Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

Н.И. Николаева

Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия

Конспект лекций
Часть 1

Омск-2008

УДК
ББК

Рецензенты:
Ю.Ф.Стругов, д-р физ.-мат. наук, профессор
С.Е.Макаров, канд. физ.-мат. наук, доцент

Николаева Н.И.
Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Конспект лекций. Часть 1 / Н.И. Николаева. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2008. – с.

Пособие представляет собой конспект лекций, читаемых автором на первом курсе технического университета, и предназначено для студентов всех форм обучения. В нем подробно, последовательно и с доказательствами изложена теоретическая часть курса математики. Часть 1 включает в себя три главы: «Линейная алгебра», «Векторная алгебра» и «Аналитическая геометрия». Изложение сопровождается достаточным количеством примеров, поясняющих наиболее важные теоретические положения, иллюстрирующих теоретический материал и дающих образцы решения задач.

Автор благодарит доцента кафедры Высшей математики ОМГТУ Горягу А.В., принявшего участие в обсуждении рукописи и сделавшего полезные замечания, и методиста кафедры Царицинскую Т.Г. за большую помощь в техническом оформлении рукописи.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

Оглавление

Глава 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Этот раздел математики возник в связи с необходимостью решать системы линейных уравнений.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 3x+4y=-2 \end{cases}.$$

Чтобы решить ее, можно, например, выразить одну из переменных из первого уравнения, подставить во второе, после чего найти неизвестные x и y.

Однако можно найти решение быстрее: легко убедиться, что

$$x=\frac{3\cdot 4-(-2)\cdot 3}{2\cdot 4-3\cdot 3}=-18,\ y=\frac{-2\cdot 2-3\cdot 3}{2\cdot 4-3\cdot 3}=13.$$

Способ получения этого результата станет ясным, если рассмотреть таблицы, составленные из коэффициентов системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\to 2\cdot 4-3\cdot 3=-1,\quad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\to 3\cdot 4-(-2)\cdot 3=18,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\to (-2)\cdot 2-3\cdot 3=-13 \qquad \Rightarrow x=\frac{18}{-1},\quad y=\frac{-13}{-1}.$$

Такие таблицы называются матрицами второго порядка (так как в них две строки и два столбца), а соответствующие числа - определителями. Матрицы и определители играют важную роль при решении более сложных систем линейных уравнений, поэтому начнем изучение линейной алгебры с матриц.

МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовой *матрицей* размера $m\times n$ называется совокупность $m\cdot n$ чисел, расположенных в виде таблицы, содержащей m строк и n столбцов.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A=(a_{ik}),\ i=1,2,\dots,m,\ k=1,2,\dots,n.$$

a_{ik} – элемент матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и k-го столбца.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной* n-го порядка, в противном случае – *прямоугольной*.
Элементы a_{ii}, i = 1, 2, …, n квадратной матрицы A образуют ее главную диагональ.

Матрица размера $1 \times n$ называется *матрицей-строкой*, а матрица размера $m \times 1$ – *матрицей-столбцом*.

ПРИМЕР. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3х2 2х3 3х3 4х1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковый размер и равны их элементы, стоящие на одинаковых местах.

ПРИМЕР. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратная матрица называется *диагональной*, если равны нулю все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, то есть $a_{ij} = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, ..., n.$
На главной диагонали могут быть любые числа. Если все они равны 1, то диагональная матрица называется *единичной* и обозначается буквой E.

ПРИМЕР. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ – диагональная матрица 3-го порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы снизу (сверху) от главной диагонали равны нулю.

ПРИМЕР. $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ – треугольная матрица третьего порядка,

$T_2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ – треугольная матрица второго порядка.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

К числу линейных относятся операции сложения и умножения на число.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $A=(a_{ik})$ и $B=(b_{ik})$, $i=1,2,\ldots,m$, $k=1,2,\ldots,n$ – матрицы размера $m\times n$. Матрица $C=(c_{ik})$ также размера $m\times n$ называется *суммой* матриц A и B, если $c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$, $i=1,2,\ldots,m$, $k=1,2,\ldots,n$.

ПРИМЕР. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 7\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\ -2 & -3 & 1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A+B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 7\\ -2 & -1 & -2\end{pmatrix}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Произведением* матрицы $A=(a_{ik})$ размера $m\times n$ на число α называется матрица $B=(b_{ik})$ того же размера, элементы которой $b_{ik}=\alpha\cdot a_{ik}$, $i=1,2,\ldots,m$, k=$1,2,\ldots,n$.

ПРИМЕР. $F=\begin{pmatrix}0 & 12 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $2F=\begin{pmatrix}0 & 24 & 6\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Нулевой* матрицей O называется матрица, все элементы которой равны нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрица $(-1)\cdot A$ называется *противоположной* для A и обозначается $-A$.

Очевидно, что $A+(-A)=O$ для любой матрицы A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Разностью* матриц A и B одного размера называется сумма $A+(-B)$ и обозначается $A-B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Результат конечного числа линейных операций над матрицами называется их *линейной комбинацией*.

ПРИМЕР. Пусть $A=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ -5\\ 8\end{pmatrix}$.

Матрица $C=2A+4B=2\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 7\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\ -5\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ 14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\ -20\\ 32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ -14\\ 46\end{pmatrix}$ – линейная комбинация матриц A и B с коэффициентами 2 и 4.

СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Если A, B, и C – матрицы одного размера, а α и β – числа, то, очевидно, справедливо следующее:

1. $A+B=B+A$ – свойство коммутативности сложения.
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ – свойство ассоциативности.
3. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ – свойство дистрибутивности.
4. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.
5. $\alpha\beta A=\alpha(\beta A)=\beta(\alpha A)$.

ТРАНСПОНИРОВАНИЕ И УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Эти операции над матрицами не относятся к числу линейных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Транспонированной* матрицей A^T для матрицы A размера $m\times n$ называется матрица размера $n\times m$, полученная из A заменой всех ее строк столбцами с теми же порядковыми номерами.
То есть, если $A=(a_{ik})$, то $A^T=(a_{ki})$, $i=1,2,\ldots,m$, $k=1,2,\ldots,n$.

ПРИМЕР.

$$\underset{3x2}{A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}} \quad\Rightarrow\quad \underset{2x3}{A^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}}; \qquad \underset{3x3}{S=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix}} = \underset{3x3}{S^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix}}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $A = A^T$, то матрица A называется *симметрической*.

Все диагональные матрицы симметрические, так как равны их элементы, симметричные относительно главной диагонали.
Очевидно, справедливы следующие свойства операции транспонирования:

1. $\left(A^T\right)^T=A$ 2. $(\alpha A)^T=\alpha A^T$ 3. $(A+B)^T=A^T+B^T$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $A=(a_{ik})$ – матрица размера $m\times n$, $B=(b_{kj})$ – матрица размера $n\times p$. Произведение этих матриц $A\cdot B$ – матрица $C=(c_{ij})$ размера $m\times p$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj}, \quad i=1,2,\ldots,m, \quad k=1,2,\ldots,p,$$

то есть элемент i-й строки и j-го столбца матрицы C равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

ПРИМЕР.

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 6\end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot 0+(-1)\cdot 4+3\cdot 6\\ -2\cdot 2+1\cdot 4+4\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\ 24\end{pmatrix}$$

2x3 3x1 2x3 3x1 2x1

Произведение $B\cdot A=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$ – не существует.

3x1 2x3

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

1. $(A\cdot B)\neq(B\cdot A)$, даже если оба произведения определены.

ПРИМЕР. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$, хотя $A\neq O, B\neq O$.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq A\cdot B.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $A\cdot B=B\cdot A$, в противном случае A и B называются *неперестановочными*.

Из определения следует, что перестановочными могут быть лишь квадратные матрицы одного размера.

ПРИМЕР. $C=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow C\cdot L=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$,

$L\cdot C=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix} \Rightarrow$ матрицы C и L перестановочные.

$C\cdot E=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $E\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, то есть $C\cdot E=E\cdot C=C$,

значит, C и E – перестановочные матрицы.

Вообще единичная матрица перестановочна с любой квадратной матрицей того же порядка, и для любой матрицы $A\cdot E=E\cdot A=A$. Это свойство матрицы E объясняет, почему именно она называется единичной: при умножении чисел таким свойством обладает число 1.

Если соответствующие произведения определены, то:

2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

4. $\alpha \cdot (B \cdot C) = B \cdot (\alpha \cdot C) = (\alpha \cdot B) \cdot C$.

5. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

ПРИМЕР.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \; A \cdot B = \underset{2x2}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2x1}{\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}} = \underset{2x1}{\begin{pmatrix} -6 \\ -12 \end{pmatrix}} \Rightarrow \; (A \cdot B)^T = \underset{1x2}{(-6 \quad -12)}.$$

$$B^T \cdot A^T = \underset{1x2}{(-4 \quad -2)} \cdot \underset{2x2}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{1x2}{(-6 \quad -12)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Элементами матрицы могут быть не только числа, но и функции. Такая матрица называется *функциональной*.

ПРИМЕР. $T = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{pmatrix}.$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

Каждой квадратной матрице можно по определенным правилам поставить в соответствие некоторое число, которое называется ее определителем.

Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка: $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Её определителем называется число, которое записывается и вычисляется так:

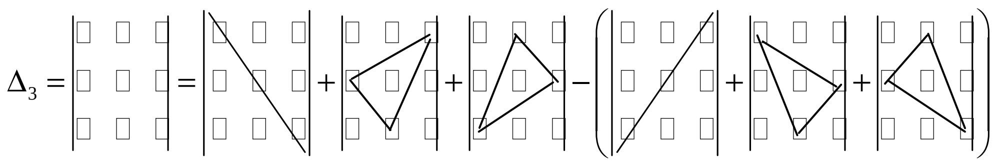
$$\Delta A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

Такой определитель называется *определителем второго порядка* и может обозначаться по-другому: $\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ или $|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Определителем третьего порядка называется число, соответствующее квадратной матрице $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, которое вычисляется по правилу:

$$\Delta A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33}) \quad (1.2)$$

Это правило вычисления определителя третьего порядка называется правилом треугольников и схематически его можно представить так:



ПРИМЕР. $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta A_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10$; $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Delta A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 2 + 4\cdot(-1)\cdot 3 + (-2)\cdot 0\cdot 3 - (3\cdot 5\cdot 3 + (-1)\cdot 0\cdot 1 + 4\cdot(-2)\cdot 2) = -31$$

Если справа от определителя приписать первый, а затем второй столбец, то правило треугольников можно модифицировать:

$$\Delta A_3 = \left|\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 10 - 0 - 12 - (45 - 0 - 16) = -2 - 29 = -31$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

Сначала умножаются числа на главной диагонали и двух ей параллельных диагоналях, затем – числа на другой (побочной) диагонали и ей параллельных. Из суммы первых трех произведений вычитается сумма остальных.

Группируя слагаемые в (1.2) и используя (1.1), заметим, что

$$\Delta A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (1.3)$$

То есть при вычислении определителя третьего порядка используются определители второго порядка, причем $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – определитель матрицы, полученный из A_3 вычеркиванием элемента a_{11} (точнее, первой строки и первого столбца, на пересечении которых стоит a_{11}), $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ – вычеркиванием элемента a_{12}, $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ – элемента a_{13}.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Дополнительным минором* M_{ik} элемента a_{ik} квадратной матрицы A называется определитель матрицы, получаемой из A вычеркиванием i-ой строки и k-го столбца.

ПРИМЕР.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad M_{11} = 7, \quad M_{12} = 5, \quad M_{21} = -1, \quad M_{22} = 3. \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10, \; M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8, \; M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -19, \; M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

и так далее: матрица третьего порядка имеет 9 дополнительных миноров.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} квадратной матрицы A называется число $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$.

ПРИМЕР.

Для матрицы A_2: $\begin{matrix} A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 7 & A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 1 \\ A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -5 & A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 3 \end{matrix}$

Для матрицы A_3: $\begin{matrix} A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 10 = 10, \; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 8 = -8, \\ A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot (-19) = -19, \; A_{22} = (-1)^{2+2} (-7) = -7 \end{matrix}$ и так далее.

Итак, с учетом сформулированных определений (1.3) можно переписать в виде: $\Delta A_3 = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$.

Перейдем теперь к общему случаю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Определителем* квадратной матрицы A_n порядка n называется число, которое записывается и вычисляется следующим образом:

$$\Delta A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \qquad (1.4)$$

Равенство (1.4) называется *разложением определителя по элементам первой строки*. В этой формуле алгебраические дополнения вычисляются как определители $(n-1)$-го порядка. Таким образом, при вычислении определителя 4-го порядка по формуле (1.4) надо, вообще говоря, вычислить 4 определителя 3-го порядка; при вычислении определителя 5-го порядка – 5 определителей 4-го порядка и т.д. Однако если, к примеру, в определителе 4-го порядка первая строка содержит 3 нулевых элемента, то в формуле (1.4) останется лишь одно ненулевое слагаемое.

ПРИМЕР.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 0\cdot A_{14} = 3\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot 2\cdot 4\cdot 5 = 120$$

Рассмотрим (без доказательства) *свойства определителей*:

1. Определитель можно разложить по элементам первого столбца:

$$\Delta A_n = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} \qquad (1.5)$$

ПРИМЕР.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} + 0\cdot A_{41} = 3\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\cdot 2\cdot 7\cdot 5 = -210$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотренные примеры позволяют сделать вывод: *определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали*.

2. При транспонировании матрицы величина ее определителя не меняется: $\Delta A = \Delta A^T$.
   Отсюда следует, что строки и столбцы определителя равноправны.

3. Если в определителе поменять местами две строки (два столбца), то определитель изменит свой знак, не изменившись по абсолютной величине.

4. Определитель, имеющий две равные строки (столбца), равен нулю.

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя умножить на число α, то величина определителя умножится на это число.
   Отсюда, в частности, следует, что *общий множитель любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя*. Кроме того, определитель, имеющий нулевую строку или нулевой столбец, равен нулю.

6. Определитель, имеющий пропорциональные строки (столбцы), равен нулю.

7. Определитель можно разложить по элементам любой строки (любого столбца): $\Delta A_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik},\ i = 1, 2, \ldots, n$ (1.6)

   или

$$\Delta A_n = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik},\ k = 1, 2, \ldots, n \qquad (1.7)$$

Равенство (1.6) называется *разложением определителя по элементам i-й строки.*

Равенство (1.7) называется *разложением определителя по элементам k-го столбца.*

8. Сумма произведений всех элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю, то есть при $i \neq j$ $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0$ и $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{il}$ при $k \neq l$.

9. Определитель не изменится от прибавления ко всем элементам некоторой строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

10. Определитель произведения двух матриц одного порядка равен произведению определителей этих матриц: $\Delta(A \cdot B) = \Delta A \cdot \Delta B$ ($A,\ B$ – квадратные матрицы одного порядка).

ПРИМЕР. $\begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = 0$, так как элементы первой и второй строк этого определителя соответственно пропорциональны (свойство 6).

Особенно часто при вычислении определителей используется свойство 9, так как оно позволяет в любом определителе получать строку или столбец, где все элементы, кроме одного, равны нулю.

ПРИМЕР.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -5 \\ -5 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{(9)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 8 & 3 & -5 \\ -1 & 6 & 2 & 7 \\ 11 & 14 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 10 & 8 & -5 \\ -1 & 6 & 7 \\ 11 & 14 & -2 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=}$$

$\times 3$

$\times 2$

$$= -2 \begin{vmatrix} 10 & 4 & -5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 11 & 7 & -2 \end{vmatrix} \overset{(9)}{=} -2 \begin{vmatrix} 10 & 4 & -5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{(9)}{=} -2 \begin{vmatrix} 10 & -26 & -35 \\ -1 & 6 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(7)}{=}$$

$\times(-1)$

$\times(-3)$

$\times(-3)$

$$= -2\cdot 1\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -26 & -35 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} 2\cdot 2\cdot 5 \begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20\cdot 5 = 100$$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрица A^{-1} называется *обратной для матрицы* A, если она вместе с A удовлетворяет условию: $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$, где E – единичная матрица.

Из определения следует, что A и A^{-1} – перестановочные, значит, обратная матрица существует лишь для квадратной матрицы A (прямоугольные матрицы обратных не имеют).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если $\Delta A \neq 0$. Если $\Delta A = 0$, то A называется *вырожденной*.

ПРИМЕР.

$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4\\ 0 & 3 & 7\end{pmatrix}$, $\Delta A=0$ по свойству 6 определителей, то есть A – вырожденная.

$B=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $\Delta B=3$, значит, B – невырожденная.

ТЕОРЕМА. Всякая невырожденная матрица имеет обратную, причем одну.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим для определенности квадратную матрицу A третьего порядка:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Покажем, что матрица вида $X=\dfrac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$ является обратной для A (A_{ik} – алгебраические дополнения элементов a_{ik} матрицы A, $i,k=1,2,3$).

По условию A – невырожденная, т.е. $\Delta A\neq 0 \Rightarrow X$ существует. Найдем произведение $A\cdot X$, используя свойства 7,8 определителей:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix}a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}\\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}\\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}\end{pmatrix}\overset{(7)}{\underset{(8)}{=}}$$

$$=\frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix}\Delta A & 0 & 0\\ 0 & \Delta A & 0\\ 0 & 0 & \Delta A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Аналогично доказывается, что $X \cdot A = E$.

Следовательно, по определению матрица X является обратной для A .

Докажем единственность обратной матрицы.

Пусть невырожденная матрица A имеет две обратные: A_1^{-1} и A_2^{-1} . Тогда по определению

$$A \cdot A_1^{-1} = E \tag{1.8}$$

$$A_2^{-1} \cdot A = E \tag{1.9}$$

Умножим (1.8) слева на A_2^{-1} : $\quad A_2^{-1} \cdot (AA_1^{-1}) = A_2^{-1}E$.

Используя свойство 2 умножения матриц и равенство (1.9), получим:

$$(A_2^{-1}A)A_1^{-1} = A_2^{-1}E \quad \Rightarrow \quad EA_1^{-1} = A_2^{-1}E \quad \Rightarrow \quad A_1^{-1} = A_2^{-1}.$$

Таким образом, обратная матрица единственна, что и требовалось доказать.

Обратная матрица для матрицы A n- го порядка имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \cdots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР. Найти матрицу, обратную для $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\Delta B = 3 \Rightarrow B^{-1}$ существует. $\quad B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Проверка:

$$B \cdot B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} \cdot B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР. Найти матрицу, обратную для $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

$$\Delta A=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-4\neq 0\Rightarrow A^{-1}$$ существует.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-3 \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1 \quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-3 \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1 \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2 \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2 \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3 & 1 & -3\\ -3 & 1 & 1\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3 & 1 & -3\\ -3 & 1 & 1\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}=E.$$

Аналогично проверяется, что $A\cdot A^{-1}=E$.

КРАМЕРОВСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\qquad\;\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\qquad(1.10)$$

Матрица, составленная из коэффициентов системы (1.10)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называется *основной матрицей* системы (1.10), ΔA – *основной определитель* системы (1.10).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система линейных уравнений называется *Крамеровской,* если

1) число уравнений равно числу неизвестных;

2) основной определитель не равен нулю.

Рассмотрим матрицы $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$: X – столбец неизвестных, B – столбец правых частей. Очевидно, что система (1.10) может быть записана в виде матричного уравнения

$$A\cdot X=B. \tag{1.11}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Совокупность n чисел $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ называется *решением системы* (1.10), если каждое из уравнений системы обращается в верное числовое равенство при подстановке в него чисел α_i вместо соответствующих переменных $x_i,\ i=1,2,\cdots,n.$

ТЕОРЕМА. Всякая Крамеровская система имеет решение, причем одно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\Delta A\neq 0.$ Значит, для основной матрицы A системы существует обратная матрица A^{-1}. Умножим (1.11) на A^{-1} слева:

$A^{-1}\cdot(A\cdot X)=A^{-1}\cdot B \quad\Rightarrow\quad (A^{-1}\cdot A)\cdot X=A^{-1}\cdot B \quad\Rightarrow$

$$X=A^{-1}\cdot B \tag{1.12}$$

По формуле (1.12) определяется каждое из неизвестных $x_i,\ i=1,2,\cdots,n,$ то есть находится решение системы (1.10), причем оно единственно, так как единственна обратная матрица $A^{-1}.$

ЗАМЕЧАНИЕ. Способ решения системы (1.10) по формуле (1.12) называется *матричным способом решения системы линейных уравнений*.

ПРИМЕР. Решить систему уравнений матричным способом:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-3z=0 \\ x-y=2 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

В предыдущем примере было показано, что $\Delta A=-4$, значит, систему матричным способом решить можно. Там же была найдена обратная матрица

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x=3,\ y=1,\ z=2.$ Проверкой убеждаемся, что решение найдено верно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Матричный способ удобен, когда надо решить несколько Крамеровских систем, которые отличаются только правыми частями.

Вернемся к равенству (1.12). Из него следует, что

$$X=\frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\dots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\dots+b_nA_{n2} \\ \dots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\dots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix},$$

поэтому

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \dots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{1.13}$$

где $\Delta=\Delta A$, Δ_i – определитель матрицы, полученной из А заменой ее i-го столбца на столбец правых частей системы (1.10) , i = $1,2,\dots,n$. Формулы (1.13) называются *формулами Крамера*.

РАНГ МАТРИЦЫ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Минором* порядка k матрицы А называется определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы А, стоящих на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов без изменения порядка их следования.

ПРИМЕР. Рассмотрим матрицу $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ -5 & 0 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Миноры первого порядка – каждый элемент матрицы A.

Миноры второго порядка: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ и так далее.

Матрица A имеет всего 18 миноров второго порядка.

Миноры третьего порядка: $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -5 & 0 & -6 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -5 & -6 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Миноров четвертого порядка у этой матрицы нет.

ТЕОРЕМА. Если все миноры k-го порядка матрица A равны нулю, то равны нулю и все миноры старших порядков, если они существуют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим минор порядка $(k+1)$. Это определитель $(k+1)$-го порядка, который (по свойству 7) можно разложить по элементам некоторой строки (столбца). В разложении будут алгебраические дополнения, которые с точностью до знака совпадают с минорами k- го порядка и по условию равны нулю. Поэтому равен нулю и рассматриваемый минор порядка $(k+1)$. Аналогично равны нулю и миноры старших порядков $(k+2),(k+3),\ldots$, если они существуют, что и требовалось доказать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Рангом* матрицы A называется такое целое число r, что среди ее миноров r-го порядка есть хотя бы один ненулевой, а все миноры порядка ($r+1$) равны нулю.

Из доказанной теоремы следует, что, другими словами, *ранг матрицы – это наивысший порядок отличного от нуля минора*.

Будем обозначать r_A ранг матрицы A.

Ранг *матрицы равен нулю* тогда и только тогда, когда ее миноры равны нулю, то есть *если матрица нулевая*.

ПРИМЕР.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ r_A=1. \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ r_B=1. \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix},\ r_C=2.$$

$$D=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&3&1\\5&0&6\end{pmatrix},\ r_D=3;\qquad F=\begin{pmatrix}1&-2&0&4\\-1&1&2&-3\\0&-1&2&1\\-1&0&4&-2\end{pmatrix}.$$

Матрица F, очевидно, имеет ненулевой минор второго порядка, например, $\begin{vmatrix}1&-2\\-1&1\end{vmatrix}$, но все ее миноры третьего порядка – их всего 16 – равны нулю, поэтому $r_F=2$. Для того чтобы обнаружить этот факт без трудоемких вычислений, введем понятие элементарных преобразований.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Элементарными преобразованиями матрицы* называются следующие действия:

1) умножение любой строки на число $\alpha\neq 0$;

2) перемена местами двух строк;

3) прибавление ко всем элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число $\alpha\neq 0$;

4) отбрасывание нулевой строки;

5) отбрасывание одной из двух пропорциональных строк;

6) те же преобразования со столбцами.

ТЕОРЕМА. Элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы. С их помощью всякую матрицу можно привести к диагональному виду, и ее ранг равен количеству ненулевых элементов на главной диагонали (без доказательства).

Покажем теперь, что ранг матрицы F из последнего примера равен 2.

$$F\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&4\\0&-1&2&1\\0&-1&2&1\\0&-2&4&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&4\\0&-1&2&1\end{pmatrix}=F_1\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=F_2.$$

При переходе от F к F_1 и F_2 использовались элементарные преобразования 3), 5), 6): первую строку F прибавили ко второй и четвертой, затем отбросили две из трех пропорциональных строк; далее первый столбец F_1 прибавили ко второму и четвертому с коэффициентами 2 и (-4) соответственно и два из трех пропорциональных столбцов отбросили. По теореме $r_F=r_{F_1}=r_{F_2}=2$.

Вычислить r_F, очевидно, можно было, получив лишь матрицу F_1, не выполняя дальнейших преобразований.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad\;\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.14}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется основной матрицей системы (1.14), а

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ – расширенной матрицей системы (1.14).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она решений не имеет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если решений у нее более одного.

ПРИМЕР.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \Delta A = -2 \qquad \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \ \textit{– единственное решение системы,}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ r_A = 1, \ r_{\overline{A}} = 2 \ \textit{– решений нет,}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \ r_A = 1, \ r_{\overline{A}} = 1 \textit{– решений бесконечно много}:$$

$$y = 2 - x, x \in R.$$

ТЕОРЕМА. (Кронекера-Капелли, критерий совместности системы линейных уравнений) Для того чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был равен рангу расширенной (без доказательства).

ТЕОРЕМА (о числе решений). Пусть выполнены условия совместности системы линейных уравнений. Тогда, если $r_A = n$, где n – число неизвестных, то система имеет единственное решение. Если $r_A < n$, то система имеет бесконечное множество решений, при этом $(n-r)$ переменных задаются свободно, тогда оставшиеся r переменных определятся единственным образом (без доказательства).

ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

называется однородной.

Однородная система всегда совместна, так как $x_i = 0,\ i = 1,2,\ldots,n$ – ее решение. Такое решение называется *нулевым* или *тривиальным*.

ТЕОРЕМА. Для того чтобы система линейных однородных уравнений (1.15) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы r был меньше числа неизвестных n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Достаточность: $r < n \Rightarrow$ (1.15) имеет нетривиальное решение.
По теореме о числе решений система в этом случае имеет бесконечное множество решений, среди которых содержатся и нетривиальные.

2) Необходимость: (1.15) имеет нетривиальное решение $\Rightarrow r < n$.
Пусть $r = n$, тогда по теореме о числе решений система (1.15) имеет единственное решение. Это решение тривиальное, что противоречит условию. Поэтому сделанное предположение неверно и $r < n$.

СЛЕДСТВИЕ. Для того чтобы однородная система n уравнений с n неизвестными имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее основной определитель был равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Достаточность: $\Delta = 0 \Rightarrow$ система имеет нетривиальное решение. Так как единственный минор n -го порядка равен нулю, то $r < n$, значит, нетривиальное решение существует.

2) Необходимость: система имеет нетривиальное решение $\Rightarrow \Delta = 0$. Если $\Delta \neq 0$, то не равен нулю минор n -го порядка основной матрицы, значит, $r = n$ и решение единственно, что противоречит условию.

МЕТОД ГАУССА

Этим методом можно решить любую систему линейных уравнений (1.14) или доказать, что она несовместна. Он состоит в последовательном исключении неизвестных системы (1.14) по следующей схеме: выписывается расширенная матрица системы $\overline{A}$ и приводится к наиболее простому виду – треугольному или виду трапеции – с помощью следующих преобразований над ее *строками*:

1) перемена местами двух строк (уравнений);

2) умножение любой строки (уравнения) на число $\alpha \neq 0$;

3) отбрасывание одной из двух равных или пропорциональных строк (уравнений) ;

4) прибавление к любой строке (уравнению) другой строки (уравнения), умноженной на число α .

После выполнения преобразований возможны три случая:

а) $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right)$. В этом случае A эквивалентна треугольной матрице и $r = n$, значит, решение системы единственно. Последовательно вычисляя неизвестные снизу вверх, находим решение системы.

б) $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$. В этом случае A эквивалентна трапециевидной матрице, значит, $r < n$ и система имеет бесконечное множество решений: ($n - r$) переменных перенесем вправо и будем считать их свободными (известными), тогда оставшиеся r переменных определятся единственным образом как функции свободных.

в) $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b \neq 0 \end{array}\right)$. В этом случае $r_A \neq r_{\overline{A}}$, и система несовместна.

ПРИМЕР. Решить систему линейных уравнений: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$.

Выпишем расширенную матрицу и системы и упростим ее с помощью элементарных преобразований над *строками*:

$$\overline{\mathrm{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \times(-2) & \times(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) = \overline{\overline{\mathrm{A}}}$$

Очевидно, что $A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r_{\mathrm{A}} = 2, \quad r_{\overline{\mathrm{A}}} = r_{\overline{\overline{\mathrm{A}}}} = 2 \quad \Rightarrow$ по теореме

Кронекера-Капелли система совместна.

$r = 2,\ n = 4,\ \ n > r$, значит, по теореме о числе решений система неопределенная, то есть имеет бесконечное множество решений и $n - r = 2$ – число свободных переменных.

Выпишем систему, соответствующую матрице $\overline{\overline{A}}$ и эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ \quad 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

Перенесем в правую часть переменные x_2, x_3, считая их свободными (x_1, x_4 – зависимые переменные):

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_4 = 2 - x_2 + x_3 \\ \quad x_4 = 1 - 2x_2 + 3x_3 \\ x_2, x_3 \in R \end{cases}.$$

Теперь подставим x_4 в первое уравнение и выразим x_1 через свободные переменные:

$$2x_1 = 2 - x_2 + x_3 + 3(1 - 2x_2 + 3x_3) = 5 - 7x_2 + 10x_3.$$

$$\begin{cases} x_1 = 2{,}5 - 3{,}5x_2 + 5x_3 \\ x_2 \in R \\ x_3 \in R \\ x_4 = 1 - 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$ – общее решение системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Общим решением системы* (1.14) называется решение, содержащее информацию обо всех неизвестных, в котором *зависимые переменные* выражаются как *функции свободных*.

Решение, полученное из общего при конкретных значениях свободных переменных, называется *частным решением*.

Например, частными решениями этой системы являются:

$$\begin{cases} x_1 = 19 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 11 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -2 \end{cases}.$$

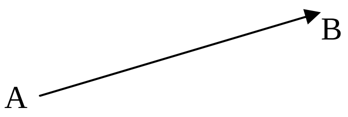
Сделаем проверку частного решения (для всех уравнений *исходной системы*!):

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -6 + 3 - 1 + 6 = 2 \ - \ \textit{верно} \\ -12 + 1 + 14 = 3 \ - \ \textit{верно} \\ 6 - 3 - 2 = 1 \ - \ \textit{верно} \\ -6 + 9 - 4 + 4 = 3 \ - \ \textit{верно} \end{cases}.$$

Глава 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

ВЕКТОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектором называется направленный отрезок (рис. 1).



A – начало, B – конец вектора $\overrightarrow{AB}$.

Рис. 1

Так как вектор определяется его началом и концом, то можно сформулировать эквивалентное данному определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вектором* называется упорядоченная пара точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Длина вектора* $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ – расстояние между его началом и концом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два вектора называются *равными*, если они имеют равные длины и одинаково направлены. При этом одинаково направленными называются векторы, лежащие на параллельных прямых и имеющие одинаковые направления.

Из этого определения следует, что *точка приложения вектора значения не имеет*, то есть вектор не изменяется, если его перемещать параллельно самому себе, сохраняя длину. Такие векторы называются свободными.

Если начало и конец вектора совпадают, он называется нулевым:

$\vec{O}$ – нулевой вектор: его направление не определено, а длина $\left|\vec{O}\right| = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на параллельных прямых: $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

Так как направление нулевого вектора не определено, то он коллинеарен любому другому.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Нулевой вектор компланарен любой системе компланарных векторов.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Линейными называются операции сложения векторов и умножения на число.

1. СЛОЖЕНИЕ

а) Правило параллелограмма (рис.2): начала $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совмещаются в одной точке, и $\vec{a}+\vec{b}$ – диагональ параллелограмма, построенного на $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

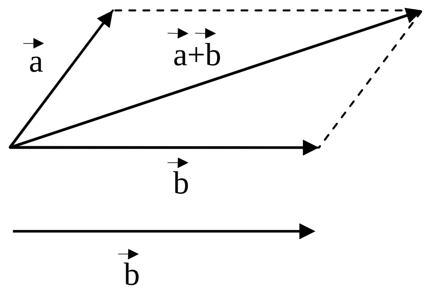


Рис. 2

б) Правило треугольника (рис. 3): начало $\vec{b}$ совмещается с концом $\vec{a}$, и $\vec{a}+\vec{b}$ направлен от начала $\vec{a}$ к концу $\vec{b}$.

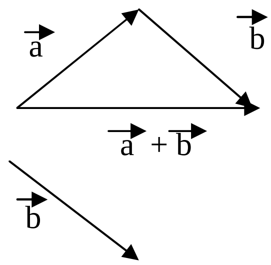


Рис. 3

в) Правило сложения нескольких векторов (рис. 4).

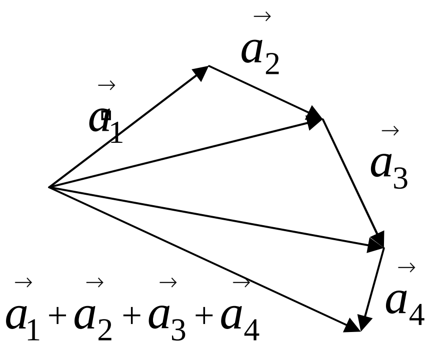


Рис. 4

Вектор $\overrightarrow{a_{n+1}}=\overrightarrow{a_1}+\ldots+\overrightarrow{a_n}$ замыкает ломаную линию, построенную таким образом: конец предыдущего вектора совмещается с началом последующего и $\overrightarrow{a_{n+1}}$ направлен от начала $\overrightarrow{a_1}$ к концу $\overrightarrow{a_n}$.

2. УМНОЖЕНИЕ НА ЧИСЛО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на число $\alpha\in R$ называется вектор $\vec{b}=\alpha\,\vec{a}$, удовлетворяющий условиям:

а) $|\vec{b}|=|\alpha||\vec{a}|$;

б) $\vec{b}\parallel\vec{a}$;

в) $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$, если $\alpha>0$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$, если $\alpha<0$ и $\vec{b}=\vec{0}$, если $\alpha=0$.

Произведение $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$ называется вектором, *противоположным* вектору $\vec{a}$. Очевидно, $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Разностью* $\vec{a}-\vec{b}$ называется сумма вектора $\vec{a}$ и вектора, противоположного $\vec{b}$: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ (рис. 5).

Рис. 5

Начала $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совмещаются в одной точке, и $\vec{a}-\vec{b}$ направлен от конца $\vec{b}$ к концу $\vec{a}$.

СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$
4. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$
5. $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})=\beta(\alpha\vec{a})$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Результат конечного числа линейных операций над векторами называется их *линейной комбинацией:* $\vec{b}=\alpha_1\,\vec{a}_1+\alpha_2\,\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\,\vec{a}_n$, $\vec{b}$ – линейная комбинация векторов $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ с коэффициентами $\alpha_i\in R$, $i=1,\ldots,n$.

ПРИМЕР. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC, а O – произвольная точка пространства. Представить $\overrightarrow{OM}$ как линейную комбинацию

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}\ \text{(рис. 6).}$$

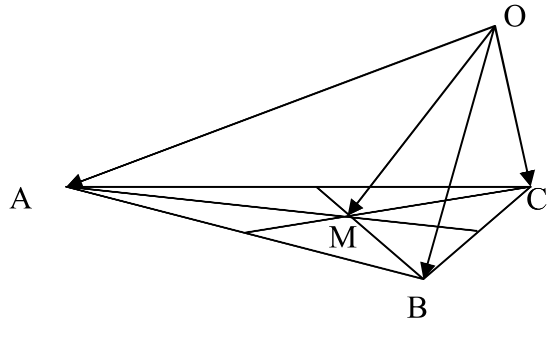


Рис. 6

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$. Так как точка пересечения медиан треугольника делит их в отношении 2:1, считая от вершины, то из правила параллелограмма следует, что $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a}\right)$.

По правилу треугольника $\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$, то есть $\overrightarrow{OM}$ – линейная комбинация $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ с коэффициентами $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы. Тогда любой компланарный с ними вектор $\vec{c}$ может быть представлен в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}\,, \quad x, y \in R\,, \tag{2.1}$$

где коэффициенты (2.1) определяются единственным образом.

Представление вектора $\vec{c}$ в виде (2.1) называется *разложением его по двум неколлинеарным* векторам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Пусть среди $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ есть два коллинеарных, например: $\vec{c} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{c} = y\vec{b}$, $y \in R \Rightarrow \vec{c} = 0 \cdot \vec{a} + y\vec{b}$.

2. Пусть среди $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ коллинеарных нет, тогда совместим начала всех трех векторов в одной точке. Построим параллелограмм, диагональ которого совпадает с $\vec{c}$, а стороны параллельны прямым, на которых лежат $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 7).

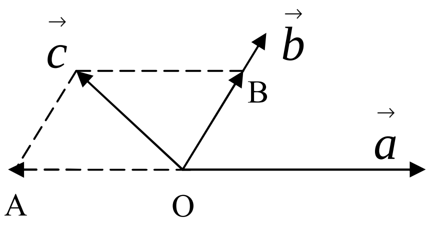


Рис. 7

Тогда $\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, но

$\overrightarrow{OB} \parallel \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = y\vec{b}$, $y \in R$; $\overrightarrow{OA} \parallel \vec{a} \Rightarrow$ $\overrightarrow{OA} = x\vec{a}$, $x \in R$. Поэтому $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Докажем единственность разложения. Предположим, что $\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$ и $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Тогда, вычитая одно равенство из другого, получим: $\vec{0} = \vec{a}\,(x_1 - x) + \vec{b}\,(y_1 - y)$. Если $x_1 - x \neq 0$, то $\vec{a} = -\vec{b}\,\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$, что противоречит условию. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарные векторы. Тогда любой вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}\,, \qquad x, y, z \in R\,, \tag{2.2}$$

причем единственным образом.

Представление вектора $\vec{d}$ в виде (2.2) называется *разложением его по трем некомпланарным*.

Доказать самостоятельно.

ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Осью называется направленная прямая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ортом* оси l называется единичный вектор $\vec{l_0}$, направление которого совпадает с направлением оси.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ортогональной проекцией* точки М на ось l называется основание M_1 перпендикуляра, опущенного из М на l.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ортогональной проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется *длина отрезка* A_1B_1 этой оси, заключенного между ортогональными проекциями его начала и конца, взятая со знаком «+», если направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси, и со знаком «–», если эти направления противоположны (рис. 8).

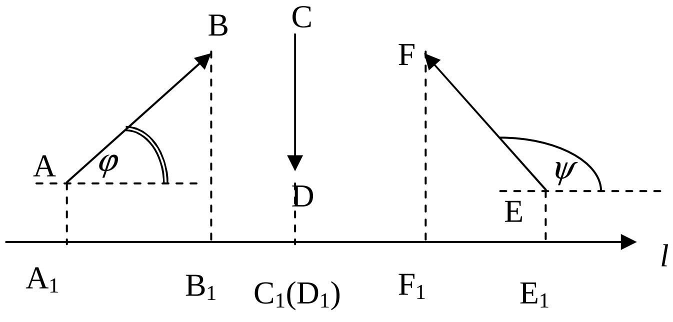


Рис. 8

$$np_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|,\; np_l\,\overrightarrow{CD} = 0,\; np_l\,\overrightarrow{EF} = -\left|\overrightarrow{E_1F_1}\right|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Углом между вектором и осью называется угол, на который нужно повернуть в положительном направлении ось до совпадения ее направления с направлением вектора (положительным считается поворот против часовой стрелки).

$$\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, l}\right),\; \left(\widehat{\overrightarrow{CD}, l}\right) = \frac{3\pi}{2},\; \psi = \left(\widehat{\overrightarrow{EF}, l}\right) \qquad \text{(рис. 8).}$$

$$np_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi > 0, \text{ так как } \varphi - \text{острый угол}; \quad np_l\,\overrightarrow{CD} = \left|\overrightarrow{CD}\right|\cos\frac{3\pi}{2} = 0;$$

$$np_l\,\overrightarrow{EF} = -\left|\overrightarrow{E_1F_1}\right| = -\left|\overrightarrow{EF}\right|\cos(\pi - \psi) = \left|\overrightarrow{EF}\right|\cos\psi < 0, \text{ так } \psi - \text{тупой угол (рис.8).}$$

Очевидно, проекцию вектора на ось можно найти по формуле

$$np_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi, \ \varphi = \left(\overset{\square}{\overrightarrow{AB}}, l\right).$$

Можно показать, что проекция линейной комбинации векторов равна такой же линейной комбинации их проекций:

$$np_e\left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right) = \alpha\, np_e\,\vec{a} + \beta\, np_e\,\vec{b}, \quad \alpha, \beta \in R.$$

В частности, проекция суммы векторов равна сумме их проекций:

$$np_e\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = np_e\,\vec{a} + np_e\,\vec{b}.$$

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат XOY. Обозначим $\vec{i}$ – орт оси OX, $\vec{j}$ – орт оси OY. Выберем точку A, и пусть x, y – проекции ее на OX и OY,то есть координаты этой точки (рис. 9).

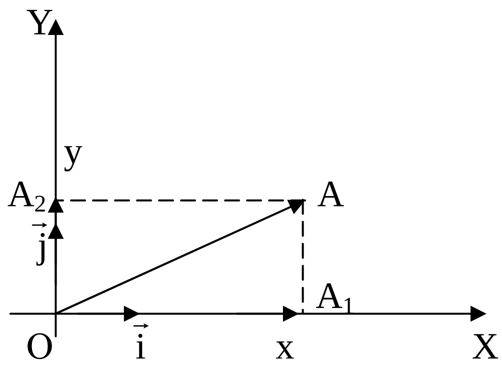


Рис. 9

$\overrightarrow{OA}$ – радиус-вектор точки A и

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$, но

$\overrightarrow{OA} \square \vec{i}, \ \left|\vec{i}\right| = 1 \Rightarrow \overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}.$

Аналогично $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}$ – разложение $\overrightarrow{OA}$ по ортам координатных осей $\vec{i}, \vec{j}$ (разложение единственно по теореме 1).

Аналогично в пространственной системе OXYZ ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей) (рис. 10):

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}, \ \overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}, \ \overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}, \ \overrightarrow{OA_3} = z\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

– разложение $\overrightarrow{OA}$ по ортам координатных осей (единственно по теореме 2).

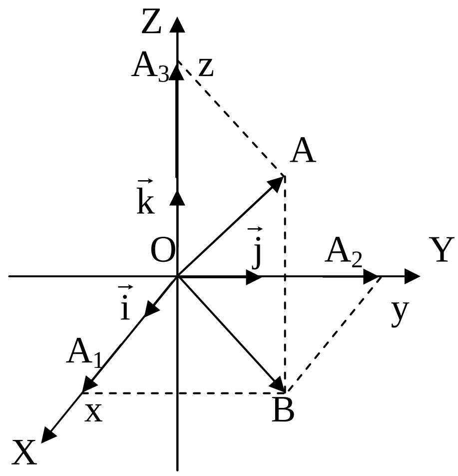


Рис. 10

Таким образом, *если задана прямоугольная декартова система координат (пдск), то со всяким пространственным вектором* $\overrightarrow{OA}$ *можно связать три числа* x, y, z *(или два числа* x, y*, если вектор плоский), которые являются коэффициентами разложения этого вектора по ортам координатных осей, а также являются проекциями этого вектора на координатные оси*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Координатами* вектора $\overrightarrow{OA}$ в любой *пдск* называются коэффициенты в разложении этого вектора по ортам координатных осей.

Таким образом, можно дать еще одно определение вектора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вектором* называется упорядоченная тройка чисел (упорядоченная пара, если вектор плоский).

ПРИМЕР. Если $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, то $\overrightarrow{OA}$ =(2,3,4) и наоборот, если $\overrightarrow{OB} = (4,3,2)$, то $\overrightarrow{OB} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Так как, с одной стороны, вектор – объект, имеющий длину и направление, а с другой, – упорядоченная тройка чисел, то, зная длину и направление, можно определить его координаты и наоборот. Направление вектора в заданной системе координат характеризуется его *направляющими косинусами* (рис. 11):

$$\cos\alpha = \cos\left(\widehat{\vec{a}, OX}\right), \cos\beta = \cos\left(\widehat{\vec{a}, OY}\right), \cos\gamma = \cos\left(\widehat{\vec{a}, OZ}\right).$$

Пусть $\vec{a} = (x, y, z) \Rightarrow \quad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \cos\alpha = \frac{x}{\left|\vec{a}\right|}, \ \cos\beta = \frac{y}{\left|\vec{a}\right|}, \cos\gamma = \frac{z}{\left|\vec{a}\right|}.$

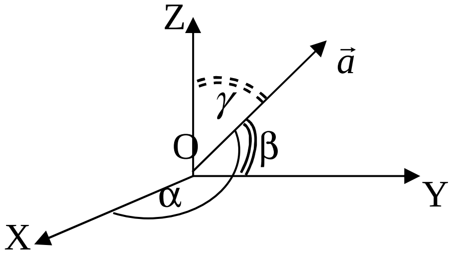


Рис. 11

Из этих формул очевидно следует *основное свойство направляющих косинусов*:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Если известны длина $|\vec{a}|$ и направляющие косинусы вектора, то его координаты вычисляются по формулам:

$$x = |\vec{a}|\cos\alpha,\ y = |\vec{a}|\cos\beta,\ z = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

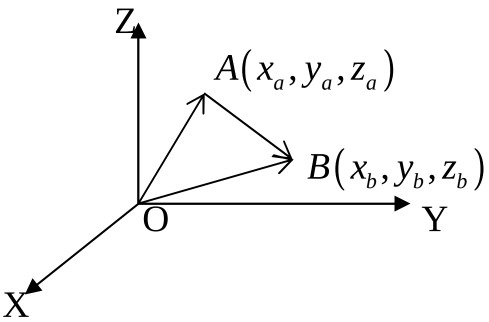


Рис. 12

Пусть $\overrightarrow{AB}$ – произвольный вектор в системе OXYZ, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ – радиус-векторы его начала и конца,

$A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, (рис.12).

Тогда

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k},$$

$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$ (см. свойства линейных операций над векторами). Таким образом, $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, то есть *для определения координат вектора надо из координат его конца вычесть координаты начала*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Базисом в пространстве* называется любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов (рис. 13).

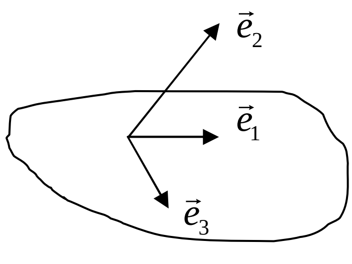


Рис. 13

Если $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – базис, то $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ – другой базис, так как изменился порядок следования векторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Базис называется *прямоугольным декартовым*, если базисные векторы взаимно перпендикулярны и длина каждого равна 1.

Такой базис принято обозначать $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Из теоремы 2 следует, что всякий вектор $\vec{a}$ может быть разложен по базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, то есть представлен в виде: $\vec{a} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3$. Числа x, y, z называются координатами $\vec{a}$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Базисом на плоскости* называется любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов.

Если $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ – базис, то представление вектора в виде $\vec{a} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2$ называется разложением $\vec{a}$ по базису $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ и x, y – координаты $\vec{a}$ в этом базисе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор этой прямой.

ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Рассмотрим задачу: дан отрезок AB. Найти точку D, которая делит AB в заданном отношении k: $\dfrac{|AD|}{|DB|} = k$ (рис. 14).

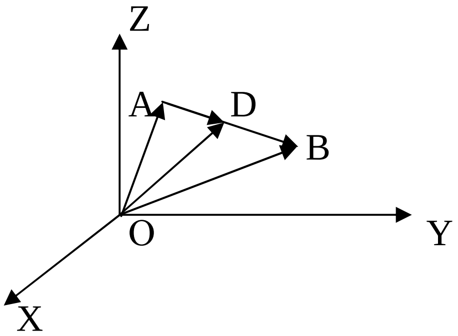


Рис. 14

Введем прямоугольную декартову систему координат (*пдск*) OXYZ, тогда $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$, $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$. Обозначим

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OD} = \vec{d}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a},\ \overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{d}.$$

Так как $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{DB}$ (лежат на одной прямой) и $\left|\overrightarrow{AD}\right| = k\left|\overrightarrow{DB}\right|$, то $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{DB} \Rightarrow \vec{d} - \vec{a} = k\left(\vec{b} - \vec{d}\right) \Rightarrow (1+k)\vec{d} = \vec{a} + k\vec{b} \Rightarrow \vec{d} = \dfrac{\vec{a} + k\vec{b}}{1+k}$. Переходя от этого векторного равенства к равенству соответствующих координат, получим:

$$x_D = \frac{x_A + kx_B}{1+k},\ y_D = \frac{y_A + ky_B}{1+k},\ z_D = \frac{z_A + kz_B}{1+k}. \qquad (2.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если D – середина отрезка AB, то $k = 1$, поэтому

$$x_{cp} = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_{cp} = \frac{y_A + y_B}{2},\ z_{cp} = \frac{z_A + z_B}{2} \qquad (2.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $k < 0$, $k \neq -1$, то точка D лежит за пределами AB: так как $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{DB}$, то при $k < 0$ $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DB}$.

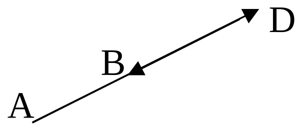


Рис. 15

В этом случае $\dfrac{|AD|}{|DB|}=|k|$.

Пусть

$$k=-2\Rightarrow\frac{|AD|}{|DB|}=2\Rightarrow|AD|=2|DB|\Rightarrow\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{DB}$$ (рис. 15).

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Скалярным произведением векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *скаляр (число)*, равный $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,\ \varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

Скалярное произведение обозначается так: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ или $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.

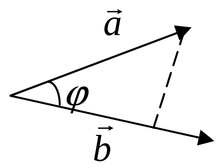


Рис. 16

Так как $|\vec{a}|\cos\varphi=np_{\vec{b}}\vec{a}$ (рис. 16) или $|\vec{b}|\cos\varphi=np_{\vec{a}}\vec{b}$,

то $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{b}|np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b}$.

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$ – очевидно из определения.

2. $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$$\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=|\vec{c}|np_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=|\vec{c}|\left(np_{\vec{c}}\vec{a}+np_{\vec{c}}\vec{b}\right)=|\vec{c}|np_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|np_{\vec{c}}\vec{b}=\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right).$$

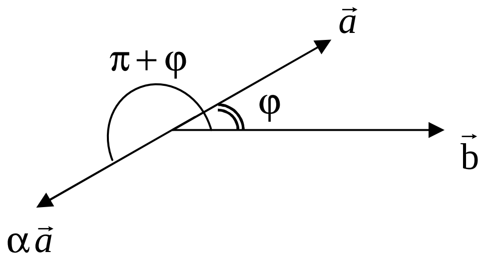
3. $\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\alpha\vec{a},\vec{b}\right),\ \alpha\in R.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

а) $\alpha=0$ – очевидно.

б) $\alpha>0$. $\alpha\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}\Rightarrow\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\left(\widehat{\alpha\vec{a},\vec{b}}\right)=\varphi;|\alpha|=\alpha\Rightarrow\left(\alpha\vec{a},\vec{b}\right)=|\alpha||\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right).$

в) $\alpha < 0$. В этом случае



$$\alpha\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a} \Rightarrow \left(\widehat{\alpha\vec{a},\vec{b}}\right) = \pi + \varphi;\ |\alpha| = -\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\alpha\vec{a},\vec{b}\right) = |\alpha|\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos(\pi + \varphi) =$$
$$= -\alpha\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|(-\cos\varphi) = \alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

4. $\left(\vec{a},\vec{a}\right) = \left|\vec{a}\right|^2 \;\Rightarrow\; \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(\vec{a},\vec{a}\right)}$.

Отсюда следует, что $\left(\vec{a},\vec{a}\right) > 0 \Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{O}$, $\left(\vec{a},\vec{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{O}$.

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов является равенство нулю их скалярного произведения:

5. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

а) пусть $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0$.

б) пусть $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = 0$ или $\left|\vec{b}\right| = 0$, или $\cos\varphi = 0$.

В первом и втором случаях один из сомножителей – нулевой вектор. Его направление не определено, поэтому можно считать, что $\vec{a} \perp \vec{b}$. В третьем случае $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ или $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$, то есть $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Используя свойства 4 и 5, составим таблицу вычисления скалярного произведения базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

Скалярное произведение	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Пусть в некоторой *пдск* $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k},\ \vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$. Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}\right)\cdot\left(x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}\right) = x_a x_b\left|\vec{i}\right|^2 + x_a y_b\left(\vec{i},\vec{j}\right) + x_a z_b\left(\vec{i},\vec{k}\right) + y_a x_b\left(\vec{j},\vec{i}\right) +$$

$$+ y_a y_b\left|\vec{j}\right|^2 + y_a z_b\left(\vec{j},\vec{k}\right) + z_a x_b\left(\vec{k},\vec{i}\right) + z_a y_b\left(\vec{k},\vec{j}\right) + z_a z_b\left|\vec{k}\right|^2 = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b.$$

Таким образом, $$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b \qquad (2.5)$$

ПРИМЕР. Найти, при каком значении x векторы $\vec{a}=(x,0,2)$, $\vec{b}=(2,5,3)$ перпендикулярны.

Два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю (свойство 5), поэтому найдем скалярное произведение по формуле (2.5): $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=2x+0+6=0 \Rightarrow x=-3$.

ПРИМЕР. Найти угол между биссектрисой AD и медианой $AM\ \triangle ABC$, если $A(0,-1,0), B(2,1,-4), C(-1,-3,-1)$.

Так как $$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi,$$

то $$\cos\varphi=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}. \qquad (2.6)$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AM}$. Точка M – середина BC, поэтому по формулам (2.4) $M\left(\frac{1}{2},-1,-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{5}{2}\right)$.

По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника $\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}=k$. Чтобы найти k, вычислим длины AC и AB:

$$\overrightarrow{AC}=(-1,-2,-1),\ \overrightarrow{AB}=(2,2,-4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6},\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k=\frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{CD} \Rightarrow \frac{DB}{CD}=2.$$

Разделим отрезок CB в данном отношении по формулам (2.3):

$$x_D=\frac{x_B+2x_C}{3}=0,\quad y_D=\frac{y_B+2y_C}{3}=-\frac{5}{3},\quad z_D=\frac{z_B+2z_C}{3}=-2,$$

отсюда $$D\left(0,-\frac{5}{3},-2\right) \ \Rightarrow\ \overrightarrow{AD}=\left(0,-\frac{2}{3},-2\right).$$

Заметим, что $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD}\right)=\left(2\overrightarrow{AM},3\overrightarrow{AD}\right)=\varphi$. Это замечание позволит нам не иметь дело с дробями, так как

$$2\overrightarrow{AM}=(1,0,-5),\ 3\overrightarrow{AD}=(0,-2,-6) \Rightarrow \cos\varphi=\frac{0+0+30}{\sqrt{26}\sqrt{40}}=\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{13}}.$$

ПРИМЕР. Найти $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right|=1,\ \left|\vec{b}\right|=2,\ \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

Воспользуемся свойствами 1–4 скалярного произведения:

$$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2-4\left(\vec{a},\vec{b}\right)+4\left|\vec{b}\right|^2=1-4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot 4=13.$$

Отсюда $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{13}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как работа силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки вдоль вектора $\vec{s}$ вычисляется по формуле $A=\left|\vec{F}\right|\left|\vec{s}\right|\cos\varphi$, то $A=\left(\vec{F},\vec{s}\right)$.

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Тройка* некомпланарных векторов $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$, имеющих общее начало, называется *правой (левой)*, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ вращение первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ по кратчайшему пути наблюдается против (по) часовой стрелки (рис. 17).

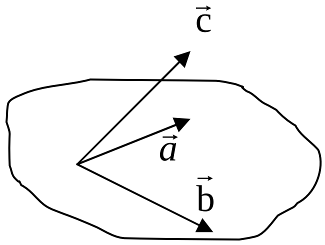


Рис. 17

$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ – левая тройка,

$\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)$ – правая тройка,

$\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)$ – левая тройка.

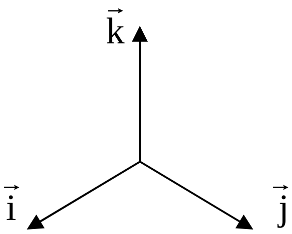


Рис. 18

$\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ – правая тройка (рис. 18).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

1. $\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$ ($\vec{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$).

2. Направление $\vec{c}$ таково, что тройка $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ – правая.

3. $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi,\ \varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

Векторное произведение обозначается так: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ или $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Геометрический смысл векторного произведения: длина векторного произведения численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах.*

$$S_{пар-ма}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Это следует из того, что площадь параллелограмма равна произведению длин смежных сторон на синус угла между ними.

Заметим, что

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\varphi=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\left(1-\cos^2\varphi\right)=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\varphi=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a},\vec{b}\right)^2.$$

Таким образом, длину вектора векторного произведения можно вычислить с помощью скалярного произведения по формуле

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a},\vec{b}\right)^2}. \tag{2.7}$$

ПРИМЕР. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(-1,2,4),\ \vec{b}=(0,-1,1)$.

$$\left|\vec{a}\right|^2=21;\quad \left|\vec{b}\right|^2=2;\quad \left(\vec{a},\ \vec{b}\right)=2.$$

По формуле (2.7): $\quad S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{21\cdot2-4}=\sqrt{38}.$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Направление вектора $\vec{c}$ можно также (кроме п.2) определить по правилу винта: направление вектора $\vec{c}$ совпадает с направлением поступательного движения винта в правой резьбой при вращении его в сторону поворота первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ по кратчайшему пути (рис. 19).

Рис. 19

СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

а) пусть $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi=0 \Rightarrow \left|\vec{a}\right|=0$ или $\left|\vec{b}\right|=0$, или $\sin\varphi=0$. В первом и втором случаях один из сомножителей – нулевой вектор. Его направление не определено, поэтому можно считать, что $\vec{a}\parallel\vec{b}$. Если $\sin\varphi=0$, то $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$, то есть $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

б) пусть $\vec{a}\parallel\vec{b} \Rightarrow \varphi=0$ или $\varphi=\pi \Rightarrow \sin\varphi=0 \Rightarrow \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=0 \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

2. $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: По определению направления векторов $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{b}\times\vec{a}$ противоположны, а модули равны, значит, векторы отличаются лишь знаком.

3. $\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)\times\vec{c}=\alpha\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)+\beta\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ – свойство линейности векторного произведения по первому сомножителю (без доказательства).

Векторное произведение также линейно и по второму сомножителю.

Используя определение и свойства 1 и 2, составим таблицу вычисления векторного произведения базисных векторов $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: векторы, стоящие в левом столбце, умножаются на соответствующие векторы верхней строки (рис. 20).

Векторное произведение	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

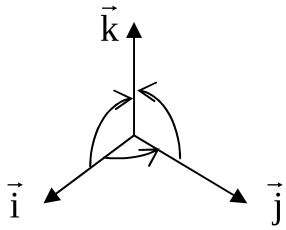


Рис. 20

Пусть в некоторой *пдск* $\vec{a}=x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k},\ \vec{b}=x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k}$. Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}\right)\times\left(x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k}\right)=$$

$$=\vec{0}+x_ay_b\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+x_az_b\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+y_ax_b\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+\vec{0}+$$

$$+y_az_b\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+z_ax_b\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+z_ay_b\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+\vec{0}=$$

$$=x_ay_b\vec{k}-x_az_b\vec{j}-y_ax_b\vec{k}+y_az_b\vec{i}+z_ax_b\vec{j}-z_ay_b\vec{i}=$$

$$=\left(y_az_b-z_ay_b\right)\vec{i}-\left(x_az_b-z_ax_b\right)\vec{j}+\left(x_ay_b-y_ax_b\right)\vec{k}.$$

Заметим, что это выражение можно получить, вычислив символический определитель (сделать это можно по-разному, но лучше разложить по первой строке):

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \vec{i}\left(y_a z_b - y_b z_a\right) - \vec{j}\left(x_a z_b - x_b z_a\right) + \vec{k}\left(x_a y_b - x_b y_a\right).$$

Таким образом,

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}. \tag{2.8}$$

ПРИМЕР. Вычислить векторное произведение векторов $\vec{a} = (-1,3,0)$, $\vec{b} = (2,4,5)$.

По формуле (2.8): $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 5\vec{j} - 10\vec{k} = (15,\, 5,\, -10).$

Заметим, что площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно вычислить двумя способами: как половину длины найденного вектора или используя формулу (2.7). Заметим, что $\vec{a}\times\vec{b} = 5(3,\, 1,\, -2)$.

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{5}{2}\sqrt{9+1+4} = \frac{5}{2}\sqrt{14}$$

или

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| - \left(\vec{a},\vec{b}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10\cdot 45 - 10^2} = \frac{5}{2}\sqrt{14}.$$

ПРИМЕР. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ и $\vec{b} = -2\vec{p} + \vec{q}$, если $\left|\vec{q}\right| = 2$, $\left|\vec{p}\right| = 1$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Так как $S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, то вычислим векторное произведение, используя его свойства: $\vec{a}\times\vec{b} = \left(2\vec{p} - 3\vec{q}\right)\times\left(\vec{q} - 2\vec{p}\right) = 2\vec{p}\times\vec{q} - 4\vec{p}\times\vec{p} - 3\vec{q}\times\vec{q} + 6\vec{q}\times\vec{p} = 4\vec{q}\times\vec{p}$.

Отсюда $S = \left|4\vec{q}\times\vec{p}\right| = 4\left|\vec{q}\right|\left|\vec{p}\right|\sin\dfrac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}.$

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕТОРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Смешанным произведением векторов* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется число $\left(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\right)$ – скалярное произведение $\vec{a}$ на векторное произведение $\vec{b}\times\vec{c}$. Смешанное произведение обозначается так: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

Пусть в некоторой *пдск* $\vec{a}=\left(x_a,y_a,z_a\right)$, $\vec{b}=\left(x_b,y_b,z_b\right)$, $\vec{c}=\left(x_c,y_c,z_c\right)$. Обозначим

$$\vec{p}=\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_b & z_b\\ y_c & z_c\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_b & z_b\\ x_c & z_c\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_b & y_b\\ x_c & y_c\end{vmatrix}\vec{k}.$$

Тогда

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{p}\right)=x_a x_p+y_a y_p+z_a z_p=$$

$$=x_a\begin{vmatrix}y_b & z_b\\ y_c & z_c\end{vmatrix}-y_a\begin{vmatrix}x_b & z_b\\ x_c & z_c\end{vmatrix}+z_a\begin{vmatrix}x_b & y_b\\ x_c & y_c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix}$$

по 7 свойству определителей.

Таким образом,

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix} \qquad (2.9)$$

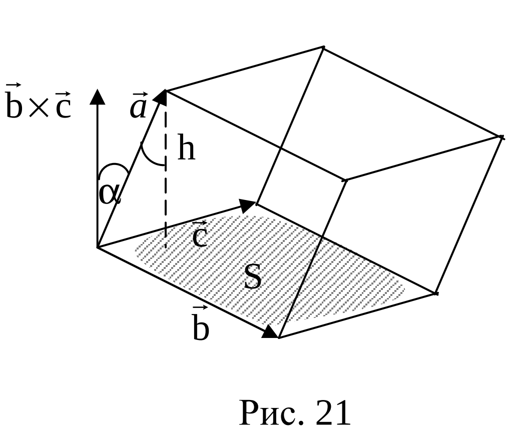


Рис. 21

По определению скалярного произведения $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cos\alpha,\ \alpha=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}}\right)$.

Совместим начала всех трех векторов в одной точке. Тогда (рис. 21)

$\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=S$ – площадь параллелограмма,

$\left|\vec{a}\right|\cos\alpha=h$ – высота параллелепипеда,

$\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|=S\cdot h=V$ – объем параллелепипеда.

Геометрический смысл смешанного произведения: модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях, при этом $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0$, *если* $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ *– правая тройка, и* $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)<0$, *если* $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ *– левая тройка.*

$$\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|=V_{параллелепипеда}.$$

СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow$ $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

а) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны $\Rightarrow$ $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0.$

Если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, то на них нельзя построить параллелепипед, а потому $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0.$

б) $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0\Rightarrow$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны.

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cos\alpha=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left|\vec{a}\right|=0\quad\Rightarrow\vec{a}=\vec{0}\\ \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=0\Rightarrow\vec{b}\parallel\vec{c}\\ \cos\alpha=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}\times\vec{c}\end{array}\right..$$

Во всех трех случаях $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны: в частности, если $\vec{a}\perp\vec{b}\times\vec{c}$, то $\vec{a}$ параллелен плоскости векторов $\vec{b},\vec{c}$, что означает их компланарность.

2. Круговая перестановка сомножителей в смешанном произведении не изменяет его величины. Перестановка соседних сомножителей изменяет его знак, не изменяя абсолютной величины:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=-\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right).$$

Доказательство следует из формулы (2.9) и свойства 3 определителей, при этом круговая перестановка сомножителей соответствует двойной перемене строк в определителе, а потому оставляет его неизменным.

3. В смешанном произведении векторное и скалярное произведения можно менять местами: $\left(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: из свойства 2 смешанного произведения и свойства 1 скалярного получим: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{c},\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right).$

4. Смешанное произведение линейно по каждому из трех сомножителей. $\left(\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c}\right)=\alpha_1\left(\overrightarrow{a_1},\vec{b},\vec{c}\right)+\alpha_2\left(\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c}\right)$ – линейность по первому сомножителю.

Доказательство следует из формулы (2.9) и свойств определителей.

ПРИМЕР. Найти объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}=(3,-1,1)$, $\vec{b}=(0,-5,2)$, $\vec{c}=(-2,3,3)$, и его высоту, перпендикулярную плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Объем тетраэдра в 6 раз меньше объема параллелепипеда, построенного на этих векторах, поэтому $V_m=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$.

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}3&-1&1\\0&-5&2\\-2&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&4\\0&-5&2\\-2&3&3\end{vmatrix}^{\times 2}=\begin{vmatrix}1&2&4\\0&-5&2\\0&7&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&2\\7&11\end{vmatrix}=-69.$$

Отсюда $V_m=\frac{23}{2}$ (заметим, что $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ – левая тройка, так как смешанное произведение отрицательно).

Чтобы найти высоту, воспользуемся формулой

$$V=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h\Rightarrow h=\frac{3V}{S_{осн.}};\ S_{осн.}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\ \Rightarrow h=\frac{\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}.$$

По формуле (2.7) $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{11\cdot 29-49}=3\sqrt{30}\ \Rightarrow\ h=\frac{69}{3\sqrt{30}}=\frac{23\sqrt{30}}{30}$.

Глава 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Докажем, что *всякая прямая на плоскости задается в любой пдск уравнением первой степени относительно двух переменных.*

Если A – некоторая точка на прямой ℓ, а $\vec{n}$ – вектор, перпендикулярный ей, то, во-первых, через A перпендикулярно $\vec{n}$ проходит единственная прямая на плоскости, а, во-вторых, для любой точки $M\in\ell$ вектор $\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$. *Таким свойством обладают только точки, лежащие на* ℓ.

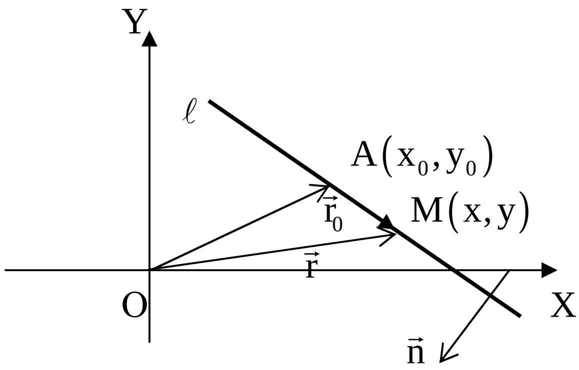


Рис. 22

Чтобы вывести уравнение прямой, зададим на плоскости *пдск* XOY. В этой системе координат $A(x_0, y_0)$, $\vec{n} = (A, B)$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка на ℓ. Тогда (рис. 22) $\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r}_0$. Так как $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$, то по свойству 5 скалярного произведения $\left(\overrightarrow{AM}, \vec{n}\right) = 0 \Rightarrow \left(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}\right) = 0$ – векторное уравнение прямой ℓ.

$\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$, поэтому по формуле (2.5) получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{3.1}$$

Координаты точек, лежащих на прямой ℓ, связаны соотношением (3.1). Если же $M \notin \ell$, то $\overrightarrow{AM}$ не перпендикулярен $\vec{n} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \vec{n}\right) \neq 0$, значит, координаты M не будут удовлетворять полученному уравнению. Поэтому (3.1) – уравнение прямой, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору. Заметим, что это уравнение линейно относительно переменных x и y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Любой ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный прямой ℓ, называется ее *нормальным вектором, или нормалью*.

(3.1) $\Rightarrow Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$. Обозначая $C = -Ax_0 - By_0$, получим

$$Ax + By + C = 0. \tag{3.2}$$

(3.2) – общее уравнение прямой на плоскости, $\vec{n} = (A, B) \perp \ell$ – нормаль ℓ.

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С НАПРАВЛЯЮЩИМ ВЕКТОРОМ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Любой ненулевой вектор $\vec{s}$, параллельный прямой, называется ее направляющим вектором.

Если A – некоторая точка на прямой ℓ, а $\vec{s}$ – вектор, параллельный ей, то, во-первых, через A параллельно $\vec{s}$ проходит единственная прямая, а, во-вторых, для любой точки $M \in \ell$ вектор $\overrightarrow{AM} \parallel \vec{s}$. *Таким свойством обладают только точки, лежащие на* ℓ.

Чтобы вывести уравнение прямой, зададим на плоскости *пдск* XOY. В этой системе координат $A(x_0, y_0)$, $\vec{s} = (m, n)$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка на ℓ. Тогда $\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ и $\overrightarrow{AM} \parallel \vec{s}$. Запишем условие коллинеарности векторов:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{3.3}$$

(3.3) – уравнение прямой на плоскости с направляющим вектором.

Если $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2) \in \ell$, то $\overrightarrow{BC} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ – направляющий вектор прямой ℓ, поэтому уравнение прямой, проходящей через две точки имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{3.4}$$

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Пусть $\vec{s} = (m, n)$ – направляющий вектор прямой ℓ, и ℓ не параллельна оси OY, тогда $m \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Угловым коэффициентом прямой ℓ называется число $k = \dfrac{n}{m},\ m \neq 0.$

Очевидно, что если α – угол между прямой ℓ и положительным направлением оси ОХ, то $tg\,\alpha = k$.

Рассмотрим уравнение (3.3) прямой с направляющим вектором $\vec{s}$:
$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} \Rightarrow y - y_0 = \dfrac{n}{m}(x - x_0)$.

Отсюда следует (3.5) – уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку $A(x_0, y_0)$:

$$y = y(x_0) + k(x - x_0) \tag{3.5}$$

Из (3.5) получим $y = y_0 + kx - kx_0$. Обозначим $b = y_0 - kx_0$, тогда

$$y = kx + b. \tag{3.6}$$

(3.6) – уравнение прямой с угловым коэффициентом.

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ НА ПЛОСКОСТИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Углом между двумя прямыми на плоскости называется любой из двух смежных углов, образованных ими при пересечении. Если прямые параллельны, то угол между ними равен 0 или π радиан.

Пусть прямые заданы общими уравнениями.

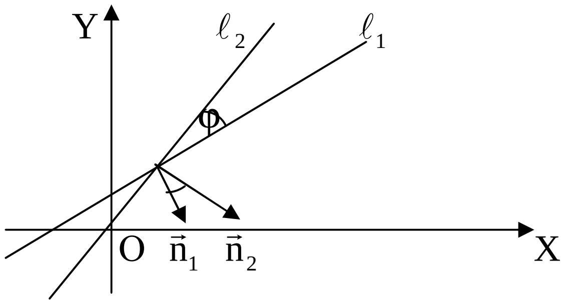


Рис. 23

$$\ell_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ \overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1),$$

$$\ell_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0,\ \overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2),$$

$$\varphi = \left(\widehat{\ell_1, \ell_2}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}\right) \text{ (рис. 23).}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \qquad \text{или} \qquad \cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{3.7}$$

Условие параллельности прямых:

$$\ell_1 \parallel \ell_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$\ell_1 \perp \ell_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_2}\right) = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Рассмотрим случай, когда прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом.

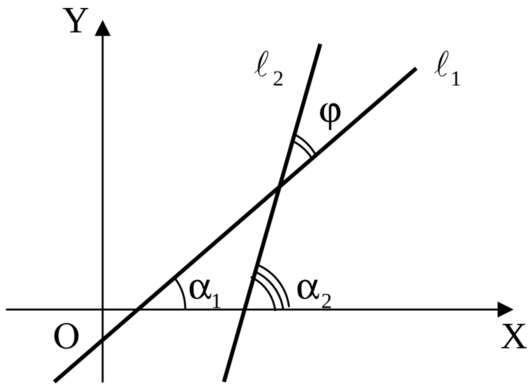


Рис. 24

$\ell_1: y = k_1x + b_1, \quad k_1 = tg\ \alpha_1$

$\ell_2: y = k_2x + b_2, \quad k_2 = tg\ \alpha_2$

Так как $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (рис. 24), то

$$tg\varphi = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Условие параллельности прямых:

$$\ell_1 \parallel \ell_2 \Rightarrow k_1 = k_2.$$

Условие перпендикулярности:

$\ell_1 \perp \ell_2 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Так как $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2}$ не существует, то $1 + \mathrm{k}_1\mathrm{k}_2 = 0$.

ПРИМЕР. Даны вершины треугольника: $A(-5,3)$, $B(-4,-6)$, $C(0,2)$. Написать:
а) уравнение медианы AM, б) высоты AH, в) найти угол между AM и AH (рис. 25).

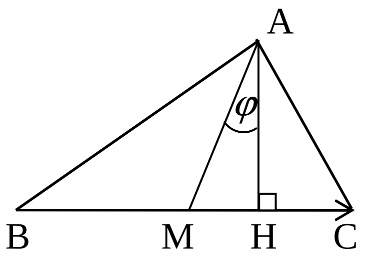


Рис.25

а) $A(-5,3)$, $M(-2,-2)$ – середина BC (см. (2.4)). Напишем уравнение (3.4) прямой, проходящей через две точки: $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-3}{-5}$. Вектор $AM=\vec{s}=(3,-5)$ – направляющий вектор прямой AM.

Перепишем уравнение медианы в общем виде:

$$-5(x+5)=3(y-3)\Rightarrow 5x+3y+16=0\Rightarrow \vec{n}_{AM}=(5,3)$$ – нормаль AM.

б) $\overrightarrow{BC}=(4,8)=4(1,2)\perp AH\Rightarrow \vec{n}_{AH}=(1,2)$ – нормаль AH. Уравнение прямой (3.1), проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\vec{n}_{AH}$:

$$x+5+2(y-3)=0\Rightarrow x+2y-1=0.$$

в) $\vec{n}_{AM}=\vec{n}_1$, $\vec{n}_{AH}=\vec{n}_2$. По формуле (3.7) $\cos\varphi=\dfrac{5+6}{\sqrt{5}\sqrt{34}}=\dfrac{11}{\sqrt{170}}.$

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть в некоторой *пдск* XOY задана прямая $\ell: Ax+By+C=0$ и точка $M(x_0,y_0)\notin\ell$. Найдем расстояние от точки M до прямой ℓ.

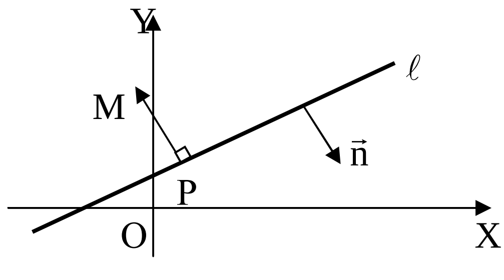


Рис. 26

Пусть $P(x_1,y_1)$ – проекция точки M на ℓ (рис. 26), тогда $\overrightarrow{PM}=(x_0-x_1,y_0-y_1)$. Нормаль

$$\vec{n}=(A,B)\parallel\overrightarrow{PM}\Rightarrow\left|\left(\vec{n},\overrightarrow{PM}\right)\right|=|\vec{n}|\left|\overrightarrow{PM}\right|=d|\vec{n}|,$$

где d – искомое расстояние, а $\left(\vec{n},\ \overrightarrow{PM}\right)$ – скалярное произведение.

Следовательно, $$d=\frac{\left|\left(\vec{n},\overrightarrow{PM}\right)\right|}{|\vec{n}|}.$$

Так как $P(x_1, y_1) \in \ell$, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Поэтому

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{PM}\right) = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1) = Ax_0 + By_0 + C.$$

Отсюда
$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.8}$$

(3.8) – формула для вычисления расстояния от точки до прямой на плоскости.

ПРИМЕР. Найти длину высоты $AH \,\triangle ABC$: $A(-5,3)$, $B(-4,-6)$, $C(0,2)$.

Уравнение BC (3.4): $\dfrac{x+4}{4} = \dfrac{y+6}{8} \Rightarrow 2x - y + 2 = 0 \Rightarrow d = \dfrac{\left|2\cdot(-5) - 3 + 2\right|}{\sqrt{5}} = \dfrac{11}{\sqrt{5}}$ – искомая длина высоты AH.

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ОКРУЖНОСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кривые второго порядка – плоские линии, которые в *пдск* XOY задаются уравнениями второй степени относительно двух переменных x, y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Окружностью* называется совокупность точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой ее центром.

Выведем уравнение окружности. Зададим *пдск* XOY. Пусть $O_1(x_0, y_0)$ – фиксированная точка (центр окружности), а R – расстояние от точек окружности до ее центра (радиус окружности). Если $M(x, y)$ – произвольная точка окружности, то длина $\overrightarrow{O_1M}$ равна R. $\overrightarrow{O_1M} = (x - x_0, y - y_0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{O_1M}\right| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \Rightarrow$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{3.9}$$

Если точка $M(x, y)$ не лежит на окружности, то $\left|\mathrm{O_1M}\right| \neq \mathrm{R}$ и ее координаты уравнению (3.9) не удовлетворяют, поэтому, (3.9) – уравнение окружности с центром $O_1(x_0, y_0)$ радиуса R.

Если $O_1(0,0)$, то уравнение окружности примет вид:
$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{3.10}$$

(3.10) – каноническое уравнение окружности.

ПРИМЕР. Показать, что уравнение $x^2+y^2-5x=0$ задает окружность (то есть найти ее центр и радиус).
Приведем данное уравнение к виду (3.9), выделив полный квадрат по переменной x:

$$x^2-5x+y^2=x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}+y^2-\frac{25}{4}=0\Rightarrow\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2\Rightarrow O_1\left(\frac{5}{2},0\right),\ R=\frac{5}{2}.$$

ПРИМЕР. Написать уравнение линии центров окружностей
$x^2+y^2-5x=0$ и $x^2+2x+y^2+y=1$.

Найдем центр второй окружности:

$$x^2+2x+y^2+y=(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-1-\frac{1}{4}=1\Rightarrow(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\Rightarrow$$

$$O_2\left(-1,-\frac{1}{2}\right),\ O_1\left(\frac{5}{2},0\right)$$

Уравнение прямой (3.4), проходящей через две точки:

$$\frac{x-2,5}{-1-2,5}=\frac{y}{-0,5}\Rightarrow\frac{x-2,5}{7}=\frac{y}{1}\Rightarrow 2x-14y-5=0.$$

Эллипс

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Эллипс* – совокупность точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная и большая, чем расстояние между фокусами.
Чтобы вывести уравнение эллипса, выберем *пдск* следующим образом: ось абсцисс проведем через фокусы F_1 и F_2, а ось ординат – посередине отрезка F_1F_2 перпендикулярно оси абсцисс. Обозначим расстояние между фокусами $|F_1\ F_2|=2c$, тогда $F_1(-c,0), F_2(c,0)$. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка, лежащая на эллипсе, а $2a$ – сумма расстояний от точек на эллипсе до F_1 и F_2, $2a>2c$ по определению эллипса.

$\overrightarrow{F_1M}=(x+c,y), \overrightarrow{F_2M}=(x-c,y)$ (рис. 27).

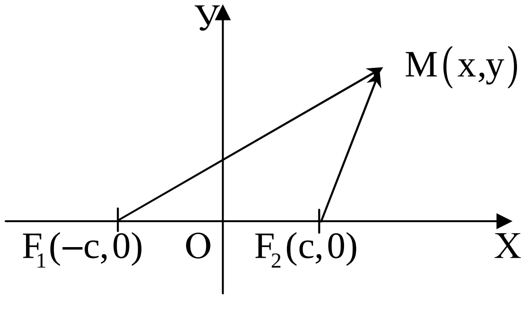


Рис. 27

Запишем в виде уравнения свойство точек, принадлежащих эллипсу, сформулированное в определении:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad (3.11)$$

(3.11) – уравнение эллипса в выбранной системе координат. Преобразуем его к более простому (каноническому) виду. Для этого умножим (3.11) на сопряженное выражение:

$$(x+c)^2+y^2-(x-c)^2-y^2=2a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)\Rightarrow$$

$$4cx=2a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)\Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{2cx}{a}. \qquad (3.12)$$

Сложим (3.11) и (3.12) и результат возведем в квадрат:

$$2\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2\left(\frac{cx}{a}+a\right)\Rightarrow x^2+2cx+c^2+y^2=\frac{c^2x^2}{a^2}+2cx+a^2\Rightarrow$$

$$x^2\frac{a^2-c^2}{a^2}+y^2=a^2-c^2 \qquad (3.13)$$

Так как по определению $a>c$, то есть $a^2-c^2>0$, то обозначим $a^2-c^2=b^2$. Тогда из (3.13) получим:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3.14)$$

(3.14) – каноническое уравнение эллипса.

Исследуем форму эллипса по его каноническому уравнению. Найдем точки пересечения с осями координат:

$$y=0\Rightarrow x=\pm a,\ x=0\Rightarrow y=\pm b.$$

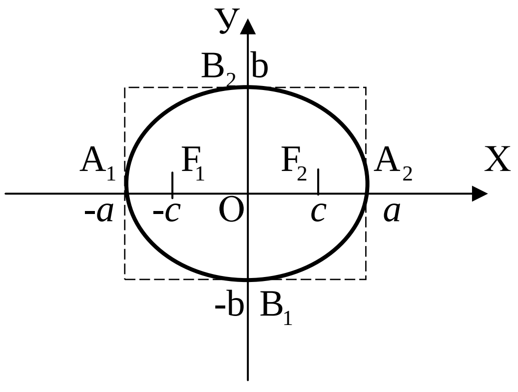


Рис. 28

Из (3.14) следует, что

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\ \frac{y^2}{b^2}\le 1\Rightarrow |x|\le|a|,\ |y|\le|b|\ .$$

Значит, эллипс расположен в прямоугольнике со сторонами $x=\pm a,\ y=\pm b$. Кроме того, из уравнения следует, что он симметричен относительно OX и OY. $O(0,0)$ – точка пересечения осей симметрии – центр симметрии эллипса.

Ось, на которой лежат фокусы, называется *фокальной осью эллипса*. Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются его *вершинами*.

$|OF_1| = |OF_2| = c$ *– полуфокусное расстояние,* $|OB_1| = |OB_2| = b$ *– малая полуось,* $|OA_1| = |OA_2| = a$ *– большая полуось* эллипса и $a^2 = b^2 + c^2$ (рис. 28).

Отношение полуфокусного расстояния к длине большой полуоси $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется *эсцентриситетом* эллипса. Он характеризует форму эллипса. Так как $c < a$, то $0 < \varepsilon < 1$, и чем меньше ε, тем больше эллипс похож на окружность. Для окружности $\varepsilon = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Уравнение эллипса, центр которого $O_1(x_0, y_0)$, а оси симметрии параллельны координатным осям, имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (3.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. К кривым второго порядка эллиптического типа относятся также мнимый эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ и точка $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$.

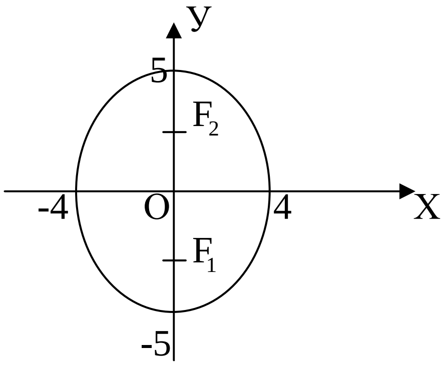


Рис. 29

ПРИМЕР. Найти эксцентриситет эллипса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ (рис. 29).

Так как $b^2 > a^2$, то фокусы лежат на оси OY и поэтому $b^2 = a^2 + c^2$.

$$c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{3}{5}.$$

ГИПЕРБОЛА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Гипербола* – совокупность точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, не равная нулю и меньшая, чем расстояние между фокусами.

Чтобы вывести уравнение гиперболы, выберем *пдск* следующим образом: ось абсцисс проведем через фокусы F_1 и F_2, а ось ординат – посередине отрезка F_1F_2 перпендикулярно оси абсцисс. Тогда $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ – фокусы гиперболы (рис. 30). Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка, лежащая на гиперболе.

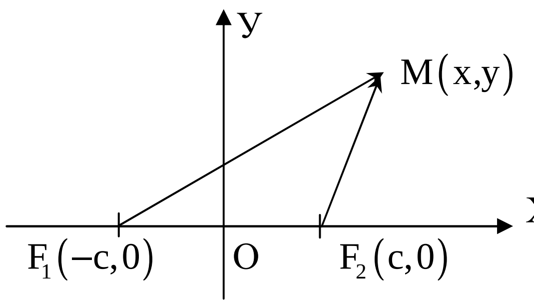


Рис. 30

$|F_1F_2| = 2c$ – расстояние между фокусами, $2a$ – модуль разности расстояний от точек на гиперболе до F_1 и F_2, $0 < 2a < 2c$, $\overrightarrow{F_1M} = (x+c, y), \overrightarrow{F_2M} = (x-c, y)$ (рис. 30).

Запишем свойство точек, принадлежащих гиперболе, сформулированное в определении:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a, \tag{3.16}$$

(3.16) – уравнение гиперболы в выбранной системе координат («+» – если разность расстояний положительна, и «–» – если отрицательна). Чтобы привести это уравнение к более простому виду, умножим (3.16) на сопряженное выражение и выполним такие же действия, как при упрощении уравнения эллипса, после чего получим:

$$x^2 \frac{a^2 - c^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2. \tag{3.17}$$

По определению $a < c \Rightarrow a^2 - c^2 < 0$. Обозначим $a^2 - c^2 = -b^2$, тогда (3.17) перепишется в виде:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.18}$$

(3.18) – каноническое уравнение гиперболы.

Исследуем форму гиперболы по ее каноническому уравнению.

Из (3.18) следует, что гипербола симметрична относительно осей координат. Если $x = 0$, $-\frac{y^2}{b^2} \neq 1$, значит, точек пересечения с OY нет; если $y = 0$, то $x = \pm a$. Точки пересечения с осями симметрии называются *вершинами* гиперболы. Кроме того, из (3.18) следует, что $\frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow |x| \geq |a|$. Точка пересечения осей симметрии называется *центром* гиперболы. Ось симметрии, на которой расположены фокусы, называется *фокальной осью*. При этом фокальная ось также называется *действительной* (с ней гипербола пересекается), а ось симметрии, с которой гипербола не пересекается, называется ее *мнимой* осью.

c – *полуфокусное расстояние*, a – *действительная полуось*, b – *мнимая полуось*. Отношение полуфокусного расстояния к длине действительной полуоси называется *эксцентриситетом* гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Так как по определению $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

Считая, что $y \ge 0$, $x \ge 0$, из (3.18) получим, что $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ – уравнение части гиперболы, расположенной в первой четверти. Заметим, что при неограниченном возрастании x $(x \to +\infty)$ разность $x^2 - a^2 \approx x^2$ $\Rightarrow y \approx \frac{b}{a}x$, то есть при достаточно больших x гипербола приближается к прямой $y = \frac{b}{a}x$, причем ординаты точек на ней меньше соответствующих ординат точек на этой прямой: $\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} < \frac{b}{a}x$. Прямая $y = \frac{b}{a}x$ называется *асимптотой гиперболы*.

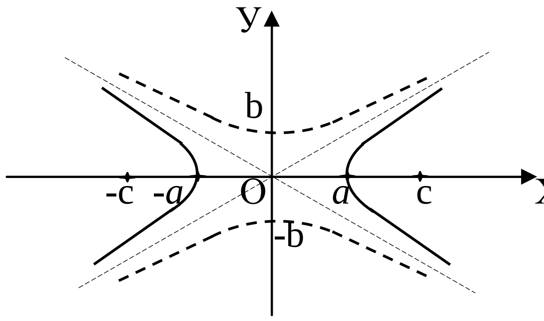


Рис. 31

Из симметрии гиперболы следует, что то же самое происходит во второй, третьей и четвертой четвертях. Поэтому $y = -\frac{b}{a}x$ – также асимптота.

Итак, прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ – *асимптоты* гиперболы (3.18), а гипербола – кривая, состоящая из двух ветвей (рис. 31).

Если фокусы гиперболы лежат на OY, то ее уравнение имеет вид:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3.19)$$

Гиперболы (3.18) и (3.19) называются сопряженными (рис. 31). Уравнения асимптот (3.19) такие же, как и для (3.18), но действительной является ось OY.

Если $a = b$, то гипербола называется равносторонней: $x^2 - y^2 = a^2$, $y = \pm x$ – уравнения ее асимптот (рис. 32).

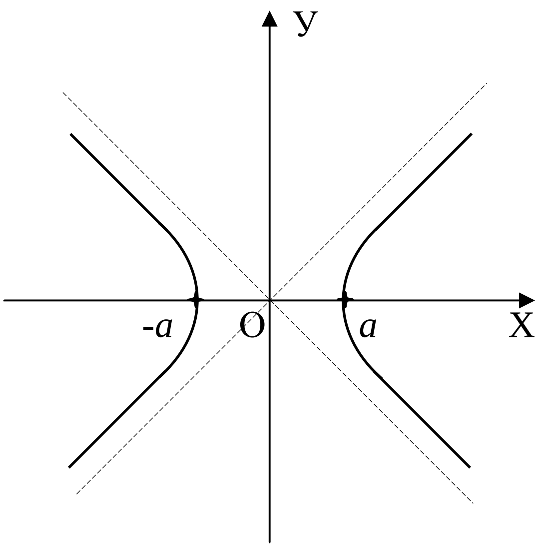


Рис. 32

Очевидно, в этом случае асимптоты перпендикулярны. После поворота осей координат на $45°$ против часовой стрелки, получим гиперболу, задаваемую уравнением $y = \frac{a^2}{2x}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если центр гиперболы в точке $O_1(x_0, y_0)$, а оси симметрии параллельны координатным осям, то уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (3.20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. К кривым второго порядка гиперболического типа относится также пара пересекающихся прямых: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

ПРИМЕР. Найти координаты центра и написать уравнения асимптот гиперболы $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$.
Приведем данное уравнение к виду (3.20):

$$9\left(x^2+2\cdot 5x+25-25\right)-16\left(y^2-2y+1-1\right)-367=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\left(x+5\right)^2-16\left(y-1\right)^2-225+16-367=0$$

$$\Rightarrow 9\left(x+5\right)^2-16\left(y-1\right)^2=576\Rightarrow\frac{\left(x+5\right)^2}{64}-\frac{\left(y-1\right)^2}{36}=1.$$

Таким образом, $O_1\left(-5{,}1\right)$ – центр, а $y-1=\pm\frac{6}{8}\left(x+5\right)\Rightarrow y=1\pm\frac{3}{4}\left(x+5\right)$ – уравнения асимптот данной гиперболы.

ПАРАБОЛА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Парабола* – совокупность точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки этой плоскости, называемой фокусом, и фиксированной прямой, не проходящей через эту точку, называемой директрисой.

Чтобы вывести уравнение параболы, выберем *пдск* следующим образом: ось абсцисс проведем через фокус перпендикулярно директрисе, а ось ординат посередине между фокусом и директрисой (рис. 33).

Пусть расстояние между фокусом F и директрисой DK равно p. Тогда $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, $D\left(-\frac{p}{2},0\right)$. Если $M\left(x,y\right)$ – произвольная точка на параболе, то по определению

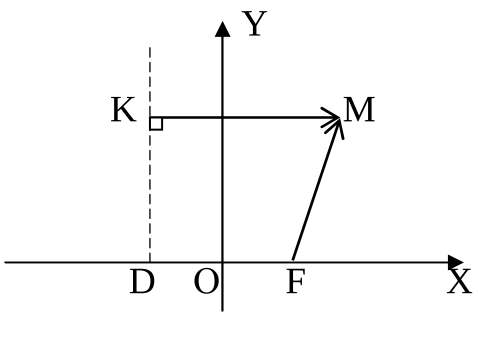


Рис. 33

$$\left|\overrightarrow{FM}\right|=\left|\overrightarrow{KM}\right|,\ K\left(-\frac{p}{2},y\right)\Rightarrow\overrightarrow{KM}=\left(x+\frac{p}{2},0\right),$$

$$\overrightarrow{FM}=\left(x-\frac{p}{2},y\right)\Rightarrow$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}. \qquad (3.21)$$

(3.21) – уравнение параболы в выбранной системе координат.

Упростим его:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Rightarrow$$

$$y^2 = 2px, \qquad (3.22)$$

(3.22) – каноническое уравнение параболы; p называется ее параметром.

Из уравнения следует, что парабола симметрична относительно OX и проходит через начало координат. Кроме того, если $p > 0$, то $x \geq 0$, поэтому кривая лежит в правой полуплоскости и с ростом величины x $|y|$ также растет. Точка пересечения параболы с осью симметрии называется ее вершиной (рис. 34).

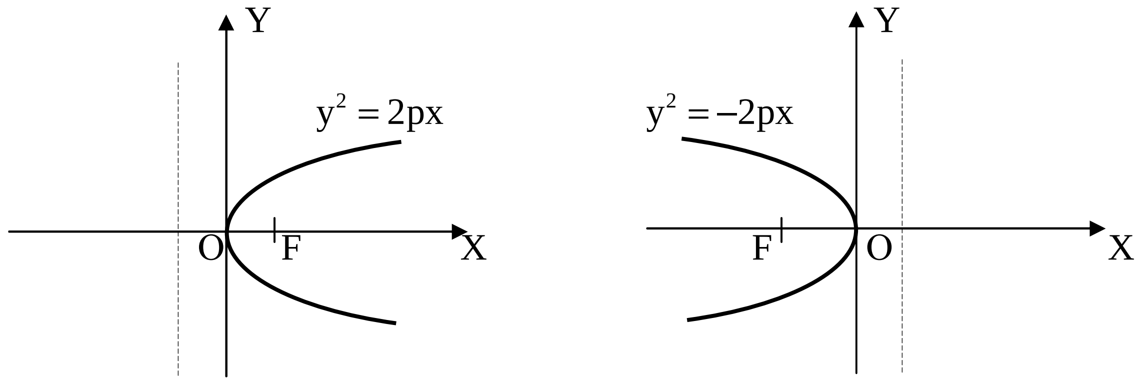


Рис. 34

Если фокус параболы на оси ОУ (рис. 35), то ее каноническое уравнение имеет вид $x^2 = 2py$.

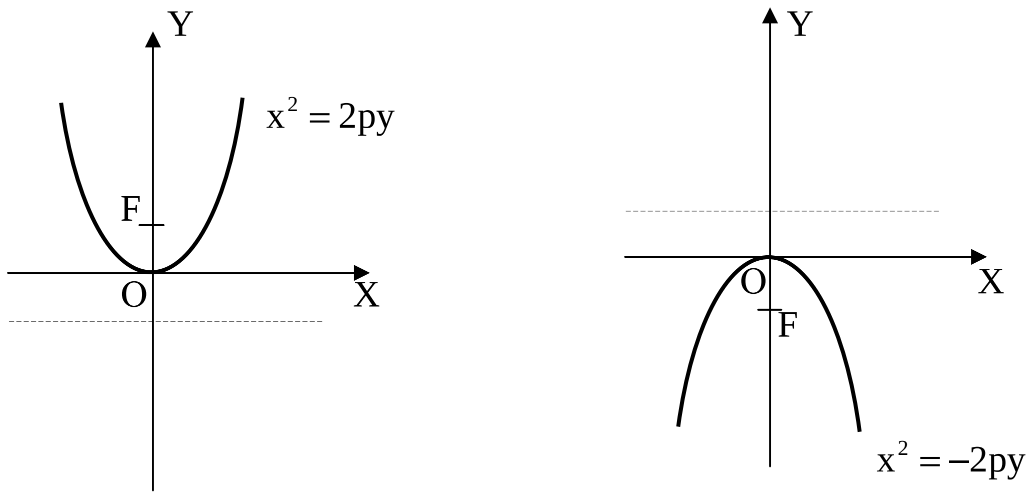


Рис. 35

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если вершина параболы в точке $O_1(x_0, y_0)$ и ось симметрии параллельна OX, то ее уравнение имеет вид $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. К кривым второго порядка параболического типа относятся также $(y-y_0)^2=0 \Rightarrow y=y_0$ – пара совпадающих прямых;
$y^2=c^2 \Rightarrow y=\pm c$ – пара параллельных прямых; $y^2=-c^2$ – пара мнимых параллельных прямых.

ПРИМЕР. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от прямой $x+y-1=0$ и точки $F(-3,-2)$.
По определению множество точек, равноудаленных от данных точки и прямой, является параболой. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка искомой параболы, тогда $\left|\overrightarrow{FM}\right|=\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2}$. Расстояние от точки M до прямой $x+y-1=0$ вычисляется по формуле (3.8): $d=\dfrac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$. Из условия следует, что

$$\left|\overrightarrow{FM}\right|^2=d^2 \Rightarrow x^2+6x+9+y^2+4y+4=\frac{x^2+2xy+y^2-2x-2y+1}{2} \Rightarrow$$

$x^2-2xy+y^2+14x+10y+25=0$ – уравнение искомого геометрического места точек.

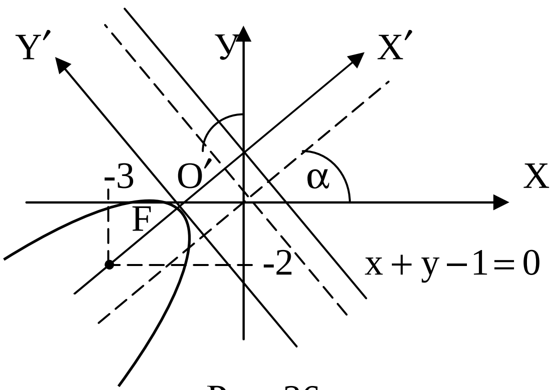


Рис. 36

Если оси координат системы XOY повернуть на угол α так, чтобы одна из них стала параллельна директрисе, а затем перенести начало координат в точку O′ – вершину параболы, то в новой системе X′O′Y′ уравнение параболы будет каноническим $y'^2=-2px'$ (рис. 36).

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что, кроме окружности, эллипса, гиперболы, параболы и вырожденных случаев, указанных в замечаниях, других кривых второго порядка не существует.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

1. ***ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ***.

Пусть на плоскости задана *пдск* ХОУ. Будем называть ее “старой”. “Новая” система координат $X'O'Y'$ получена из “старой” параллельным переносом осей в точку $0'(a,b)$. Выясним, как связаны координаты (x,y) и (x',y') одной и той же точки M в этих системах координат.

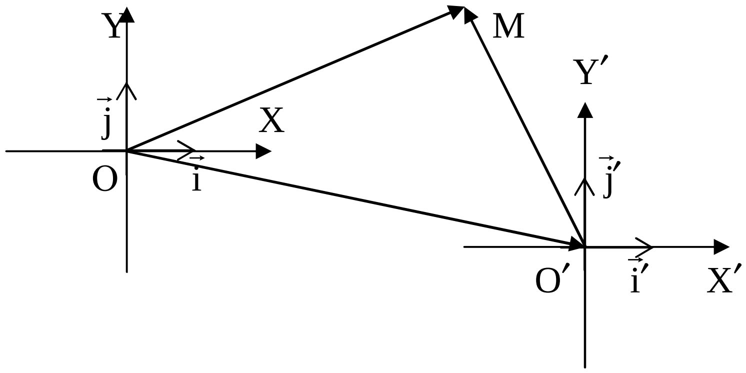


Рис. 37

Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$ – орты координатных осей системы ХОУ, а $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ – системы $X'O'Y'$. Тогда $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$,

$\overrightarrow{OO'} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$, $\overrightarrow{O'M} =$

$= x'\,\vec{i}' + y'\,\vec{j}' = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$,

так как $\vec{i}' = \vec{i}$, $\vec{j}' = \vec{j}$ по определению равенства векторов (рис. 37).

Так как $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, то

$$x\vec{i} + y\vec{j} = (a + x')\vec{i} + (b + y')\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b. \end{cases} \qquad (3.23)$$

(3.23) – формулы параллельного переноса осей *пдск*.

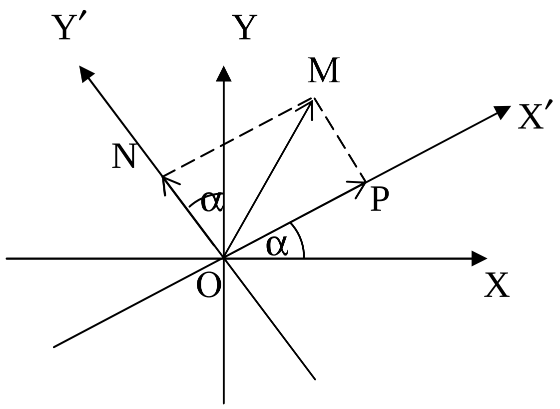


Рис. 38

2. ***ПОВОРОТ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ НА УГОЛ*** α.

Пусть “новая” *пдск* $X'OY'$ получена из “старой” системы координат XOY поворотом осей ОХ и ОУ на угол α (рис. 38) и М(х, у) – произвольная точка в системе XOY. Выясним, какими станут ее координаты в “новой” *пдск*.

Из рис. 38 очевидно, что

XOY	$X'O'Y'$
$M(x, y)$ $\overrightarrow{OP} = (x'\cos\alpha, x'\sin\alpha)$ $\overrightarrow{ON} = \left(y'\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right), y'\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)$ или $\overrightarrow{ON} = (-y'\sin\alpha, y'\cos\alpha)$	$M(x', y')$ $\overrightarrow{OP} = (x', 0)$ $\overrightarrow{ON} = (0, y')$

Так как $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON}$, то

$$x\vec{i}+y\vec{j}=x'\cos\alpha\vec{i}+x'\sin\alpha\vec{j}-y'\sin\alpha\vec{i}+y'\cos\alpha\vec{j}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{cases} \tag{3.24}$$

(3.24) – формулы поворота координатных осей на угол α, выражающие старые координаты точки через новые.

Если обозначить $\tilde{T}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}x' \\ y'\end{pmatrix}$, то (3.24) можно переписать: $X=\tilde{T}X'$. Так как $\square\tilde{T}=1$, то существует $\tilde{T}^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ и

$$X'=\tilde{T}^{-1}X\Rightarrow \quad \begin{cases} x'=x\ \cos\alpha+y\ \sin\alpha \\ y'=-x\ \sin\alpha+y\ \cos\alpha \end{cases} \tag{3.25}$$

(3.25) – формулы поворота координатных осей на угол α, выражающие новые координаты точки через старые.

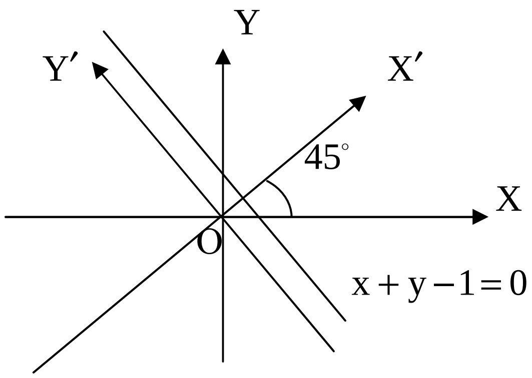


Рис. 39

ПРИМЕР. Каким будет уравнение прямой $x+y-1=0$ после поворота координатных осей на угол $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$?

$$\text{(3.24):}\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}\Rightarrow$$

–

$$\Rightarrow \quad x+y-1=\sqrt{2}x'-1=0\Rightarrow x'=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

новое уравнение прямой (рис. 39).

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x'=\alpha_{11}x+\alpha_{12}y \\ y'=\alpha_{21}x+\alpha_{22}y \end{cases} \tag{3.26}$$

Каждой точке плоскости $M(x,y)$ по формулам (3.26) можно поставить в соответствие единственную точку $N(x',y')$ той же плоскости. При этом точка N называется образом точки M, а точка M – прообразом точки N. Кроме того, уравнения (3.26) линейны относительно x и y, поэтому будем говорить, что (3.26) определяют *линейное преобразование* плоскости в себя.

Преобразование (3.26) определяется матрицей $T=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$, которая называется матрицей линейного преобразования. Обозначая $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$, (3.26) можно переписать в виде $X'=TX$. Можно показать, что о*пределитель* ΔT *равен коэффициенту изменения площадей* при линейном преобразовании (3.26). При этом $\Delta T>0$, если в результате преобразования направление обхода некоторого контура не меняется, и $\Delta T<0$, если оно меняется на противоположное. Поясним это на примерах.

ПРИМЕР. $\begin{cases}x'=2x\\ y'=y\end{cases}$ – растяжение вдоль оси OX в 2 раза. $T=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \Delta T=2$.

$\triangle OAB \xrightarrow{T} \triangle OA'B'$, $S_{\triangle OA'B'}=2S_{\triangle OAB}$ (рис. 40).

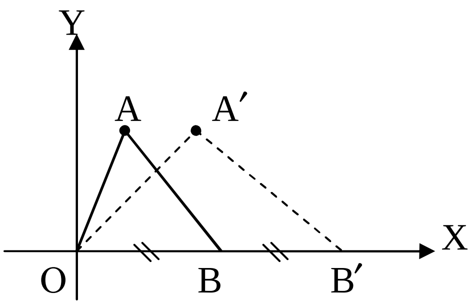


Рис. 40

ПРИМЕР.
$\begin{cases}x'=-2x\\ y'=2y\end{cases}\Rightarrow T=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \Delta T=-4$.

$\triangle OAB \xrightarrow{T} \triangle OA'B'$, $S_{\triangle OA'B'}=4S_{\triangle OAB}$, при этом направление обхода $\triangle OAB$ от O к A, затем к B – по часовой стрелке, а соответствующее направление обхода $\triangle OA'B'$ – против часовой стрелки. Геометрически данное преобразование – растяжение вдоль OX и OY в 2 раза и отражение симметрично относительно оси OY (рис. 41).

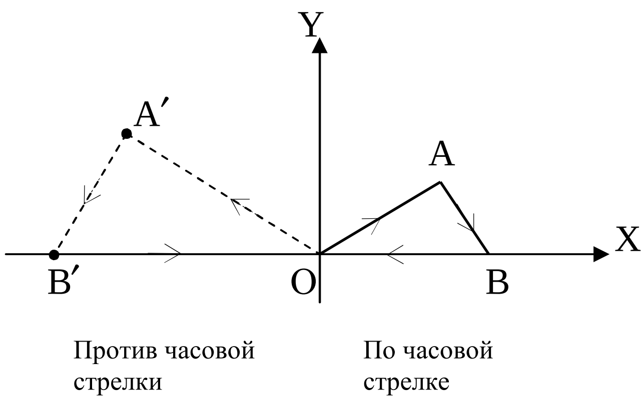


Рис. 41

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейное преобразование (3.26) называется *невырожденным*, если $\Delta T\neq 0$.

В этом случае существует обратная матрица T^{-1} и можно найти $X=T^{-1}X'$. То есть, если $\Delta T\neq 0$, то не только у каждого прообраза существует единственный образ, но и наоборот: для каждого образа существует единственный прообраз. В этом случае говорят, что (3.26) устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости, или линейное преобразование плоскости *на* себя.

Можно показать, что *невырожденное линейное преобразование переводит прямую в прямую, а кривую второго порядка – в кривую второго порядка.*

ПРИМЕР. Пусть $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$ $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \square T = 0 \Rightarrow$ преобразование вырожденное.

Какими будут образы точек, лежащих, например, на прямой $x + y - 1 = 0$ (рис. 42)?

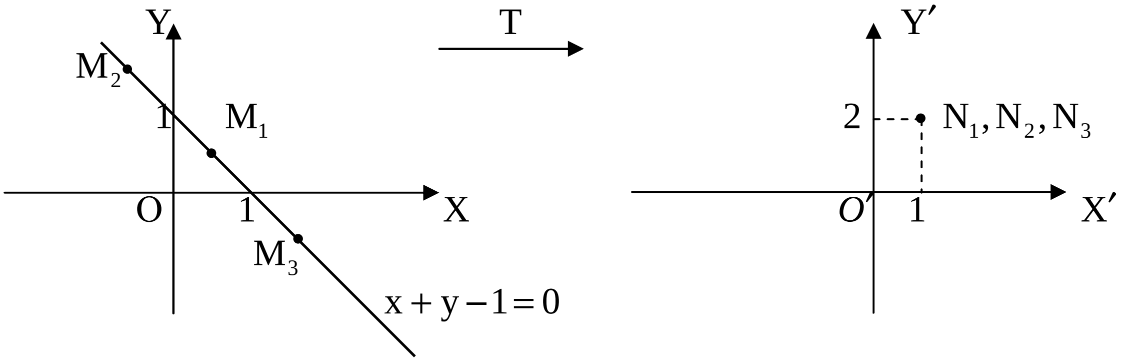


Рис. 42

Очевидно, что если $x + y = 1$, то $x' = 1, y' = 2$, то есть у точки $N(1,2)$ существует бесконечное множество прообразов: все они лежат на прямой $x + y - 1 = 0$. Потому данное вырожденное линейное преобразование не устанавливает взаимно-однозначного соответствия между точками плоскости.

ПРИМЕР. Рассмотрим формулы (3.25):

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}, T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \square T = 1.$$

Очевидно, что поворот осей *пдск* на угол α – линейное преобразование. Так как это линейное преобразование невырожденное, то существует

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в этом случае $T^{-1} = T^T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрица A называется *ортогональной*, если $A^{-1} = A^T$. Линейное преобразование, матрица которого ортогональна, называется *ортогональным*.

Таким образом, *поворот координатных осей – ортогональное линейное преобразование*.

Можно показать, что если A – ортогональная матрица, то $|\Box A| = 1$ (доказать самостоятельно). Таким образом, в результате ортогональных линейных преобразований на плоскости площади фигур остаются неизменными.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассмотрим матрицы $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$. Каждая из них определяет линейное преобразование плоскости. Если $M(x, y)$ – некоторая точка плоскости, то под действием линейного преобразования $X' = BX$ с матрицей B она перейдет в точку $N(x', y')$:

$$\begin{cases} x' = \beta_{11}x + \beta_{12}y \\ y' = \beta_{21}x + \beta_{22}y \end{cases}. \tag{3.27}$$

В свою очередь точка N под действием линейного преобразования $X'' = CX'$ с матрицей C перейдет в точку $P(x'', y'')$:

$$\begin{cases} x'' = \gamma_{11}x' + \gamma_{12}y' \\ y'' = \gamma_{21}x' + \gamma_{22}y' \end{cases}. \tag{3.28}$$

Такое последовательное выполнение линейных преобразований называется их *произведением*: $X'' = C(BX) = (CB)X$.

Покажем, что произведение линейных преобразований также линейное преобразование, и найдем его матрицу. Подставим (3.27) в (3.28):

$$x'' = \gamma_{11}(\beta_{11}x + \beta_{12}y) + \gamma_{12}(\beta_{21}x + \beta_{22}y) = (\gamma_{11}\beta_{11} + \gamma_{12}\beta_{21})x + (\gamma_{11}\beta_{12} + \gamma_{12}\beta_{22})y,$$

$$y'' = \gamma_{21}(\beta_{11}x + \beta_{12}y) + \gamma_{22}(\beta_{21}x + \beta_{22}y) = (\gamma_{21}\beta_{11} + \gamma_{22}\beta_{21})x + (\gamma_{21}\beta_{12} + \gamma_{22}\beta_{22})y.$$

То есть

$$\begin{cases} x'' = (\gamma_{11}\beta_{11} + \gamma_{12}\beta_{21})x + (\gamma_{11}\beta_{12} + \gamma_{12}\beta_{22})y \\ y'' = (\gamma_{21}\beta_{11} + \gamma_{22}\beta_{21})x + (\gamma_{21}\beta_{12} + \gamma_{22}\beta_{22})y \end{cases} \tag{3.29}$$

(3.29) – система линейных уравнений, а потому произведение линейных преобразований линейно. Матрица (3.29) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}\beta_{11} + \gamma_{12}\beta_{21} & \gamma_{11}\beta_{12} + \gamma_{12}\beta_{22} \\ \gamma_{21}\beta_{11} + \gamma_{22}\beta_{21} & \gamma_{21}\beta_{12} + \gamma_{22}\beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = C \cdot B.$$

Таким образом, матрица произведения линейных преобразований равна произведению их матриц. Само же правило умножения матриц, сформулированное в гл.1, находит объяснение в этом выводе.

ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Квадратичной формой* относительно двух переменных x и y называется однородный многочлен второй степени:

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2. \tag{3.30}$$

Уравнение $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = c$ $(c = const)$ задает на плоскости кривую второго порядка, причем, так как вместе с точкой $M(x,y)$, лежащей на этой кривой, ей принадлежит и точка $N(-x,-y)$, кривая симметрична относительно начала координат, то есть является центральной кривой (эллиптического или гиперболического типа).

Предположим, что уравнение $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = c$ задает в *пдск* ХОУ эллипс. Если $a_{12} \neq 0$, то это уравнение не является каноническим уравнением эллипса, а потому, хотя О(0, 0) – его центр, оси симметрии не совпадают с ОХ и ОУ (рис. 43). Тем не менее, заметим, что если оси системы XOY повернуть на угол α, то в системе $X'OY'$ эллипс будет задаваться каноническим уравнением: кривая симметрична относительно OX' и OY'. Найдем линейное преобразование, соответствующее этому повороту.

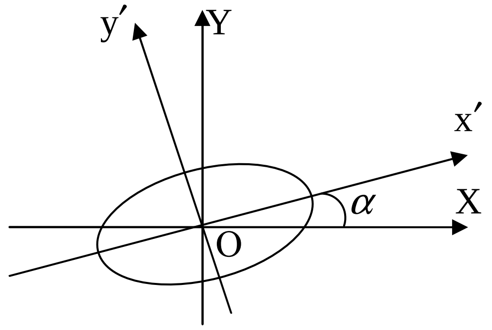


Рис. 43

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется *матрицей квадратичной формы* (3.30).

Пусть $$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow X^T = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.$$

Вычислим $$X^T AX = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{12}x + a_{22}y \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = F(x,y).$$

Таким образом, квадратичная форма может быть записана в матричном виде:

$$F(x,y) = X^T AX \tag{3.31}$$

Пусть x, y – координаты точек плоскости в системе XOY, а x', y' – координаты точек плоскости в новой системе $X'OY'$, где *кривая задается каноническим уравнением*. Переход от “старых” координат к “новым” будем искать в виде

$$\begin{cases} x = \tau_{11}x' + \tau_{12}y' \\ y = \tau_{21}x' + \tau_{22}y' \end{cases} \Leftrightarrow X = TX'. \qquad (3.32)$$

(3.32) – *ортогональное* линейное преобразование с матрицей

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix}; \; X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

По определению ортогональной матрицы

$$T^T = T^{-1} \qquad (3.33)$$

(В результате ортогонального преобразования не происходит изменение площадей фигур, то есть фигуры не деформируются.)

Чтобы узнать, как изменится матрица квадратичной формы в результате линейного преобразования (3.32), подставим (3.32) в (3.31): $X^T = (TX')^T = X'^T T^T$ (свойство 5 умножения матриц)$\Rightarrow X^T AX = X'^T \left(T^T AT\right) X' \Rightarrow A' = T^T AT = T^{-1}AT$ (свойство 2 умножения матриц и равенство (3.33)) – матрица новой квадратичной формы.

Так как в “новой” системе координат кривая должна задаваться каноническим уравнением, то есть в нем должно отсутствовать произведение координат $x\ y$, то A' имеет вид: $A' = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$, где r_1, r_2 – неизвестные числа. Умножим равенство $A' = T^{-1}AT$ на матрицу T слева. Так как $T \cdot T^{-1} = E$, то получим:

$$TA' = AT \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix}.$$

По определению равных матриц имеем:

$$\begin{cases} \tau_{11}r_1 = a_{11}\tau_{11} + a_{12}\tau_{21} \\ \tau_{21}r_1 = a_{12}\tau_{11} + a_{22}\tau_{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - r_1)\tau_{11} + a_{12}\tau_{21} = 0 \\ a_{12}\tau_{11} + (a_{22} - r_1)\tau_{21} = 0 \end{cases}, \qquad (3.34)$$

$$\begin{cases} \tau_{12}r_2 = a_{11}\tau_{12} + a_{12}\tau_{22} \\ \tau_{22}r_2 = a_{12}\tau_{12} + a_{22}\tau_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - r_2)\tau_{12} + a_{12}\tau_{22} = 0 \\ a_{12}\tau_{12} + (a_{22} - r_2)\tau_{22} = 0 \end{cases}. \qquad (3.35)$$

Системы уравнений (3.34), (3.35) – линейные и однородные. Они имеют нетривиальное решение, если их определители равны 0.

$$\Delta = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - r_1 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - r_1 \end{vmatrix} = 0, \; \begin{vmatrix} a_{11} - r_2 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Это означает, что r_1 и r_2 являются решениями уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-r \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow |A-rE| = 0. \qquad (3.36)$$

Уравнение (3.36) называется *характеристическим уравнением матрицы* A (*характеристическим уравнением квадратичной формы*). Его решения r_1 и r_2 называются *собственными значениями* матрицы A (квадратичной формы).
Покажем, что дискриминант квадратного уравнения (3.36) положителен, то есть любая квадратичная форма двух переменных имеет 2 различных собственных значения.

Вычислим определитель (3.36):

$$r^2 - (a_{11}+a_{22})r + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Дискриминант $D = (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2) = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0$,

так как $a_{12} \neq 0$ (иначе квадратичная форма будет канонической).

Таким образом, *коэффициентами при* x'^2 *и* y'^2 *в каноническом виде квадратичной формы являются ее собственные значения*, то есть решения уравнения (3.36).

Решим (3.36) и подставим r_1 в (3.34). Система имеет бесконечное множество решений и пусть $\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} \overline{\tau}_{11} \\ \overline{\tau}_{21} \end{pmatrix}$ – одно их них. Так как система (3.34) однородная, то $\forall k \in R$ $X_1 = \begin{pmatrix} k\overline{\tau}_{11} \\ k\overline{\tau}_{21} \end{pmatrix}$ – тоже решение. Подберем k так, чтобы вектор $X_1 = \begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{21} \end{pmatrix}$, $\tau_{11} = k\overline{\tau}_{11}$, $\tau_{21} = k\overline{\tau}_{21}$ был единичным: $\tau_{11}^2 + \tau_{21}^2 = 1$.

Векторы $\overline{X}_1$ и X_1 называется *собственными векторами* квадратичной формы, соответствующими собственному значению r_1, или *первыми собственными векторами*. Их направление называется *первым главным направлением* квадратичной формы. Таким образом, первым собственным вектором квадратичной формы называется любое ненулевое решение системы (3.34).

Аналогично подставим r_2 в (3.35) и найдем $\overline{X}_2 = \begin{pmatrix} \overline{\tau}_{12} \\ \overline{\tau}_{22} \end{pmatrix}$ – *второй собственный вектор*, соответствующий собственному значению r_2. Его направление называется *вторым главным направлением* квадратичной формы. $X_2 = \begin{pmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{22} \end{pmatrix}$, $\tau_{12} = k\overline{\tau}_{12}$, $\tau_{22} = k\overline{\tau}_{22}$ – второй единичный собственный вектор, то есть $\tau_{12}^2 + \tau_{22}^2 = 1$.

Можно показать, что $X_1 \perp X_2$. Кроме того, $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12}\\ \tau_{21} & \tau_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tau_{11}\\ \tau_{21}\end{pmatrix}$ – первый собственный вектор, а $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12}\\ \tau_{21} & \tau_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tau_{12}\\ \tau_{22}\end{pmatrix}$ – второй собственный вектор, поэтому *ортами "новой" системы координат* $X'OY'$, к которой мы перейдем в результате линейного преобразования с матрицей T, *являются единичные собственные векторы квадратичной формы*, найденные как решения систем (3.34), (3.35). Направив оси "новой" системы координат вдоль собственных векторов X_1 и X_2, получим систему координат, в которой квадратичная форма будет иметь канонический вид $F(x', y') = r_1 x'^2 + r_2 y'^2$.

ВЫВОД. Чтобы привести квадратичную форму к каноническому виду, надо:

1. Составить и решить характеристическое уравнение (3.36); его решения – собственные значения – являются коэффициентами при x'^2 и y'^2 в каноническом виде квадратичной формы.

2. Найти единичные собственные векторы, решив (3.34) и (3.35); они будут ортами новой системы координат $X'OY'$. При этом если ось OX' сонаправлена с X_1, а ось OY' – с X_2, то $F(x', y') = r_1 x'^2 + r_2 y'^2$ – канонический вид, который квадратичная форма имеет в системе $X'OY'$.

ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$\underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{квадратичная форма}} + \underbrace{a_1 x + a_2 y}_{\text{линейная форма}} + a_0 = 0.$$

В результате невырожденного линейного преобразования с матрицей T квадратичная форма перейдет в квадратичную форму, линейная – в линейную, а свободный член a_0 не изменится. Каждую группу слагаемых будем преобразовывать отдельно, а именно: найдем ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, затем посмотрим, как в результате этого преобразования изменится линейная форма (ортогональное преобразование в нашем случае – это поворот осей). После поворота осей подберем параллельный перенос новой системы $X'OY'$ так, чтобы после него уравнение кривой стало каноническим.

ПРИМЕР. Привести к каноническому виду ранее полученное уравнение параболы (стр. 58) и построить ее:

$$\underbrace{x^2-2xy+y^2}_{\text{квадратичная форма}}+\underbrace{14x+10y}_{\text{линейная форма}}+25=0. \qquad (3.37)$$

1) Составим матрицу квадратичной формы: $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

2) Составим и решим характеристическое уравнение (3.36):

$\begin{vmatrix}1-r & -1\\ -1 & 1-r\end{vmatrix}=0\Rightarrow r^2-2r=0\Rightarrow\ r_1=0,\ r_2=2$ – собственные значения.

3) Найдем первый единичный собственный вектор, то есть решим систему (3.34):

$r_1=0:\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_{11}\\ \tau_{21}\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}\tau_{11}-\tau_{21}=0\\ -\tau_{11}+\tau_{21}=0\end{cases}\Rightarrow\overline{X}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ – первый собственный вектор.

$\left|\overline{X}_1\right|=\sqrt{2}\Rightarrow X_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ – первый единичный собственный вектор (орт оси OX').

4) Найдем второй единичный собственный вектор, то есть решим (3.35):

$r_2=2:\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_{12}\\ \tau_{22}\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}-\tau_{12}-\tau_{22}=0\\ -\tau_{12}-\tau_{22}=0\end{cases}\Rightarrow\overline{X}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ – второй собственный вектор.

$\left|\overline{X}_2\right|=\sqrt{2}\Rightarrow X_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ – второй единичный собственный вектор (орт оси OY').

Заметим, что $X_1\perp X_2$, так как скалярное произведение $\left(X_1,X_2\right)=0$.

5) Запишем матрицу поворота T: $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \square T = 1$.

Кроме того, $T^T = T^{-1}$, то есть T ортогональна. В результате преобразования с матрицей T квадратичная форма примет вид:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 0 \cdot x'^2 + 2y'^2 .$$

6) Выпишем уравнения, связывающие старые координаты x, y с новыми x', y':

(3.32) $\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' \end{cases}$ – формулы поворота координатных осей (см. 3.24).

Тогда линейная форма изменит свой вид таким образом:

$$14x + 10y = \frac{14}{\sqrt{2}} x' - \frac{14}{\sqrt{2}} y' + \frac{10}{\sqrt{2}} x' + \frac{10}{\sqrt{2}} y' = 12\sqrt{2} x' - 2\sqrt{2} y' .$$

Итак, в системе $X'OY'$ кривая задается уравнением:

$2y'^2 + 12\sqrt{2}x' - 2\sqrt{2}y' + 25 = 0$. Выделим полный квадрат по переменной y':

$$2\left(y'^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2} y' + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + 12\sqrt{2}x' + 25 = 0 \Rightarrow 2\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 12\sqrt{2}x' + 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 6\sqrt{2}\left(x' + \sqrt{2} \right) = 0 .$$

7) Сделаем параллельный перенос осей в новое начало – вершину параболы: $\begin{cases} x'' = x' + \sqrt{2} \\ y'' = y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ – формулы параллельного переноса осей в точку

$O'\left(-\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (см. 3.23). В системе $X''O'Y''$ кривая задается уравнением $y''^2=-6\sqrt{2}x''$. Это каноническое уравнение параболы.

Для того, чтобы построить параболу (3.37), надо в пдск ХОУ построить векторы X_1 и X_2 и вдоль них направить оси OX' и OY' соответственно. Затем сделать параллельный перенос этих осей в точку $O'\left(-\sqrt{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. В полученной таким образом системе координат $X''O'Y''$, взяв несколько контрольных точек, нарисуем параболу $y''^2=-6\sqrt{2}\,x''$ (рис. 44).

Сравните эскиз (рис. 36) и данный рисунок, являющийся результатом точных расчетов.

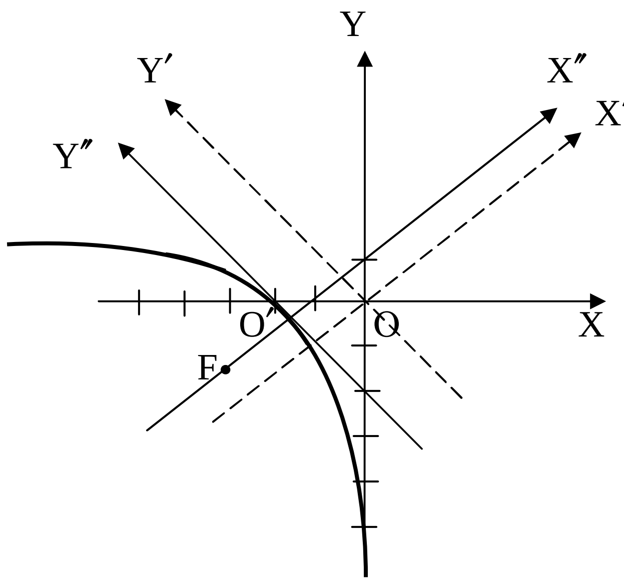


Рис. 44

ПЛОСКОСТЬ

Покажем, что плоскость в пространстве задается в любой *пдск* линейным уравнением относительно трех переменных x, y, z.

Если A – некоторая точка на плоскости α, а $\vec{n}$ – вектор, перпендикулярный ей, то, во-первых, через A перпендикулярно $\vec{n}$ проходит единственная плоскость, а, во-вторых, для любой точки $M\in\alpha$ вектор $\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$. *Таким свойством обладают только точки, лежащие на* α.

Чтобы вывести уравнение плоскости, зададим в пространстве *пдск* $OXYZ$. В этой системе координат $A(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{n}=(A,B,C)$.

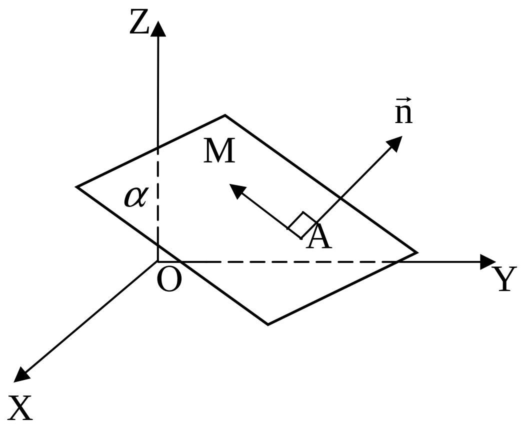


Рис. 45

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка на плоскости α.
Тогда $\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и $\left(\overrightarrow{AM}, \vec{n}\right) = 0$ (рис. 45).

Вычислив скалярное произведение, получим:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) \qquad (3.38)$$

Координаты точек, лежащих в плоскости α, связаны соотношением (3.38). Если же $M \notin \alpha$, то $\overrightarrow{AM}$ не перпендикулярен $\vec{n} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \vec{n}\right) \neq 0$, значит, координаты такой точки не удовлетворяют полученному уравнению. Поэтому (3.38) – уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору. Заметим, что это уравнение линейно относительно *x*, *y*, *z*. Раскрыв скобки в (3.38), получим $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$.

Обозначим $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, тогда уравнение (3.38) примет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (3.39)$$

(3.39) – общее уравнение плоскости в пространстве, $\vec{n} = (A, B, C)$ – ее нормаль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Любой ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости α, называется ее *нормальным вектором, или нормалью*.

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Выясним, какие особенности в расположении плоскости влечет за собой равенство нулю одного или нескольких коэффициентов в уравнении (3.39).

1) $Ax + By + Cz = 0 \Rightarrow$ координаты точки $O(0,0,0)$ удовлетворяют уравнению, значит, плоскость проходит через начало координат.

2) $By + Cz + D = 0 \Rightarrow \vec{n} = (0, B, C) \perp \vec{i} = (1,0,0)$, так как $\left(\vec{n}, \vec{i}\right) = 0$. Но $\vec{n} \perp \alpha$, значит, плоскость $\alpha \parallel OX$.

3) $Ax + Cz + D = 0 \Rightarrow \vec{n} = (A, 0, C) \perp \vec{j} = (0,1,0)$, так как $\left(\vec{n}, \vec{j}\right) = 0$. Значит, плоскость $\alpha \parallel OY$.

4) $Ax+By+D=0 \Rightarrow \vec{n}=(A,B,0) \perp \vec{k}=(0,0,1)$, так как $(\vec{n},\vec{k})=0$. Значит, плоскость $\alpha \parallel OZ$.

5) $By+Cz=0 \Rightarrow \alpha \parallel OX$, $O(0,0,0) \in \alpha \Rightarrow \alpha$ проходит через OX.

6) $Ax+Cz=0 \Rightarrow \alpha \parallel OY$, $O(0,0,0) \in \alpha \Rightarrow \alpha$ проходит через OY.

7) $Ax+By=0 \Rightarrow \alpha \parallel OZ$, $O(0,0,0) \in \alpha \Rightarrow \alpha$ проходит через OZ.

8) $Cz+D=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{n}=(0,0,C) \perp \vec{i} \\ \vec{n}=(0,0,C) \perp \vec{j} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{n} \parallel OZ \Rightarrow \alpha \perp OZ$ или $\alpha \parallel XOY$.

9) $By+D=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{n}=(0,B,0) \perp \vec{i} \\ \vec{n}=(0,B,0) \perp \vec{k} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{n} \parallel OY \Rightarrow \alpha \perp OY$ или $\alpha \parallel XOZ$.

10) $Ax+D=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{n}=(A,0,0) \perp \vec{k} \\ \vec{n}=(A,0,0) \perp \vec{j} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{n} \parallel OX \Rightarrow \alpha \perp OX$ или $\alpha \parallel YOZ$.

11) $Ax=0 \Rightarrow x=0$ – плоскость YOZ.

12) $By=0 \Rightarrow y=0$ – плоскость XOZ.

13) $Cz=0 \Rightarrow z=0$ – плоскость XOY.

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ОТРЕЗКАХ

Пусть плоскость α не параллельна ни одной из координатных осей и не проходит через начало координат. Тогда она отсекает на координатных осях отрезки a, b, c (рис. 46). Выведем уравнение такой плоскости.

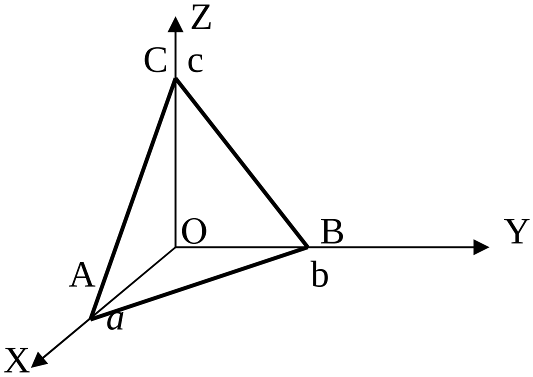


Рис. 46

Рассмотрим $Ax+By+Cz+D=0$ – общее уравнение плоскости.

Так как $A(a,0,0) \in \alpha$, то

$$Aa+D=0 \Rightarrow A=-\frac{D}{a}.$$

Аналогично $B(0,b,0) \in \alpha \Rightarrow$

$$Bb+D=0 \Rightarrow B=-\frac{D}{b};\ \ C(0,0,c) \in \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Cc + D = 0 \Rightarrow C = -\frac{D}{c}\ .$$

Подставив А, В, С в общее уравнение, получим

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0,\ D \neq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (3.40)$$

(3.40) – уравнение плоскости в отрезках.

ПРИМЕР. Вычислить объем тетраэдра, образованного плоскостями $2x - 3y - 4z + 12 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

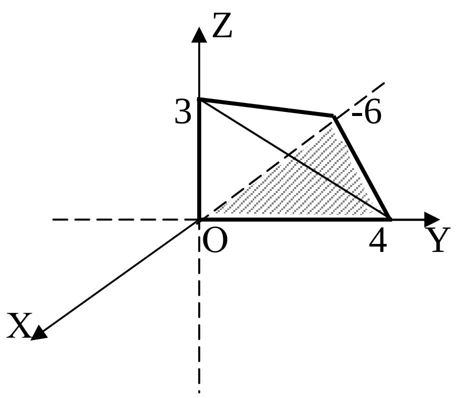


Рис. 47

Перепишем уравнение плоскости в виде (3.40):

$$2x - 3y - 4z = -12 \Rightarrow -\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1\ –$$

уравнение данной плоскости в отрезках. Поэтому (рис. 47)

$$a = 6,\ b = 4,\ c = 3 \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot 3 = 12\,.$$

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТРИ ТОЧКИ

Пусть в некоторой *пдск* заданы три точки, не лежащие на одной прямой: $A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2),\ C(x_3, y_3, z_3)$. Известно, что через них проходит единственная плоскость α.

Чтобы вывести ее уравнение, рассмотрим произвольную точку этой плоскости $M(x, y, z)$. Тогда $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ – компланарные векторы, и их смешанное произведение равно нулю: $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$. Тогда по формуле (2.9) получим

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.41)$$

(3.41) – уравнение плоскости, проходящей через три точки.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если точки лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны и их соответствующие координаты пропорциональны. Поэтому в определителе (3.41) две строки пропорциональны и по свойству 6 определителей он тождественно равен нулю, что означает, что координаты любой точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению (3.41). Это иллюстрация того факта, что через прямую и *любую* точку можно провести плоскость.

ПРИМЕР. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки

$A(1,2,-3)$, $B(0,1,-1)$, $C(7,-3,5)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 6 & -5 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x-1) + 20(y-2) + 11(z+3) = 0 \Rightarrow 2x + 20y + 11z - 9 = 0.$$

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Углом между плоскостями называется любой из двух смежных двугранных углов, образованных плоскостями при их пересечении. Если плоскости параллельны, то угол между ними равен 0 или π радиан.

Рассмотрим плоскости $\alpha_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и

$$\alpha_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\ \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

Очевидно,
$$\varphi = \left(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}\right) = \left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}$$

или
$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Если $\alpha_1 \perp \alpha_2$, то $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right) = 0$ – условие перпендикулярности плоскостей.

Если $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ – условие параллельности плоскостей.

ПРИМЕР. Найти угол между плоскостями

$$\alpha_1:\ 2x+4y+5=0,\quad \text{и}\quad \alpha_2:\ 2x-y+2z=0.$$

$\overrightarrow{n_1}=(2,4,0)$, $\overrightarrow{n_2}=(2,-1,2)\Rightarrow \cos\varphi=\dfrac{4-4}{3\sqrt{20}}=0\Rightarrow$ плоскости перпендикулярны.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Всякая линия в пространстве есть результат пересечения двух поверхностей. В частности *прямую линию* можно рассматривать как *результат пересечения двух плоскостей*

$$\alpha_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$$

и

$$\alpha_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\ \overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2,C_2).$$

Если α_1 не параллельна α_2, то есть $\overrightarrow{n_1}$ не коллинеарен $\overrightarrow{n_2}$, то система уравнений

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\qquad(3.42)$$

определяет прямую линию в пространстве.

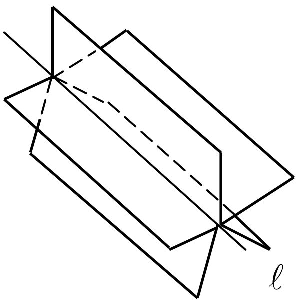


Рис. 48

Уравнения (3.42) называются *общими уравнениями* прямой в пространстве.

Очевидно, одна и та же прямая может быть результатом пересечения разных пар плоскостей (рис. 48), поэтому прямую в пространстве можно задать различными способами. Уравнения (3.42) неудобны в использовании, так как не дают представления о расположении прямой относительно выбранной системы координат.

Поэтому выведем более удобные уравнения, эквивалентные (3.42), то есть из бесконечного множества плоскостей, проходящих через данную прямую, выберем в некотором смысле более заметную пару.

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть в некоторой *пдск* задана прямая ℓ, проходящая через точку $A(x_0,\, y_0,\, z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{s} = (m,\, n,\, p)$. Такой вектор называется *направляющим* вектором этой прямой.

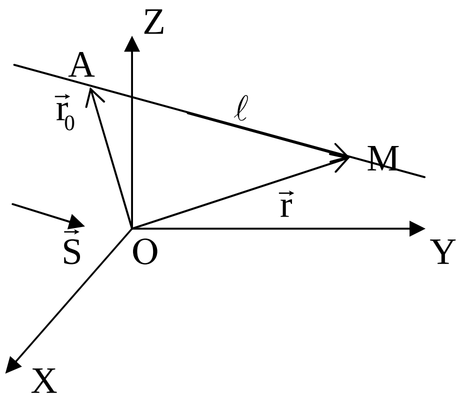


Рис. 49

Для произвольной точки $M(x, y, z) \in \ell$

вектор $\overrightarrow{AM} \parallel \vec{s} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = t\,\vec{s},$ где t – некоторый числовой множитель. Кроме того, $\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r}_0,\ \vec{r}$ – радиус-вектор точки M, $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки A (рис. 49).

Отсюда $$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \qquad (3.43)$$

(3.43) – *векторное* уравнение прямой в пространстве. Из (3.43) получаем:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \qquad (3.44)$$

(3.44) – *параметрические* уравнения прямой в пространстве, $t \in R$ – параметр.

Выразим из каждого уравнения (3.44) параметр:

$$t = \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Тогда $$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (3.45)$$

(3.45) – *канонические* уравнения прямой в пространстве, то есть уравнения прямой, проходящей через точку $A(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{s} = (m, n, p)$.

Заметим, что уравнения (3.45) задают прямую как результат пересечения плоскостей

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} \\ \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{p} \end{cases},$$

одна из которых параллельна OZ, а вторая – OY или как

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} \\ \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p} \end{cases},$$

где первая плоскость параллельна OZ, а вторая – OX.

Если прямая ℓ проходит через две заданные точки $B(x_1, y_1, z_1)$ и $C(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{BC}$ направляющий вектор этой прямой, поэтому из (3.45) получим:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (3.46)$$

(3.46) – уравнения пространственной прямой, проходящей через две заданные точки.

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим прямые, заданные в некоторой *пдск* каноническими уравнениями:

$$\ell_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \ \vec{s_1} = (m_1, n_1, p_1)$$

и

$$\ell_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}, \ \vec{s_2} = (m_2, n_2, p_2).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Углом между прямыми в пространстве называется угол между двумя пересекающимися прямыми, проходящими через произвольную точку пространства параллельно данным.

Из определения следует, что $\left(\widehat{\ell_1, \ell_2}\right) = \left(\widehat{\vec{s_1}, \vec{s_2}}\right)$. Если $\left(\widehat{\ell_1, \ell_2}\right) = \varphi$, то

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{s_1}, \vec{s_2}\right)}{\left|\vec{s_1}\right|\left|\vec{s_2}\right|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^{\,2} + n_1^{\,2} + p_1^{\,2}}\sqrt{m_2^{\,2} + n_2^{\,2} + p_2^{\,2}}}.$$

1) $\ell_1 \perp \ell_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} \perp \vec{s_2} \Leftrightarrow \left(\vec{s_1}, \ \vec{s_2}\right) = 0 \Rightarrow m_1 \, m_2 + n_1 \, n_2 + p_1 \, p_2 = 0$ – условие перпендикулярности прямых.

2) $\ell_1 \parallel \ell_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} \parallel \vec{s_2} \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$ – условие параллельности прямых в пространстве.

ПРИМЕР. Найти угол между прямой $\ell_1: \dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-3}$ и прямой ℓ_2, проходящей через точки $A(-1,3,3)$ и $B(2,3,-1)$.

$$\vec{s_1}=(6,2,-3),\ \vec{s_2}=\overrightarrow{AB}=(3,0,-4)\Rightarrow \cos\varphi=\frac{18+12}{7\cdot 5}=\frac{6}{7}.$$

Заметим, что уравнение прямой ℓ_2 имеет вид: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z-3}{-4}$. В данном случае ноль в знаменателе писать принято: он означает, что направляющий вектор прямой (и сама прямая) параллелен плоскости XOZ. Эта прямая является результатом пересечения плоскостей $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{z-3}{-4}$ и $y-3=0$.

ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Рассмотрим прямую ℓ, заданную общими уравнениями (3.42) в пространстве:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}.$$

Привести эти уравнения к каноническому виду можно двумя способами:

1) найти координаты какой-либо точки $A(x_0,y_0,z_0)$, лежащей на ℓ, ее направляющий вектор $\vec{s}$ и написать уравнения (3.45);

2) найти координаты двух точек, лежащих на ℓ, и воспользоваться уравнениями (3.46).

1 способ. Координаты точки A – любое частное решение системы линейных уравнений (3.42). Эта система имеет бесконечное множество решений, так как ранги основной и расширенной матриц $r_A=r_{\bar{A}}=2$, а число неизвестных $n=3$.

$\vec{s}$ – направляющий вектор прямой ℓ, поэтому $\vec{s}\perp\vec{n_1},\ \vec{s}\perp\vec{n_2}$, где $\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$ – нормаль плоскости α_1, а $\vec{n_1}=(A_2,B_2,C_2)$ – нормаль плоскости α_2. Из определения векторного произведения векторов следует, что тогда $\vec{s}\parallel\vec{n_1}\times\vec{n_2}$. Так как $\vec{s}$ – произвольный вектор, параллельный ℓ, то будем считать, что $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$.

ПРИМЕР. Привести уравнения прямой $\begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ x-y+3z+1=0 \end{cases}$ к каноническому виду.

Найдем какое-нибудь частное решение этой системы: пусть, например, $z=0 \Rightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow 3y=6 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=1$, то есть точка $A(1,2,0)$ лежит на прямой.

$$\vec{n_1}=(1,2,-5),\ \vec{n_2}=(1,-1,3) \Rightarrow \vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\vec{i}-8\vec{j}-3\vec{k}.$$

Таким образом, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-8}=\frac{z}{-3}$ – канонические уравнения данной прямой.

2 способ. Найдем два произвольных частных решения системы уравнений, задающей прямую.

В рассмотренном примере $A(1,2,0)\in \ell$. Пусть теперь

$$z=3 \Rightarrow \begin{cases} x+2y=20 \\ x-y=-10 \end{cases} \Rightarrow 3y=30 \Rightarrow y=10 \Rightarrow x=0,$$

тогда $B(0,10,3)\in \ell \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{s_1}=(-1,8,3)$ – направляющий вектор прямой, который отличается от найденного ранее только знаком. Поэтому уравнения $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{8}=\frac{z}{3}$ совпадают (с точностью до знака) с уже найденными.

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Пусть в некоторой *пдск* заданы плоскость

$$\alpha: Ax+By+Cz+D=0, \quad \vec{n}=(A,\ B,\ C)$$

и прямая

$$\ell: \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z}{p},\ \vec{s}=(m,\ n\ ,\ p) \qquad \text{(рис. 50).}$$

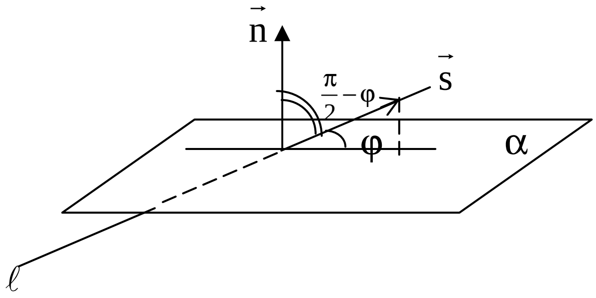


Рис. 50

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{\left(\vec{n},\vec{s}\right)}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{s}\right|}=$$

$$=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

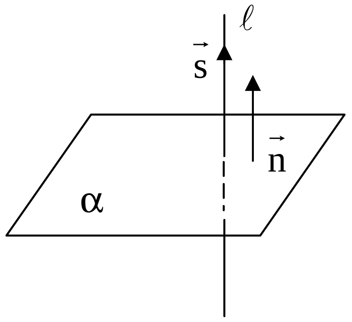


Рис. 51

1) $\alpha\perp\ell\Leftrightarrow\vec{n}\parallel\vec{s}\Leftrightarrow\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$ –

условие перпендикулярности прямой и плоскости (рис. 51).

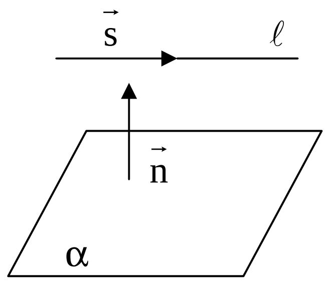


Рис. 52

2) $\alpha\parallel\ell\Leftrightarrow\vec{n}\perp\vec{s}\Leftrightarrow\left(\vec{n},\vec{s}\right)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow Am+Bn+Cp=0$ –

– условие параллельности прямой и плоскости (рис. 52).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩИХ ТОЧЕК ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Чтобы найти общие точки прямой $\ell:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскости $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$, надо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}. \end{cases}$$

Решение этой системы будет наименее трудоемким, если перейти к параметрическим уравнениям прямой (3.44):

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \Rightarrow A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0 \Rightarrow$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + (Am + Bn + Cp)\,t = 0 \qquad (3.47)$$

1) Пусть $Am + Bn + Cp \neq 0$. Это значит, что прямая не параллельна плоскости, а потому они имеют одну общую точку. Из (3.47) найдем

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$$

и по формулам (3.44) $M(x, y, z)$ – их точку пересечения.

2) Пусть $\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \\ Am + Bn + Cp = 0 \end{cases}$. Это означает, что в (3.47) решений нет: выполнено условие параллельности прямой и плоскости, при этом точка $A(x_0, y_0, z_0) \in \ell$, но не лежит в плоскости α, значит, прямая и плоскость общих точек не имеют.

3) Пусть $\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Am + Bn + Cp = 0 \end{cases}$. Тогда любое $t \in R$ – решение (3.47) и система имеет бесконечно много решений: выполнено условие параллельности прямой и плоскости и точка $A(x_0, y_0, z_0)$, лежащая на прямой, лежит в плоскости. Это значит, что прямая лежит в плоскости, то есть имеет с ней бесконечное множество общих точек.

ПРИМЕР. Найти проекцию точки $M(3, -1, 4)$ на плоскость $2x - 3y + 4z + 4 = 0$ (рис. 53).

Пусть прямая ℓ проходит через точку M перпендикулярно плоскости α. Точка ее пересечения с плоскостью и будет искомой проекцией. В качестве направляющего вектора $\overrightarrow{s_\ell}$ можно взять нормаль к плоскости $\overrightarrow{n_\alpha} = (2, -3, 4)$. Напишем канонические уравнения прямой (3.45):

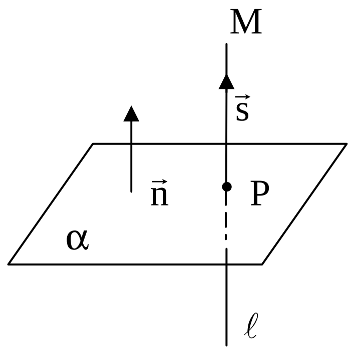


Рис. 53

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-4}{4}.$$

Перепишем их в параметрическом виде (3.44), чтобы найти точку P пересечения прямой MP и плоскости α.

$\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1-3t \\ z=4+4t \end{cases}$. Подставим x, y, z в уравнение плоскости:

$$2(3+2t)-3(-1-3t)+4(4+4t)+4=0 \Rightarrow 29t=-29 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow$$

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$, то есть $P(1,2,0)$ – искомая проекция.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Уравнение $F(x,y,z)=0$ задает в пространстве некоторую поверхность. Пусть уравнение содержит только две переменные, например, $F(x,y)=0$. Рассмотренное в плоскости XOY, оно задает некоторую кривую. Но ему будут удовлетворять и все точки пространства, которые проецируются в точки этой кривой, так как в уравнении отсутствует z, то есть все точки $M(x,y,z)$, у которых x и y связаны соотношением $F(x,y)=0$, а $z \in R$ – произвольно.

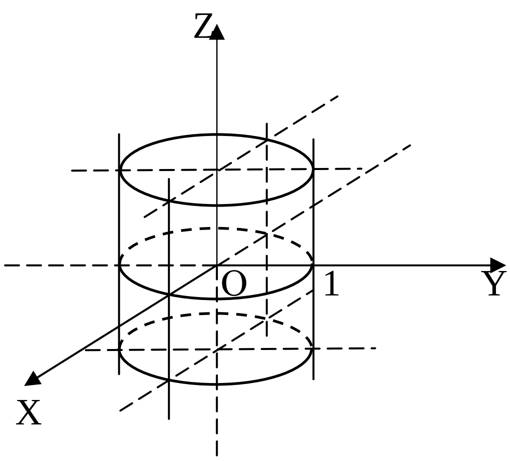


Рис. 54

ПРИМЕР. Построить поверхность $x^2+y^2=1$.

На плоскости это уравнение задает окружность с центром O(0, 0) и $R=1$. В пространстве ему удовлетворяют координаты всех точек, проекция которых на плоскость XOY лежит на этой окружности. Очевидно, что эта поверхность – круговой цилиндр (рис. 54).

Цилиндрические поверхности бывают не только круговыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Цилиндрической* называется *поверхность*, полученная движением прямой, параллельной некоторому вектору, и пересекающей при движении некоторую кривую. При этом движущаяся прямая называется *образующей*, а кривая, которую она пересекает, называется *направляющей цилиндрической поверхности*.

Для поверхности $x^2 + y^2 = 1$ образующая параллельна оси OZ (так как в уравнении z отсутствует), а направляющей является окружность в плоскости XOY.

ВЫВОД. *Если уравнение поверхности содержит только две переменные, то оно задает цилиндрическую поверхность*.

У поверхности $F(y,z)=0$ образующая параллельна OX, а направляющая лежит в плоскости YOZ. Для поверхности $F(x,z)=0$ образующая параллельна OY, направляющая в плоскости XOZ.

ПРИМЕР. Построить и назвать поверхности а) $z=1-y^2$ б) $z=\sin x$.

Эти уравнения задают цилиндрические поверхности. В первом случае направляющей является парабола в плоскости YOZ, а образующая параллельна OX (рис. 55). Во втором – образующая синусоида в плоскости XOZ, образующая параллельна OY (рис. 56).

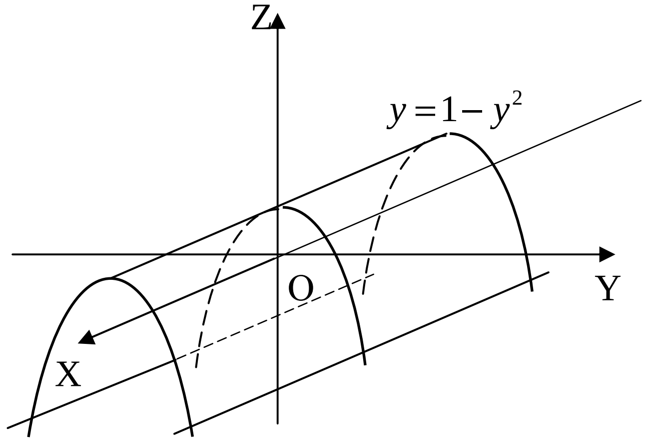


Рис. 55

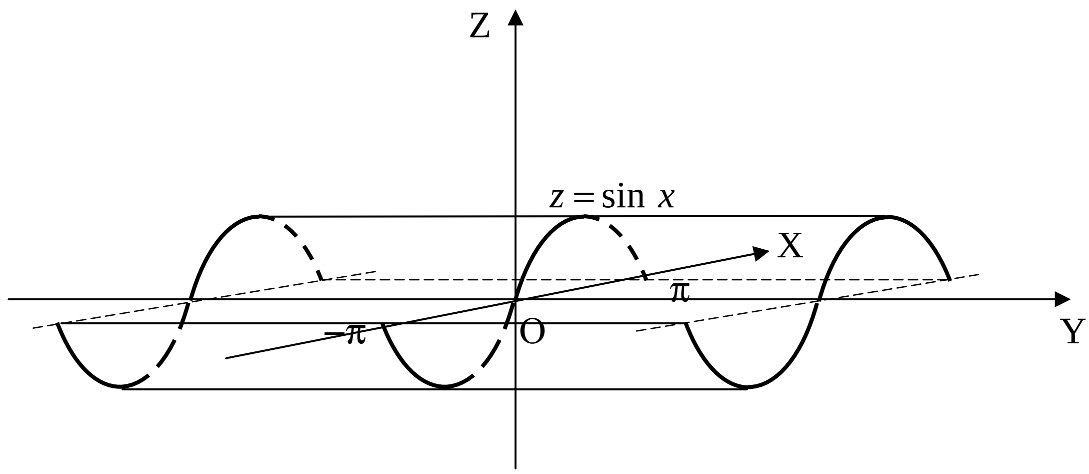


Рис. 56

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Поверхностью вращения* называется поверхность, полученная в результате вращения плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости.

Из определения следует, что сечением такой поверхности любой плоскостью, перпендикулярной оси вращения, является окружность.

Пусть в плоскости YOZ задана кривая $F\left(\overline{y},\,\overline{z}\right)=0$. $\left(\overline{y},\,\overline{z}\right)$ – координаты точки в плоской системе координат YOZ. Эта кривая вращается вокруг оси OZ. Выведем уравнение поверхности вращения.

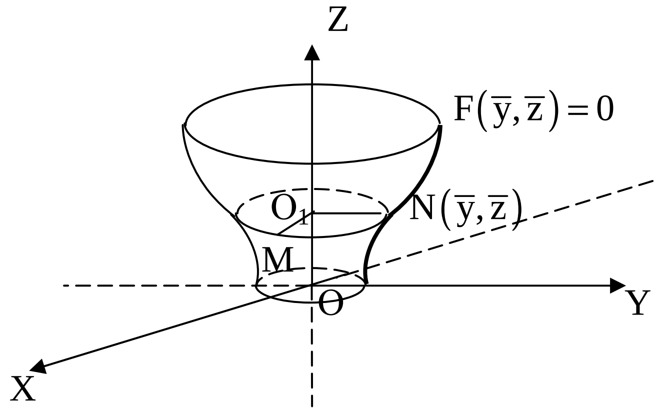


Рис. 57

Пусть $M\left(x,y,z\right)$ – произвольная точка на поверхности, $O_1\left(0,0,z\right)$ – центр окружности сечения, проходящего через точку M, а $N\left(\overline{y},\overline{z}\right)$ – точка, лежащая на кривой и одновременно в рассматриваемом сечении (рис. 57).
Тогда $O_1M=O_1N$ – радиусы сечения.

Но $$O_1M=\sqrt{x^2+y^2},\,O_1N=\left|\overline{y}\right|,\,\overline{z}=z\,.$$

Таким образом, уравнение поверхности вращения получим, если в уравнении кривой $\overline{y}$ заменим на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, а $\overline{z}$ – на z. Тогда получим: $F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$ – уравнение поверхности вращения (OZ – ось вращения).

Очевидно, что если кривая $F\left(y,z\right)=0$ вращается вокруг OY, то уравнение поверхности вращения имеет вид: $F\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$.

Уравнение кривой	Ось вращения	Уравнение поверхности
$F\left(x,y\right)=0$	OX	$F\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$
$F\left(x,y\right)=0$	OY	$F\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},y\right)=0$
$F\left(x,z\right)=0$	OX	$F\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$

$F(x,z)=0$	OZ	$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$
$F(y,z)=0$	OZ	$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$
$F(y,z)=0$	OY	$F\left(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$

НЕКОТОРЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Пусть эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вращается вокруг оси OY.

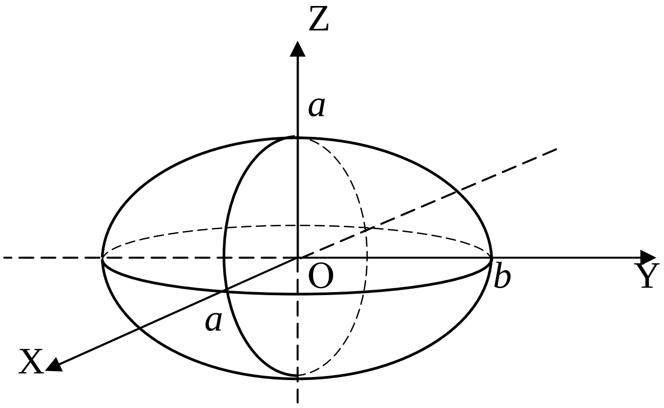


Рис. 58

Полученная поверхность является поверхностью второго порядка, так ее уравнение $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – второй степени относительно переменных x, y, z. Она называется эллипсоидом вращения (рис. 58). Поверхность, задаваемая уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, называется трехосным *эллипсоидом*.

2. Если гипербола $-\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вращается вокруг оси OZ, то уравнение поверхности вращения имеет вид

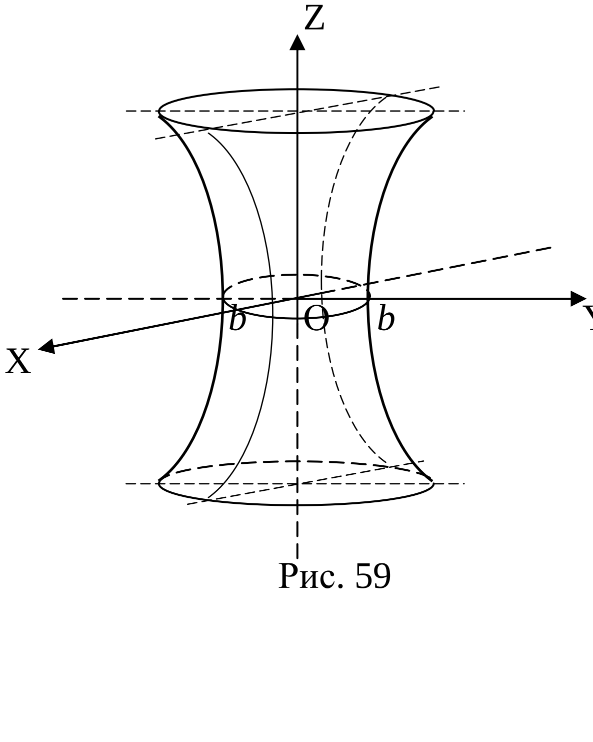


Рис. 59

$$-\frac{z^2}{a^2}+\frac{x^2+y^2}{b^2}=1$$

или

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=1.$$

Такая поверхность называется *однополостным гиперболоидом* вращения (рис. 59).

3. Если гипербола $-\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вращается вокруг оси OY, то уравнение поверхности имеет вид $-\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ или $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=1$. Такая поверхность называется *двуполостным гиперболоидом* вращения (рис. 60).

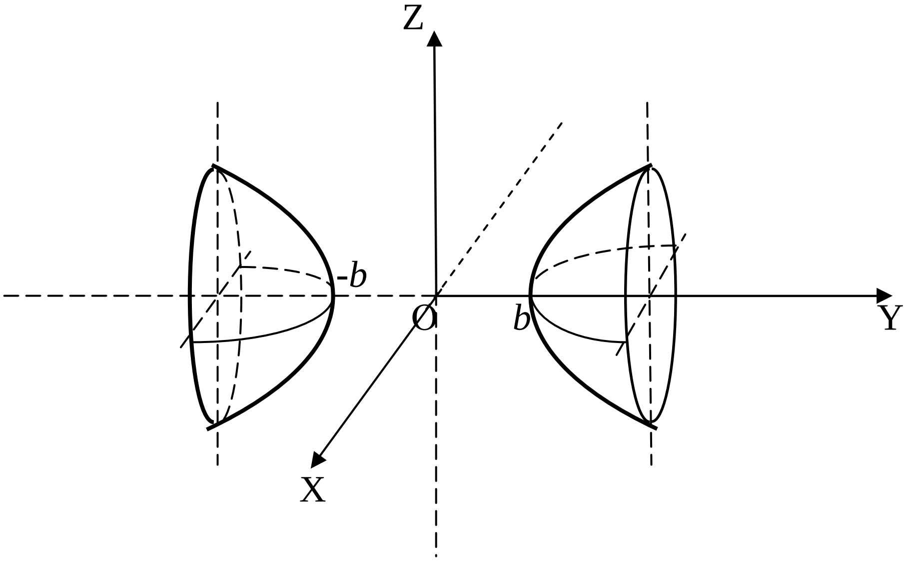


Рис. 60

4. Если пара пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ вращается вокруг оси OY, то получается *конус* вращения с уравнением

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=0 \text{ (рис. 61).}$$

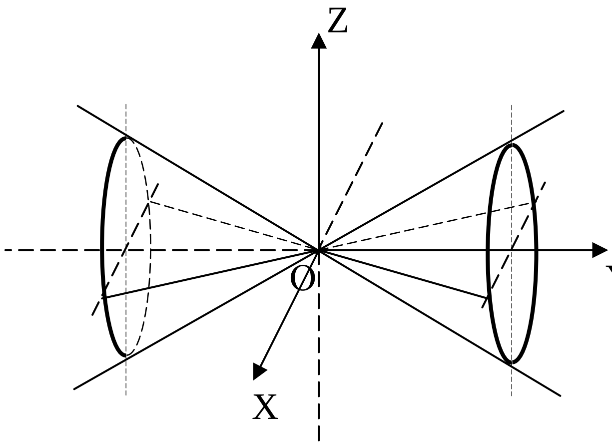


Рис. 61

5. При вращении параболы $y^2=2pz$ вокруг оси OZ получается поверхность $x^2+y^2=2pz$, которая называется *эллиптическим параболоидом* вращения (рис. 62).

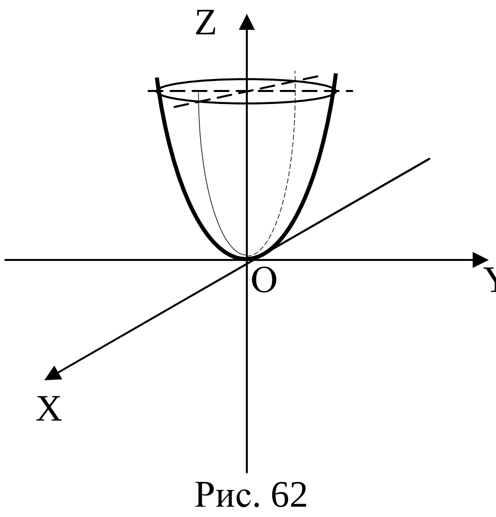


Рис. 62

Библиографический список

1. Ефимов, Н.В. Квадратичные формы и матрицы / Н.В.Ефимов. – М.: Наука, 1972. – 160 с.

2. Киркинский, А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие / А.С.Киркинский. – М.: Академический Проект, 2006. – 256 с.

3. Шипачев, В.С. Основы высшей математики / В.С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 1998. – 200 с.

4. Шнейдер В.Е. Краткий курс высшей математики / В.Е.Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. – М.: Высш. шк. 1978. – Т.2.

.

Редактор
Компьютерная верстка

ИД 06039 от 12.10.01

Подписано в печать Формат 60х84 1/16
Бумага офсетная. Отпечатано на дупликаторе.
Усл.печ.л. Уч.-изд.л.
Тираж экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ