Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

Н.И. Николаева

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Конспект лекций
Часть 3

Омск-2009

УДК
ББК

Рецензенты:
Ю.Ф.Стругов, д-р физ.-мат. наук;
С.Е.Макаров, канд. физ.-мат. наук, доцент

Николаева Н.И.
Функции нескольких переменных. Конспект лекций. Часть 3 / Н.И. Николаева. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2009. – 32 с.

Пособие представляет собой конспект лекций, читаемых автором на первом курсе технического университета, и предназначено для студентов всех форм обучения. В нем подробно, последовательно и с доказательствами изложена теоретическая часть курса математики. Изложение сопровождается достаточным количеством примеров, поясняющих наиболее важные теоретические положения, иллюстрирующих теоретический материал и дающих образцы решения задач.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

Оглавление

Глава 6. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если каждой паре $(x,\ y)$ значений двух не зависящих друг от друга переменных x и y из некоторой области их изменения D по некоторому правилу ставится в соответствие единственное значение переменной z, то говорят, что на области D задана функция двух переменных $z = z(x,\ y)$.

Область D называется *областью определения функции двух переменных*, а множество значений, принимаемых переменной z, – ее *областью значений*.

Самый распространенный способ задания функции двух переменных – аналитический, то есть с помощью формул.

ПРИМЕР. а) $z = x^2 + y^2,\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. Эта функция определена на всей плоскости. Из аналитической геометрии известно, что $z = x^2 + y^2$ – уравнение эллиптического параболоида, поэтому можно сказать, что эллиптический параболоид является графиком этой функции (рис. 1).

б) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Эта функция определена, если $x^2 + y^2 \le 1$, то есть внутри единичного круга. После возведения в квадрат обеих частей равенства $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ получим уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, но так как $z \ge 0$, то график этой функции – верхняя полусфера (рис. 2).

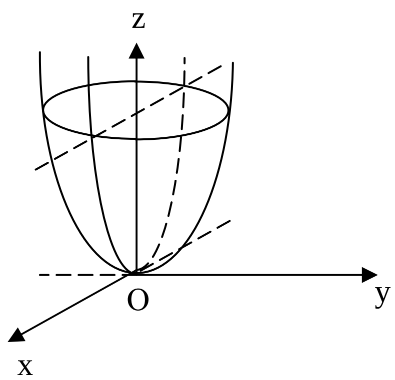

Рис. 1

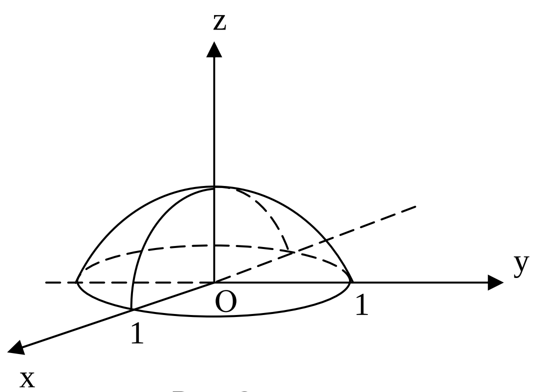

Рис. 2

в) $z = 2x + 3y - 5,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$. Графиком этой функции является плоскость.

Таким образом, *графиком функции двух переменных является поверхность*.

Рассматривая функции двух переменных, мы будем иметь дело с множествами точек, которые представляют собой часть плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Окрестностью* (или ε*-окрестностью*) точки $M(x_0, y_0)$ называется множество точек плоскости, координаты которых связаны неравенством $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$.

Другими словами, окрестностью точки $M(x_0, y_0)$ на плоскости будем называть круг с центром в этой точке радиуса ε, не включающий окружность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка M называется *внутренней точкой* множества D, если существует окрестность этой точки, целиком лежащая в D.

То есть внутренние точки области принадлежат ей вместе с некоторой достаточно малой своей окрестностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если любая окрестность точки M содержит как точки области D, так и точки, не принадлежащие D, то M называется *граничной точкой* области D. Множество всех граничных точек области D называется ее *границей*.

Или, по-другому, граница плоской области – это линия, которая ее ограничивает, а точки области, не лежащие на ее границе, – внутренние точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется *открытой*, или *незамкнутой*. Если к области относятся и все точки границы, то она называется *замкнутой*.

Вся плоскость по определению считается и открытой, и замкнутой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Плоская область называется *ограниченной*, если существует круг, целиком содержащий эту область.

ПРИМЕР. $D = \{(x, y) : |x| \le 1,\ |y - 1| \le 2\}$ – прямоугольник с центром в точке (0,1) (рис. 3) – ограниченная и замкнутая область;

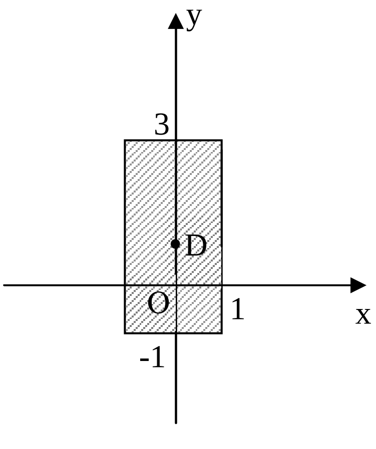

Рис. 3

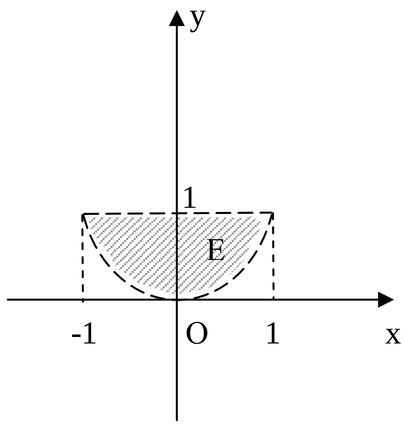

Рис. 4

$E = \{(x, y):\ x^2 < y < 1\}$ – ограниченная и открытая (незамкнутая) область (рис. 4);

$G = \{(x, y):\ x > -1,\ |y-1| < 2\}$ – неограниченная и открытая область (рис. 5);

$H = \{(x, y):\ x \ge -1,\ |y-1| \le 2\}$ – неограниченная и замкнутая область (рис. 6).

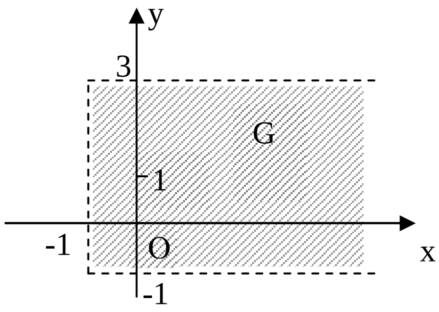

Рис. 5

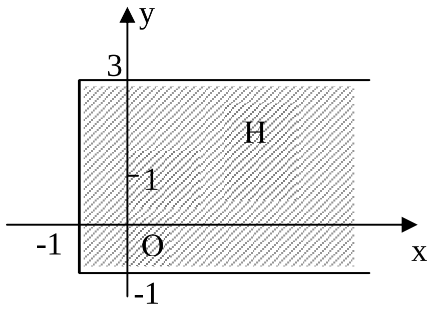

Рис. 6

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Рассмотрим функцию $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$. Пусть значение переменной y зафиксировано, то есть $y = y_0$. Тогда $z = z(x, y_0)$ – функция одной переменной x. Зададим в некоторой точке $x = x_0$ приращение $\Delta x \ne 0$, так что $(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$. Полученное таким образом приращение функции $z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0) = \Delta_x z(x_0, y_0)$ называется *частным приращением по* x *функции* $z = z(x, y)$ в точке $(x_0, y_0) \in D$. Оно получено в результате изменения только переменной x.

Если функция $z = z(x, y_0)$ имеет в точке $x = x_0$ производную, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x} = z'_x(x_0, y_0)$$

называется *частной производной первого порядка функции* $z = z(x, y)$ *по* x в точке (x_0, y_0).

Аналогично, если зафиксировать $x = x_0$ и задать приращение $\Delta y \ne 0$, так, что $(x_0,\ y_0 + \Delta y) \in D$, то получим частное приращение функции $z = z(x, y)$ по переменной y: $\Delta_y z = z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0)$ в точке $(x_0, y_0) \in D$. Если функция $z = z(x_0, y)$ имеет производную в точке $y = y_0$, то

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(x_0,\, y_0+\Delta y)-z(x_0,\, y_0)}{\Delta y}=z'_y(x_0,\, y_0)$$

называется *частной производной первого порядка функции* $z=z(x,\, y)$ *по* y в точке $(x_0,\, y_0)$.

Из определения следует, что в различных точках $(x_0,\, y_0)\in D$ частные производные будут принимать различные значения. Таким образом, частные производные функции двух переменных также являются функциями двух переменных. Кроме того, частные производные вычисляются так же, как обыкновенные, при условии лишь, что одна из двух переменных фиксирована, то есть не изменяется.

ПРИМЕР. Вычислить все частные производные первого порядка функций

а) $z=\dfrac{x^2}{y^3}-2x+3y^2$

$$z'_x\Big|_{y=const}=\frac{1}{y^3}\cdot 2x-2,\qquad z'_y\Big|_{x=const}=-\frac{3}{y^4}\cdot x^2+6y\,.$$

б) $z=x^y$

$$z'_x\Big|_{y=const}=y\;x^{y-1},\qquad z'_y\Big|_{x=const}=x^y\;\ln x\,.$$

Частные производные первого порядка можно обозначать по-другому: $z'_x=\dfrac{\partial z}{\partial x},\; z'_y=\dfrac{\partial z}{\partial y}$ (сравните с обозначением обыкновенных производных: если $z=z(x)$, то $z'=\dfrac{dz}{dx}$). При этом $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – не частное, а единый неделимый символ, в то время, как обыкновенная производная $\dfrac{dz}{dx}$ – частное от деления дифференциала dz на дифференциал dx.

ЗАМЕЧАНИЕ. При вычислении частных производных от функций большего числа переменных полагается, что все переменные, кроме той, по которой берется производная, фиксированы, то есть постоянны.

ПРИМЕР. Найти все частные производные первого порядка функции $u=\dfrac{z^3}{x^2+2y^4}$.

$$u'_x\Big|_{y,z=const}=z^3\frac{(-1)}{(x^2+2y^4)^2}\left(x^2+2y^4\right)'_x=-\frac{2xz^3}{(x^2+2y^4)^2},$$

$$u'_y\Big|_{x,z=const} = z^3 \frac{(-1)}{(x^2+2y^4)^2}\left(x^2+2y^4\right)'_y = -\frac{8y^3z^3}{(x^2+2y^4)^2},$$

$$u'_z\Big|_{x,y=const} = \frac{3z^2}{x^2+2y^4}.$$

По определению вторая производная – это производная от первой производной, поэтому функция двух переменных имеет 4 производные второго порядка:

$$(z'_x)'_x = z''_{xx} \text{ или } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$(z'_x)'_y = z''_{xy} \text{ или } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},$$

$$(z'_y)'_y = z''_{yy} \text{ или } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$(z'_y)'_x = z''_{yx} \text{ или } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}.$$

Очевидно, функция $z = z(x, y)$ имеет 8 производных третьего порядка, 16 – четвертого,…, 2^n производных n-го порядка.

$$z(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x\,\partial y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

…

Частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$ и т.д. называются *смешанными частными производными второго, третьего и т.д. порядков.*

ПРИМЕР. Вычислить производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ от функции $z=\dfrac{y}{x^2}+2xy+x^3\sqrt{y}$.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=const}=y\cdot\frac{(-2)}{x^3}+2y+3x^2\sqrt{y}\;\Rightarrow\;\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right|_{x=const}=-\frac{2}{x^3}+2+\frac{3x^2}{2\sqrt{y}},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=const}=\frac{1}{x^2}+2x+\frac{x^3}{2\sqrt{y}}\;\Rightarrow\;\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right|_{y=const}=-\frac{2}{x^3}+2+\frac{3x^2}{2\sqrt{y}}.$$

Оказалось, что эти смешанные частные производные равны: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$. Это равенство неслучайно.

ТЕОРЕМА. Частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны при условии их непрерывности.

(Без доказательства).

ЗАМЕЧАНИЕ. Геометрический смысл частных производных первого порядка: так как уравнение $z=z(x,\,y)$ задает поверхность, а условие $x=const$ – её сечение плоскостью, то $z'_y(x_0,\,y_0)$ – угловой коэффициент касательной, проведенной в точке $N(x_0,\,y_0,\,z_0)$ к кривой, полученной сечением поверхности $z=z(x,\,y)$ плоскостью $x=x_0$. Аналогично, $z'_x(x_0,\,y_0)$ – угловой коэффициент касательной, проведенной в точке N к кривой, полученной сечением поверхности $z=z(x,\,y)$ плоскостью $y=y_0$ (рис. 7).

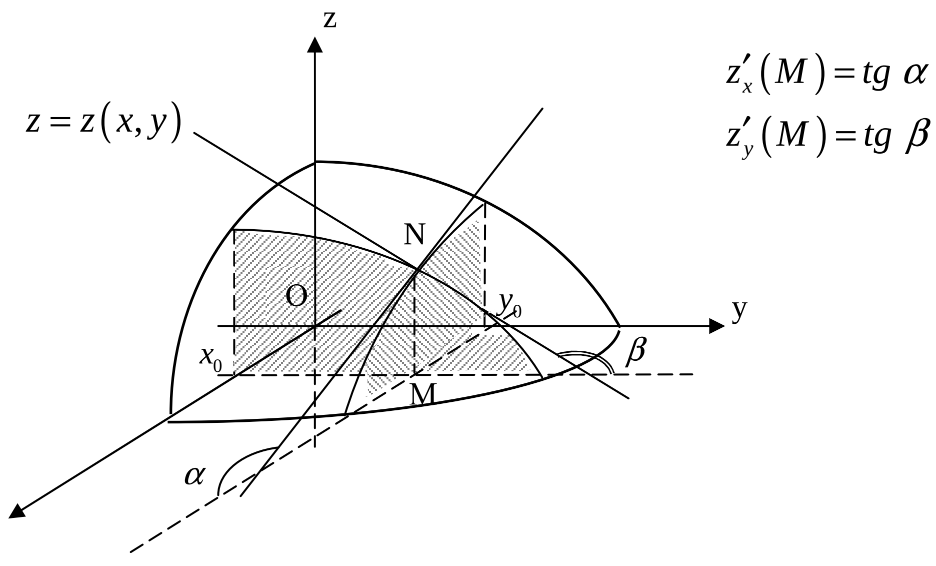

Рис. 7

ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. УСЛОВИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

Рассмотрим функцию $z = z(x, y),\ (x, y) \in D$ и зададим приращения $\Delta x \neq 0,\ \Delta y \neq 0$ так, чтобы $(x + \Delta x,\ y + \Delta y) \in D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Полным приращением* функции $z = z(x, y)$ в точке $M(x, y)$, соответствующим приращениям $\Delta x, \Delta y$, называется

$$\Delta z = z(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - z(x, y).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $z = z(x, y)$ называется *дифференцируемой* в некоторой точке $M(x, y)$, если её полное приращение в этой точке представимо в виде:

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$

где $A, B = const$, а $\lim\limits_{\Delta x, \Delta y \to 0} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{\Delta x, \Delta y \to 0} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$.

ТЕОРЕМА (достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных). Если функция $z = z(x, y)$ имеет в некоторой окрестности точки $M(x, y)$ непрерывные частные производные $z'_x(x, y),\ z'_y(x, y)$, то она дифференцируема в этой точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим $\Delta x \neq 0,\ \Delta y \neq 0$ и рассмотрим полное приращение функции:

$$\Delta z = z(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - z(x, y) =$$

$$= \underbrace{\big(z(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - z(x + \Delta x,\ y)\big)}_{\textit{изменяется только } y} + \underbrace{\big(z(x + \Delta x,\ y) - z(x, y)\big)}_{\textit{изменяется только } x}.$$

Так как по условию обе частные производные первого порядка существуют, применим к каждому слагаемому теорему Лагранжа: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),\ c \in (a, b)$ (см. гл. 5). При $b = y + \Delta y,\ a = y$ получим

$z(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - z(x + \Delta x,\ y) = z'_y(x + \Delta x,\ \overline{y})\,\Delta y$, где $\overline{y}$ – между y и $y + \Delta y$;

Аналогично, при $b = x + \Delta x,\ a = x$: $z(x + \Delta x,\ y) - z(x,\ y) = z'_x(\overline{x},\ y)\,\Delta x$, где $\overline{x}$ – между x и $x + \Delta x$.

Тогда

$$\Delta z = z'_x(\overline{x},\ y)\Delta x + z'_y(x + \Delta x,\ \overline{y})\,\Delta y \tag{6.1}$$

Кроме того, частные производные $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ по условию непрерывны в окрестности точки $M(x, y)$, поэтому

$$\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0} z'_y(x+\Delta x,\ \bar{y}) = z'_y(x, y), \quad \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0} z'_x(\bar{x},\ y) = z'_x(x, y) \Rightarrow$$

$$z'_x(\bar{x},\ y) = z'_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{6.2}$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow[\Delta x,\ \Delta y\to 0]{} 0$;

$$z'_y(x+\Delta x,\ \bar{y}) = z'_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y), \tag{6.3}$$

где $\beta(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow[\Delta x,\ \Delta y\to 0]{} 0$.

Подставим (6.2), (6.3) в (6.1):

$$\Delta z = \left(z'_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y)\right)\Delta x + \left(z'_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y)\right)\Delta y .$$

Обозначив $z'_x(x, y) = A,\ z'_y(x, y) = B$, получим требуемое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Главная линейная часть полного приращения функции $z = z(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется ее *полным дифференциалом* в этой точке: $dz = z'_x(x, y)\,\Delta x + z'_y(x, y)\,\Delta y$.

Так как x и y – независимые переменные, то $\Delta x = dx,\quad \Delta y = dy$ и

$$dz = z'_x(x, y)\,dx + z'_y(x, y)\,dy .$$

ПРИМЕР. Найти полный дифференциал функции $z = \dfrac{2\sqrt{y}}{x^2} + 6x - 2y$

а) в точке $M(x, y)$, б) в точке $A(1, 4)$.

$$z'_x\Big|_{y=const} = 2\sqrt{y}\cdot\frac{(-2)}{x^3} + 6, \qquad z'_y\Big|_{x=const} = \frac{1}{x^2\sqrt{y}} - 2 .$$

а) $dz(x, y) = \left(\dfrac{-4\sqrt{y}}{x^3} + 6\right)dx + \left(\dfrac{1}{x^2\sqrt{y}} - 2\right)dy$,

б) $dz(1, 4) = (-8+6)\,dx + \left(\dfrac{1}{2} - 2\right)dy = -2dx - 1{,}5dy$.

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

ПРИМЕР. Вычислить частные производные первого порядка функции $z = x^2 y \sin^2 y \cos x + x y^2 \sin y \cos^2 x$.

Решение этой задачи в том виде, как она сформулирована, приведет, очевидно, к громоздким вычислениям: в каждом слагаемом придется находить производную произведения. Однако можно, заметив определенную симметрию в заданном выражении и обозначив $u = x\sin y$, $v = y\cos x$, значительно упростить вид функции z: $z = u^2 v + u v^2$. Вычислить частные производные функции $z = z(u, v)$ значительно проще, чем функции $z = z(x, y)$. Но для этого необходимо выяснить, как связаны между собой производные функций $z = z(x, y)$ и $z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Функция $z = z(u, v)$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ называется *сложной функцией двух переменных*: она формально зависит от переменных u и v, а фактически – от x и y.

Будем считать, что функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y), а функция $z(u, v)$ – в соответствующей точке (u, v). Вычислим производную z'_x.

Зададим приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ получат частные приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$. Так как $z(u, v)$ дифференцируема в точке (u, v), то по определению ее полное приращение имеет вид:

$$\Delta z = z'_u(u, v)\Delta_x u + z'_v(u, v)\Delta_x v + \alpha(\Delta_x u, \Delta_x v)\,\Delta_x u + \beta(\Delta_x u, \Delta_x v)\,\Delta_x v,$$

причем
$$\lim_{\Delta_x u,\, \Delta_x v \to 0} \alpha(\Delta_x u, \Delta_x v) = \lim_{\Delta_x u,\, \Delta_x v \to 0} \beta(\Delta_x u, \Delta_x v) = 0. \tag{6.4}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = z'_u(u, v) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + z'_v(u, v) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \left(\alpha(\Delta_x u, \Delta_x v) \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta(\Delta_x u, \Delta_x v) \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right).$$

Функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y), поэтому непрерывны. Значит, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x u = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x v = 0$.

Кроме того, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} = u'_x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} = v'_x$.

Отсюда с учетом (6.4) имеем

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = z'_u\, u'_x + z'_v\, v'_x + u'_x \cdot \lim_{\Delta_x u, \Delta_x v \to 0} \alpha\left(\Delta_x u, \Delta_x v\right) + v'_x \cdot \lim_{\Delta_x u, \Delta_x v \to 0} \beta\left(\Delta_x u, \Delta_x v\right) =$$

$$= z'_u\, u'_x + z'_v\, v'_x .$$

Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогично, задавая $\Delta y \neq 0$, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Способ написания этих формул станет наглядным, если составить схему зависимости сложной функции от ее формальных (промежуточных) и фактических переменных (рис. 8):

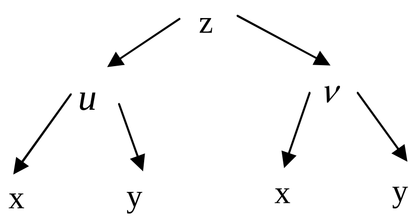

Рис. 8

Вернемся к примеру в начале этого параграфа.

ПРИМЕР. Найти частные производные первого порядка сложной функции $z = u^2\, v + u\, v^2$, $u = x \sin y$, $v = y \cos x$.

$$z'_u = 2u\,v + v^2, \quad z'_v = u^2 + 2u\,v,$$

$$u'_x = \sin y, \quad u'_y = x \cos y, \quad v'_x = -y \sin x, \quad v'_y = \cos x.$$

Отсюда

$$z'_x = \left(2u\,v + v^2\right) \sin y + \left(u^2 + 2u\,v\right)\left(-y \sin x\right),$$

$$z'_y = \left(2u\,v + v^2\right)\, x \cos y + \left(u^2 + 2u\,v\right) \cos x,$$

где $u = x \sin y$, $v = y \cos x$.

Эта идея применима для составления формул вычисления производных сложных функций, зависящих от любого числа как фактических, так формальных переменных.

ПРИМЕР. Составить формулы вычисления производных первого порядка функции $z=z(u,v,w)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y,t)$, $w=w(y,t)$.

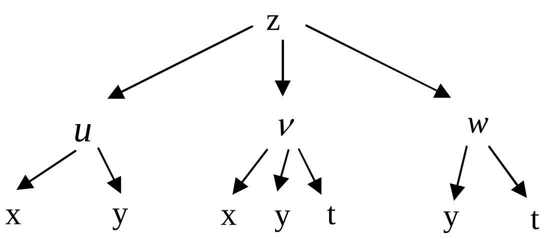

Рис. 9

Согласно схеме зависимости (рис. 9) эта функция зависит фактически от трех переменных x, y, t, и формулы вычисления производных имеют вид:

$$z'_x = z'_u\, u'_x + z'_v\, v'_x\ ,\quad z'_y = z'_u\, u'_y + z'_v\, v'_y + z'_w\, w'_y,\quad z'_t = z'_v\, v'_t + z'_w\, w'_t.$$

Рассмотрим сложную функцию $z=z(x,u,v)$, $u=u(x)$, $v=v(x)$.

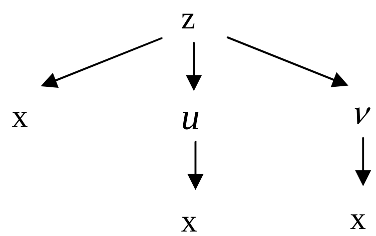

Рис. 10

Формально эта функция зависит от трех переменных, а фактически $z=z(x)$ – функция только одной переменной x. Поэтому производная от нее по x – не частная, а обыкновенная производная, которая в таком случае называется *полной производной* данной *сложной функции*. Вычисляется она по формуле $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$ (рис. 10). В этой формуле $\frac{\partial z}{\partial x}$ – *частная* производная функции, зависящей от трех переменных x, u, v, а $\frac{dz}{dx}$ – *полная* производная.

Используя формулу вычисления полной производной, можно дифференцировать показательно-степенные функции.

ПРИМЕР. Найти первую производную функции $y=\left(tg\ 2x\right)^{\cos 3x}$.

Обозначим $u=tg\ 2x,\quad v=\cos 3x$, тогда получим $y=u^{v}$ – сложная функция двух переменных и $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{dv}{dx}$ (рис. 11).

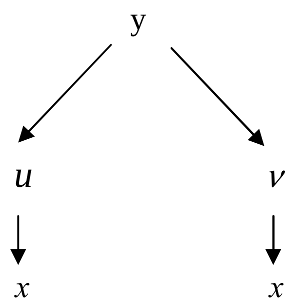

Рис. 11

Поэтому $y'=v\,u^{v-1}\cdot\dfrac{2}{\cos^2 2x}+u^{v}\ \ln u\cdot\left(-3\sin 3x\right)=u^{v}\left(\dfrac{2v}{u\cos^2 2x}-3\sin 3x\cdot\ln u\right)$,

где $u=tg\ 2x,\ \ v=\cos 3x$.

Заметим, что найти производную показательно-степенной функции можно и по-другому – с помощью процедуры логарифмического дифференцирования.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНО

Рассмотрим уравнение $4x^3+3xy+y^3=0$. Очевидно, есть пары значений x и y, обращающих его в верное числовое равенство, например: $(0,\,0)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ и т.д. Однако не всякая пара $(x,\,y)$ удовлетворяет этому уравнению. Значит, можно утверждать, что этим уравнением задана некоторая функция $y=y(x)$ (или $x=x(y)$), хотя явно вид этой зависимости в данном случае получить довольно сложно.

Функция, определенная из неразрешенного уравнения, связывающего независимые и зависимую переменные, называется *неявной функцией*.

В приведенном примере равенство $4x^3+3xy+y^3=0$ задает неявную функцию одной переменной. Уравнением $x-2y+5=0$ также задается неявная функция, которая легко может быть представлена в явном виде: $x = 2y - 5$ или $y = \frac{x+5}{2}$.

Однако не всякое уравнение, не разрешенное относительно одной из переменных, определяет неявную функцию. Например, уравнение $x^2 + 2y^4 + 3 = 0$ не задает функцию, так как, очевидно, нет ни одной пары действительных чисел, которая ему удовлетворяет.

Кроме неявных функций одной переменной, существуют неявные функции нескольких переменных. Так, например, тройки чисел $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ обращают выражение $xe^y + ye^z + ze^x = 1$ в верное числовое равенство, поэтому $xe^y + ye^z + ze^x - 1 = 0$ – функция двух переменных, заданная неявно. Здесь ни одну из трех переменных невозможно явно выразить через две другие.

$x^2 + y^2 - z = 0$ – также неявная функция двух переменных, но $z = x^2 + y^2$ – та же функция, заданная явно.

Пусть в общем случае дано уравнение $F(x, y) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если каждому значению x из некоторого множества X соответствует единственное значение $y \in Y$, которое вместе с x удовлетворяет уравнению $F(x, y) = 0$, то говорят, что это уравнение определяет на множестве X *неявную функцию* одной переменной $y = y(x)$.

Таким образом, для неявной функции имеет место тождество $F(x, y(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in X$.

В некоторых случаях каждому $x \in X$ соответствует несколько значений y. Тогда равенство $F(x, y) = 0$ определяет не одну, а несколько неявных функций. Например, уравнение $x^2 + y^2 - 4 = 0$ задает две неявные функции, которые можно записать в явном виде, разрешив его относительно y: $y = \sqrt{4 - x^2}$ или $y = -\sqrt{4 - x^2}$.

Ответ на вопрос, каким условиям должна удовлетворять функция $F(x, y)$, чтобы уравнение $F(x, y) = 0$ определяло единственную функцию $y = y(x)$, дает теорема о существовании неявной функции.

ТЕОРЕМА. Пусть функция $F(x, y)$ и ее частные производные $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой окрестности точки $M(x_0, y_0)$ и при этом $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда уравнение $F(x, y) = 0$ определяет в этой окрестности точки $M(x_0, y_0)$ единственную неявную функцию, непрерывную и дифференцируемую в некотором интервале, содержащем точку x_0, причем $y(x_0)=y_0$.

(Без доказательства).

Рассмотрим функцию $F(x, y)$, удовлетворяющую всем условиям теоремы о существовании неявной функции. Тогда равенство $F(x, y)=0$ определяет неявную функцию $y=y(x)$, для которой в окрестности точки $M(x_0, y_0)$ имеет место тождество $F(x, y(x))\equiv 0$. Так как производная функции, тождественно равной нулю, также равна нулю, то полная производная

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

– формула для вычисления производной неявной функции одной переменной.

ПРИМЕР. Найти производную неявной функции $4x^3+3xy+y^3=0$.

$$F'_x=12x^2+3y,\ \ F'_y=3x+3y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{12x^2+3y}{3x+3y^2}=-\frac{4x^2+y}{x+y^2}.$$

Если считать, что это равенство задает функцию $x=x(y)$, то $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{x+y^2}{4x^2+y}$.

Рассмотрим теперь уравнение $F(x, y, z)=0$. При условиях, аналогичных сформулированным в теореме о существовании неявной функции, это уравнение определяет z как функцию двух переменных $z=z(x, y)$. Поэтому $F(x, y, z(x,y))\equiv 0$ – тождество. Продифференцировав его по x и по y, получим:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\\ &\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}\end{aligned}\qquad \text{при условии, что } F'_z\neq 0.$$

ПРИМЕР. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $xe^y+ye^z+ze^x-1=0$.

$$F'_x=e^y+ze^x,\ F'_y=xe^y+e^z,\ \ F'_z=ye^z+e^x \Rightarrow z'_x=-\frac{e^y+ze^x}{ye^z+e^x},\ z'_y=-\frac{xe^y+e^z}{ye^z+e^x}$$

при условии, что $ye^z+e^x\neq 0$.

ПРОИЗВОДНАЯ ПО ЗАДАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Как известно, производная функции одной переменной $y = y(x)$ характеризует скорость ее изменения при изменении x. Поэтому, очевидно, частная производная функции $z = z(x, y)$ по переменной x характеризует скорость изменения этой функции в результате изменения x, или, по-другому, в направлении оси OX, а частная производная по y – скорость изменения функции в направлении оси OY. Однако, в каждой точке плоскости, кроме этих двух направлений, существует еще бесконечное множество других, и во многих случаях представляет интерес скорость изменения, или производная функции, по любому заданному направлению.

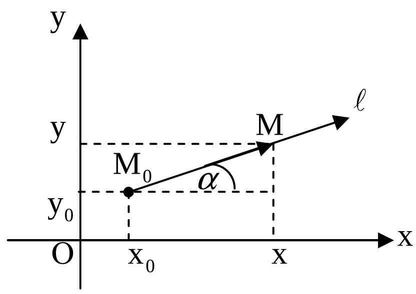

Рис. 12

Рассмотрим функцию $z = z(x, y)$. На произвольно направленной оси ℓ в плоскости XOY выберем фиксированную точку M_0 и переменную точку M (рис. 12).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Производной функции* $z = z(x,y)$ в точке M_0 *по направлению* ℓ называется $\dfrac{\partial z}{\partial \ell}(M_0) = \lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{z(M) - z(M_0)}{\left|\overrightarrow{M_0 M}\right|}$.

Эта производная *характеризует скорость изменения функции в точке* M_0 *в направлении* ℓ.

Выведем формулу вычисления производной по направлению. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат зафиксирована точка $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ – произвольная, а направление ℓ образует с положительным направлением OX угол α (рис. 12). Обозначим $\left|\overrightarrow{M_0 M}\right| = t$. Тогда $x = x_0 + t\cos\alpha,\ y = y_0 + t\sin\alpha$, поэтому функция $z = z(x, y)$ на выбранном направлении фактически зависит от одной переменной t (рис.13). Поэтому в соответствии с определением

$$\frac{\partial z}{\partial \ell}(M_0) = \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=o} = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\sin\alpha .$$

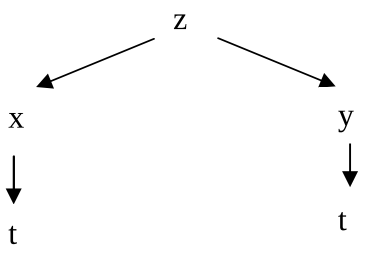

Рис. 13

Пусть теперь $u = u(x, y, z)$ – функция трех переменных, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная, $M(x, y, z)$ – произвольная точка и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы заданного направления ℓ в пространстве. Тогда, очевидно,

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{cases}$$

и
$$\frac{\partial u}{\partial \ell}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \qquad (6.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Градиентом* функции $u = u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ называется вектор $grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$.

Если обозначить $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный вектор направления ℓ, то, очевидно, производная по направлению (6.5) – скалярное произведение $grad\ u$ и $\vec{\tau}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \left(grad\ u,\ \vec{\tau}\right) = |grad\ u|\ |\vec{\tau}|\ \cos\omega,\ \ \omega = \left(\widehat{grad\ u,\ \ell}\right).$$

Так как $|\vec{\tau}| = 1$, то $\frac{\partial u}{\partial \ell} = |grad\ u|\ \cos\omega$, поэтому $\frac{\partial u}{\partial \ell}$ достигает максимума в том случае, когда $\ell \uparrow\uparrow grad\ u$. Это означает, что $grad\ u(M)$ *указывает на направление наискорейшего возрастания функции в точке M*. При этом скорость наибольшего возрастания в данной точке равна $|grad\ u| = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}$.

Итак, *градиентом скалярной величины называется вектор, который по численному значению и направлению характеризует наибольшую скорость изменения величины.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Как было отмечено выше, графиком функции двух переменных является пространственная поверхность. Поэтому величина производной $\frac{\partial z}{\partial \ell}(M_0)$ указывает, как будет меняться высота (значение переменной z) при движении из точки N_0 на поверхности, соответствующей M_0, в направлении ℓ (рис. 14): если $\frac{\partial z}{\partial \ell}\left(M_0\right)<0$, то при движении в данном направлении из точки N_0 высота будет уменьшаться, если же $\frac{\partial z}{\partial \ell}\left(M_0\right)>0$ – увеличиваться. Если $\frac{\partial z}{\partial \ell}\left(M_0\right)=0$, то движение в направлении ℓ – это движение вдоль линии уровня, то есть линии постоянной высоты.

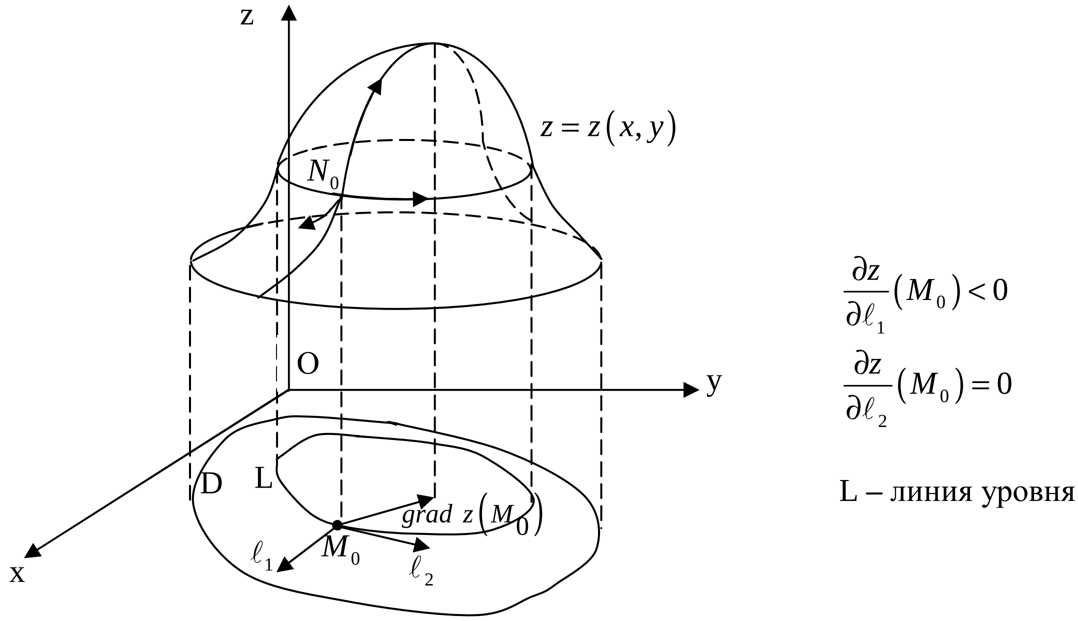

Рис. 14

Вектор $grad\ z\left(M_0\right)$ указывает, в каком направлении надо двигаться, чтобы крутизна подъема из точки N_0 была наибольшей.

ПРИМЕР. Вычислить производную по направлению вектора $\overrightarrow{M_0\,M}$ функции $z=2x\sqrt{y}-\frac{x^2}{3y^3}+4x$ в точке $M_0(3,1)$, если $M(-1,4)$. Найти направление наискорейшего возрастания этой функции в точке M_0.

Найдем частные производные первого порядка в точке $M_0(3,1)$:

$$z'_x(3,1)=2\sqrt{y}-\frac{2x}{3y^3}+4\bigg|_{(3,1)}=4,\quad z'_y(3,1)=\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{x^2}{y^4}\bigg|_{(3,1)}=12.$$

Найдем вектор заданного направления и его направляющие косинусы:

$$\overrightarrow{M_0\,M}=(-4,3)\Rightarrow\left|\overrightarrow{M_0\,M}\right|=5\ \Rightarrow\ \cos\alpha=-\frac{4}{5},\ \ \cos\beta=\sin\alpha=\frac{3}{5}.$$

Производная по направлению $\frac{\partial z}{\partial \ell}(3,1)=-\frac{16}{5}+\frac{36}{5}=4$. Это означает, что движение в направлении вектора $\overrightarrow{M_0\, M}$ из точки $N_0(3,1,15)$, лежащей на поверхности, будет подъемом (высота будет увеличиваться).

Направление наискорейшего возрастания функции в точке $M_0(3,1)$ – $grad\ z(3,1)=(4,12)=4(1,3)$.

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Касательной плоскостью* к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке M_0 называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку. *Нормалью* называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Покажем, что $grad\, F(M_0)$ направлен по нормали к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Рассмотрим кривую L, лежащую на поверхности и проходящую через точку M_0 (рис. 15). Пусть она задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}.$$

Если $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор точки $M(x,y,z)$, движущейся при изменении t вдоль L, то $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, а $\vec{r}(t_0)=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}$ – радиус-вектор точки M_0.

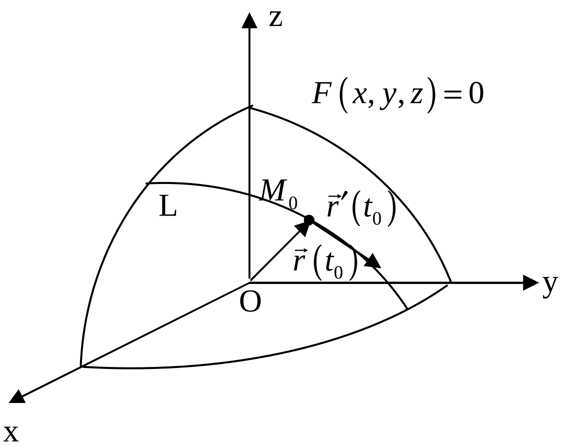

Рис. 15

Так как L лежит на поверхности, то $F\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right)\equiv 0$. Продифференцируем это тождество по t:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0. \qquad (6.6)$$

По определению $grad\ F=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}\right)$, а $\vec{r}'(t)=\left(x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\right)$. Поэтому (6.6) означает, что скалярное произведение $\left(grad\ F,\ \vec{r}'(t)\right)=0$ во всех точках кривой L.

Равенство нулю скалярного произведения векторов – необходимое и достаточное условие их перпендикулярности. Значит, в точке M_0 $\vec{r}'(t_0)\perp grad\ F(M_0)$. Но вектор $\vec{r}'(t)$ – вектор скорости – направлен по касательной к траектории точки $M(x,\ y,\ z)$ $\vec{r}(t)$, то есть по касательной к кривой L (рис. 15). Так как L выбрана произвольно, то $grad\ F(M_0)$ перпендикулярен всевозможным касательным, проведенным к линиям, лежащим на $F(x,\ y,\ z)=0$ и проходящим через точку M_0. А это по определению означает, что $grad\ F(M_0)$ перпендикулярен касательной плоскости, то есть является ее нормалью.

Отсюда уравнение касательной плоскости к данной поверхности имеет вид (см. гл. 3):

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0. \qquad (6.7)$$

Уравнение нормали (см. гл. 3):

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (6.8)$$

В частности, если поверхность задана явным уравнением $z=z(x,\ y)$, получим: $z-z_0=z'_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0,\ y_0)(y-y_0)$ – уравнение касательной плоскости, и $\frac{x-x_0}{z'_x(x_0,\ y_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(x_0,\ y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$ – уравнение нормали.

ПРИМЕР. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$ в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Очевидно

$$F(x,y,\ z)\equiv x^2+y^2+z^2-R^2 \Rightarrow\ F'_x(M_0)=2x_0,\ F'_y(M_0)=2y_0,\ F'_z(M_0)=2z_0.$$

Уравнение касательной плоскости (6.7):

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0 \Rightarrow$$

$$x\,x_0+y\,y_0+z\,z_0-\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2\right)=0 \Rightarrow x\,x_0+y\,y_0+z\,z_0=R^2.$$

Уравнения нормали (6.8):

$$\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{z_0} \Rightarrow \frac{x}{x_0}-1=\frac{y}{y_0}-1=\frac{z}{z_0}-1 \Rightarrow \frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}.$$

Заметим, что эта прямая проходит через начало координат, то есть центр сферы.

ПРИМЕР. Написать уравнение касательной плоскости к эллиптическому параболоиду $z=x^2+y^2$ в точке $M_0(2,-3,13)$.

Эта поверхность задана явным уравнением и $z'_x=2x,\ z'_y=2y$.

Поэтому уравнение касательной плоскости в данной точке имеет вид: $z-13=4(x-2)-6(y+3)$ или $4x-6y-z-13=0$.

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $z=z(x,\,y)$ определена во всех точках некоторой области D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $M(x_0,\,y_0)\in D$ называется точкой максимума (минимума) функции $z=z(x,\,y)$, если существует её окрестность $D_1\subset D$, всюду в пределах которой $z(x,\,y)\le z(x_0,\,y_0)$ $\big(z(x,\,y)\ge z(x_0,\,y_0)\big)$.

Из определения следует, что если $M(x_0,\,y_0)$ – точка максимума, то $\Delta z=z(x,\,y)-z(x_0,\,y_0)\le 0\quad \forall(x,\,y)\in D_1$; если $M(x_0,\,y_0)$ – точка минимума, то $\Delta z=z(x,\,y)-z(x_0,\,y_0)\ge 0\quad \forall(x,\,y)\in D_1$.

ТЕОРЕМА (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции двух переменных). Пусть функция $z=z(x,\,y)$ имеет в точке $M(x_0,\,y_0)$ экстремум. Если в этой точке существуют производные первого порядка, то

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=0.\end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем значение $y = y_0$. Тогда $z = z(x, y_0)$ – функция одной переменной x. Она имеет экстремум при $x = x_0$ и по необходимому условию экстремума дифференцируемой функции одной переменной (см. гл. 5) $\left.\frac{\partial z}{\partial x}(x, y_0)\right|_{x=x_0} = 0$.

Аналогично, зафиксировав значение $x = x_0$, получим, что $\left.\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y)\right|_{y=y_0} = 0$.

Что и требовалось доказать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Стационарной точкой* функции $z = z(x, y)$ называется точка M, в которой обе частные производные первого порядка равны нулю:

$$\begin{cases} z'_x(M) = 0 \\ z'_y(M) = 0 \end{cases}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сформулированное необходимое условие не является достаточным условием экстремума.

Пусть $z = xy \Rightarrow \begin{cases} z'_x = y = 0 \\ z'_y = x = 0 \end{cases}$. Значит, $O(0, 0)$ – стационарная точка этой функции. Рассмотрим произвольную ε - окрестность начала координат.

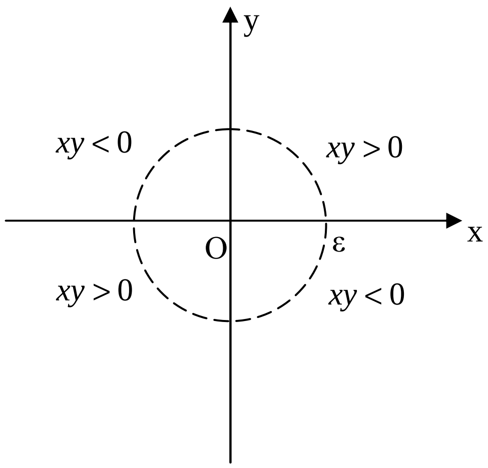

Рис. 16

В пределах этой окрестности $\Delta z = z(x, y) - z(0, 0) = xy$ имеет, очевидно, разные знаки (рис. 16). А это означает, что точка $O(0, 0)$ точкой экстремума по определению не является.

Таким образом, *не всякая стационарная точка – точка экстремума*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Непрерывная функция может иметь экстремум, но не иметь стационарной точки.

Рассмотрим функцию $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Её графиком является верхняя $(z\ge 0)$ половина конуса, и, очевидно, $O(0,\,0)$ – точка минимума (рис. 17).

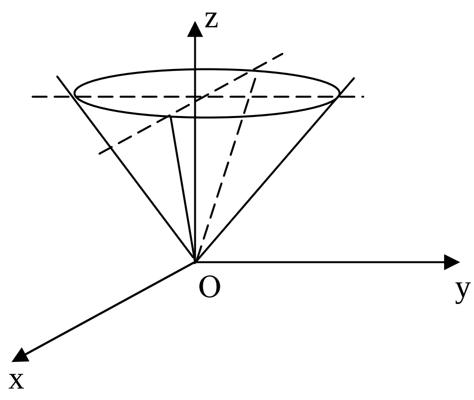

Рис. 17

Но $z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\; z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow$

$\Rightarrow z'_x(0,\,0),\; z'_y(0,\,0)$ не существуют, и точка $\mathrm{O}(0,\,0)$ стационарной не является. (Заметим, что верхняя половина конуса не имеет касательной плоскости в начале координат.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точки, в которых частные производные первого порядка функции $z=z(x,\,y)$ равны нулю или не существуют, называются ее *критическими* точками.

ТЕОРЕМА (достаточное условие экстремума функции $z=z(x,\,y)$). Пусть функция $z=z(x,\,y)$ имеет частные производные второго порядка в некоторой окрестности *стационарной* точки $M\,(x_0,\,y_0)$. Пусть, кроме того,

$$\Delta=\begin{vmatrix} z''_{xx}(M) & z''_{xy}(M)\\ z''_{xy}(M) & z''_{yy}(M)\end{vmatrix}.$$

Тогда, если

1) $\Delta>0$, то M – точка экстремума, именно: точка максимума, если $z''_{xx}(M)<0$, или точка минимума, если $z''_{xx}(M)>0$;

2) $\Delta<0$, то экстремума в точке M нет;

3) $\Delta=0$, то требуются дополнительные исследования для выяснения характера точки M.

(Без доказательства).

ПРИМЕР. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3-2x+y$.

Найдем стационарные точки: $\begin{cases} z'_x=3x^2-2=0\\ z'_y=1\ne 0\end{cases}$. Стационарных точек нет, значит, функция не имеет экстремума.

ПРИМЕР. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 + xy^2 + y^2 + 5x^2$.

Чтобы найти стационарные точки, надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(0,0),\ M_2\left(-\frac{5}{3}, 0\right),\ M_3(-1, 2),\ M_4(-1,-2),$$ то есть данная функция имеет четыре стационарные точки.

Проверим достаточное условие экстремума для каждой из них:

$$z''_{xx} = 12x + 10,\ z''_{xy} = 2y,\ z''_{yy} = 2(x+1) \Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{40}{3},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16,\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16.$$

Так как $\Delta_3 < 0,\ \Delta_4 < 0$, то в точках M_3, M_4 экстремума нет.

$\Delta_1 > 0$ и $z''_{xx}(M_1) = 10 > 0$, значит, $M_1(0, 0)$ – точка минимума и $z_{\min} = z(0, 0) = 0$; $\Delta_2 > 0$ и $z''_{xx}(M_2) = -10 < 0$, значит, $M_2\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ – точка максимума и $z_{\max} = z\left(-\frac{5}{3}, 0\right) = \frac{125}{27}$.

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Пусть ищется экстремум функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ при условии, что $F(x, y) = 0$. Это означает, что значения $z(x, y)$ рассматриваются и сравниваются только для точек, лежащих на линии $F(x, y) = 0$ (в плоскости XOY).

Задача отыскания экстремума функции при условии, что ее аргументы удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям, называется задачей на *условный экстремум*.

Можно сказать, что безусловный максимум – это как бы вершина горы, а условный – самая высокая точка горной тропы, проекция которой на плоскость XOY имеет уравнение $F(x, y) = 0$. На рис. 18 точка M – точка безусловного максимума, точка K_1 – точка условного максимума при условии $F_1(x, y) = 0$. При условии $F_2(x, y) = 0$ условный максимум находится точке K_2.

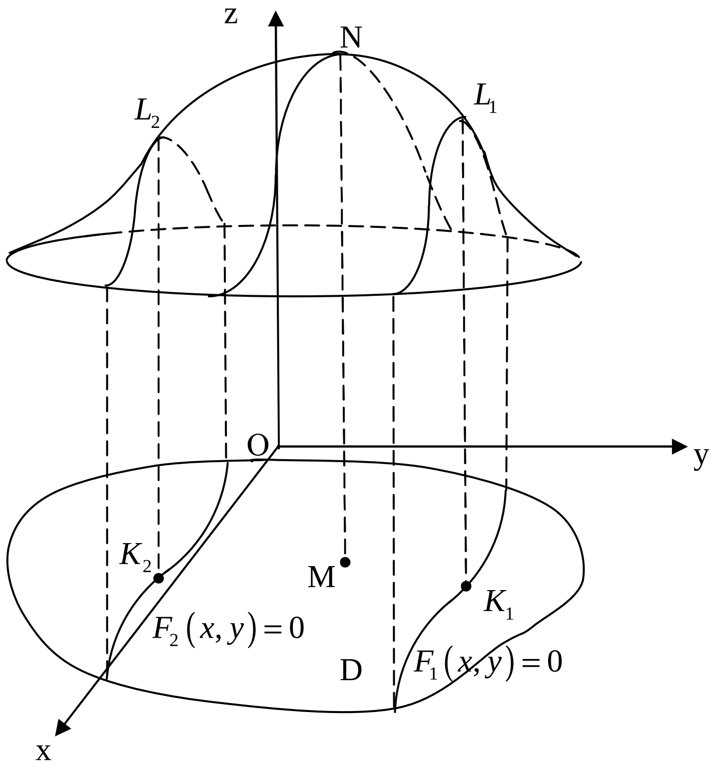

Рис. 18

Уравнение $F(x, y) = 0$ называется *уравнением связи*. Оно задает y как функцию аргумента x (если удобно, можно считать, что, наоборот, x – функция аргумента y).

При отыскании условного экстремума возможны два случая.

1. Из уравнения связи $F(x, y) = 0$ удалось получить явную зависимость $y = y(x)$. Подставив y в $z(x, y)$, получим $z = z(x, y(x))$ – функцию одной независимой переменной x. Так как условия больше нет – оно учтено подстановкой, – то задача становится задачей на безусловный экстремум для функции одной переменной.

2. Разрешение уравнения связи относительно одной из переменных невозможно или нецелесообразно. В этом случае будем рассуждать так. Уравнение $F(x, y) = 0$ принципиально определяет некоторую зависимость $y = y(x)$, хотя бы нам явно и не известную. Таким образом, по необходимому условию в точке экстремума $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$ (рис. 19).

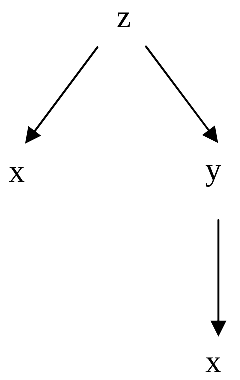

Рис. 19

Чтобы найти производную неявной функции $\frac{dy}{dx}$, продифференцируем равенство $F(x, y) = 0$ по переменной x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'_x - \frac{F'_x}{F'_y} z'_y = 0.$$

Таким образом, *в точке условного экстремума* $\frac{z'_x}{F'_x} = \frac{z'_y}{F'_y}$.

Введем вспомогательную величину λ, обозначив $\frac{z'_x}{F'_x} = \frac{z'_y}{F'_y} = -\lambda$ (минус здесь взят для удобства). Тогда для определения трех неизвестных – координат стационарной точки x_0, y_0 и соответствующего значения λ – получим систему трех уравнений:

$$\begin{cases} z'_x(x, y) + \lambda F'_x(x, y) = 0 \\ z'_y(x, y) + \lambda F'_y(x, y) = 0. \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \tag{6.9}$$

Заметим, что если составить функцию $L(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda F(x, y)$, то левые части уравнений системы (6.9) – частные производные первого порядка этой функции. Она называется *функцией Лагранжа*, а неизвестный параметр λ *– множителем Лагранжа*.

Таким образом, при отыскании условного экстремума функции $z = z(x, y)$ получаем уравнения, как в случае безусловного экстремума функции Лагранжа:

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0. \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \tag{6.10}$$

Такой метод нахождения условного экстремума называется *методом множителей Лагранжа*.

Для функции большего числа переменных функция Лагранжа строится аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия (6.10) являются лишь необходимыми условиями экстремума, то есть не при всяких x_0, y_0, λ, удовлетворяющих (6.10), будет иметь место условный экстремум. Потому, вообще говоря, требуются дополнительные исследования стационарных точек. Однако при решении конкретных задач часто удается установить характер стационарной точки, исходя из содержания задачи.

ПРИМЕР. Найти экстремумы функции $z = 2x^3 + xy^2 + y^2 + 5x^2$ при условии $x + y = 1$.

Из уравнения связи легко получить $y = 1 - x$. Подставим y в z: $z = 2x^3 + (x+1)\left(1 - 2x + x^2\right) + 5x^2 = 3x^3 + 4x^2 - x + 1$. Это функция одной переменной. Найдем ее экстремумы: $z' = 9x^2 + 8x - 1 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = \dfrac{1}{9}$ – стационарные точки.

Проверка достаточного условия экстремума функции одной переменной (см. гл. 5) показывает, что $A(-1, 2)$ – точка *условного максимума* и $z_{\max} = z(-1, 2) = 3$, а $B\left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{8}{9}\right)$ – точка *условного минимума* и $z_{\min} = z\left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{8}{9}\right) = \dfrac{229}{243}$.

Заметим, что на стр. 26 были найдены безусловные экстремумы этой функции: $z(0,0) = 0$ – минимум и $z\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right) = \dfrac{125}{27}$ – максимум. Как и следует, безусловный минимум $z = 0$ меньше минимума условного $z = \dfrac{229}{243}$, а безусловный максимум $z = \dfrac{125}{27}$ больше условного $z = 3$.

ПРИМЕР. Найти экстремумы функции $z = 6 - 4x - 3y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

В этом случае уравнение связи нецелесообразно разрешать относительно какой-либо из двух переменных, поэтому составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Система (6.10) для неё имеет вид:

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow\ x = \frac{2}{\lambda},\ y = \frac{3}{2\lambda}\ \Rightarrow\ \frac{4}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1\ \Rightarrow\ \lambda = \pm\frac{5}{2}\ \Rightarrow\ x_{1,2} = \pm\frac{4}{5},\ y_{1,2} = \pm\frac{3}{5}.$$

Таким образом, $M_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $M_2\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ – стационарные точки и очевидно, что $z(M_1)=1$ – условный минимум, а $z(M_2)=11$ – условный максимум.

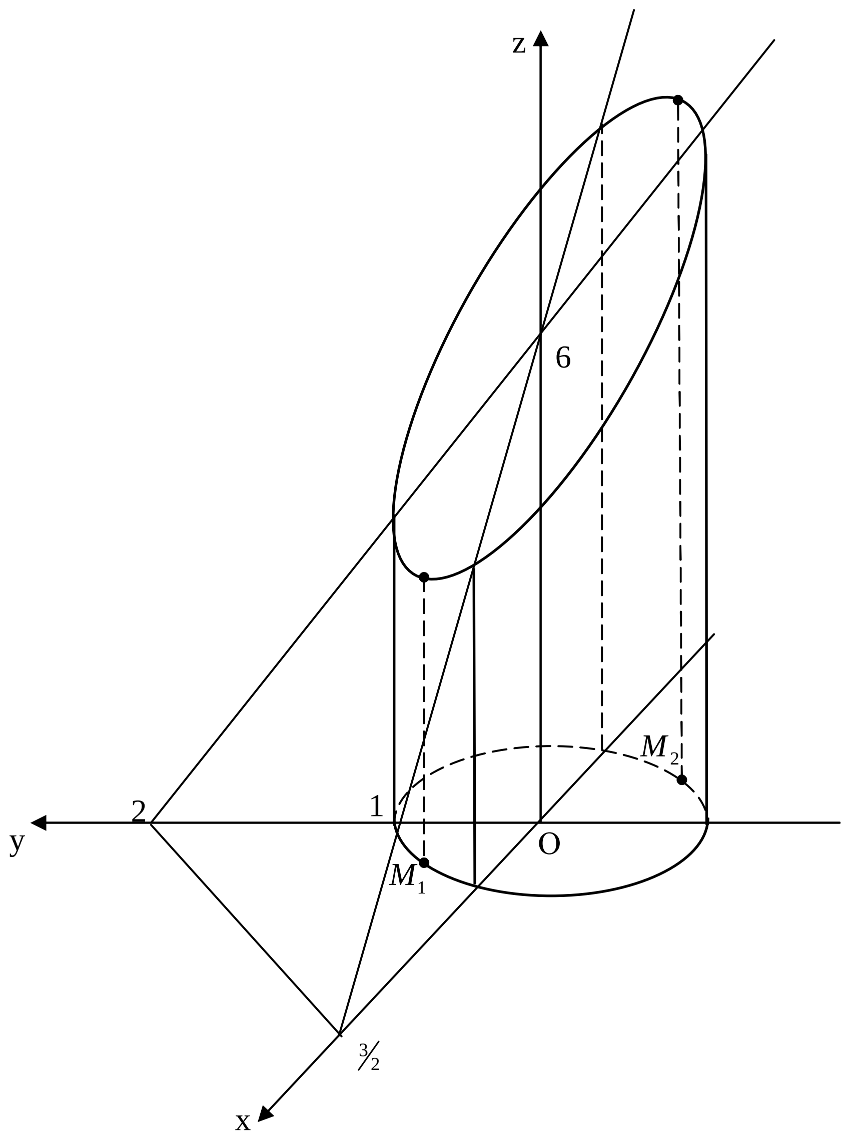

Рис. 20

Проверять достаточное условие здесь нет необходимости, так как задача имеет ясную геометрическую интерпретацию: функция $z = 6 - 4x - 3y$ задает плоскость в пространстве, а уравнение связи $x^2 + y^2 = 1$ – цилиндрическую поверхность. Условные экстремумы – самая высокая и самая низкая точки той части этой плоскости, которая является сечением цилиндра (рис. 20).

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАМКНУТОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

ТЕОРЕМА (Вейерштрасса). Всякая непрерывная в замкнутой ограниченной области функция достигает в этой области своих наибольшего и наименьшего значений.

(Без доказательства)

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае функции одной переменной теорема Вейерштрасса была справедлива для функции, непрерывной на отрезке. Таким образом, аналогом отрезка на плоскости (или в пространстве) является замкнутая ограниченная область.

Рассмотрим непрерывную функцию $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, где D – замкнутая ограниченная область. Тогда по теореме Вейерштрасса она имеет в этой области наименьшее и наибольшее значения, которые достигаются либо во внутренних точках области – точках ее экстремума,– либо на границе области.

Будем считать, что $z = z(x, y)$ дифференцируема во внутренних точках D.

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения, надо

1) *найти значения функции в стационарных точках, принадлежащих* D,

2) *найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе* D,

3) *выбрать из найденных значений самое большое и самое маленькое*.

ПРИМЕР. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области $D: x \le 0,\ y \le 0,\ x + y \ge -3$ (рис. 21).

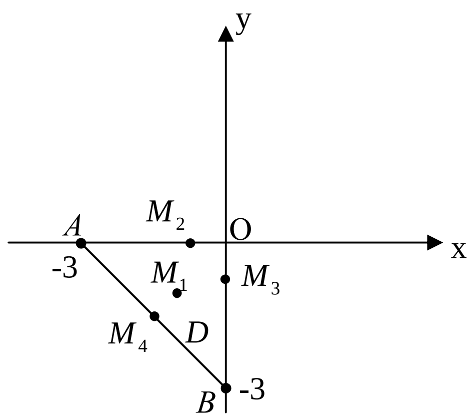

Рис. 21

1) Найдем стационарные точки функции, принадлежащие области D:

$$z'_x = 2x - y + 1,\ z'_y = 2y - x + 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1,\ y = -1.$$

Точка $M_1(-1,-1) \in D$ и $\boxed{z(M_1) = -1}$.

2) Исследуем функцию на границе. Граница состоит из трех участков OA, OB и AB (рис. 21). На каждом из этих участков будем решать задачу на условный экстремум.

На OA: $y=0,\ x\in[-3,0]$, поэтому $z_{OA}=x^2+x$ – функция одной переменной, заданная на отрезке. Здесь уравнение связи $y=0$ учтено подстановкой в $z(x,y)$.

Следуя алгоритму поиска наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции, найдем

$$z'_{OA}=2x+1=0\Rightarrow\quad x=-\frac{1}{2}\in[-3,0].$$

Значит, $M_2\left(-\frac{1}{2},0\right)$ – стационарная точка на границе и $\boxed{z(M_2)=-\frac{1}{4}}$.

Кроме того, $\boxed{z(O)=0}$ и $\boxed{z(A)=6}$.

Аналогично на OB: $x=0,\ y\in[-3,0]$, поэтому $z_{OB}=y^2+y,\ z'_{OB}=2y+1=0\Rightarrow$ $y=-\frac{1}{2}\in[-3,0]$.

Ещё одна стационарная точка на границе – $M_3\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ и $\boxed{z(M_3)=-\frac{1}{4}}$; $\boxed{z(B)=6}$.

На AB: $x+y=-3$ – уравнение связи для третьей задачи на условный экстремум. Подставим $y=-x-3$ в $z(x,y)$:

$$z_{AB}=x^2+(-x-3)^2+x(3+x)+x-3-x=3x^2+9x+6,\quad x\in[-3,0].$$

$z'_{AB}=6x+9=0\Rightarrow\ x=-\frac{3}{2}\in[-3,0]\ \Rightarrow\ y=-\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ M_4\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ – стационарная точка на AB и $\boxed{z(M_4)=-\frac{3}{4}}$.

3) Сравним найденные значения функции, выделенные рамкой. Она достигает наибольшего значения в двух точках на границе: $z(A)=6$, $z(B)=6$, а наименьшего – во внутренней точке области D: $z(M_1)=-1$.

ПРИМЕР. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$ (рис. 22).

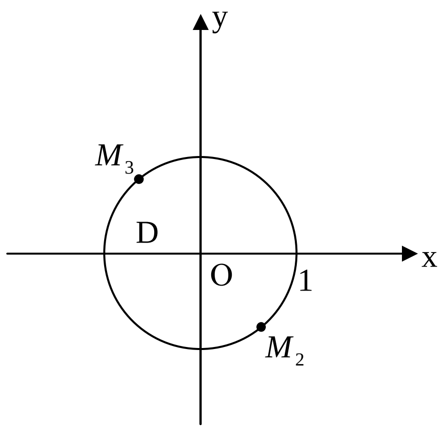

Рис. 22

1) Найдем стационарные точки функции, принадлежащие области D:

$$z'_x = 2x - 12,\; z'_y = 2y + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 12 = 0 \\ 2y + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(6, -8) \notin D$$

Таким образом, внутри области стационарных точек нет.

2) Исследуем функцию на границе, то есть решим задачу на условный экстремум функции $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

В этом случае будем искать условный экстремум методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Составим и решим систему (6.10):

$$\begin{cases} 2x - 12 + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 16 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{6}{1+\lambda},\; y = -\frac{8}{1+\lambda} \Rightarrow \frac{36}{(1+\lambda)^2} + \frac{64}{(1+\lambda)^2} = 1 \Rightarrow$$

$\lambda_1 = 9,\; \lambda_2 = -11 \Rightarrow M_2\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right),\; M_3\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ – стационарные точки на границе и

$\boxed{z(M_2) = -19,\;\; z(M_3) = 21}$.

3) Так как внутри области и на её границе есть только две стационарные точки, то, очевидно, что $z(M_2) = -19$ – наименьшее значение, а $z(M_3) = 21$ – наибольшее значение этой функции в заданном круге.

Библиографический список

1. Шнейдер В.Е. Краткий курс высшей математики / В.Е.Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. – М.: Высш. шк. 1978. – Т.2.

2. Киркинский А.С. Математический анализ: учебное пособие / А.С.Киркинский. – М.: Академический Проект, 2006. – 525 с.

3. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / Учебное пособие для студентов ВТУЗов. – М.: Наука, 1973. – 640 с.

4. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных. М.: Высш. шк., 1988. – 288 с.

Для заметок

Редактор
Компьютерная верстка

ИД 06039 от 12.10.01

Подписано в печать Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная. Отпечатано на дуплекаторе.
Усл.печ.л. Уч.-изд.л.
Тираж экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ