Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

**Н.И. Николаева**

# Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Конспект лекций
Часть 2

Омск-2008

УДК
ББК

Рецензенты:
Ю.Ф.Стругов, д-р физ.-мат. наук;
С.Е.Макаров, канд. физ.-мат. наук, доцент

Николаева Н.И.
**Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Конспект лекций. Часть 2** / Н.И. Николаева. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2008. – 68 с.

Пособие представляет собой конспект лекций, читаемых автором на первом курсе технического университета, и предназначено для студентов всех форм обучения. В нем подробно, последовательно и с доказательствами изложена теоретическая часть курса математики. Часть 2 включает в себя две главы: «Введение в математический анализ» и «Дифференциальное исчисление функций одной переменной». Изложение сопровождается достаточным количеством примеров, поясняющих наиболее важные теоретические положения, иллюстрирующих теоретический материал и дающих образцы решения задач.

*Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета*

# Оглавление

# Глава 4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Предметом изучения раздела математики, который называется математическим анализом, являются переменные величины, то есть функции.

Будем считать, что $X$ и $Y$ – некоторые множества действительных чисел. Каждое действительное число можно, как известно, изобразить точкой на числовой прямой. Отдельные числа, входящие в состав множества $X$, будем называть его элементами. Если рассматриваемое множество содержит хотя бы один элемент, оно называется непустым. В противном случае – пустым.

Рассмотрим наиболее употребимые частные виды множеств действительных чисел:

1. $a \le x \le b,\ a < b$ – отрезок $[a,b]$; $a$ и $b$ – концы отрезка; все $x$, удовлетворяющие неравенству $a < x < b$ – его внутренние точки;

2. $a < x < b,\ a < b$ – интервал $(a,b)$; $a$ и $b$ – концы интервала;

3. любой интервал, содержащий точку $a$, будем называть ее окрестностью;

4. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon),\ \varepsilon > 0$ – $\varepsilon$ – окрестность точки $a$;

5. $a \le x < b,\ a < x \le b$ – полуотрезки $[a,b),\ (a,b]$;

6. $(-\infty,+\infty)$ – множество всех действительных чисел или всех точек числовой прямой;

7. $x \ge a,\ x \le b$ – полупрямые $[a,+\infty)$ и $(-\infty,b]$;

8. $x > a,\ x < b$ – открытые полупрямые $(a,+\infty),\ (-\infty,b)$.

Множество X всех значений, которые может принимать переменная величина $x$, называется областью ее изменения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Пусть заданы две переменные величины $x$ и $y$ с областями изменения X и Y. Переменная $y$ называется функцией переменной $x$, если каждому значению $x$ из множества X по некоторому правилу ставится в соответствие единственное значение $y \in Y$. Такие функции называются однозначными.

Чтобы задать функцию, надо
1) задать множество X,
2) определить правило установления соответствия между $x$ и $y$.

Способы задания функции:
1) аналитический (с помощью формул)

**ПРИМЕР**. а) $y = x^2,\ x \in R,\ y \geq 0.$ б) $y = \log_2 x,\ \ x > 0,\ y \in R.$

в) $y = \begin{cases} x,\ x > 0 \\ x^2,\ x \leq 0 \end{cases}$, $x \in R,\ y \geq 0$.

2) табличный

**ПРИМЕРОМ** табличного задания функции является расписание.

3) графический.

## ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Если каждому значению $n$ из натурального ряда чисел $1,2,3,\ldots,n,\ldots$ставится в соответствие по некоторому правилу действительное число $x(n) = x_n$, то множество занумерованных действительных чисел $\{x_n\}$ называется числовой последовательностью.

Таким образом, *последовательность* – функция натурального аргумента, $x_n$ называется общим или $n$-м членом последовательности. Зная общий член $x_n$, можно найти любой член последовательности.

**ПРИМЕР**. $x_n = n^2 \ \Rightarrow x_3 = 9,\ x_{10} = 100,\ldots$

$y_n = (-1)^n \ \Rightarrow y_1 = -1,\ y_2 = 1,\ y_3 = -1,\ldots$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если $\exists M \in R\ (m \in R)\ \ \forall n \in N \Rightarrow x_n \leq M\ \ (x_n \geq m)$. $M$ называется верхней гранью, а $m$ нижней гранью последовательности.

**ПРИМЕРЫ**. а) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$. $\dfrac{1}{n^2} \leq 1$ или $\dfrac{1}{n^2} \leq 2 \Rightarrow \left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ ограничена сверху: $M_1 = 1,\ M_2 = 2,\ldots$ $\dfrac{1}{n^2} \geq 0$ или $\dfrac{1}{n^2} \geq -1 \Rightarrow \left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ ограничена снизу: $m_1 = 0,\ m_2 = -1,\ldots$

б) $y_n = (-1)^n n^2$ – сверху неограничена и снизу неограничена.

в) $z_n = n^2 + 1.$ $n^2 + 1 \geq 0$ или $n^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \{n^2 + 1\}$ ограничена снизу: $m_1 = 0,\ m_2 = 1,\ldots$ Сверху $\{z_n\}$ неограничена.

*Если последовательность имеет верхнюю или нижнюю грани, то они неединственны.*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу, то есть $\exists M, m \in R\ \forall n \in N \Rightarrow m \le x_n \le M$.

**ПРИМЕР.** $\{x_n\}$ ограничена, так как $0 \le \frac{1}{n^2} \le 1$ или $-1 \le \frac{1}{n^2} \le 1$.

Сформулируем еще одно эквивалентное этому определение ограниченной последовательности, которым, как правило, более удобно пользоваться.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если $\exists A > 0\ \forall n \in N \Rightarrow |x_n| \le A$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого положительного $A$ найдется хотя бы один элемент $x_n$ такой, что $|x_n| > A$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если $\forall A > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| > A$.

**ПРИМЕРЫ**. а) $z_n = n^2 + 1$: $2,5,10,17,26,\ldots 1001,\ldots$ – неограниченная и бесконечно большая.

б) $u_n = (1 + (-1)^n)n^2$: $0,8,0,32,0,72,\ldots$ – неограниченная, но не бесконечно большая.

*Всякая бесконечно большая последовательность неограничена. Обратное утверждение неверно*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой (б.м.), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n > n_0 \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$.

**ПРИМЕР**. $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Если $\varepsilon = 2$, то $\frac{1}{n} < 2\ \forall n \in N$.

Если $\varepsilon = 0,01$, то $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}\ \forall n > 100 \Rightarrow n_0 = 100$.

Если $\varepsilon = 0,001$, то $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}\ \forall n > 1000 \Rightarrow n_0 = 1000$.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, тогда $\frac{1}{n} < \varepsilon\ \forall n > \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, $\{\alpha_n\}$ бесконечно мала.

## СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Если $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ две последовательности, то $\{\alpha_n+\beta_n\}$ называется их суммой, $\{\alpha_n-\beta_n\}$ разностью, $\{\alpha_n\beta_n\}$ произведением, а $\left\{\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$, $\beta_n\neq 0$ частным.

**ТЕОРЕМА 1**. Сумма двух б.м. последовательностей бесконечно мала.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Пусть $\{\alpha_n\}$ б.м. По определению это значит, что $\forall\varepsilon_1>0\ \exists n_1\in N\ \forall n>n_1\Rightarrow|\alpha_n|<\varepsilon_1$.

Пусть $\{\beta_n\}$ б.м. По определению $\forall\varepsilon_2>0\ \exists n_2\in N\ \forall n>n_2\Rightarrow|\beta_n|<\varepsilon_2$.

Надо доказать, что $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N\ \forall n>n_0\Rightarrow|\alpha_n+\beta_n|<\varepsilon$ .

Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Тогда для $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2}\Rightarrow|\alpha_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}\ \forall n>n_1$, для $\varepsilon_2=\dfrac{\varepsilon}{2}\Rightarrow|\beta_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}\ \forall n>n_2$. Пусть $n_0=\max\{n_1,n_2\}$, тогда $\forall n>n_0\ \Rightarrow|\alpha_n+\beta_n|\le|\alpha_n|+|\beta_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, что и требовалось доказать.

**ТЕОРЕМА 2**. Разность двух б.м. последовательностей бесконечно мала. Доказать самостоятельно, используя неравенство $|\alpha_n-\beta_n|\le|\alpha_n|+|\beta_n|$.

**ТЕОРЕМА 3**. Произведение б.м. последовательности и ограниченной бесконечно мало.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Пусть $\{\alpha_n\}$ б.м., а $\{x_n\}$ ограничена .Тогда по определению $\forall\varepsilon_1>0\ \exists n_0\in N\ \forall n>n_0\Rightarrow|\alpha_n|<\varepsilon_1$ и $\exists A>0\ \forall n\in N\Rightarrow|x_n|<A$.

Надо доказать, что $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N\ \forall n>n_0\Rightarrow|\alpha_n x_n|<\varepsilon$ .

Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Тогда для $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{A}\Rightarrow|\alpha_n|<\dfrac{\varepsilon}{A}\ \forall n>n_0$. Поэтому $\forall n>n_0\Rightarrow|\alpha_n x_n|=|\alpha_n||x_n|<\dfrac{\varepsilon}{A}\cdot A=\varepsilon$. Что и требовалось доказать.

**ТЕОРЕМА 4**. Всякая бесконечно малая последовательность ограничена.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Пусть $\{\alpha_n\}$ б.м. Тогда по определению

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N\ \forall n>n_0\Rightarrow|\alpha_n|<\varepsilon .$$

Положим $A=\max\{x_1,x_2,...,x_{n_0},\varepsilon\}$. Тогда $\forall n\in N\Rightarrow|\alpha_n|\le A$.

**СЛЕДСТВИЕ**. Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ б.м., то $\{\alpha_n\beta_n\}$ также б.м. : $\{\alpha_n\}$ по теореме 4 ограничена, тогда по теореме 3 $\{\alpha_n\beta_n\}$ б.м.

**ПРИМЕР**. $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ – б.м. Тогда $\gamma_n = \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n}$ также б.м. И вообще $\beta_n = \dfrac{1}{n^k}$, $k \in N$ – б.м.

## СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1**. $\{x_n\}$ называется сходящейся, если $\exists x \in R$ $\{x_n - x\}$ – б.м. Число $x$ в этом случае называется пределом последовательности: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Кроме того, предел можно обозначать так: $x_n \to x$

**ПРИМЕР**. $\{x_n\} = \dfrac{2n+1}{n}$. Пусть $x = 2$. $x_n - x = \dfrac{2n+1}{n} - 2 = \dfrac{1}{n}$ – б.м. Значит, по определению $\{x_n\}$ сходится к 2: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n} = 2$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2**. Число $x$ называется пределом $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.

*Интервал* $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ *называется* $\varepsilon$*-окрестностью точки* $x$.

Из определения 2 следует, что $\forall n > n_0 \quad x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, то есть $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3**. $\{x_n\}$ называется сходящейся, если $\exists x \in R$ такое, что в любой его $\varepsilon$-окрестности $(\varepsilon > 0)$ содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого.

Очевидно, определения 1, 2, 3 сходящейся последовательности эквивалентны.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1**. Всякую бесконечно большую последовательность $\{y_n\}$ будем трактовать как сходящуюся к бесконечности, именно: если $y_n > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, а если $\forall n > n_0 \quad y_n < 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2**. Из определения 3 следует, что отбрасывание любого *конечного* числа членов $\{x_n\}$ не изменяет факта ее сходимости и величину ее предела.

**ЗАМЕЧЕНИЕ 3**. Из определения 3 следует, что если $\{x_n\}$ сходится, то имеет единственный предел. Действительно, пусть $\bar{x}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $\bar{\bar{x}}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ и $\bar{x}\neq\bar{\bar{x}}$.

Рассмотрим непересекающиеся окрестности точек $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$. Все члены $\{x_n\}$ не могут находиться одновременно в них обеих, следовательно, $\bar{x}=\bar{\bar{x}}$.
*Последовательность, не имеющая предела, называется расходящейся*.

**ПРИМЕР**. $x_n=\sin\dfrac{\pi n}{2}$: 1,0,-1,0,1,0,… Очевидно (определение 3), что $\{x_n\}$ расходится, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi n}{2}$ не существует.

**ПРИМЕР**. $\alpha_n=\dfrac{1}{n}$ – б.м. Очевидно (определение 1), что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$: $\{\alpha_n\}=\{\alpha_n-0\}$ – б.м.

Таким образом, если $\{\alpha_n\}$ – произвольная б.м., то $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

**ТЕОРЕМА 5**. Если $\{x_n\}$ сходится, то $\{x_n\}$ ограничена.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. По определению 1 $\exists x\in R$ $\quad x_n-x=\alpha_n, \{\alpha_n\}$ – б.м. Тогда $x_n=x+\alpha_n$. По теореме 4 $\{\alpha_n\}$ ограничена, то есть $|\alpha_n|\le A\Rightarrow|x+\alpha_n|\le|x|+A\ \forall n\in N\Rightarrow\{x_n\}$ ограничена, что и требовалось доказать.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. По теореме 5 всякая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное утверждение неверно: *не всякая ограниченная последовательность сходится.*

**ПРИМЕР**. $x_n=\sin\dfrac{\pi n}{2}$ расходится, но $|x_n|=\left|\sin\dfrac{\pi n}{2}\right|\le 1\ \forall n\in N$, то есть $\{x_n\}$ ограничена.

**ТЕОРЕМА 6**. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$. Тогда $\{x_n+y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=x+y$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. По определению 1 $x_n-x=\alpha_n$, $y_n-y=\beta_n$, где $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ – б.м. Тогда $(x_n+y_n)-(x+y)=(x+\alpha_n+y+\beta_n)-(x+y)=\alpha_n+\beta_n$ – б.м. по теореме 1. По определению 1 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=x+y$.

**ТЕОРЕМА 7**. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y.$ Тогда $\{x_n - y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y.$

Доказать самостоятельно, используя определение 1 и теорему 2.

**ТЕОРЕМА 8**. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y.$ Тогда $\{x_n \cdot y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y.$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. По определению 1 $x_n - x = \alpha_n,\ y_n - y = \beta_n,$ где $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ – б.м. Тогда $x_n y_n - xy = (x+\alpha_n)(y+\beta_n) - (xy) = x\beta_n + y\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ – б.м. по теоремам 3,4,1. Что и требовалось доказать.

**ТЕОРЕМА 9**. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y,\ y \neq 0.$ Тогда $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ определена, начиная с некоторого номера, сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}.$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Так как $y \neq 0$, то выберем $\varepsilon$-окрестность точки $y$, не содержащую 0. По определению 3 в выбранной $\varepsilon$-окрестности содержатся все $y_n$, начиная с некоторого $n_0$. Значит, $y_n \neq 0\ \ \forall n \geq n_0$. Отбросим все $y_n$ при $n < n_0$ (на факт сходимости и величину предела $\{y_n\}$ это не повлияет ).

По определению 1 $x_n - x = \alpha_n,\ y_n - y = \beta_n,$ где $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ – б.м.

$\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{x+\alpha_n}{y+\beta_n} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{y\alpha_n - x\beta_n}{y(y+\beta_n)}$ – б.м. по теоремам 2,3,5. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}.$

**ПРИМЕРЫ**. а) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3n-7}.$ Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+3) = \lim\limits_{n\to\infty}(3n-7) = \infty$, то теорему 9 применить нельзя. Предел, говорят в этом случае, представляет собой *неопределенность* вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы вычислить его, или *раскрыть неопределенность*, преобразуем выражение, разделив числитель и знаменатель на $n$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3n-7} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{7}{n}} = \dfrac{2}{3}$. Ответ получен с помощью теорем 6,7,8,9 и уже доказанного факта: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0.$

б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5n+10}{n+95} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{95}{n^2}} = \infty$$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+5n+10}{n^3+7n+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{10}{n^3}}{1+\dfrac{7}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}=\dfrac{0}{1}=0.$

Анализируя рассмотренные пределы и способ их вычисления, можно сформулировать *ПРАВИЛО:*

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{Q_m(n)}{P_k(n)}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},\ \text{если}\ m=k\\ \infty\ ,\ \text{если}\ m>k\\ 0\ ,\ \text{если}\ m<k\end{cases}$, где $Q_m(n), P_k(n)$ – степенные функции, зависящие от $n$, $m$ – старшая степень числителя, $k$ – старшая степень знаменателя, $a_0$ – коэффициент при старшей степени переменной $n$ в числителе, $b_0$ – коэффициент при старшей степени переменной $n$ в знаменателе.

**ПРИМЕРЫ**. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^2+4n+28}}{\sqrt[3]{3n^2+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$, так как $m=\dfrac{2}{3},\ k=\max(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2})=\dfrac{2}{3}.$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+1}}{n^2+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=0$, так как $m=\dfrac{1}{2},\ k=2\Rightarrow m<k.$

## ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ

**ТЕОРЕМА 10** (о предельном переходе в неравенстве). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ и, начиная с некоторого номера, $x_n\ge b$ ($x_n\le b$). Тогда $x\ge b$ ($x\le b$).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Пусть $x_n\ge b.$ Докажем, что тогда $x\ge b$. Предположим противное: $x<b\Rightarrow b-x>0.$ Так как $\{x_n\}$ сходится, то по определению 2 $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N\ \forall n>n_0\Rightarrow|x_n-x|<\varepsilon$. Пусть $b-x=\varepsilon,\ \varepsilon>0.$ Тогда $-(b-x)<x_n-x<b-x\ \forall n>n_0\ \Rightarrow x_n<b\ \forall n>n_0$ – противоречие, так как по условию $x_n\ge b$. Таким образом, сделанное предположение неверно и $x\ge b.$

Случай $x_n\le b$ рассматривается аналогично.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Предельный переход не сохраняет строгое неравенство, то есть, если $x_n>b,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ge b.$

**ПРИМЕР**. $x_n=\dfrac{1}{n}\Rightarrow x_n>0\ \forall n\in N,$ но $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0.$

**ТЕОРЕМА 11**. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ и, начиная с некоторого номера, $x_n \geq y_n$. Тогда $x \geq y$.
Доказать самостоятельно, используя теоремы 7,10 для $z_n = x_n - y_n$.

**ТЕОРЕМА 12** (принцип двустороннего ограничения). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, кроме того, начиная с некоторого номера, $x_n \leq z_n \leq y_n$. Тогда $\{z_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**.

Пусть
$$\begin{aligned}&\forall n > n_1 \Rightarrow x_n \leq z_n \leq y_n \Leftrightarrow x_n - a \leq z_n - a \leq y_n - a \Rightarrow\\ &\Rightarrow |z_n - a| \leq \max(|x_n - a|, |y_n - a|) \ \forall n > n_1.\end{aligned} \qquad (1)$$

По определению 2 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 \in N \ \forall n > n_2 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$, (2)

и
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_3 \in N \ \forall n > n_3 \Rightarrow |y_n - y| < \varepsilon . \qquad (3)$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$. Тогда неравенства (1),(2),(3) верны $\forall n > n_0 \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon \ \forall n > n_0$. Это означает по определению 2, что $\{z_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, что и требовалось доказать.

## МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если $\forall n \in N \Rightarrow x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$. Неубывающая или невозрастающая последовательность называется *монотонной*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей), если $\forall n \in N \Rightarrow x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$. Возрастающая или убывающая последовательность называется *строго монотонной*.

**ПРИМЕРЫ**. а) $x_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow x_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow \{x_n\}$ – убывающая.

б) $y_n = (-1)^n \dfrac{1}{n} \Rightarrow y_1 = -1,\ y_2 = \dfrac{1}{2},\ y_3 = -\dfrac{1}{3},\ y_4 = \dfrac{1}{4}, \ldots \Rightarrow \{y_n\}$ монотонной не является.

в) $z_n = n^2 \Rightarrow z_{n+1} = (n+1)^2 \Rightarrow z_n < z_{n+1} \Rightarrow \{z_n\}$ – возрастающая.

Заметим, что $x_n \le x_1,\ z_n \ge z_1\ \forall n \in N$. Таким образом, всякая монотонная последовательность ограничена с одной стороны, именно: неубывающая – снизу, невозрастающая – сверху. Значит, для ограниченности неубывающей последовательности необходимо, чтобы она была ограничена сверху, для невозрастающей – снизу.

**ТЕОРЕМА 13**. Если неубывающая последовательность ограничена сверху, то она сходится. Если невозрастающая последовательность ограничена снизу, то она также сходится.

Без доказательства.

Из теорем 5,13 следует теорема 14.

**ТЕОРЕМА 14**. Для того, чтобы монотонная последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена.

Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = \frac{9}{4},\ x_3 = \frac{64}{27},\ x_4 = \frac{625}{256},\ldots \Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots$$

Можно показать, что $\{x_n\}$ возрастает, кроме того, $x_n < 3\ \forall n \in N \Rightarrow 2 \le x_n < 3$, то есть $\{x_n\}$ монотонна и ограничена. Следовательно, по теореме 14 она сходится, то есть $\exists x \in R\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x,$ при этом по теореме 10 $2 \le x \le 3$. Это число обозначают $e$: оно иррационально, то есть представимо в виде бесконечной десятичной непериодической дроби, и $e \approx 2,7182...$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \left(1^\infty\right) = e.$ Это равенство называют *вторым замечательным пределом.*

Логарифм по основанию $e$ называют *натуральным*: $\log_e x = \ln x.$

## ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X действительной оси, которое, быть может, не содержит точку $x = a$, но содержит точки, бесконечно близкие к $a$, то есть $\forall \delta > 0$ окрестность этой точки $(a-\delta, a+\delta)$ содержит точки множества X.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1** (предел функции в точке $x=a$ по Гейне). Число $b$ называется пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=a$, если для любой последовательности значений ее аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к $a$ и состоящей их чисел, отличных от $a$, соответствующая последовательность значений функций $\{f(x_n)\}$ сходится к $b$ (рис.1). Этот факт обозначается так:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b.$$

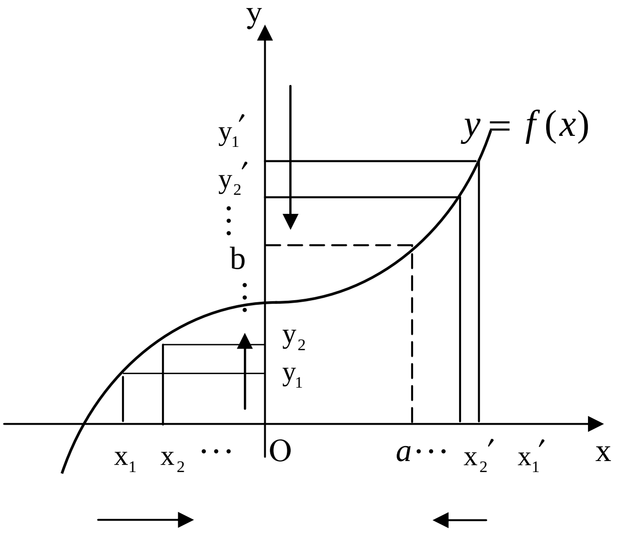



Рис. 1

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2** (предел функции в точке $x=a$ по Коши). Число $b$ называется пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=a$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\in X,\quad 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon.$$

Это означает, что всегда найдется такой интервал, содержащий точку $x=a$, всюду внутри которого $f(x)$ отличается от $b$ так мало, как нам захочется. Так как по определению $0<|x-a|<\delta$, то $a-\delta<x<a+\delta,\ x\neq a.$ Если $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, то, очевидно, $\forall x\in(a-\delta,a+\delta),\ x\neq a$ верно неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$ (рис. 2).

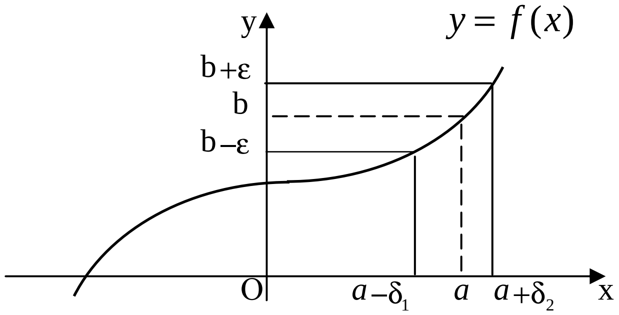



Рис. 2

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3** (предел функции на $+\infty$ по Гейне) Число $b$ называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, если для любой бесконечно большой последовательности значений ее аргумента $\{x_n\}$, все члены которой положительны, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к $b$ (рис. 3). Обозначение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b.$

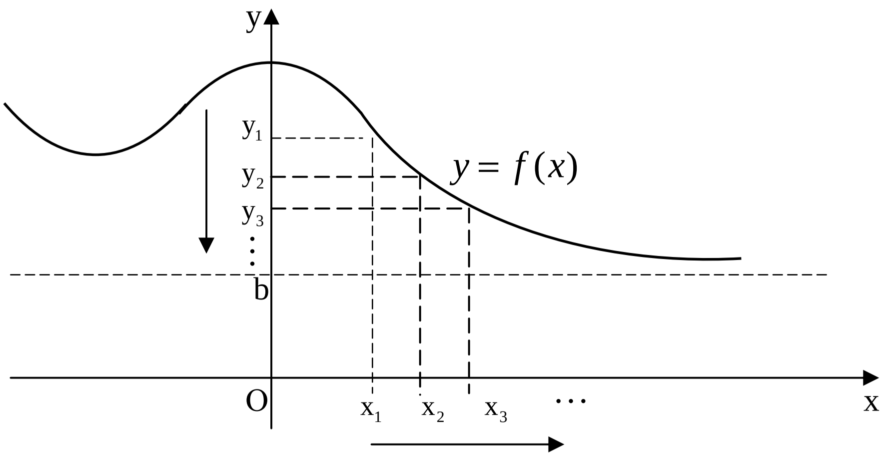



Рис. 3

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4** (предел функции на $+\infty$ по Коши).
Число $b$ называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall x \in X, \quad x > \delta \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon$ (рис. 4).

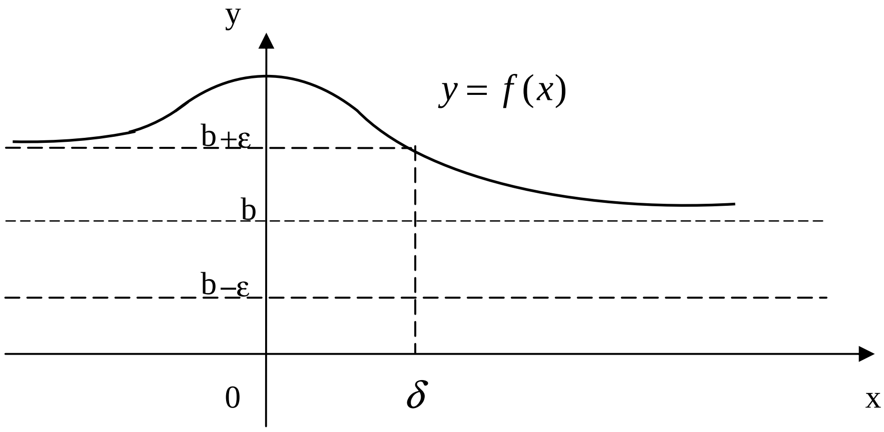



Рис. 4

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5** (предел функции на $-\infty$ по Гейне) Число $b$ называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если для любой бесконечно большой последовательности значений ее аргумента $\{x_n\}$, все члены которой отрицательны, соответствующая последовательность значений функции $\{ f(x_n)\}$ сходится к $b$. Обозначение: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b.$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6** (предел функции на $-\infty$ по Коши). Число $b$ называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall x \in X, \quad x < -\delta \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon.$

Можно доказать, что определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.

**ПРИМЕР**. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

Рассмотрим функцию $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$. При всех $x\neq 3$ $y=x+3$. Выберем произвольную последовательность $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$. Тогда $f(x_n)=x_n+3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 6$ независимо от вида $\{x_n\}$. По определению 1 это означает, что $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$=6.

**ТЕОРЕМА** (об арифметических операциях над функциями, имеющими предел). Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=c.$ Тогда существуют пределы в точке $x=a$ функций $f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(c\neq 0)$

и $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=b\pm c,\quad \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=b\cdot c,\quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b}{c}\quad c\neq 0.$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. По условию $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=c.$ По определению 1 выберем произвольную $\{x_n\}, x_n\neq a$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a.$ Тогда соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ сходятся к $b$ и $c$ соответственно, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b, \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=c.$ По теоремам 6,7,8,9

$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)\pm g(x_n))=b\pm c, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\cdot g(x_n)=b\cdot c,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}=\dfrac{b}{c},\ c\neq 0,$ что и требовалось доказать.

## ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

Пусть X – область определения функции, которая, быть может, не содержит точку $x=a$, но для любого $\delta>0$ правая полуокрестность точки $x=a$ (интервал $(a,a+\delta)$) содержит точки множества X.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7** (правый предел функции в точке $x=a$ по Гейне). Число $b$ называется правым пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=a$, если для любой последовательности значений ее аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к $a$ и состоящей их чисел, больших $a$, соответствующая последовательность значений функций $\{f(x_n)\}$ сходится к $b$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=b.$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8** (правый предел функции в точке $x=a$ по Коши). Число $b$ называется правым пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=a$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\in X,\quad a<x<a+\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon.$

Для определения левого предела будем считать, что любая левая полуокрестность точки $x=a$, интервал $(a-\delta,a)$, содержит точки X.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9** (левый предел функции в точке $x=a$ по Гейне). Число $b$ называется левым пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=a$, если для любой последовательности значений ее аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к $a$ и состоящей их чисел, меньших $a$, соответствующая последовательность значений функций $\{f(x_n)\}$ сходится к $b$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=b.$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10** (левый предел функции в точке $x=a$ по Коши). Число $b$ называется левым пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=a$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\in X,\quad a-\delta<x<a\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon.$

**ПРИМЕР**. Найти односторонние пределы (правый и левый) функции

$$y=\begin{cases}x+1\,,\ x\le 0\\ x^2\quad,\ 0<x<2\\ 4-x\,,\ x\ge 2\end{cases}$$

в точках $x=0$ и $x=2$.

Так как справа от 0 и близко к нему $y=x^2$, то $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} x^2=0$. Очевидно,

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(x+1)=1,\ \lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(4-x)=2,\ \lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} x^2=4.$$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 0-} f(x),\ \lim\limits_{x\to 2+} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 2-} f(x),$ что хорошо видно на графике функции (рис. 5):

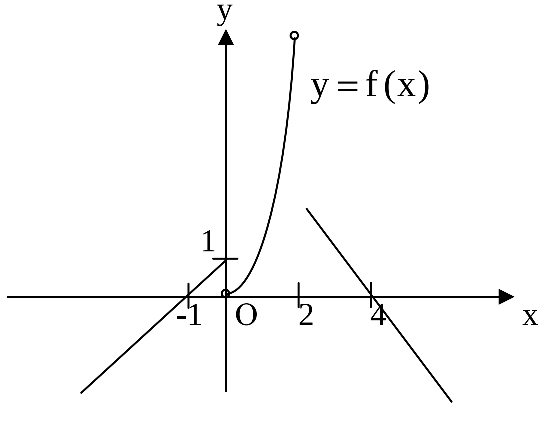



Рис. 5

$$\{x_n\}: x_n<0,\ x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Rightarrow f(x_n)\to 1,$$
$$\{x_n\}: x_n>0,\ x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Rightarrow f(x_n)\to 0,$$
$$\{x_n\}: x_n<2,\ x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}2\Rightarrow f(x_n)\to 4,$$
$$\{x_n\}: x_n>2,\ x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}2\Rightarrow f(x_n)\to 2.$$

Существуют ли $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ?

Не существуют, так как левый предел не равен правому пределу в этих точках. Имеет место утверждение: *для того, чтобы функция имела в точке предел , необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали равные односторонние пределы.*

**ПРИМЕР**. Найти односторонние пределы функции $y=\begin{cases} x+1\ , & x\le 0 \\ x^2 & , 0<x<2 \\ 4-x\ , & x\ge 2 \end{cases}$ в точке $x=4$.

$$\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4+}(4-x)=0,\ \lim_{x\to 4-} f(x)=\lim_{x\to 4-}(4-x)=0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4-} f(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 4} f(x)=0.$$

**ПРИМЕР**. Найти односторонние пределы функции $y=\begin{cases} x^2 & , x\le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$ в точке $x=1$.

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(2-x)=1,\quad \lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} x^2=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=1.$$

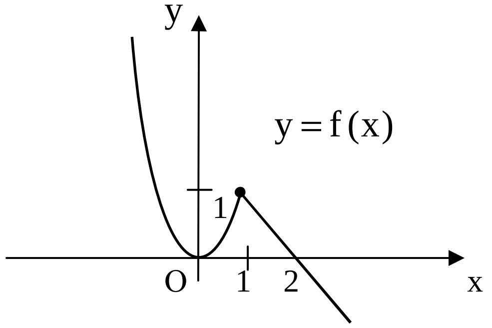



Рис. 6

Предел функции в этой точке существует, так как односторонние пределы равны (рис.6).

## СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Функция $y=\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* (б.м.) в точке $x=a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

**ПРИМЕРЫ**. $y=x^2-4$ – б.м. в точках $x=\pm 2$, $y=x^2+x$ – б.м. в точках $x=0,\ x=-1$, $y=x^2$ – б.м. в точке $x=0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. в точке $x=a$, то есть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$. Предел отношения б.м. функций $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ называется *неопределенностью вида* $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

**ПРИМЕР**. $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = x$, $\gamma(x) = 4x$ – б.м. в точке $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{4x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{4}{x} = \infty.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. 1) Б.м. в точке $x = a$ функция $\alpha(x)$ имеет *более высокий порядок малости*, чем $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = 0.$

2) Б.м. в точке $x = a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *одного порядка малости*, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = k,\ k \neq 0,\ k \neq \infty.$$

3) Б.м. в точке $x = a$ функции эквивалентны, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1 .$$

Эквивалентные б.м. обозначаются так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

**ПРИМЕР**. $\alpha(x) = x^2$ имеет более высокий порядок малости в точке $x = 0$, чем $\beta(x) = x$ и $\gamma(x) = 4x$.
$\beta(x) = x$ и $\gamma(x) = 4x$ одного порядка малости.

**ПРИМЕР**. Сравнить функции $\alpha(x) = x^2$ и $\delta(x) = x^2 + 2x^3$, б.м. в точке $x = 0$.

Вычислим предел отношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\delta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2 + 2x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1 + 2x} = 1 \Rightarrow \alpha(x) \sim \delta(x)$$

в точке $x = 0$.

**ТЕОРЕМА** (принцип замены эквивалентных бесконечно малых). Пусть $\alpha(x), \alpha_1(x), \beta(x), \beta_1(x)$ – б.м. функции в точке $x = a$ и $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Так как $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)}{\beta(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = 1\cdot 1\cdot \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Что и требовалось доказать.

## ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = 1$. Это равенство называется *первым замечательным пределом*.

Рассмотрим единичную окружность и угол $x$ радиан. Так как $x \to 0$, то можно считать, что $x < \dfrac{\pi}{2}$.

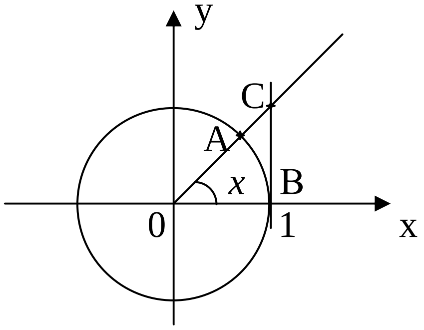



Рис. 7

Очевидно, что $S_{\triangle AOB} < S_{сектораAOB} < S_{\triangle OCB}$. (рис. 7).

Так как $OA = OB = 1$, то $\dfrac{1}{2}\sin x < \dfrac{1}{2}x < \dfrac{1}{2}tg\,x$

$\Rightarrow \sin x < x < tg\,x$.

Разделим неравенство на $\sin x > 0 : 1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$.

Все выражения здесь положительны, поэтому перейдем к обратным величинам:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{4}$$

Так как функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $y = \cos x$ – четные, то есть

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x},\ \cos(-x) = \cos x,$$

то неравенство (4) верно для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Рассмотрим произвольную $\{x_n\}$: $x_n \to 0$. Из (4) имеем: $\cos x_n < \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$, при этом $\cos x_n \to 1$.

Тогда по принципу двустороннего ограничения (теорема 12) $\left\{\frac{\sin x_n}{x_n}\right\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$. По определению 1 предела функции в точке по Гейне получаем требуемое: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Доказанное означает, что в точке $x = 0$ б.м. функции $y = \sin x$ и $y = x$ эквивалентны: $\sin x \sim x$ *в точке* $x = 0$.

**ПРИМЕРЫ**.

1)Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

Пусть $t = 5x \Rightarrow x = \frac{t}{5}$. Если $x \to 0$, то $t \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{5\sin t}{t} = 5$,

или по-другому: $\sin 5x \sim 5x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{x} = 5$ согласно принципу замены б.м.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$

Таким образом, $tg\, x \sim x$ *при* $x \to 0$.

При рассмотрении неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ можно пользоваться следующими соотношениями: при $t \to 0$

$$\boxed{\sin t \sim t \quad tg\, t \sim t \quad \arcsin t \sim t \quad arctg\, t \sim t \quad e^t - 1 \sim t \quad \ln(1+t) \sim t \quad \sqrt[m]{1+t} - 1 \sim \frac{t}{m}}$$

**ПРИМЕРЫ**. 1) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{1+\sin 3x} - 1)tg\, 4x}{\ln(1+2x^2)}$. При $x \to 0$

$$\sqrt[3]{1+\sin 3x} \sim \frac{\sin\ 3x}{3};\quad \ln\left(1+2x^2\right) \sim 2x^2,\quad tg\ 4x \sim 4x,$$

поэтому

$$\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3}\cdot 4x}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot 2}{3\cdot x} = 2.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{tg\,4x(\sqrt{4-\arcsin x}-2)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4x\cdot 2(\sqrt{1-\frac{\arcsin x}{4}}-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{4\cdot 4x\cdot 2\frac{x}{8}} = \frac{1}{2},$$

так как $\sin^2\dfrac{x}{2} \sim \dfrac{x^2}{4}$, $\sqrt{1-\dfrac{\arcsin\ x}{4}} \sim \dfrac{x}{8}$.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Принципом замены б.м. надо пользоваться внимательно. В следующих примерах он не применим.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0,$ так как числитель ограничен, а знаменатель стремится к бесконечности,

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{2}{\pi}$ – этот предел неопределенностью не является,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x} = \infty,$ так как $\cos\ x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$

## НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть $x=a$ входит в область допустимых значений функции $y=f(x)$, причем $x=a$ не является изолированной точкой.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1**. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x=a$, если

1) существует конечный $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) \Leftrightarrow$ существуют конечные и равные односторонние пределы функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to a-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to a+} f\left(x\right)$

2) $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) = f(a).$

Точки, в которых функция не является непрерывной, называются *точками разрыва*.

Из определения 1 следует, что $\lim\limits_{x-a\to 0}(f(x)-f(a))=0$. Разность $(x-a)$ называется *приращением аргумента*, а разность $(f(x)-f(a))$ – соответствующим этому приращению *приращением функции*. Обозначим

$$x-a=\Delta x,\ f(x)-f(a)=\Delta y.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2**. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x=a$, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, где $\Delta y$ – приращение функции, соответствующее приращению аргумента $\Delta x$ в точке $x=a$.

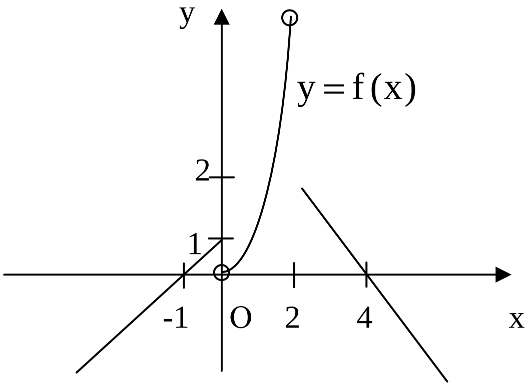



Рис. 8

**ПРИМЕР**. Исследовать функцию

$$y=\begin{cases} x+1\,,\ x\le 0 \\ x^2 \quad ,\ 0<x<2 \\ 4-x,\ x\ge 2 \end{cases}$$

на непрерывность в точках

$x=0,\ x=2,\ x=4$ (рис. 8).

1) $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=1, \lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0-}f(x)\ne \lim\limits_{x\to 0+}f(x)\Rightarrow$ в точке $x=0$ функция непрерывной не является, то есть $x=0$ – *точка разрыва*.

2) $x=2$: $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=4, \lim\limits_{x\to 2+}f(x)=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2-}f(x)\ne \lim\limits_{x\to 2+}f(x)\Rightarrow$ $x=2$ также является точкой разрыва.

3) $x=4$: $\lim\limits_{x\to 4-}f(x)=\lim\limits_{x\to 4+}f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 4}f(x)=4,\ f(4)=0\Rightarrow$ в точке $x=4$ функция непрерывна.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функция называется *непрерывной на интервале*, если она непрерывна во всех его точках.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x=a$ справа (слева), если она определена в этой точке и

1) существует конечный $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$ $(\lim\limits_{x\to a-}f(x))$

2) $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=f(a)$ $(\lim\limits_{x\to a-}f(x)=f(a))$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функция называется непрерывной на отрезке $[a,\ b]$, если она непрерывна во всех его внутренних точках и непрерывна справа в точке $x=a$ и слева в точке $x=b$.

График непрерывной функции можно нарисовать без отрыва. Можно показать, что все простейшие элементарные функции

$$y=x^{\alpha},\ y=a^{x},\ y=\log_a x,\ y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=tg\,x,\ y=ctg\,x,$$

$$y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=arctg\,x, y=arcctg\,x$$

непрерывны на всей области определения.

Непрерывность, например, функции $y=\cos x$ в точке $x=0$ означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1.$

## КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК РАЗРЫВА

Непрерывность функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ означает, что

1) функция в точке $x=a$ определена,

2)существуют конечные и равные односторонние пределы в этой точке,

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a).$

Невыполнение хотя бы одного из этих условий говорит о том, что $x=a$ – точка разрыва.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Точка $x=a$ называется точкой *разрыва первого рода*, если для функции $y=f(x)$ существуют *конечные* пределы $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a+)$ и $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=f(a-)$, причем не все три числа $f(a),\ f(a+), f(a-)$ равны между собой. В частности, если $f(a+)=f(a-)\neq f(a)$, то точка $x=a$ называется *устранимой точкой разрыва*.

**ПРИМЕР.** $y=\dfrac{\sin x}{x}$ О.Д.З.: $x\neq 0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, но $f(0)$ не существует. Значит, по определению $x=0$ – точка разрыва первого рода, причем устранимая. Такой разрыв можно устранить: для этого нужно доопределить функцию в нуле:

$$y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1\ , & x=0\end{cases}$$ – функция, непрерывная для всех $x\in R.$

**ПРИМЕР.** $y=\begin{cases} x+1\,, & x\le 0 \\ x^2 & ,0<x<2 \\ 4-x, & x\ge 2 \end{cases}$. Точки $x=0,\ x=2$ являются точками разрыва первого рода этой функции, причем неустранимого.

Величина $\left|f(a+)-f(a-)\right|$ называется *скачком* функции в точке $x=a$.

**ПРИМЕР**. $y=arctg\,\dfrac{1}{x-1}$. О.Д.З. $x\ne 1$.

Так как $\lim\limits_{x\to 1\pm}\dfrac{1}{x-1}=\pm\infty$ и $arctg\ t\underset{t\to\pm\infty}{\to}\pm\dfrac{\pi}{2}$, то $\lim\limits_{x\to 1+}arctg\,\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1-}arctg\,\dfrac{1}{x-1}=-\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=1$ – точка неустранимого разрыва первого рода.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Точка $x=a$ называется точкой *разрыва второго рода* функции $y=f(x)$, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует.

**ПРИМЕР**. $y=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$. О.Д.З. $x\ne 1, x\ne -2$.

$\lim\limits_{x\to 1\pm}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\pm\infty\Rightarrow x=1$ – точка разрыва второго рода,

$\lim\limits_{x\to -2\pm}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\mp\infty\Rightarrow x=-2$ – также точка разрыва второго рода.

**ПРИМЕР**. $y=\sin\dfrac{1}{x}$. О.Д.З. $x\ne 0$.

$\lim\limits_{x\to 0\pm}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{z\to\pm\infty}\sin z$, $z=\dfrac{1}{x}$, не существует, значит, по определению $x=0$ – точка разрыва второго рода.

## СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

**ТЕОРЕМА**. Пусть функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ непрерывны в точке $x = a$. Тогда $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(a) \neq 0\right)$ также непрерывны в точке $x = a$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**.

По определению 1 непрерывности функции в точке $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$. Тогда по теореме об арифметических операциях над функциями, имеющими предел,

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = f(a) \pm g(a), \lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = f(a) \cdot g(a), \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)},$$

так как $g(a) \neq 0$, что и требовалось доказать.

Пусть $\forall x \in X$ определена функция $u = u(x)$ и $U$ – область ее значений. Кроме того, $\forall u \in U$ определена функция $y = y(u)$. Тогда говорят, что на множестве $X$ задана сложная функция $y = y\left(u(x)\right)$ (суперпозиция, или композиция функций $y = y(u)$ и $u = u(x)$).

**ПРИМЕРЫ**. 1) $y = \sin^2 x$ – композиция функций $y = u^2$ и $u = \sin x$.

2) $y = \ln \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$: $u = 3x - \dfrac{\pi}{4}$, $v = \sin u$, $u = \ln v$.

3) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$: $u = x^2 + 4x + 5$, $y = u^{-1}$.

**ТЕОРЕМА** (о непрерывности сложной функции). Пусть функция $u = u(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ и $u(x_0) = u_0$. Кроме того, функция $y = y(u)$ непрерывна в точке $u = u_0$. Тогда сложная функция $y = y\left(u(x)\right)$ непрерывна в точке $x = x_0$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Так как $u = u(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то по определению 1 $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0) = u_0$. Так как $y = y(u)$ непрерывна в точке $u = u_0$, то $\lim\limits_{u \to u_0} y(u) = y(u_0)$. Найдем $\lim\limits_{x \to x_0} y\left(u(x)\right) = \lim\limits_{u \to u_0} y(u) = y(u_0) = y\left(u(x_0)\right)$. Что и требовалось доказать.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. *Элементарной* называется всякая функция, которая задана одним аналитическим выражением, составленным из простейших элементарных функций при помощи четырех арифметических действий и суперпозиций, примененных *конечное* число раз.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Из доказанных теорем следует, что все элементарные функции непрерывны в области определения.

**ПРИМЕРЫ**. 1) $y=\begin{cases} x\ ,x\le 0 \\ x^2,\ x>0 \end{cases}$ – элементарной не является, так как задана двумя аналитическими выражениями.

2) $y=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^7}{7}+...+\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}+...$ – элементарной не является, так как представляет собой сумму бесконечного числа слагаемых.

3) $y=\dfrac{2}{x^4+4}\cdot\sqrt[3]{\log_5\dfrac{\left(x^2+4x+5\right)\cos 2x+\mathrm{arc}\,tg^4(x^3-1)}{(2^x+2^{2x}+3)\sqrt[5]{\sin(3x+\dfrac{\pi}{3})}}}$ – элементарная функция, она непрерывна всюду, где определена.

Пусть $y=y(x)$ определена $\forall x\in[a,b]$, $y(a)=\alpha$, $y(b)=\beta$. Если каждому значению $y\in[\alpha,\beta]$ (или $y\in[\beta,\alpha]$), $\alpha\ne\beta$ соответствует *единственное значение* $x\in[a,b]$, то говорят, что функция $x=x(y)$ – *обратная* для функции $y=y(x)$.

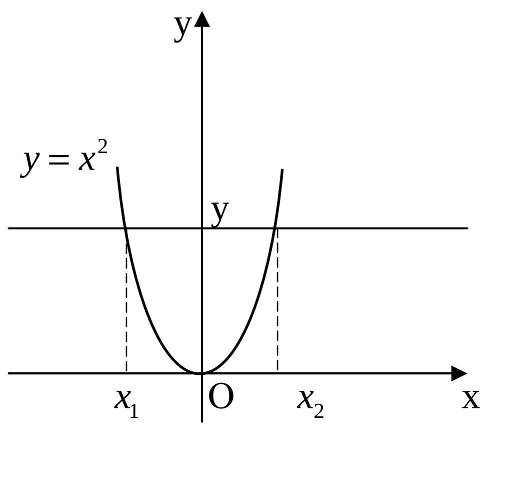



Рис. 9

**ПРИМЕРЫ**. 1) $y=x^2$, $x\in R$

$y\in[0,+\infty)$ – обратная функция не существует (рис.9): любому значению $y>0$ соответствует два значения $x$.

2) $y = x^2,\ x \in \left(-\infty, 0\right] \Rightarrow y \in \left[0, +\infty\right)$ – обратная функция определена и $x = -\sqrt{y}$ (рис. 10).

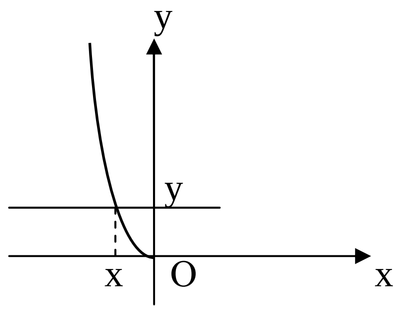



Рис. 10

3) $y = \sin x,\ x \in R$ – обратная функция не существует. Но если рассматривать только $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right]$, то $x = \arcsin y$ – обратная функция (рис. 11). Обратная функция существует также, если считать, например, что $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ или $x \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right]$ и т.д, так как одному значению $y \in \left[-1, 1\right]$ на каждом из этих промежутков соответствует единственное значение $x$.

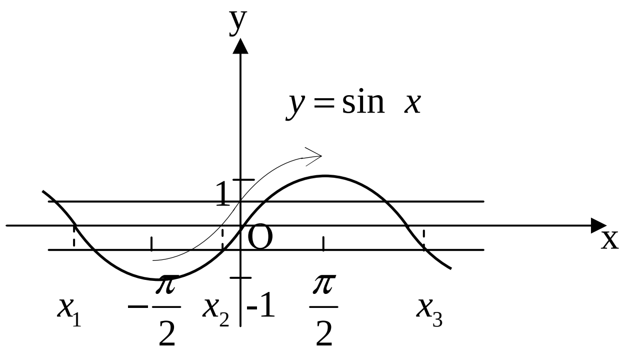



Рис. 11

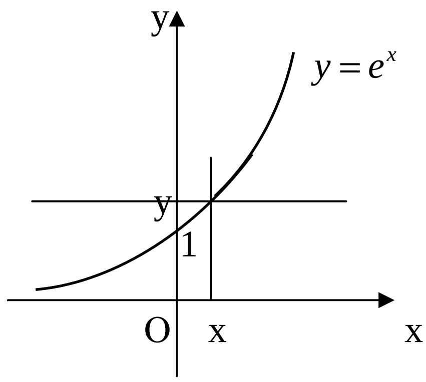



Рис.12

4) $y = e^x,\ x \in R$ Обратная функция $x = \ln y$ (рис.12).

Как видно из рассмотренных примеров, существование обратной функции связано с монотонностью функции $y = y(x)$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Функция $y = y(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на множестве X, если

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow y\left(x_1\right) < y\left(x_2\right)\ \left(y\left(x_1\right) > y\left(x_2\right)\right).$$

Возрастающие или убывающие функции называются *строго монотонными*.

**ТЕОРЕМА** (о непрерывности обратной функции). Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a,b]$ и $y(a)=\alpha,\ y(b)=\beta.$ Тогда на $[\alpha,\beta]$ (или на $[\beta,\alpha]$) определена обратная функция $x = x(y)$, также непрерывная и строго монотонная.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Пусть, например, $y = y(x)$ возрастает на $[a,b]$, то есть если $x_1, x_2 \in [a,b]$ и $x_1 < x_2$, то $y_1 = y(x_1) < y(x_2) = y_2$. Покажем, что $x = x(y)$ также возрастает, то есть если $y_1 < y_2$, то $x_1 < x_2$. Предположим противное: $x_1 \ge x_2,\ x_1 = x(y_1),\ x_2 = x(y_2).$ Тогда, так как по условию $y = y(x)$ возрастает, то $y_1 \ge y_2$, что противоречит выбору $y_1 < y_2$. Таким образом, $x = x(y)$ возрастает.

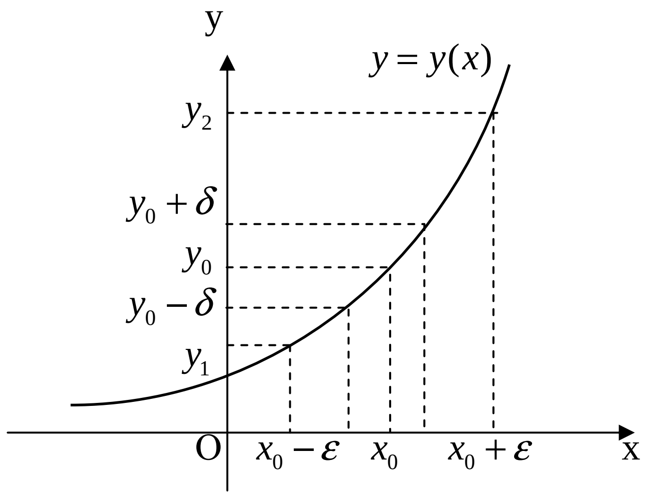



Рис. 13

Пусть $x_0 \in [a,b]$ – произвольная точка, $y(x_0) = y_0$, $y_0 \in [\alpha,\beta]$. Покажем, что $x = x(y)$ непрерывна в точке $y_0$, то есть $\lim\limits_{y\to y_0} x(y) = x(y_0) = x_0.$ По определению 2 предела функции в точке по Коши это означает, что
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall y \in [\alpha,\beta],$

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow |x(y) - x(y_0)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и такое, что $x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon \in [a,b];\ y(x_0 - \varepsilon) = y_1,.$ $y(x_0+\varepsilon) = y_2$ (рис. 13). Так как $y = y(x)$ возрастает, то $y_1 < y_0 < y_2$.

Выберем $\delta > 0$ так, что $y_0 - \delta > y_1, y_0 + \delta < y_2.$ Если $|y - y_0| < \delta$, то
$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \Rightarrow \quad y_1 < y < y_2 \Rightarrow x(y_1) < x(y) < x(y_2) \Rightarrow$
$x_0 - \varepsilon < x(y) < x_0 + \varepsilon$, так как $x = x(y)$ тоже возрастает. Таким образом,
$|x - x_0| < \varepsilon$, что и означает непрерывность обратной функции.

**ТЕОРЕМА** (об устойчивости знака непрерывной в точке функции). Пусть $y = y(x)$ непрерывна в окрестности точки $x = a$ и $y(a) > 0\ (y(a) < 0)$, тогда существует $\delta > 0$ такое, что $y(x) > 0$ $(y(x) < 0)$ для всех $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Эта теорема имеет ясный *геометрический смысл*: если непрерывная функция положительна (отрицательна) в точке $x = a$, то она положительна (отрицательна) и где-то рядом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Пусть, например, $y(a)>0$. Так как $y=y(x)$ непрерывна в точке $x=a$, то по определению 2 предела функции в точке

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\in(a-\delta,a+\delta)\Rightarrow\left|y(x)-y(a)\right|<\varepsilon\Leftrightarrow y(a)-\varepsilon<y(x)<y(a)+\varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon=\dfrac{y(a)}{2}>0\Rightarrow\ \dfrac{y(a)}{2}<y(x)<\dfrac{3y(a)}{2}\Rightarrow\quad y(x)>0\ \forall x\in(a-\delta,a+\delta).$

Случай $y(a)<0$, рассматривается аналогично с $\varepsilon=\dfrac{\left|y(a)\right|}{2}$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Функция $y=y(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве $X$, если $\exists M\in R\ (m\in R)$ такое, что $y(x)\le M\ \left(y(x)\ge m\right)\ \forall x\in X$.

Функция, ограниченная снизу и сверху, называется *ограниченной* на $X$, то есть $m\le y(x)\le M\ \ \forall x\in X$.

**ТЕОРЕМА** (первая теорема Вейерштрасса). Всякая непрерывная *на отрезке* функция ограничена на этом отрезке (без доказательства).

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Непрерывная функция, заданная *на интервале*, может быть неограниченной.

$y=\dfrac{1}{x},\ x\in(0,2).$

Очевидно, $\dfrac{1}{x}\ge\dfrac{1}{2}$, то есть функция ограничена снизу, но сверху на этом интервале функция неограниченна (рис. 14).

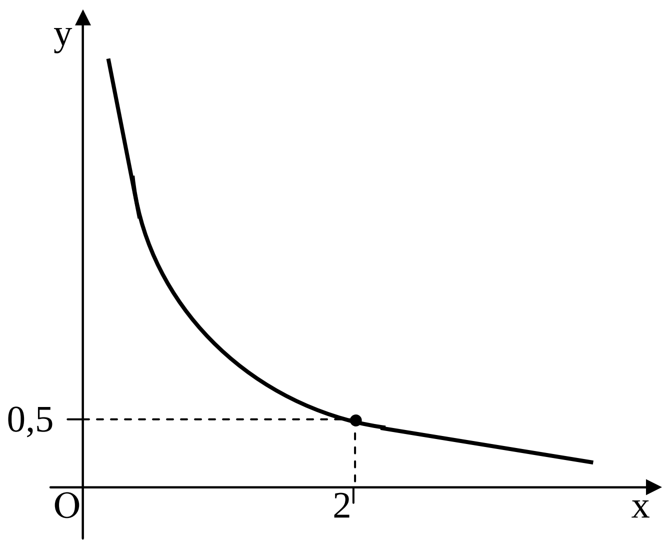



Рис. 14

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Точка $x = x_0$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $y = y(x)$, если $\exists\delta > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow$

$y(x) \le y(x_0)$ ($y(x) \ge y(x_0)$). Точки локального максимума или минимума называются токами *локального экстремума* (или просто точками экстремума) (рис.15).

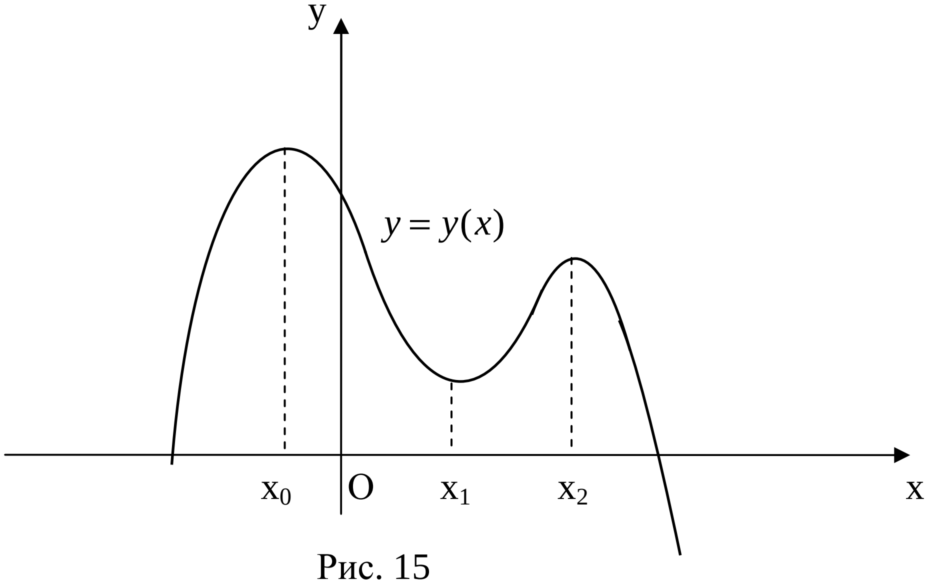
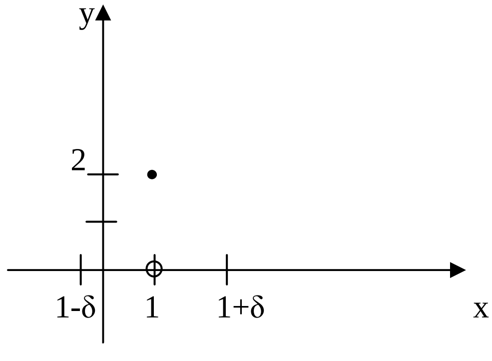



Рис. 15

$x = x_0, x = x_2$ – точки максимума, $x = x_1$ – точка минимума.

**ПРИМЕР**. $y = \begin{cases} 0, & x \ne 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$




$y(1) = 2,\ y(x) = 0\ \forall x \ne 1 \Rightarrow x = 1$ – точка максимума (рис. 16).

Рис. 16

**ТЕОРЕМА** (вторая теорема Вейерштрасса). Всякая *непрерывная на отрезке* функция *достигает* на этом отрезке своих наименьшего и наибольшего значений (без доказательства).

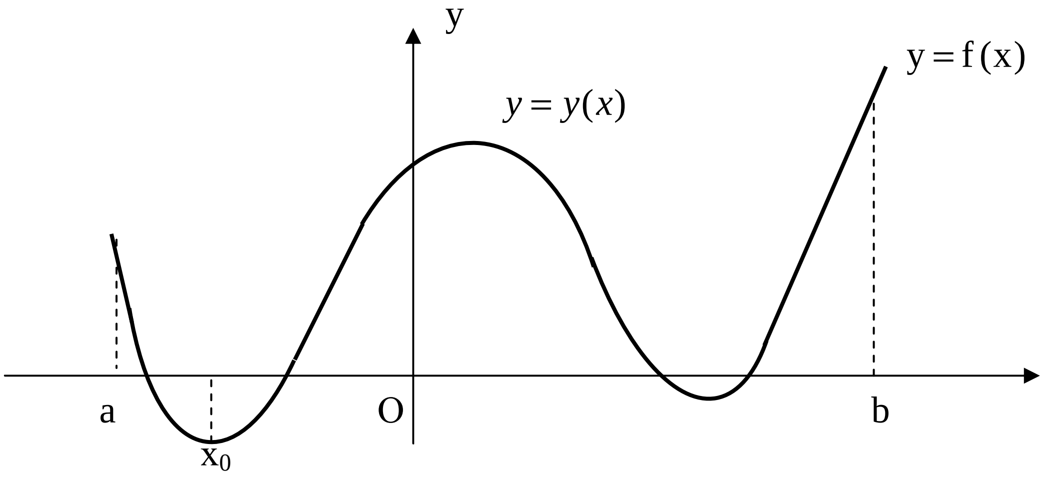



Рис. 17

Как видно из рисунка 17, наибольшее и наименьшее значения достигаются либо *на концах отрезка*, либо *в точках локального экстремума*: $y_{наим.} = y(x_0)$, $x_0 \in [a,b]$ – точка минимума, $y_{наиб.} = y(b)$, $b$ – правый конец отрезка.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Непрерывная функция, заданная *на интервале*, может не иметь ни наименьшего, ни наибольшего значений (рис. 18).

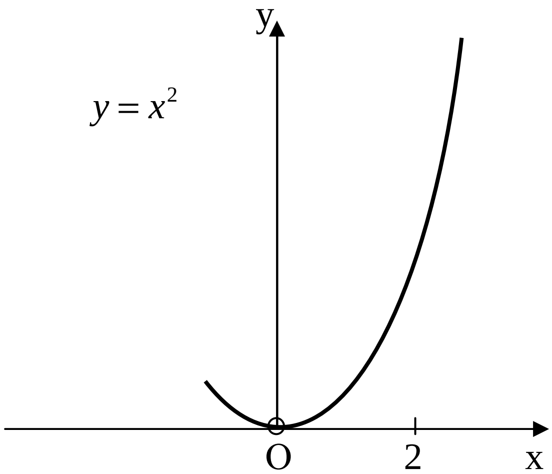



Рис. 18

$y = x^2$, $x \in (0,2) \Rightarrow 0 \le x^2 \le 4$, то есть функция на $(0,2)$ ограничена, но наибольшее значение $y = 4$ и наименьшее $y = 0$ недостижимы.

**ТЕОРЕМА** (Больцано – Коши). Пусть $y = y(x)$ непрерывна для всех $x \in [a,b]$ и $y(a) \cdot y(b) < 0$. Тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $y(c) = 0$. *Геометрический смысл* этой теоремы ясно виден на рисунках: перейти с верхней полуплоскости $(y > 0)$ на нижнюю $(y < 0)$, двигаясь вдоль графика непрерывной функции, не пересекая ось $OX$, нельзя (рис. 19, 20).

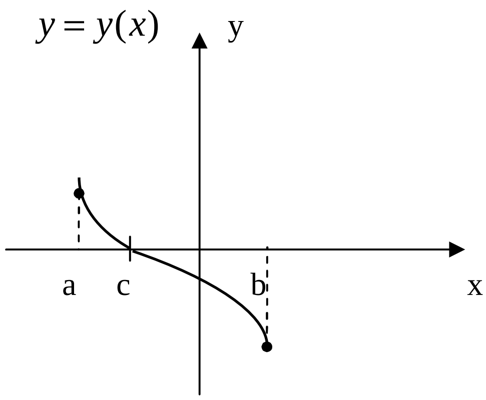



Рис. 19 $\quad y(a)>0, \quad y(b)<0$

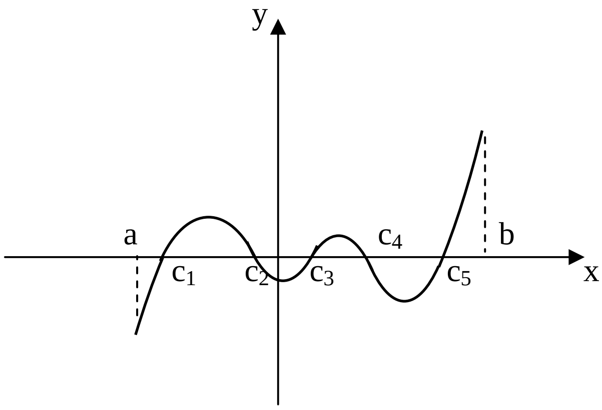



Рис. 20 $\quad y(a)<0, \quad y(b)>0$

Без доказательства.

**ТЕОРЕМА** (о промежуточных значениях). Пусть функция $y=y(x)$ непрерывна для всех $x\in[a,b]$ и $m,M$ – ее наименьшее и наибольшее значения соответственно. Тогда для любого значения $\gamma\in[m,M]$ найдется $c\in[a,b]$ такое, что $y(c)=\gamma$.

Теорема утверждает, что непрерывная функция *принимает все промежуточные* значения между своими наибольшим и наименьшим значениями.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Рассмотрим $\gamma\in(m,M)$, при этом $y(x_m)=m,\ y(x_M)=M,\ x_m,x_M\in[a,b]$ по теореме 6. Пусть $\varphi(x)=y(x)-\gamma$. Эта функция непрерывна при всех $x\in[a,b]$ по теореме 1. Кроме того, очевидно, $\varphi(x_m)=m-\gamma<0,\ \varphi(x_M)=M-\gamma>0$. Тогда для функции $y=\varphi(x)$ выполнены условия теоремы 7, то есть существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $\varphi(c)=y(c)-\gamma=0\Rightarrow y(c)=\gamma$. Что и требовалось доказать.

## Глава 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ, ЕЕ ФИЗИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

К понятию производной приводят различные задачи из физики, механики, геометрии и других областей знания. Рассмотрим две такие задачи.

**ЗАДАЧА О ВЫЧИСЛЕНИИ МГНОВЕННОЙ СКОРОСТИ**. Пусть тело движется с переменной скоростью и $s(t)$ – путь, пройденный за время $t$. Определить мгновенную скорость в любой момент времени $t$.

Если к моменту времени $t = t_0$ пройдено расстояние $s(t_0)$, а к моменту $t = t_1, t_1 > t_0$ – расстояние $s(t_1)$, то $\dfrac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = v_{ср.}$ – средняя скорость движения. Если $t_1 - t_0 = \Delta t$ – достаточно мало, то $\dfrac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} \approx v(t_0)$, причем это приближенное равенство тем точнее, чем меньше промежуток времени $\Delta t$, и если $t_1 \to t_0$, то есть $\Delta t \to 0$, то можно утверждать, что

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

– мгновенная скорость в момент $t = t_0$.

## ЗАДАЧА О ПРОВЕДЕНИИ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

Вначале дадим определение касательной к произвольной кривой в некоторой ее точке (известное определение касательной к окружности для произвольной кривой не подходит, например: ось $OY$ имеет с параболой $y = x^2$ одну общую точку, однако касательной к ней не является).

*Секущей* будем называть прямую, проходящую через две точки, лежащие на кривой.

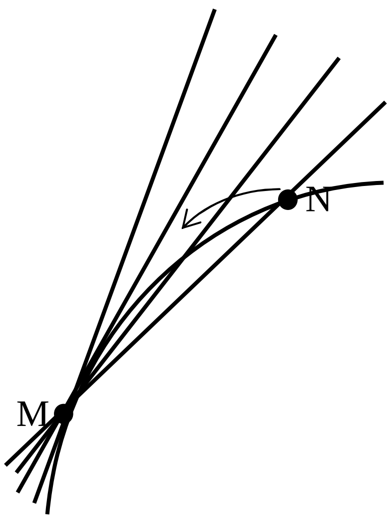



Рис. 21

$MN$ – секущая.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Касательной к кривой в точке $M$ называется предельное положение ее секущей $MN$, когда точка $N$, оставаясь на кривой, стремится к $M$ (если такое положение существует) (рис. 21).

Рассмотрим функцию $y = y(x)$. Напишем уравнение касательной к ее графику в точке $M(x_0, y(x_0))$.

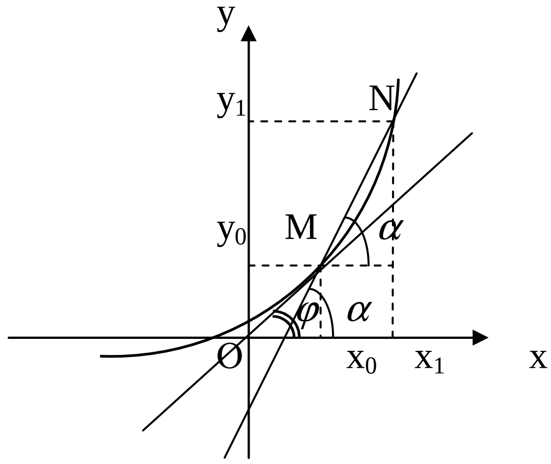



Рис. 22

$y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y(x_1)$.

$\alpha$ – угол между MN и OX, $\varphi$ – угол между касательной и OX (рис. 22). Будем искать уравнение касательной в виде $y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$, где $k = tg\,\varphi$ – угловой коэффициент прямой.

$$k_c = tg\,\alpha = \frac{y(x_1) - y\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}$$

– угловой коэффициент секущей.

Если $N \to M$, то $x_1 \to x_0$, то есть $x_1 - x_0 = \Delta x \to 0$. Если $\Delta x$ достаточно мало, то угловой коэффициент секущей $tg\,\alpha \approx tg\,\varphi,$ и равенство тем точнее, чем меньше $\Delta x$. Можно утверждать, что

$$k = tg\,\varphi = \lim_{x \to x_0} \frac{y\left(x_1\right) - y\left(x_0\right)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y\left(x_0 + \Delta x\right) - y\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

– угловой коэффициент касательной.

Так как при решении обеих задач (и не только их) пришлось выполнять одни и те же действия, то для обозначения этих действий введем новое понятие.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Производной функции $y = y\left(x\right)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения ее приращения в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{y\left(x\right) - y\left(x_0\right)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y\left(x_0 + \Delta x\right) - y\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

или

$$y'\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Отсюда $k = y'\left(x_0\right)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции $y = y\left(x\right)$ в точке $M\left(x_0, y\left(x_0\right)\right)$. Уравнение касательной

$$y - y\left(x_0\right) = y'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).$$

*Геометрический смысл производной*: производная функции в точке равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

*Физический смысл производной*: производная функции в точке характеризует скорость ее изменения в окрестности этой точки. Отсюда следует, что если $y(x)=C=const,$ то $y'(x)=0.$

Так как из определения следует, что производная в разных точках, вообще говоря, различна, то она сама является функцией.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Очевидно, для того чтобы функция имела производную, необходимо, чтобы она была непрерывной. Тогда $\Delta y \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0$ (определение 2 непрерывности), поэтому при вычислении производной по определению необходимо раскрыть неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$.

**ПРИМЕР**. Вывести формулу вычисления производной функции $y=\sqrt{x}.$

$y(x)=\sqrt{x} \Rightarrow y(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x}.$

По определению

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Так как понятие производной связано с понятием касательной, то *в тех точках, где график не имеет касательной, функция не имеет производной*. Также ее нет в тех точках, где касательная к графику функции есть, но она перпендикулярна оси OX.

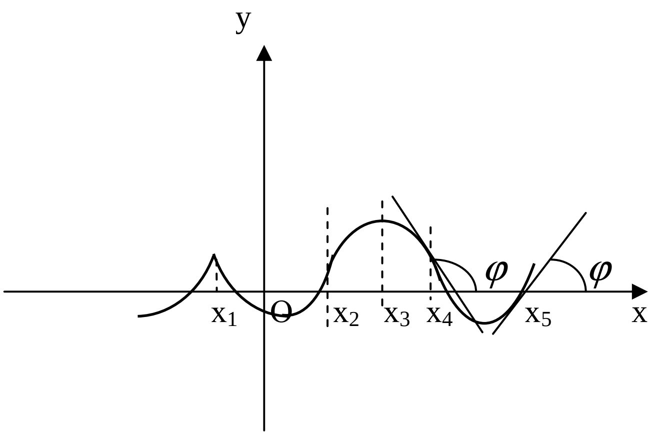



Рис. 23

$y'(x_1)$ не существует, так как предельные положения левой и правой секущих различны (рис. 23).

$y'(x_2)$ не существует, так как предельное положение секущей в этой точке вертикально, то есть перпендикулярно оси OX (рис. 23).

$y'(x_3)=tg\,0=0$, $y'(x_4)=tg\,\varphi<0$ ($\varphi$ – тупой). $y'(x_5)=tg\,\varphi>0$ ($\varphi$ – острый), $\varphi$– угол между касательной и положительным направлением OX (рис. 23).

## ОДНОСТОРОННИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Введем понятия левой и правой производных функции $y=f(x)$ по аналогии с понятием левого и правого предела.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. *Правой производной* функции $y=f(x)$ в точке $x$ называется $\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ при условии, что этот предел существует.

То, что $\Delta x\to 0+$ означает, что $\Delta x>0$, то есть при вычислении правой производной $f'(x+)$ к точке $x$ приближаются справа.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. *Левой производной* функции $y=f(x)$ в точке $x$ называется $\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ при условии, что этот предел существует.

При вычислении левой производной $f'(x-)$ полагается $\Delta x<0$.

Имеют место утверждения:

1. если функция имеет в точке $x$ производную $f'(x)$, то она имеет в этой точке как левую, так и правую производные, причем $f'(x+)=f'(x-)=f'(x)$

2. если функция имеет в точке $x$ как правую, так и левую производные, причем эти производные равны между собой, то в точке $x$ существует производная, причем $f'(x)=f'(x+)=f'(x-)$.

3. если $f'(x+)\neq f'(x-)$, то в точке $x$ функция не имеет производной.

**ПРИМЕР**. Рассмотрим функцию $y=|x|=\begin{cases}x, & если\, x\geq 0\\ -x, & если\, x<0\end{cases}$.

Вычислим односторонние производные (правую и левую) в точке $x=0$.

$y'(0+)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{0+\Delta x-0}{\Delta x}=1$, $y'(0-)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{0-\Delta x-0}{\Delta x}=-1$ . Односторонние производные неравны, значит, $y'(0)$ не существует. В других точках эта функция производную имеет.

## ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Функция $y = y(x)$ называется дифференцируемой в точке $x$, если ее приращение в этой точке, соответствующее приращению $\Delta x$, представимо в виде $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$ где $A = const,$ а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0,$ то есть $\alpha(\Delta x)$ – б.м. функция в точке $\Delta x = 0.$

**ТЕОРЕМА** (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции) Для того, чтобы функция $y = y(x)$ была дифференцируемой в некоторой точке $x,$ необходимо и достаточно, чтобы $y = y(x)$ имела в этой точке конечную производную $y'(x)$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**.

1. Необходимость: $\Delta y = A\Delta x + \alpha(x)\Delta x,$ $\alpha(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0 \Rightarrow$ существует конечная производная $y'(x)$.

Если $\Delta x \neq 0,$ то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$. Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\big(A + \alpha(\Delta x)\big) = A$, то существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A,$ но по определению $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) \Rightarrow y'(x) = A.$

2. Достаточность: существует конечная производная $y'(x)$
$\Rightarrow \Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$ где $\alpha(\Delta x)$ – б.м. в точке $\Delta x = 0.$

Обозначим $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - y'(x) = \alpha(\Delta x)$. По условию существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$, поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - y'(x)\right) = 0$.

Тогда $\Delta y = y'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$ и если обозначить $A = y'(x)$, то теорема доказана.

Таким образом, мы доказали, что *дифференцируемость функции в некоторой точке эквивалентна существованию* в этой точке *конечной производной*, поэтому процедуру вычисления производной называют дифференцированием.

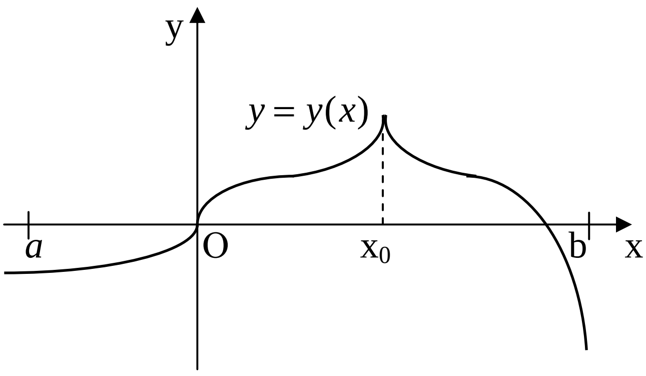



Рис. 24

$y = y(x)$ – непрерывна,
$\forall x \in (a,b)$, дифференцируема,
$\forall x \in (a,b)$, кроме $x = 0$, $x = x_0$,
так как в точке $x = 0$ $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, а в точке $(x_0,\ y(x_0))$ не существует касательная (рис. 24).

Если $y = y(x)$ дифференцируема в точке $x$, то ее приращение в этой точке $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,\ A = const$ состоит из двух частей: $A\Delta x$ – линейная относительно $\Delta x$ и $\alpha(\Delta x)\Delta x$ – нелинейная относительно $\Delta x$, б.м. более высокого порядка малости, чем $\Delta x$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. *Дифференциалом* функции $y = y(x)$ в точке $x$ называется главная *линейная часть ее приращения* в этой точке: $dy = y'(x)\Delta x.$
Если $y(x) = x,$ то $y'(x) = 1,$ поэтому $dx = 1 \cdot \Delta x.$ Принято считать, что если $x$ – независимая переменная, то $dx = \Delta x.$ Итак, по определению $dy = y'(x)dx$.

**ПРИМЕР**. $y = \sqrt{x}$ – найти $dy.$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dy(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$

В частности $$dy(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}dx, \quad dy(1) = \frac{1}{2}dx.$$

**ТЕОРЕМА** (о связи непрерывности и дифференцируемости). Пусть функция $y = y(x)$ дифференцируема в точке $x$, тогда она непрерывна в этой точке.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. По определению дифференцируемости приращение функции $y = y(x)$ представимо в виде $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,\ A = const$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) = 0$, что по определению 2 означает непрерывность $y = y(x)$ в точке $x$.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Обратное утверждение неверно, то есть *не всякая непрерывная функция дифференцируема* (график непрерывной функции может иметь касательную не во всех точках).

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

**ТЕОРЕМА** (о производной сложной функции). Пусть функция $u = u(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x$, а функция $y = y(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u = u(x)$, тогда сложная функция $y = y(u(x))$ дифференцируема в точке $x$ и $y' = y'(u)u'(x)$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Зададим $\Delta x \neq 0$. Тогда функция $u = u(x)$ получит приращение $\Delta u$ (быть может $\Delta u = 0$), а функция $y = y(u)$ – приращение $\Delta y$. Так как функция $y = y(u)$ дифференцируема в точке $u = u(x)$, то по определению $\Delta y = y'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u$, где $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = 0$. Разделим $\Delta y$ на $\Delta x \neq 0$:
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. По условию $u = u(x)$ дифференцируема, значит,
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$ по теореме о связи непрерывности и дифференцируемости. Таким образом, если $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$. Отсюда имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} y'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x} = y'(u)u'(x) + \lim_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x} = y'(u)u'(x).$$

Итак, $y' = y'(u)u'(x)$, что и требовалось доказать.

**ПРИМЕР**. Найти производную функции $y = \sqrt{7x + 8}$.

Это сложная функция: $y = \sqrt{u}$, $u = 7x + 8$.

Поэтому $y' = y'(u)u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}(7x + 8)' = \dfrac{1}{2\sqrt{7x + 8}} \cdot 7.$

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

**ТЕОРЕМА** (о производной обратной функции). Пусть функция $y = y(x)$ удовлетворяет условиям теоремы о непрерывности обратной функции в некоторой окрестности точки $x$, дифференцируема в этой точке и $y'(x) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = x(y)$ дифференцируема в соответствующей точке $y = y(x)$ и $x'(y) = \dfrac{1}{y'(x)}$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Зададим приращение $\Delta y \neq 0$. Так как по условию теоремы о непрерывности обратной функции $x = x(y)$ и $y = y(x)$ строго монотонны, то $\Delta x \neq 0$. Тогда $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$. По условию функция $y = y(x)$ дифференцируема, значит, непрерывна, поэтому $x = x(y)$ также непрерывна по теореме о непрерывности обратной функции. Отсюда $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ (определение 2).

$x'(y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{1}{y'(x)}$, так как по условию $y = y(x)$ дифференцируема и $y'(x) \neq 0$. Что и требовалось доказать.

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СУММЫ, РАЗНОСТИ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО

**ТЕОРЕМА**. Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы в некоторой точке $x$. Тогда их сумма, разность, произведение и частное (при $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \ (u \cdot v)' = u'v + v'u, \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Формулу $(u \pm v') = u' \pm v'$ вывести самостоятельно.

Рассмотрим функцию $y = u(x)v(x)$.Зададим приращение $\Delta x \neq 0$, тогда

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x), \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x) \Rightarrow$$

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u, \ v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v.$$

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = uv' + vu',$$

так как $u = u(x)$ дифференцируема по условию, значит, непрерывна, а потому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$.

Пусть $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}, \ v(x) \neq 0$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+\Delta v} = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$

так как $v(x)$ по условию дифференцируема, значит, непрерывна, а потому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0.$ Что и требовалось доказать.

## ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

| | | |
|---|---|---|
| 1. $(C)' = 0$ | 2. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$ | 3. $(a^u)' = a^u\cdot u'$ |
| 4. $(e^u)' = e^u\cdot u'$ | 5. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$ | 6. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ |
| 7. $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$ | 8. $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$ | 9. $(tg\, u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$ |
| 10. $(ctg\, u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$ | 11. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | 12. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| 13. $(arctg\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ | 14. $(arcctg\, u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$ | |

Докажем приведенные формулы, используя определение производной и доказанные теоремы.

7. $(\sin x)' = \cos x.$

По определению производной

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos(x+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x) = \cos x,$$

так как $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 0$ (первый замечательный предел) и функция $y = \cos x$ непрерывна.

8. $(\cos x)' = -\sin x.$

Используем формулы приведения и теорему о производной сложной функции:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x.$$

9. $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Доказать самостоятельно, используя формулы 7, 8 и теорему о производной частного: $tg\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}.$

10. $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

Доказать самостоятельно.

5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}.$

По определению

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a \dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln\ a},$$

так как $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ (второй замечательный предел) и $y = \log_a x$ – непрерывная функция.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Так как $\ln e = 1$, то $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

Найдем производную функции $y = \ln|x|$. По определению модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & если\ \ x \ge 0 \\ -x, & если\ \ x < 0 \end{cases}, \text{ поэтому } (\ln|x|)' = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & если\ x \ge 0 \\ \dfrac{1}{-x}\cdot(-x)', & если\ x < 0 \end{cases}, \text{ то есть}$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}\quad \forall x \ne 0.$$

3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a.$

Функция $x = \log_a y$ – обратная для функции $y = a^x$. По теореме о производной обратной функции

$$y'(x) = \left(a^x\right)' = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{(\log_a y)'} = y \ln a,$$

но $$y = a^x \Rightarrow \left(a^x\right)' = a^x \ln a.$$

11. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $x \in [-1;1]$. $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ – обратная функция, поэтому по теореме о производной обратной функции имеем:

$$y'(x) = \left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

так как $$\cos y > 0 \ \ \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Заметим, что функция $y = \arcsin x$ дифференцируема во всех точках $(-1;1)$, а $y'(1), y'(-1)$ не существуют.

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Воспользуемся известным тождеством:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\arcsin x)' + (\arccos x)' = 0 \Rightarrow (\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

13. $\left(arctg\, x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

Для функции $y = arctg\, x$, $x \in R$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $x = tg\, y$ – обратная, поэтому

$$y'(x) = \left(arctg\, x\right)' = \frac{1}{(tg\, y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

14. $\left(arcctg\,x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Воспользуемся тождеством:

$$arctg\,x + arcctg\,x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(arctg\,x + arcctg\,x\right)' = 0 \Rightarrow \ (arcctg\,x)' = -\left(arctg\,x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

$\left(x^{\alpha}\right)' = \left(e^{\ln x^{\alpha}}\right)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \left(\alpha \ln x\right)' = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$ по теореме о производной сложной функции и формулам 4 и 6.

**ПРИМЕРЫ**. Найти производные функций

$$y = \sin^2 2x \qquad \text{и} \qquad y = \log_2 \frac{\left(x^2+1\right)\left(2x+3\right)}{\sqrt[3]{4-5x}}.$$

1. $y = \sin^2 2x$ – сложная функция:

$$y = u^2,\ u = \sin v,\ v = 2x \ \Rightarrow y' = 2\sin 2x\left(\sin 2x\right)' = 2\sin 2x \cos 2x\left(2x\right)' = 2\sin 4x.$$

$$2.\left(\log_2 \frac{(x^2+1)(2x+3)}{\sqrt[3]{4-5x}}\right)' = \left(\log_2\left(x^2+1\right) + \log_2\left|2x+3\right| - \frac{1}{3}\log_2\left|4-5x\right|\right)' =$$

$$= \frac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln 2} + \frac{2}{(2x+3)\ln 2} + \frac{5}{3\left(4-5x\right)\ln 2}.$$

## ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

По определению дифференциал (первый дифференциал) функции $y = y\left(x\right)$ вычисляется по формуле $dy = y'\left(x\right)dx$, если $x$ – независимая переменная.

**ПРИМЕР**. $dx^2 = 2xdx,\ d\sin x = \cos x dx,\ d\ln x = \dfrac{dx}{x},\ d\,arctg\,x = \dfrac{1}{1+x^2}dx.$

Покажем, что форма первого дифференциала остается неизменной (является инвариантной) и в том случае, когда аргумент функции $y$ сам является функцией, то есть для сложной функции $y = y\left(u(x)\right)$.

Пусть $u = u\left(x\right),\ y = y\left(u\right)$ дифференцируемы, тогда по определению

$$d\,y\big(u(x)\big)=\Big(y\big(u(x)\big)\Big)'dx=y'(u)u'(x)dx.$$

Кроме того, $d\,u(x)=u'(x)dx \Rightarrow dy=y'(u)du$, что и требовалось доказать.

**ПРИМЕРЫ**.

$d\sin^2 x=2\sin x\,d\sin x=2\sin x\cos x\,dx=\sin 2x\,dx$,

$d\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)=\dfrac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\dfrac{2x\,dx}{x^2+1}$.

Доказанная инвариантность формы первого дифференциала позволяет считать, что $y'(x)=\dfrac{dy}{dx}$, то есть *производная равна отношению дифференциала функции к дифференциалу ее аргумента*, независимо от того, является ли аргумент независимой переменной или функцией.

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in T$. Если функция $x=x(t)$ имеет на множестве $T$ обратную, то $y=y\big(t(x)\big)=y(x)$. Тогда равенства $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, $t\in T$ определяют на множестве $T$ *функцию, заданную параметрически*, $t$ – параметр (промежуточная переменная).

**ПРИМЕР**. Построить график функции $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$, $t\in R$.

| $t$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $\approx 0{,}1$ | $\approx 0{,}5$ | $\approx 1{,}6$ | $\pi$ | $\approx 4{,}5$ | $\approx 5{,}5$ | $\approx 6$ | $2\pi$ |
| $y$ | $0$ | $\approx 0{,}3$ | $1$ | $\approx 1{,}7$ | $2$ | $\approx 1{,}7$ | $1$ | $\approx 0{,}3$ | $0$ |

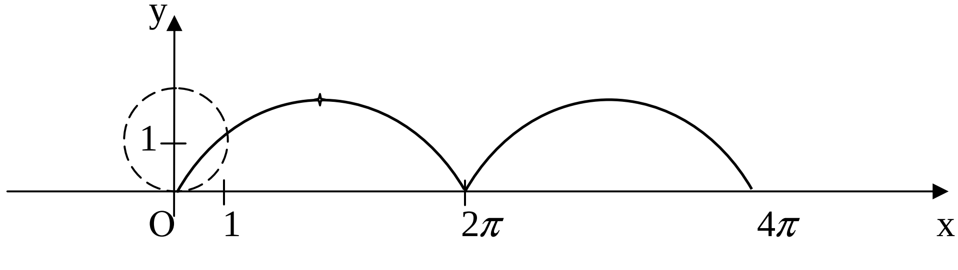



Рис. 25

Построенная кривая называется *циклоидой* (рис. 25) и является траекторией точки на окружности радиуса 1, которая катится без скольжения вдоль оси OX.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Иногда, но не всегда, из параметрических уравнений кривой можно исключить параметр.

**ПРИМЕРЫ**. $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ – параметрические уравнения окружности, так как, очевидно, $x^2 + y^2 = R^2$.

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ – параметрические уравнения эллипса, так как $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ – параметрические уравнения параболы $y = x^2$.

Найдем производную функции, заданной параметрически:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)\,dt}{x'(t)\,dt} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Производная функции, заданной параметрически, – также функция, заданная параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \end{cases}$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Второй производной функции называется производная от ее первой производной.

Производной $n$-го порядка называется производная от ее производной порядка $(n-1)$.

Обозначают производные второго и $n$-го порядка так:

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \left(y'(x)\right)' = \frac{d}{dx}y'(x), \quad y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Из определения второй производной и правила дифференцирования параметрически заданной функции следует, что $y''(x) = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$. Для вычисления третьей производной надо представить вторую производную в виде $\begin{cases} x = x(t) \\ y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} \end{cases}$ и воспользоваться еще раз полученным правилом. Производные старших порядков вычисляются аналогично.

**ПРИМЕР**. Найти производные первого и второго порядков функции

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, t \in R.$$

$$y'_x = \frac{(1-\cos t)'}{(t-\sin t)'} = \frac{\sin t}{1-\cos t} \Rightarrow \begin{cases} x = t - \sin t \\ y'_x = \dfrac{\sin t}{1-\cos t} \end{cases} \Rightarrow y''_{xx} = \frac{\cos t(1-\cos t) - \sin^2 t}{(1-\cos t)^2(1-\cos t)} = -\frac{1}{(1-\cos t)^2}.$$

## ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

**ТЕОРЕМА** (Ферма). Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ экстремум. Если существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Пусть $x = x_0$, например, – точка минимума. По определению точки минимума существует окрестность этой точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в пределах которой $f(x) - f(x_0) \geq 0$, то есть $\Delta y \geq 0$, $\Delta y$ – приращение $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Вычислим односторонние производные в точке $x = x_0$:

$f'(x_0-) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ по теореме о предельном переходе в неравенстве, так как $\Delta y \geq 0$, $\Delta x < 0$;

$f'(x_0+) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, так как $\Delta y \geq 0$, $\Delta x > 0$. Но по условию $f'(x_0)$ существует, поэтому левая производная равна правой, а это возможно лишь если $f'(x_0-) = f'(x_0+) = f'(x_0) = 0$.

Предположение о том, что $x = x_0$ – точка максимума, приводит к тому же.

Геометрический смысл теоремы:

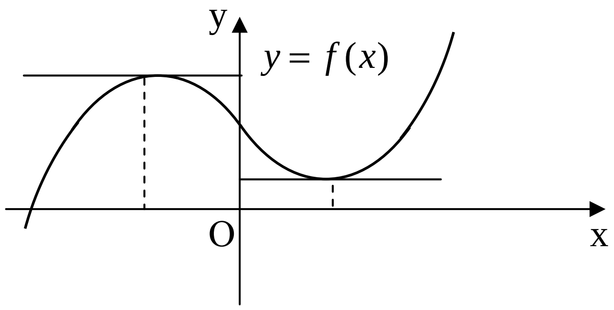



Рис. 26

Если график функции имеет в точке экстремума касательную, то она параллельна оси OX (рис. 26).

**ТЕОРЕМА** (Ролля). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a,b]$, дифференцируема $\forall x \in (a,b)$ и $f(a) = f(b)$, тогда существует $c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = 0.$

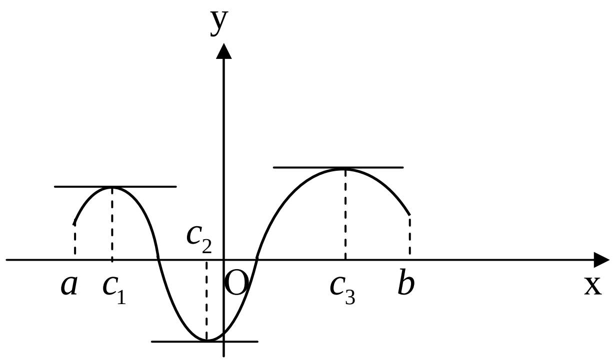



Рис. 27

Геометрический смысл теоремы: если $f(a) = f(b)$, то на графике дифференцируемой функции есть точки, в которых касательная параллельна оси OX (рис. 27).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Так как $y = f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a,b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она достигает на $[a,b]$ своих наибольшего $M$ и наименьшего $m$ значений либо в точках экстремума, либо на концах отрезка.

1. Пусть $M = m$, тогда $f(x) = const \Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b).$

2. Пусть $M > m.$ Так как $f(a) = f(b),$ то либо $M$, либо $m$ достигается в точке экстремума $x = c$, но по теореме Ферма $f'(c) = 0.$ Что и требовалось доказать.

**ТЕОРЕМА** (Лагранжа). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a,b]$ и дифференцируема $\forall x \in (a,b)$, тогда существует $c \in (a,b)$ такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$

Геометрический смысл теоремы:

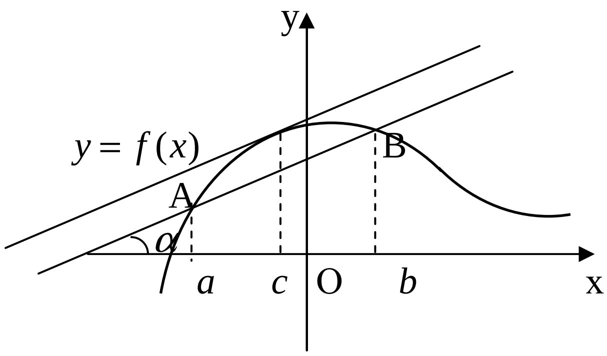



Рис. 28

АВ – секущая (рис. 28) и

$tg\,\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ –угловой ее коэффициент.

$f'(c) = tg\,\varphi$ – угловой коэффициент касательной.

Так как $tg\,\alpha = tg\,\varphi$, то секущая параллельна касательной. Таким образом, теорема утверждает, что существует касательная, параллельная секущей, проходящей через точки А и В.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Через точки $A\big(a, f(a)\big)$ и $B\big(b, f(b)\big)$ проведем секущую АВ. Ее уравнение $\overline{y} = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - \overline{y}(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

$\left|F(x)\right|$ – расстояние между соответствующими точками на графике и на секущей АВ.

1. $F(x)$ непрерывна $\forall x \in [a, b]$ как разность непрерывных функций.

2. $F(x)$ дифференцируема $\forall x \in (a, b)$ как разность дифференцируемых функций.

3. $F(a) = F(b) = 0$.

Значит, $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, поэтому существует $C \in (a, b)$ такая, что

$$F'(c) = 0;\ F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Формула $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ называется *формулой Лагранжа*.

**ТЕОРЕМА** (Коши). Пусть функции $y = f(x), y = g(x)$ непрерывны $\forall x \in [a,b]$, дифференцируемы $\forall x \in (a,b)$ и $g'(x) \neq 0$, тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Покажем, что $g(b) \neq g(a)$. Если бы $g(b) = g(a)$, то функция $y = g(x)$ удовлетворяла бы условию теоремы Ролля, поэтому существовала бы точка $c_1 \in (a,b)$ такая, что $g'(c_1) = 0$ – противоречие условию. Значит, $g'(x) \neq 0$, и обе части формулы определены. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big(g(x) - g(a)\big)$.

$F(x)$ непрерывна $\forall x \in (a,b)$, дифференцируема $\forall x \in (a,b)$ и $F(b) = F(a) = 0$, то есть $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда существует точка $c \in (a,b)$, в которой $F'(c) = 0$, но

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

что и требовалось доказать.

Доказанная формула называется *формулой Коши*.

**ПРАВИЛО Лопиталя** (теорема Лопиталя-Бернулли). Пусть функции $y = f(x), y = g(x)$ непрерывны $\forall x \in (a,b]$, дифференцируемы $\forall x \in (a,b)$, $g'(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Кроме того, существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Так как по условию $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, то доопределим $y = f(x), y = g(x)$ в точке $x = a$, полагая $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $y = f(x), y = g(x)$ станут непрерывными $\forall x \in [a,b]$. Покажем, что $\forall x \in (a,b)$ $g(x) \neq 0$. Предположим, что $g(x) = 0$, тогда существует $c_1 \in (a,x)$ такая, что $g'(c_1) = 0$, так как функция $y = g(x)$ на $[a,x]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Но по условию $g'(x) \neq 0$ – противоречие. Поэтому $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$.

Функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на любом отрезке $[a,x]$, который содержится в $[a,b]$. Напишем формулу Коши:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g(c)}, \qquad c \in (a,x).$$

Отсюда имеем: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{c\to a}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, так как если $x \to a$, то $c \to a$.

Переобозначая переменную в последнем пределе, получим требуемое:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1**. Правило Лопиталя остается справедливым и в том случае, когда $x \to b$ и $x \to \infty$. Оно позволяет раскрывать не только неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, но и вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2**. Если после применения правила Лопиталя неопределенность не раскрылась, то его следует применить еще раз.

**ПРИМЕР**. $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{\ln(x-1)}{ctg\,\pi x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{-\sin^2 \pi x}{(x-1)\pi} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = -\dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{2\pi \sin \pi x \cos \pi x}{1} = 0.$

**ЗАМЕЧАНИЕ 3**. Правило Лопиталя – универсальный способ раскрытия неопределенностей, но существуют пределы, раскрыть которые можно, применив лишь один из изученных ранее частных приемов.

**ПРИМЕР**. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ и так далее.

Но, очевидно, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$, так как степень числителя равна степени знаменателя, и предел равен отношению коэффициентов при старших степенях $x$.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

**ТЕОРЕМА 1** (признак монотонности дифференцируемой функции).

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема $\forall x\in(a,b)$. Если $f'(x)\geq 0\ \ \forall x(a,b)$, то $f(x)$ не убывает, если же $f'(x)\leq 0\ \ \forall x(a,b)$, то $f(x)$ не возрастает на $(a,b)$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Пусть $x_1,x_2\in(a,b)$ – произвольные точки, тогда $y=f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на $[x_1,x_2]$ (непрерывность следует из дифференцируемости). Напишем формулу Лагранжа

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1),$$

где $c\in(x_1,\ x_2)$.

Если $x_2>x_1$ и $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(a,\,b)$ то

$f'(c)\geq 0\ \Rightarrow\ f(x_2)-f(x_1)\geq 0\ \Rightarrow\ f(x_2)\geq f(x_1)\ \Rightarrow\ f(x)$ не убывает.

Аналогично показывается, что если $f'(x)\leq 0$, то $y=f(x)$ не возрастает. Теорема доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Из доказательства теоремы следует, что если $f'(x)>0$, то $y=f(x)$ возрастает, а при $f'(x)<0\quad y=f(x)$ убывает.

Интервалы, на которых функция либо убывает, либо возрастает, называются *интервалами монотонности*.

**ПРИМЕР**. Найти интервалы монотонности функции

$$y=x^3-3x^2-9x+5.$$

$$y'=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=0\ \Rightarrow x_1=3,\ x_2=-1.$$

Исследуем знак производной (рис. 29).

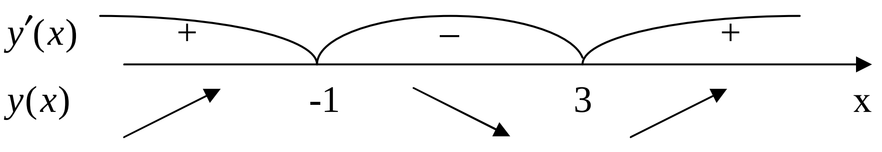



Рис. 29

Функция убывает на $(-1;3)$ и возрастает на $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

**ТЕОРЕМА 2** (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции) Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ экстремум. Если в этой точке существует производная, то $f'(x_0) = 0$.
Эта теорема является теоремой Ферма и была доказана ранее.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1**. Необходимое условие экстремума достаточным не является.

**ПРИМЕР**. $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, но точка $x = 0$ точкой экстремума не является (рис. 30).

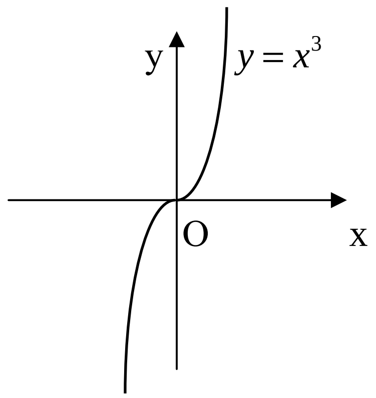



Рис. 30

**ЗАМЕЧАНИЕ 2**. Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x^2}$ (рис. 31).

Так как $x^2 \geq 0$, то $y = \sqrt[3]{x^2} \geq 0$, поэтому $x_0 = 0$ – точка минимума. Функция непрерывна $\forall x \in R$, и $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y'(0)$ не существует.

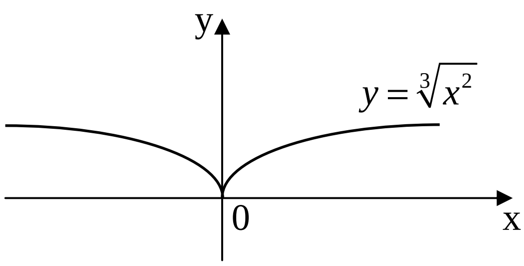



Рис. 31

Таким образом, непрерывная функция может иметь экстремум не только в тех точках, где $f'(x) = 0$, но и в тех, где $f'(x)$ не существует.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. *Критическими* точками функции $y = f(x)$ называются точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует; при этом точки, в которых $f'(x) = 0$, называются *стационарными* точками.

*Не всякая критическая точка является точкой экстремума.*

**ТЕОРЕМА 3** (первое достаточное условие экстремума непрерывной функции). Пусть непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема всюду на $(a,b)$ за исключением, быть может, критической точки $x = x_0$. Если $f'(x) < 0$

при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то $x = x_0$ – точка минимума; если же $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то $x = x_0$ – точка максимума.

*То есть, если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «-» на «+», то в критической точке функция имеет минимум; если с «+» на «-» - то максимум; если же при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то экстремума в точке $x = x_0$ нет.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Если при $x < x_0$ $f'(x) < 0$, то по теореме 1 $y = f(x)$ убывает. Если при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то $y = f(x)$ возрастает. Значит, $x = x_0$ – точка минимума, так как $f(x_0) \le f(x)$ $\forall x \in (x - \delta; x + \delta)$, $\delta > 0$.

Если при $x < x_0$ $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, то $y = f(x)$ слева от $x = x_0$ возрастает, а справа – убывает по теореме 1. Значит, $x = x_0$ – точка максимума по определению.

Если окажется, что $f'(x) > 0$ (или $f'(x) < 0$) при $x < x_0$ и при $x > x_0$, то слева и справа от $x = x_0$ $y = f(x)$ возрастает (убывает), следовательно, $x = x_0$ точкой экстремума не является. Что и требовалось доказать.

**ПРИМЕР**. Найти экстремумы функции $y = x^4 - 4x^3 + 20$.

$$y' = 4x^2 - 12x = 4x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0,\ x_3 = 3.$$

Исследуем знак производной (рис. 32).

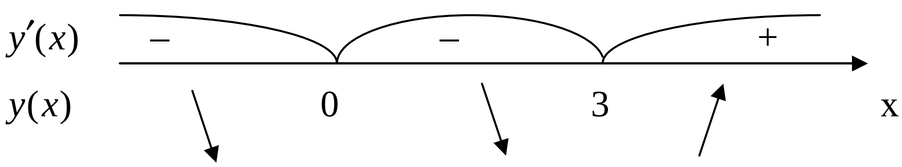



Рис. 32

В критической точке $x = 0$ экстремума нет, в критической точке $x = 3$ – минимум и $y_{\min} = y(3) = -7$.

Пусть график функции $y = f(x)$ имеет касательные во всех точках интервала $(a, b)$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх (вниз)* на $(a, b)$, если во всех точках $(a, b)$ он лежит не выше (не ниже) любой своей касательной.

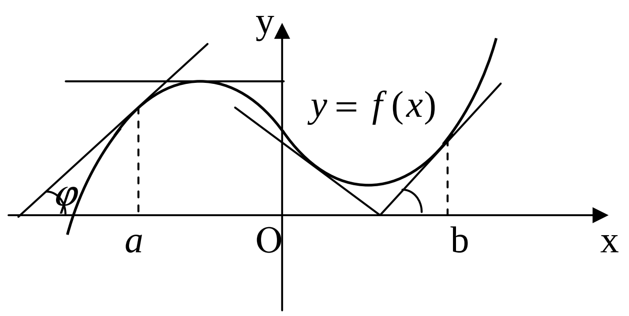



Рис. 33

На $(a,O)$ график $y = f(x)$ выпуклый вверх, на $(O,b)$ – выпуклый вниз (рис. 33).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. *Точкой перегиба* графика функции $y = f(x)$ называется точка $M$, отделяющая участок графика, выпуклый вверх, от участка, выпуклого вниз.
В этой точке график, можно сказать «перегибается» через касательную.

**ТЕОРЕМА 4**. (достаточное условие выпуклости вверх (вниз) графика функции). Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $\forall x \in (a,b)$. Тогда, если $f''(x) < 0$, то ее график имеет выпуклость, направленную вверх, если $f''(x) > 0$, то график функции имеет на $(a,b)$ выпуклость, направленную вниз.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Из определения производной следует, что $f'(x) = tg\ \varphi$ – угловой коэффициент касательной к графику в точке $x$. Заметим (рис. 34), что на участке графика, выпуклом вверх, касательная поворачивается по часовой стрелке, то есть угол $\varphi$ меняется от острого к тупому, поэтому $tg\ \varphi = f'(x)$ убывает. На участке графика, выпуклом вниз, касательная поворачивается против часовой стрелки, то есть $\varphi$ меняется от тупого к острому и $tg\ \varphi = f'(x)$ возрастает.

Пусть $f''(x) < 0 \Rightarrow \left(f'(x)\right)' < 0 \Rightarrow f'(x)$ убывает по теореме 1, значит, $tg\ \varphi$ убывает, и график имеет выпуклость, направленную вверх.

Пусть $f''(x) > 0 \Rightarrow \left(f'(x)\right)' > 0 \Rightarrow f'(x)$ возрастает по теореме 1, и график имеет выпуклость, направленную вниз.

Что и требовалось доказать.

**ТЕОРЕМА 5** (необходимое условие точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную в некоторой окрестности точки перегиба $x = x_0$. Тогда $f''(x_0) = 0$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Пусть $f''(x_0) \neq 0$. Допустим, $f''(x_0) > 0$. Так как $f''(x)$ по условию непрерывна, то по теореме об устойчивости знака непрерывной в точке функции существует окрестность точки $x = x_0$, в пределах которой $f''(x) > 0$, то есть $f''(x) > 0$ и справа, и слева от точки $x = x_0$. Таким образом, по теореме 4 $y = f(x)$ имеет выпуклость, направленную вниз, и справа, и слева от этой точки. Тогда $x = x_0$ по определению точкой перегиба не является. Также приводится к противоречию предположение о том, что $f''(x_0) < 0$. Так как по условию $f''(x_0)$ существует, то, следовательно, $f''(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

**ТЕОРЕМА 6** (первое достаточное условие перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную в некоторой окрестности точки $x = x_0$ и $f''(x_0) = 0$. Тогда, если при переходе через $x = x_0$ $f''(x)$ меняет знак, то $x = x_0$ – точка перегиба; если $f''(x)$ не меняет знак, то $x = x_0$ точкой перегиба не является.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Доказать самостоятельно, использую теорему 4.

**ПРИМЕР**. Построить график функции $y = x^4 - 4x^3 + 20$.
Ранее были найдены интервалы монотонности этой функции и $y_{\min} = y(3) = -7$.

$y''(x) = \left(4x^3 - 12x^2\right)' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$ – точки перегиба (рис. 34), $y(0) = 20,\ y(2) = 4$.

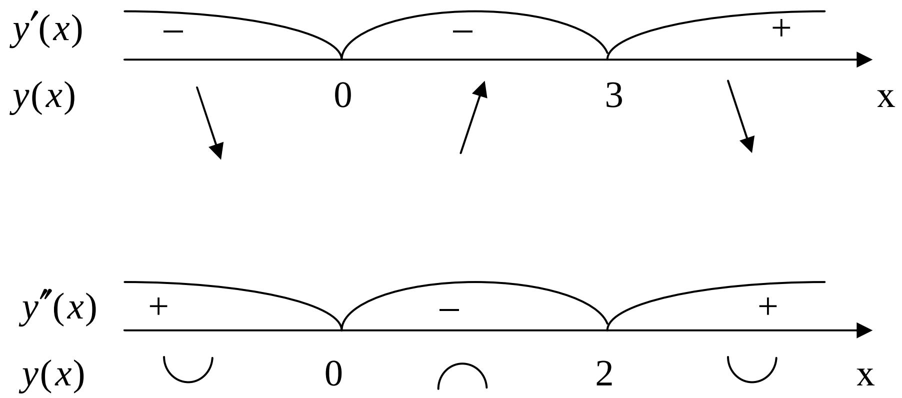



Рис. 34

Строим график с учетом информации о знаках $y'(x)$ и $y''(x)$ (рис. 35):

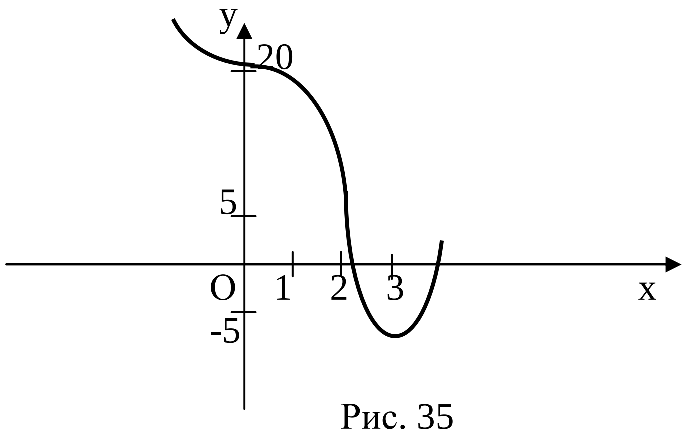



Рис. 35

## АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Прямая линия называется *асимптотой* кривой, если расстояние от точки $M$, лежащей на этой кривой, до прямой стремится к нулю при удалении точки $M$ вдоль одной из ветвей кривой в бесконечность.

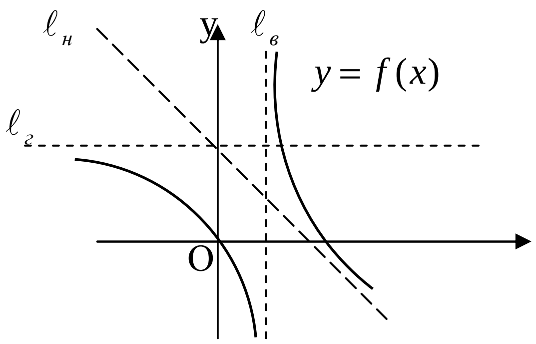



Рис. 36

Асимптоты бывают трех видов: горизонтальные, вертикальные, наклонные (рис. 36).

$\ell_г$ – горизонтальная асимптота

$\ell_в$ – вертикальная асимптота

$\ell_н$ – наклонная асимптота

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке $x = a$ бесконечен.

В этом случае в точке $x = a$ функция имеет разрыв второго рода.

**ПРИМЕР**. Функция $y = tg\, x$ определена при всех $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, причем $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + \pi n} tg\, x = \infty$, поэтому график этой функции имеет бесконечное множество вертикальных асимптот.

График функции $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ имеет, очевидно, три вертикальные асимптоты: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

**ПРИМЕР**. Функция $y=2^{\frac{1}{x+1}}$ определена при всех $x\neq -1$, причем $\lim\limits_{x\to -1+} 2^{\frac{1}{x+1}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1-} 2^{\frac{1}{x+1}}=0$. По определению прямая $x=-1$ – вертикальная асимптота графика (справа).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Прямая $y=kx+b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, если $f(x)$ представима в виде: $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x)=0\right)$.

**ТЕОРЕМА**. Для того, чтобы прямая $y=kx+b$ была наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b\ \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\ \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=b\right).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Пусть функция $y=f(x)$ определена при всех достаточно больших положительных значениях $x$.

1. Необходимость: $y=kx+b$ – асимптота при $x\to+\infty$ $\Rightarrow$ существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b.$$

По определению $\quad f(x)=kx+b+\alpha(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0.$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(k+\dfrac{b}{x}+\dfrac{\alpha(x)}{x}\right)=k,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\big(b+\alpha(x)\big)=b.$

2. Достаточность: существуют конечные

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b\ \Rightarrow\ y=kx+b$$

– асимптота при $x\to+\infty$.

По условию $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b.$

Обозначим $\quad f(x)-kx-b=\alpha(x).$

Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$, то есть $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м. при $x\to+\infty$. По определению $y=kx+b$ – асимптота , что и требовалось доказать.

Если $x\to-\infty$, доказательство аналогично.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Если при отыскании наклонной асимптоты графика оказалось, что $k=0$, то график имеет горизонтальную асимптоту $y=b$ (если $b$ существует). Если хотя бы один из пределов бесконечен или не существует, то график не имеет ни наклонной, ни горизонтальной асимптот.

**ПРИМЕР**. Найти асимптоты графика функции $y=x-2arctg\,x.$

Функция определена $\forall x\in R$, значит, вертикальных асимптот нет. Найдем наклонные асимптоты.

$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2arctg\,x}{x}\right)=1,\ b_+=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2arctg\,x-x\right)=-\pi.$$

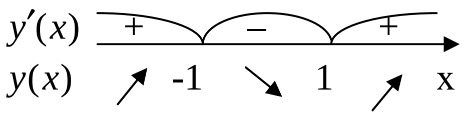
Таким образом, при $x\to+\infty$ $y=x-\pi$ – наклонная асимптота.

$$k_-=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2arctg\,x}{x}\right)=1,\ b_-=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-2arctg\,x-x\right)=\pi,$$

откуда $y=x+\pi$ – асимптота графика при $x\to-\infty.$

Исследуем первую производную этой функции и построим эскиз графика (рис. 37).

$$y'=1-\frac{2}{1+x^2}=\frac{x^2-1}{x^2+1}=0\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\pm1.$$



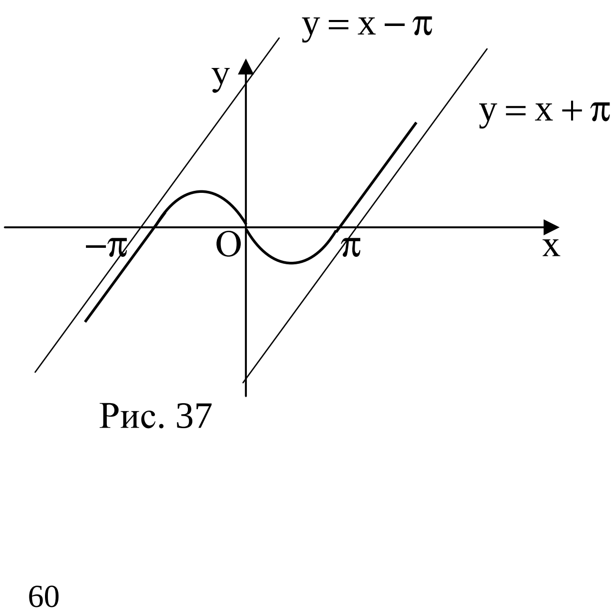




Рис. 37

**ПРИМЕР**. Найти асимптоты графика функции $y=\sqrt{4x^2-x}$.

ОДЗ: $4x^2-x\geq 0\Rightarrow x(4x-1)\geq 0 \Rightarrow x\leq 0, x\geq\frac{1}{4}$.

$x(0)=x\left(\frac{1}{4}\right)=0$ – вертикальных асимптот нет.

$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=2,\ b_+=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{\sqrt{4x^2-x}+2x}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-\frac{1}{4},$$

то есть при $x\to+\infty$ $y=2x-\frac{1}{4}$ – асимптота.

$$k_-=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-2,$$

$$b_-=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{\sqrt{4x^2-x}-2x}\right)=\frac{1}{4},$$

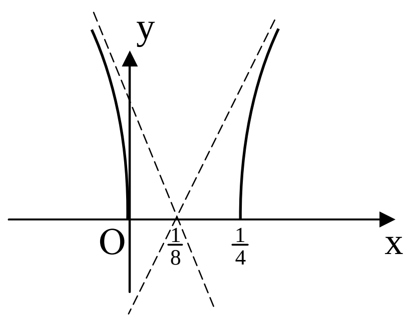



Рис. 38

и $y=-2x+\frac{1}{4}$ – асимптота графика при $x\to-\infty$.

Эскиз графика этой функции имеет вид (рис.38):

**ПРИМЕР**. Найти асимптоты графика функции $y=\sqrt[3]{4x^2-x}$.

Функция определена $\forall x\in R$, поэтому вертикальных асимптот нет.

$$k_\pm=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{4x^2-x}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0,\ b_\pm=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{4x^2-x}=+\infty,$$

значит, график асимптот не имеет.

# ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

1. Найти ОДЗ.
2. Определить свойства четности, нечетности, периодичности.
3. Найти точки разрыва и определить их характер.
4. Найти асимптоты графика.
5. Найти интервалы монотонности и экстремумы.
6. Определить направление выпуклости графика и точки перегиба.
7. Найти точки пересечения графика с осями координат.
8. Построить график: а) построить асимптоты
   б) отметить контрольные точки из пп.5,6,7
   в) построить график слева направо, используя информацию из п.п.5, 6.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Если $f(x)$ – четная функция, то ее график симметричен относительно оси $OY$; если нечетная, то симметричен относительно начала координат. График периодической функции достаточно построить на отрезке длиной в период, а потом периодически продолжить.

**ПРИМЕР**. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$, построить ее график и эскизы первой и второй производных .

1. ОДЗ: $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$.

2. Функция нечетная, то есть график симметричен относительно начала координат.

3. $\lim\limits_{x \to -2-} \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2+} \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty \Rightarrow x = -2$ по определению точка разрыва второго рода. Точку $x = 2$ можно не исследовать вследствие нечетности функции и симметрии графика.

4. $x = \pm 2$ – вертикальные асимптоты. Наклонные асимптоты:

$$k_{\pm}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\left(x^2-4\right)}=1,\ b_{\pm}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x^2-4}=0\ \Rightarrow\ y=x$$

– наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$.

5. $y'=\dfrac{x^4-12x^2}{\left(x^2-4\right)^2}=\dfrac{x^2(x^2-12)}{\left(x^2-4\right)^2}=0\ \Rightarrow\ x_{1,2}=0,\ x_{3,4}=\pm2\sqrt{3}.$

Исследуем функцию на монотонность и экстремумы (рис. 39).

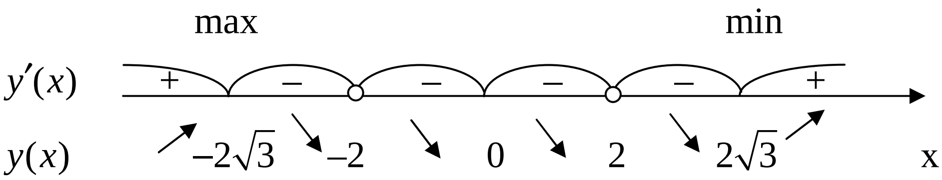



Рис. 39

$$y_{\max}=y\left(-2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}\approx-5{,}1,\ \ y_{\min}=y\left(2\sqrt{3}\right)\approx5{,}1.$$

6. $y''=\dfrac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=0\Rightarrow x=0.$

Определим направление выпуклости графика и точки перегиба (рис. 40).

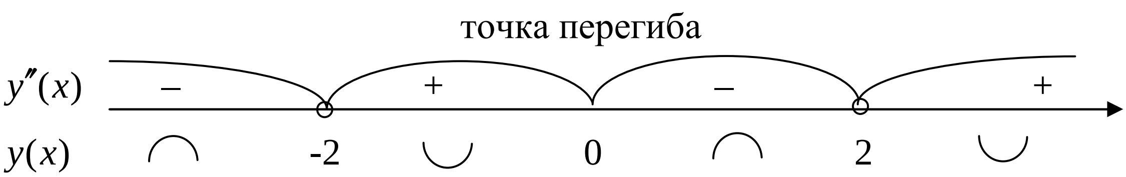



Рис. 40

$x=0$ – точка перегиба.

7. $y(0)=0.$

8. Построим график, а по нему – эскизы $y'(x)$ и $y''(x)$ (рис. 41):

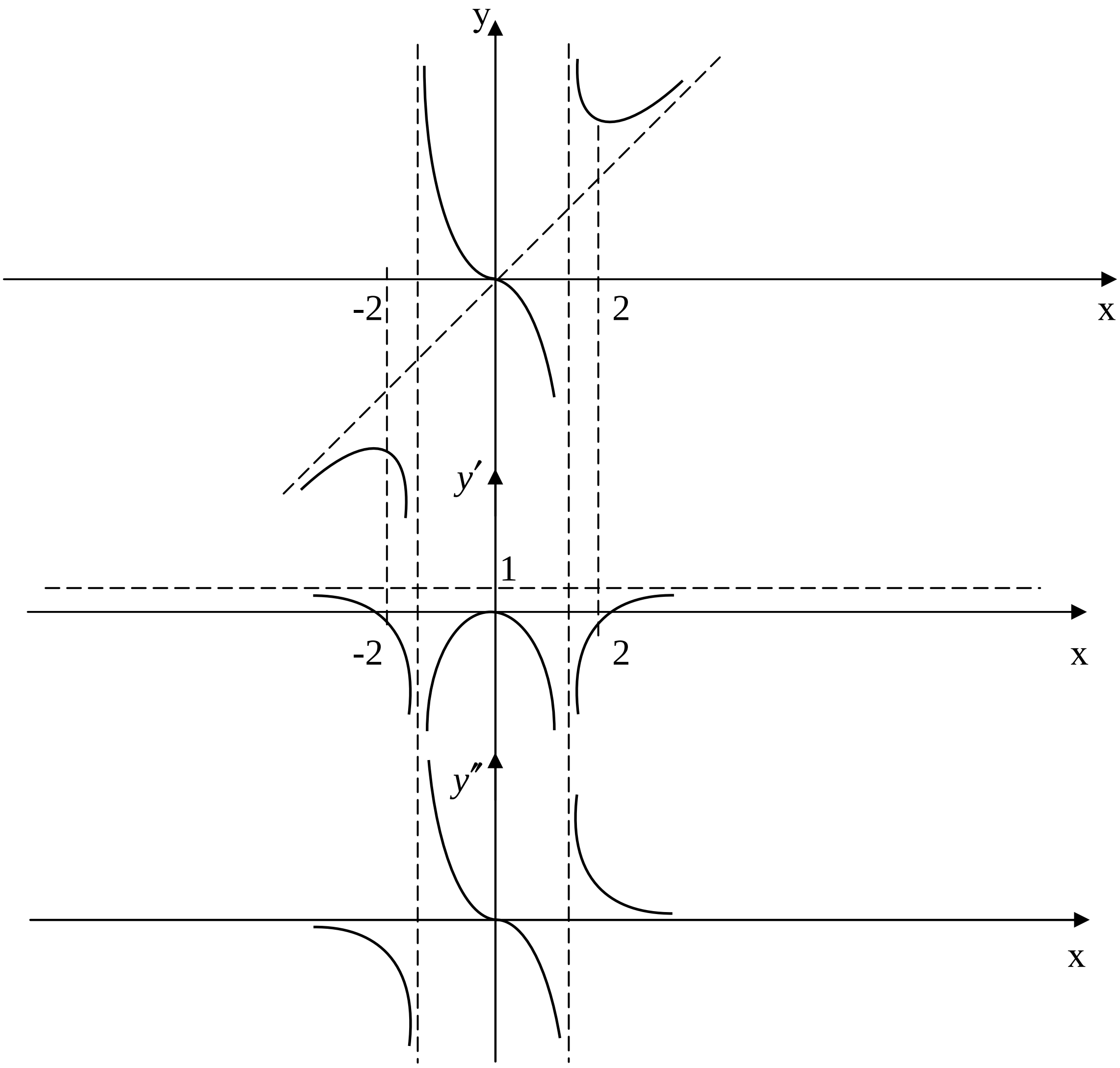



Рис. 41

## Библиографический список

1. Кудрявцев, В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1989.

2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1978. – Т.1.

3. Шипачев, В.С. Основы высшей математики / В.С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 1998. – 200 с.

4. Шнейдер В.Е. Краткий курс высшей математики / В.Е.Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. – М.: Высш. шк. 1978. – Т.2.

.

Редактор
Компьютерная верстка

ИД 06039 от 12.10.01

Подписано в печать          Формат 60х84  1/16
Бумага офсетная. Отпечатано на дуплекаторе.
Усл.печ.л.     Уч.-изд.л.
Тираж     экз.     Заказ

---

Издательство ОмГТУ. 644050, Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ