Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания к типовому расчету
для студентов всех специальностей

Омск - 2009

Составитель: Макарова Ирина Дмитриевна, доцент

Методические указания содержат краткие теоретические сведения, примеры с решениями задач, а также типовые расчеты для самостоятельной работы студентов 1-2 курсов ОмГТУ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

Редактор
ИД от
Подписано в печать . Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16.
Отпечатано на дубликаторе. Усл.печ.л. 1,0. Уч.-изд.л. 1,0.
Тираж 100 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ, 644050, Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

Для выполнения типового расчета по системам дифференциальных уравнений рекомендуется изучить теоретический материал по следующим вопросам:

Системы дифференциальных уравнений

1. Нормальная система дифференциальных уравнений (д.у.). Сформулировать теорему существования и единственности решений задачи Коши.
2. Решение систем дифференциальных уравнений методом исключения и методом подбора интегрируемых комбинаций.
3. Метод Эйлера решения линейных однородных систем с постоянными коэффициентами (случай простых и кратных корней характеристического уравнения).
4. Решение линейных неоднородных систем с постоянными коэффициентами.

ЗАДАЧИ № 1-3

Задача № 1. Решить системы дифференциальных уравнений методом последовательного интегрирования, методом исключения или методом интегрируемых комбинаций.

Задача № 2. Решить системы дифференциальных уравнений методом Эйлера с помощью характеристического уравнения (х.у.).

Задача № 3. Решить линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами методом подбора частных решений или методом вариации произвольных постоянных.

Задача 1. Решить системы дифференциальных уравнений методом последовательного интегрирования, методом исключения или методом интегрируемых комбинаций.

1. $\begin{cases} x' = -9y \\ y' = x \end{cases}$

2. $\begin{cases} y' = 2y \\ z' = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = y + t \\ y' = x - t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -y + z \\ y' = z \\ z' = -x + z \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = x^2 + xy \\ y' = xy + y^2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \sin t \\ x' + y = \cos t \end{cases}$

7. $\begin{cases} x'' = y \\ y'' = x \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'' + y' + x = 0 \\ x' + y'' = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

10. $\begin{cases} x'' = 3x + y \\ y' = -2x \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' + y = 0 \\ x' - y' = 3x + y \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' + x - y = e^t \\ y' - x + y = e^t \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{x + y} \\ y' = \dfrac{y}{x + y} \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

15. $\begin{cases} y' = e^t - 2 \\ z' = e^{-t} + y \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = 4x + 6y \\ y' = 2x + 3y + t \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = e^{3t} - y \\ y' = 2e^{3t} - x \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = y + t \\ y' = x + e^t \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = e^{3t} \\ y' = 2e^{3t} - x \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -y \end{cases}$

23. $\begin{cases} y' = -2y \\ z' = z \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2y \end{cases}$

25. $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{t} y \\ z' = y + z \end{cases}$

26. $\begin{cases} y' = -y - 2z \\ z' = 3y + 4z \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x - y \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = 5x - 6y + z \\ y' = x - z \\ z' = -6z \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2y \\ z' = -z \end{cases}$

Задача 2.1. Найти общее решение систем методом Эйлера (с помощью характеристического уравнения).

1. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 2x \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 4x - 5y \\ y' = x - 2y \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$

6. $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -2y + 4z \end{cases}$

7. $\begin{cases} y' = 3y - z \\ z' = 10y - 4z \end{cases}$

8. $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = -4y + 4z \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 7x + 2y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$

10. $\begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = -6y - 3z \end{cases}$

11. $\begin{cases} y' = 2y - 3z \\ z' = 3y + 2z \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3x - y \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4y - 2x \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 4x - 5y \\ y' = x \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 4x + 5y \\ y' = -4x - 4y \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$

17. $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -10y - z \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - x \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x - 3y \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$

24. $\begin{cases} y' = y - 2z \\ z' = 6y - 5z \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = 2x - 9y \\ y' = x + 8y \end{cases}$

27. $\begin{cases} y' = 4y + 2z \\ z' = -y + z \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = 8y - x \\ y' = x - y \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$

30. $\begin{cases} y' = -y - z \\ z' = -y - 3z \end{cases}$

Задача 2.2. Найти общее решение систем методом Эйлера (с помощью характеристического уравнения).

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z \\ \dot{y} = y - x + z \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z \\ \dot{y} = x + y + z \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x \\ \dot{y} = z + x \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y \\ \dot{y} = x + 2z \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z \\ \dot{z} = 2x - 4y \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x \\ \dot{y} = 4x + y \\ \dot{z} = 2x + y - z \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 2x - y - 2z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 3y - z \\ \dot{z} = 2y + 3z - x \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z \\ \dot{y} = x - 2y + 2z \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2z - y \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 2y + 4z \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = 3x + y - z \\ \dot{z} = x + z \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = x + y - z \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = -z - 2y + x \\ \dot{y} = z + y - x \\ \dot{z} = -z + x \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = 3x + y - z \\ \dot{z} = x + z \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = x + y \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - z \\ \dot{y} = -x + 2y - z \\ \dot{z} = 2x - y + 4z \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2z \\ \dot{y} = y - 4z \\ \dot{z} = -x - 2z \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y - 2z \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z \\ \dot{y} = -2x - z \\ \dot{z} = 2x + y + 2z \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = 3x + y - z \\ \dot{z} = x + z \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = y - 2z - 3x \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = 2z - y + 2x \\ \dot{y} = 2z + x \\ \dot{z} = -z + y - 2x \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2x \\ \dot{y} = 3y + x - z \\ \dot{z} = 2y + 3z - x \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = z + y \\ \dot{y} = z + x \\ \dot{z} = y + x \end{cases}$

Задача 3. Решить линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами методом подбора частных решений или методом вариации произвольных постоянных.

1. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 1 - x \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1} \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z + e^t \\ \dot{y} = x - y + z + e^{3t} \\ \dot{z} = x + y + z + 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + e^t \\ \dot{y} = -y + x + e^t \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -y + \sin t \\ \dot{y} = x + \cos t \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -2y + 3t \\ \dot{y} = 2x + 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + e^t \\ \dot{y} = x + 3y - e^t \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -y + t^2 \\ \dot{y} = x + t \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = 3 - 2y \\ \dot{y} = 2x - 2t \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - \dfrac{1}{2}y - 3t^2 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{3}{2} \\ \dot{y} = 2y - 2t - 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 2z - t + 2 \\ \dot{y} = 1 - x \\ \dot{z} = x + y - z - t + 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^t \\ \dot{y} = x + y - e^t \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 1 \\ \dot{y} = -x + 5y \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y + \cos t \\ \dot{y} = -x - 2y + \sin t \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y - e^{2t} \\ \dot{y} = -3x - 2y + 6e^{2t} \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = y + tg^2 t - 1 \\ \dot{y} = tgt - x \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} - \dot{y} = -\sin t \\ \dot{x} + \dot{y} = \cos t \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \ \ x(0) = 2 \\ \dot{y} = -x + 2y - 5e^t \sin t, \ y(0) = 3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = y + e^t, \ \ \ x(0) = 0 \\ 2\dot{x} + \dot{y} = -2y + \cos t, \ y(0) = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = -2y + 3t, \ x(0) = 0 \\ \dot{y} = 2x + 4, \ \ y(0) = 1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2\dot{x} = 6x - y - 6t^2 - t + 3, x(0) = 2 \\ \dot{y} = 2y - 2t - 1, \ y(0) = 3 \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = -y + t^2 + 6t + 1, \ x(0) = 0 \\ \dot{y} = x - 3t^2 + 3t + 1, \ y(0) = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = -4y - 2x + 4t + 1, \ x(0) = 0 \\ \dot{y} = -x + y + \dfrac{3}{2}t^2, \ y(0) = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 4t - 1, \ x(0) = 0 \\ \dot{y} = x - 2y + t, \ y(0) = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \ x(0) = 2 \\ \dot{y} = -x - 2y - 5e^t \sin t, y(0) = 3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = e^{-t} - y, \ \ x(0) = -2 \\ 2\dot{x} + \dot{y} = \sin t - 2y, \ y(0) = -1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + t \\ \dot{y} = x - 2y + 2t \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y + 4t + 1, x(0) = 0 \\ \dot{y} = -x + y + \dfrac{3}{2}t^2, \ y(0) = 0 \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = e^t - y - 5x \\ \dot{y} = e^{2t} + x - 3y \end{cases}$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. Решить системы дифференциальных уравнений методом последовательного интегрирования, методом исключения или методом интегрируемых комбинаций

Иногда нормальную систему д.у. удается свести к одному уравнению n-го порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Сведение нормальной системы к одному уравнению может быть достигнуто дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных, кроме одного (так называемый *метод исключения*). В некоторых случаях, комбинируя уравнения системы, после несложных преобразований удается получить легко интегрируемые уравнения (так называемый метод *интегрируемых комбинаций*), что позволяет найти решение системы.

Пример 1. Решить систему д.у. методом исключения $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}.$

Решение. Продифференцируем по t первое уравнение: $x'' = x' + y'$; исключим из полученного уравнения y' и y. Имеем $x'' = x' + x - y$. Найдем y из первого уравнения: $y = x' - x$ (*), подставим в последнее: $x'' - 2x = 0$. Решаем его х.у. : $\lambda^2 - 2 = 0,\ \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2};\ x = c_1 e^{\sqrt{2}\cdot t} + c_2 e^{-\sqrt{2}\cdot t}$. Общее решение для y находим из (*):

$$y = x' - x = c_1\left(\sqrt{2} - 1\right)e^{\sqrt{2}\cdot t} - c_2\left(\sqrt{2} + 1\right)e^{-\sqrt{2}\cdot t}.$$

Пример 2. Решить систему д.у. методом интегрируемых комбинаций:

$$x' = \frac{x}{2x + 3y}, \quad y' = \frac{y}{2x + 3y}.$$

Решение. Составим первую интегрируемую комбинацию, разделив первое уравнение на второе:

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x}{y}$ или $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y};\ \ln|x| = \ln|y| + \ln C_1;\ \mathrm{x} = \mathrm{C}_1 y$.

Составим вторую интегрируемую комбинацию, сложив удвоенное первое и утроенное второе уравнения: $2x' + 3y' = 1$ или $2dx + 3dy = dt$. Отсюда $2x + 3y = t + C_2$. Из системы алгебраических уравнений $x = C_1 y,\ 2x + 3y = t + C_2$ находим общее решение системы $x = C_1 \dfrac{t + C_2}{3 + 2C_1},\ \ y = \dfrac{t + C_2}{3 + 2C_1}$.

2. Найти общее решение систем методом Эйлера (с помощью характеристического уравнения)

Рассмотрим метод Эйлера решения систем д.у. с постоянными коэффициентами на примере системы первого порядка.

$x' = ax + by,\ y' = cx + dy;\ a, b, c, d$ - постоянные. Решение системы находим в виде $x = \gamma_1 e^{\lambda t},\ y = \gamma_2 e^{\lambda t}$, где γ_1, γ_2 и λ - произвольные постоянные. Подставляя их в систему, получим систему относительно γ_1 и γ_2:

$$(a-\lambda)\gamma_1 + b\gamma_2 = 0,\ c\gamma_1 + (d-\lambda)\gamma_2 = 0\ . \qquad (*)$$

Однородная система (*) имеет ненулевое решение при условии

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad . \qquad (**)$$

Таким образом, γ_1 и γ_2 находятся из системы (*), λ- из х.у. (**). При этом различают следующие случаи:

1) Корни х.у. (**) различные, действительные.
2) Корни х.у. различные, комплексные.
3) Корни х.у. кратные.

Рассмотрим эти случаи.

1) <u>Корни х.у. различные, действительные</u>

Пример 3. Решить систему $x' = x + y,\quad y' = x + y$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $(1-\lambda)^2 - 1 = 0,\ \lambda^2 - 2\lambda = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$ - корни х.у. различные, действительные. Находим γ_1 и γ_2.

а) $\lambda_1 = 0,\ x_1 = \gamma_1,\ y_1 = \gamma_2$. Подставляя в систему, получим $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$; полагая $\gamma_2 = 1$, получим $\gamma_1 = -1$. Итак, $x_1 = -1,\ y_1 = 1$;

б) $\lambda_2 = 2,\ x_2 = \gamma_3 \cdot e^{2t},\ y_2 = \gamma_4 \cdot e^{2t};\ \gamma_3, \gamma_4$ - находим из системы $2\gamma_3 = \gamma_3 + \gamma_4,\ 2\gamma_4 = \gamma_3 + \gamma_4 \Rightarrow -\gamma_3 + \gamma_4 = 0,\ \gamma_3 - \gamma_4 = 0$. Полагая $\gamma_4 = 1$, получим $\gamma_3 = 1;\ x_2 = e^{2t},\ y_2 = e^{2t}$. Общее решение имеет вид: $x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = -C_1 + C_2 \cdot e^{2t},\ y = C_1 + C_2 \cdot e^{2t}$.

2) <u>Корни х.у. комплексные.</u>

Пример 4. Решить систему $x' = y,\ y' = -x$.

Решение. Х.у. имеет вид $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm\ i$.

а) $\lambda_1 = i,\ x_1 = \gamma_1 \cdot e^{it},\ y_1 = \gamma_2 \cdot e^{it}$. γ_1 и γ_2 находим из системы $i\gamma_1 = \gamma_2,\ i\gamma_2 = -\gamma_1$. Полагаем $\gamma_1 = i$, тогда $\gamma_2 = -1$. Получим $x_1 = i \cdot e^{it},\ y_1 = -e^{it}$ - частное решение.

б) $\lambda = -i$, этому корню соответствует комплексно сопряженное решение $x_2 = -ie^{-it},\ y_2 = -e^{-it}$. Общее решение имеет вид: $x = C_1x_1 + C_2x_2 = C_1ie^{it} - iC_2e^{-it}$, $y = -C_1e^{it} - C_2e^{-it}$. Можно построить новую фундаментальную систему решений (ф.с.р.) из действительных решений, полагая $\tilde{x}_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $\tilde{x}_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{2i}$; $\tilde{y}_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, $\tilde{y}_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i}$; и общее решение будет иметь вид $x = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t;\ \text{y} = -C_1 \cdot \cos t\ -\ C_2 \cdot \sin t$.

3) <u>Корни х.у. действительные, кратные.</u>

Пример 5. Решить систему $x' = x,\quad y' = x + y$.

Решение. Х.у. имеет вид: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $(1-\lambda)^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1$. Корень $\lambda = 1$ $-$кратный. Решение следует искать в виде: $x = (At + B)e^t,\ y = (Ct + D)e^t$, где A, B, C, D - постоянные. Подставляя в уравнение системы, получим

$$Ae^t + (At + \text{B})e^t = (At + \text{B})e^t, \quad Ce^t + (Ct + D)e^t = (At + \text{B})e^t + (Ct + D)e^t.$$

Сокращая на e^t и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим: $A = 0,\ C = B$, C и D - произвольные. Полагаем $C = C_1,\ D = C_2$. Имеем $x = Ce^t,\ y = (C_1t + C_2)e^t$ - общее решение.

3. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами

Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами можно решить методом вариации произвольных постоянных и методом подбора частных решений по виду правых частей также как линейные неоднородные уравнения. Рассмотрим эти методы на примерах.

Пример 6. Методом вариации постоянных решить систему $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y + 4t \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$.

Решение. Сначала находим общее решение соответствующей однородной системы $x = -c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{-3t}$, $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$. Общее решение неоднородной системы находим в виде: $x = -c_1(t)e^{2t} + 4c_2(t)e^{-3t}$, $y = c_1(t)e^{2t} + c_2(t)e^{-3t}$. Для определения $c_1'(t)$ и $c_2'(t)$ составим систему $\begin{cases} -c_1'(t)e^{2t} + 4c_2'(t)e^{-3t} = 4t, \\ c_1'(t)e^{2t} + c_2'(t)e^{-3t} = 0. \end{cases}$ Откуда $\begin{cases} c_1'(t) = -\dfrac{4}{5}te^{-2t}, \\ c_2'(t) = \dfrac{4}{5}te^{3t}. \end{cases}$ Интегрируя, находим $\begin{cases} c_1(t) = -\dfrac{2}{5}te^{-2t} + \dfrac{1}{5}e^{-2t} + c_1, \\ c_2(t) = \dfrac{4}{15}te^{3t} - \dfrac{4}{45}e^{3t} + c_2, \end{cases}$ где c_1 и c_2 - произвольные постоянные. Общее решение системы имеет вид: $x = -c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{-3t} - \dfrac{22}{15}t \dfrac{5}{9}$, $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} - \dfrac{2}{15}t + \dfrac{1}{9}$.

Пример 7. Решить задачу Коши для системы $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 4t - 1, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = x - 2y + t, & y(0) = 0. \end{cases}$

Решение. Будем решать систему методом подбора частных решений. Сначала находим общее решение соответствующей однородной системы $x = 5c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$, $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$. Частное решение неоднородной системы будем искать в виде: $\overline{x} = At + B$, $\overline{y} = Ct + D$, где A, B, C, D - произвольные постоянные, которые находим, подставляя $\overline{x}, \overline{y}$ в систему. Получим $\overline{x} = -t$, $\overline{y} = 0$. Общее решение неоднородной системы имеет вид: $x = 5c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - t$, $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$ Из начальных условий найдем $c_1 = 0, c_2 = 0$. Следовательно, частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид $x = -t$, $y = 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1972.
2. Гудыменко Ф.С., Павлюк И.А., Волкова В.А. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Киев, 1972.
3. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / Под ред. С.Н. Федина. – М,: Айрис-пресс, 2004. – 592 с.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высш. школа, 1978.
5. Креер Л.И. Сборник упражнений по дифференциальным уравнениям. – М.: Учпедгиз, 1948.
6. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: Высш. школа, 1989.
7. Сборник задач по математике для втузов / В.А. Болгов и др.; Под ред.А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.
8. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М., 1961.
9. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982.
10. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1973.