$x_2 = 0{,}3$
14	[1; 1,4]	$x_0 = 1{,}12$	$x_1 = 1{,}1$	$x_2 = 1{,}3$
15	[1; 1,4]	$x_0 = 1{,}13$	$x_1 = 1{,}2$	$x_2 = 1{,}3$
16	[2; 2,4]	$x_0 = 2{,}18$	$x_1 = 2{,}1$	$x_2 = 2{,}3$
17	[1; 1,4]	$x_0 = 1{,}33$	$x_1 = 1{,}1$	$x_2 = 2{,}2$
18	[3; 3,4]	$x_0 = 3{,}05$	$x_1 = 3{,}2$	$x_2 = 3{,}3$
19	[3; 4,4]	$x_0 = 4{,}04$	$x_1 = 4{,}1$	$x_2 = 4{,}2$
20	[5; 5,4]	$x_0 = 5{,}05$	$x_1 = 5{,}2$	$x_2 = 5{,}3$
21	[7,5; 7,9]	$x_0 = 7{,}63$	$x_1 = 7{,}6$	$x_2 = 7{,}7$
22	[5,4; 5,8]	$x_0 = 5{,}53$	$x_1 = 5{,}6$	$x_2 = 5{,}8$
23	[0; 0,4]	$x_0 = 0{,}13$	$x_1 = 0{,}3$	$x_2 = 0{,}1$
24	[3,6; 4,0]	$x_0 = 3{,}66$	$x_1 = 3{,}8$	$x_2 = 3{,}9$
25	[3,5; 3,9]	$x_0 = 3{,}64$	$x_1 = 3{,}5$	$x_2 = 3{,}9$
26	[4; 4,4]	$x_0 = 4{,}39$	$x_1 = 4{,}0$	$x_2 = 4{,}4$
27	[5,3; 5,7]	$x_0 = 5{,}42$	$x_1 = 5{,}3$	$x_2 = 5{,}7$
28	[7,2; 7,6]	$x_0 = 7{,}35$	$x_1 = 7{,}6$	$x_2 = 7{,}1$
29	[3,3; 3,7]	$x_0 = 3{,}61$	$x_1 = 3{,}7$	$x_2 = 3{,}3$
30	[4; 4,4]	$x_0 = 4{,}41$	$x_1 = 4{,}2$	$x_2 = 4{,}3$

Редактор Н.Н. Пацула
ИД 06039 от 12.10.01
Сводный темплан 2007.
Подписано в печать 22.06.07. Формат 60 x 84 1/16
Бумага офсетная.
Отпечатано на дуплекаторе. Усл.печ.л. 1,75
Уч.-изд.л. 1,75
Тираж 100 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, Омск, пр-т Мира,11
Типография ОмГТУ