Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

Прикладные задачи математического программирования

Методические указания для студентов 2-го курса экономических специальностей дневного, вечернего и заочного обучения

Омск -2008

Составители: Рассказова Марина Николаевна, доцент
Рыженко Любовь Степановна, старший преподаватель

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

Редактор
ИД___________ от ___________
Подписано в печать . Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .
Тираж 50 экз. Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

«В мире не происходит ничего, в чем бы не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума»
Леонарда Эйлера

ГЛАВА I
Введение в математическое моделирование

§ 1.1 Понятие математической модели, классификация моделей, виды моделирования

Математические модели являются инструментальным средством описания задач самого разного класса. Причем задачи из разных областей экономики могут иметь похожие модели и решаться одинаковыми методами. Использование корректно-построенной модели какого-либо процесса позволяет формализовать и описать наиболее важные связи между объектами, оценить различные параметры зависимостей, предсказывать поведение объекта, тем самым определять наилучшие решения в той или иной ситуации, оценить количественно эффективность принимаемых решений, прогнозировать их негативные последствия, использовать полученные оценки.

Математическая модель – это условный совокупный образ объекта в виде совокупности уравнений, неравенств, логических соотношений, созданный для получения новых знаний, исследования объекта, анализа и оценки принимаемых решений в конкретных или возможных ситуациях.

Моделирование – это метод исследования объектов, процессов на их моделях, построение и изучение моделей, определения и улучшения их характеристик, рационализирующих способ построения и управления.

В разных науках существуют различные способы классификации моделей. Классификация зависит от признака, лежащего в основе. Признаком может выступать отрасль знаний, способ представления модели, учет временного фактора, приспособляемости модели.

По отраслям знаний модели классифицируются на биологические, социологические, физические, экономические.

Математические модели, используемые в экономике, можно классифицировать по особенностям моделируемого объекта – на макро- и микроэкономические; по целям моделирования и используемому инструментарию – на теоретические и прикладные, оптимизационные и равновесные, статические и динамические, непрерывные и дискретные, стохастические и детерминированные.

Макроэкономические модели описывают экономику страны как единое целое, связывая такие макроэкономические материальные и финансовые показатели, как ВВП, потребление, инвестиции, занятость, бюджет, инфляция, ценообразование и др.

Микроэкономические модели описывают состояние структурных составляющих экономики, стратегии поведения фирм в неустойчивой или стабильной среде.

Прикладные модели обеспечивают возможность оценки параметров функционирования конкретных технико-экономических объектов и обоснования выводов для принятия управленческих решений. Равновесные модели, присуще рыночной экономике, описывают поведение субъектов хозяйствования в стабильных устойчивых состояниях, но и в нерыночной экономике, где равновесие по одним параметрам компенсируется другими факторами.

По назначению: балансовые (наличие ресурсов и их использование), трендовые (развитие моделируемой системы через тенденцию развития ее показателей), оптимизационные, имитационные (машинная имитация процессов). Оптимизационные модели связаны в основном с микроуровнем и предполагают выбор наилучшего варианта (максимум прибыли, минимум расходов и т.д.) по некоторому критерию, причем различают одно- и многокритериальные задачи.

Статические модели описывают состояние объекта в конкретный текущий момент или период времени, а динамические модели включают взаимосвязи переменных во времени. Детерминированные модели предполагают жесткие функциональные связи между переменными, а стохастические модели допускают наличие случайности, используя в качестве инструмента теорию вероятностей и математическую статистику.

По приспособляемости: адаптивные или нет. По способу представления: предметные и знаковые. Предметные модели воспроизводят определенные геометрические, физические, динамические свойства объекта (глобус, карты…). Знаковые модели – это схемы, чертежи, формулы. Важнейшим видом знаковых моделей являются математические.

Применительно к техническим и естественным наукам принято различать следующие виды моделирования:

- концептуальное, при котором совокупность уже известных фактов и представлений о системе представляется с помощью специальных знаков, символов
- физическое моделирование, между объектом и оригиналом устанавливаются отношения подобия
- структурно-функциональное, при котором моделями являются чертежи, диаграммы, таблицы, дополненные специальными правилами их преобразования и объединения
- математическое, где модель строится средствами математики и логики
- имитационное моделирование, при котором математическая модель объекта представляет собой способ функционирования объекта, реализованный в виде программы на ПК.

Эти виды не являются взаимоисключающими и могут применяться в комбинации.

Основные задачи управления деятельностью человека можно отнести к классу задач распределения и оптимизации ресурсов. Например, технологический процесс можно определить как последовательность работ, которые определяют превращение сырья в продукцию, такую последовательность работ называют маршрутом, каждую операцию, входящую в маршрут, можно охарактеризовать определенными режимами обработки, управления, контроля и функционирования. Процессы функционирования объекта и технологические процессы характеризуются изменениями некоторых параметров во времени, они подразделяются на дискретные и непрерывные. Зависимости между переменными и целевые функции могут быть линейными и нелинейными.

Итак, если выделить в модели следующие элементы: исходные данные, зависимости, описывающие целевую функцию, ограничения, то типы математических моделей могут быть представлены схемой (рис.1.1).

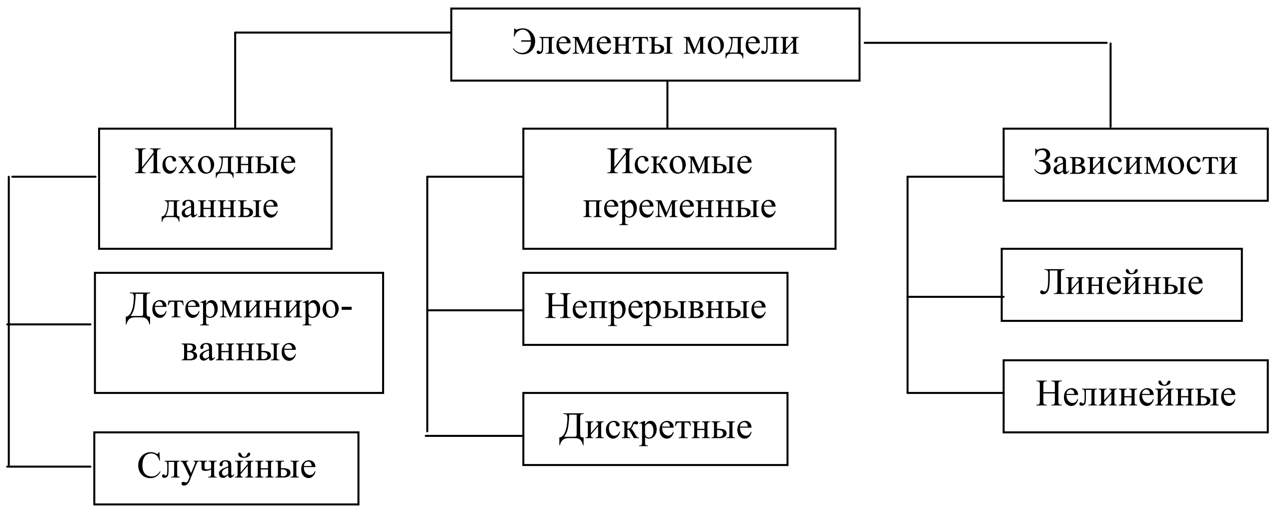


Рис.1.1 Разновидности элементов математической модели

Процесс построения и исследования модели можно представить как последовательность следующих шагов:

Знакомство с предметной областью, прогноз или анализ процесса. Формулировка целей моделирования, уточнение круга задач. Предварительная оценка целесообразности построения модели.

Переход от описания предметной области в содержательных терминах к формализованным описаниям. Введение переменных, установления связей между объектами в виде формального текста. Выбор алгоритма, технологии решения задачи.

Выбор специального программного и аппаратного обеспечения. Реализация разработанной модели программно-аппаратными средствами.

Анализ построенной модели, оценка адекватности модели, экспертный анализ. Работа с готовой моделью, выдвижение гипотез, альтернативных вариантов. Принятие решений, разработка планов действий, контроль над реализацией плана.

В каждой задаче мы должны ясно определить цели, поставленные перед системой, изучить обстановку, освоиться с терминологией, процессом, определить различные способы действия, приемлемые для ситуации, дать в какой-то форме постановку задачи. Построить подходящую логическую, или математическую модель, которая свяжет переменные задачи с реальными ограничениями, целями задачи, мерой эффективности. Затем, исходя из полученной модели, выбрать метод, и найти решение, оптимизирующее эту меру эффективности, т.

е. оптимальное решение. И сравнить это полученное с помощью математической модели решение с действительностью, чтобы выяснить, в самом ли деле мы сформулировали и решали ту реальную задачу, с которой начали? Когда меняется ситуация, какие изменения надо вносить в математическую модель? Можно ли улучшить модель, что привело бы к новым решениям, более реалистичным и точным.

§ 1.2. Введение в линейное программирование

Математические теории и методы проникают и играют важную роль во многих науках, начиная с физики, и кончая психологией и лингвистикой. В конце XIX и начале XX вв. развитие математики складывалось главным образом под влиянием запросов физики и техники.

Математический аппарат преимущественно использовался как инструмент расчета (например, расчета энергии, техники). Однако современная экономическая ситуация потребовали ответов на вопросы: как управлять созданной техникой, расходовать имеющееся сырье, ресурсы. Эти вопросы оказались актуальны и важны. Ясно, что рациональное использование имеющихся ресурсов может дать экономический эффект может быть гораздо выше, чем создание новых. Поэтому сейчас экономика ставит задачи оптимального управления производством и планирования. Возникла потребность в новых математических методах и дисциплинах, которые позволили бы разрешать эти важные экономические проблемы. Такие задачи привели к появлению новых математических дисциплин: линейное и нелинейное программирование, теория игр, теория массового обслуживания и т. д. А развитие современных ПК и информационных технологий дало мощный толчок к применению матметодов в самых, казалось бы, неожиданных направлениях, в том числе и сервисной деятельности.

В самых разных областях нашей жизни мы постоянно сталкиваемся по сути дела с одним и тем же классом задач. Нам известна полностью или частично ситуация, в которой мы находимся, и множество возможных альтернативных вариантов нашего дальнейшего поведения. Естественно возникает вопрос, какой из вариантов выбрать, а от каких отказаться? Грубо говоря, в решении этого вопроса и заключается проблема управления. Она с равным основанием может относиться к поведению отдельного человека, или группы людей, к развитию тех или иных хозяйственных процессов или экономики в целом, к разработке каких-либо операций и т. п. Итак, необходимо остановиться на одном из допустимых вариантов, т. е. отыскать план. Здравый смысл подсказывает нам, что нужно выбрать «наилучший» вариант, который принесет наибольшую выгоду.

Сам по себе вопрос, «какой вариант выбрать?», ни на йоту не приближает нас к решению задачи управления, он даже не формулирует ее, поскольку абсолютно неясно, что значит снова «наилучший вариант», «наилучшая выгода».
Определение этого и составляет одну из важных проблем, без решения которой невозможны ни постановка, ни решение задачи управления. По существу речь идет о проблеме цели развития управляемой системы.

Цели, вообще говоря, могут быть разными. Применительно к хозяйственному объекту, в качестве цели могут выступать требования обеспечить максимум выпускаемой продукции при известном объеме имеющихся ресурсов, минимум затрат на производство фиксированной продукции, максимум получаемой прибыли, минимум транспортных расходов для оказания каких-либо услуг и т. д. Если цель сформулирована, то понятие «наилучший» становиться четко определенным.

«Наилучший» или, обычно говорят оптимальный вариант отвечает двум требованиям: во-первых, он является одним из допустимых (или возможных), и во-вторых, обеспечивает максимум или минимум (по смыслу) поставленной цели.

Таким образом, общий смысл широкого круга задач управления прост. Эти соображения и легли в основу ряда исследований в области так называемого линейного программирования. Постановка задачи управления средствами математического программирования заключается в следующем. Формально записываются совокупность условий деятельности управляемого объекта, которая называется системой ограничений. Например, для производственного предприятия задаются объемы ресурсов, которые можно использовать (не обязательно полностью), возможности производственных мощностей, и т. д. Вводятся переменные задачи, которые по своему физическому смыслу, неотрицательны. Совокупность условий деятельности объекта записывается в виде системы уравнений и неравенств, которая определяет множество допустимых вариантов. Выбор оптимального варианта осуществляется с помощью, так называемой, целевой функции, которая определяет цель развития объекта управления.

Если задана система ограничений и целевая функция – это значит, что задача управления поставлена. Те задачи, в которых целевая функция связана с переменными линейной зависимостью, и область ограничений задана линейными уравнениями и неравенствами, называются задачами линейного программирования (ЗЛП). Слово «программирование» отнюдь не означает какую-то связь с ЭВМ, языками программирования и т. д. Оно первоначально означало, что в результате решения задачи вы получите некоторую программу действий – оптимальный план для достижения «наилучшего» результата. Хотя сейчас, конечно, все реальные задачи решаются на компьютере и необходимые программы, реализующие известные алгоритмы, написаны.

Говоря об области применения этого научного направления, можно вспомнить слова одного из величайших математиков мира Леонарда Эйлера: «В мире не происходит ничего, в чем бы не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума».

Линейное программирование, как научное направление, зародилось в нашей стране в работе выдающегося советского математика и экономиста лауреата Ленинской и Нобелевской премий академика А.В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства» (1939 г.), где впервые была сформулирована задача ЛП, описывающая реальную экономическую ситуацию, и разработан алгоритм ее решения. В США исследование операций зародилось в годы второй мировой войны, прежде всего для решения военных вопросов. Казалось бы, невинные задачи, о составлении смесей орехов, первоначально возникли при планировании военных операций. Позже появились и их мирные приложения, когда выяснилось, что использование линейного программирования способно дать большой экономический эффект для решения разнообразных вопросов. Из американских математиков, внесших вклад в развитие ЛП нужно отметить Дж. Данцига и его книгу «Линейное программирование, его применения и обобщения». – М.: Прогресс, 1966.

Как же решать задачи линейного программирования?

Простейший метод, казалось бы, напрашивается сразу. Стоит рассмотреть все допустимые варианты, подсчитать какую целесообразность имеет каждый из них, и станет ясно, какой вариант наилучший. Однако, на поверку, этот метод оказывается самым сложным, а иногда нереален, так как число допустимых вариантов необозримо и бесконечно. Но перебирать варианты не столь уж абсурдная идея, именно она легла в основу многих алгоритмов, в частности симплекс-метода. Только перебор этот предлагается осуществлять определенным образом: выбрав некоторое допустимое решение, в дальнейшем из огромного числа вариантов остальных решений, рассматриваем только то, которое заведомо лучше, уже найденного. Такой целенаправленный перебор сравнительно быстро приводит к оптимальному решению. В этом и состоит идея симплексного метода.

ГЛАВА II
Основные типы задач линейного программирования и методы решения

§ 2.1 Построение математических моделей задач ЛП

Итак, математическая модель означает перевод задачи на язык количественных терминов.

В линейном программировании математическая модель представляет собой систему линейных соотношений между переменными (ресурсами, ограничениями) и целевую функцию (меру эффективности).

Математические модели позволяют привнести научную методологию в те области управления, где ранее господствовала интуиция и опыт. Математическая модель позволяет лучше понять исследуемую задачу и процессы, оценить и сравнить между собой решения, оценить эффект, который оказывает изменение одной переменной на остальные, понять численные, количественные характеристики процесса, которые ранее понимались интуитивно-приближенно.

Когда задача ЛП поставлена, главная мера эффективности выбрана, функциональная форма математической модели определена. Нужно указать, как выбранные нами переменные связаны с данными задачи. для этого необходимы некоторые эксперименты, позволяющие выявить структуру. В одних случаях, достаточно открыть бухгалтерскую книгу, заглянуть в нужный файл компьютера и получить необходимую информацию; в других, затратить силы и средства. Но в любом случае между переменными и структурой модели существует связь.

Именно посредством модели задача связана с предлагаемым решением. Насколько точна модель, настолько и реально решение. С помощью математической модели и меры эффективности можно оценить разные решения и выбрать лучшее. В линейном программировании, благодаря вычислительным методам, эта задача решается автоматически.

Задачи, решаемые методами ЛП очень разнообразны по содержанию. Но их математические модели схожи, и условно объединяются в три большие группы задач:

- транспортные задачи;
- задачи о составлении плана;
- задачи о раскрое, смесях.

Рассмотрим примеры конкретных экономических задач каждого типа, подробно остановимся на построении модели к каждой задачи.

Задача 1 (сбалансированная транспортная задача).

На двух вокзалах А и В имеется 30 групп туристов, по 15 на каждом. Их требуется доставить в две гостиницы С и Д, причем в С надо доставить 10 групп, а в Д – 20 . Известно, что доставка одной группы с вокзала А в гостиницу С обходится в 1 д.е, в Д – в 3 д.е. Соответственно с вокзала В в гостиницы С и Д: 2 и 5 д.е. Составить план перевозок так, чтобы стоимость всех перевозок была наименьшей.

Данные задачи для удобства разметим в таблице. На пересечении строк и столбцов стоят числа, характеризующие стоимость соответствующих перевозок.

Гостиницы / Вокзалы	С	Д	Необходимо отправить
А	1	3	15
В	2	5	15
Необходимо принять			30 / 30

Составим математическую модель задачи.

Необходимо ввести переменные. В формулировке вопроса говорится, что необходимо составить план перевозок. Обозначим через x_1, x_2 количество групп, перевозимых с вокзала А в гостиницы С и Д соответственно, а через y_1, y_2 – количество групп, перевозимых с вокзала В в гостиницы С и Д соответственно. Тогда, количество групп, вывозимое с вокзала А, равно $x_1 + x_2$, а с вокзала В: $y_1 + y_2$. Потребность гостиницы С равна 10 группам, и в нее привезли $x_1 + y_1$, т. е. $x_1 + y_1 = 10$. Аналогично, для гостиницы Д, имеем

$x_2 + y_2 = 20$. Заметим, что потребности гостиниц в точности равны количеству вывозимых групп, поэтому $x_1 + y_2 = 15$ и $y_1 + y_2 = 15$.

Итак, заметим, переменные x_1, x_2, y_1, y_2 по смыслу задачи неотрицательны и удовлетворяют системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 10 \\ x_2 + y_2 = 20 \\ x_1 + x_2 = 15 \\ y_1 + y_2 = 15 \\ x_i \geq 0,\ y_i \geq 0,\ i = 1,2 \end{cases} \qquad (1)$$

Обозначив, через F – транспортные расходы, посчитаем их. На перевозку одной группы туристов из А в С тратится 1 д.ед. на перевозку x_1 групп – x_1 д.ед. Аналогично, на перевозку x_2 групп из А в Д тратится 3×2 д.ед.; из В в С: $2y_1$ д. ед., из В в Д: $5y_2$ д.ед.

Итак,

$$F = 1x_1 + 3x_2 + 2y_1 + 5y_2 \to \min, \qquad (2)$$

(мы хотим, чтобы общая стоимость перевозок была минимальной).

Функция F называется целевой функцией.

Сформулируем задачу математически: на множестве решений системы ограничений (1) найти такое решение, которое обращает в минимум целевую функцию F (2); или, найти оптимальный план x_1, x_2, y_1, y_2, определяемый системой ограничений (1) и целевой функцией (2).

Задача, которую мы рассмотрели, может быть представлена в более общем виде, с любым числом поставщиков и потребителей.

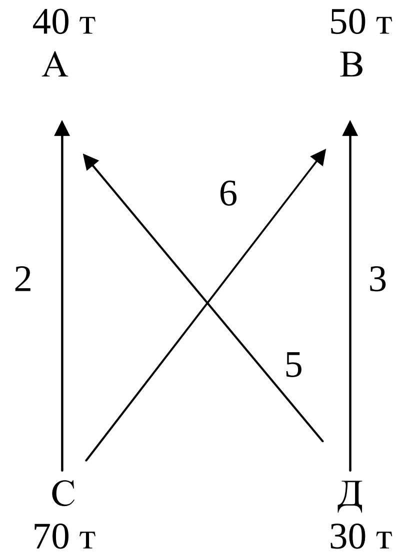
В рассмотренной нами задаче наличие груза у поставщиков (15+15) равно общей потребности потребителей (10+20). Такая модель называется закрытой, а соответствующая задача - сбалансированной транспортной задачей.

В экономических расчетах немалую роль играют и так называемые открытые модели, в которых указанное равенство не соблюдается. Либо запас у поставщиков больше потребности у потребителей, либо спрос превышает наличие товара. Тогда, заметим, что в системе ограничений несбалансированной транспортной задачи, наряду с уравнениями будут входить и неравенства.

Рассмотрим пример несбалансированной транспортной задачи.

Задача 2 (несбалансированная транспортная задача).

В пунктах А и В расположены текстильные комбинаты по производству тканей , а в С и Д склады, обеспечивающие эти комбинаты сырьем. Потребность этих комбинатов в сырье меньше, чем производительность складов. Известно, сколько сырья нужно каждому из комбинатов и какова возможность складов. Также известна стоимость перевозки 1 тонны сырья из каждого склада к комбинату (числа на стрелочках). Нужно так спланировать снабжение комбинатов сырьём, чтобы затраты на перевозку были наименьшими. Данные задачи по схеме.



Построим математическую модель задачи.
Введем переменные:
x_{11} – количество сырья, перевозимого со склада С на комбинат А;
x_{12} – со склада С на комбинат В;
x_{21} – из Д в А;
x_{22} – из Д в В.
На комбинат А должно быть поставлено 40 тонн с обоих складов, значит $x_{11} + x_{21} = 40$, на комбинат В должно быть доставлено 50 тонн, значит $x_{11} + x_{22} = 50$.

Со склада С вывезено не более 70 тонн, т.е. $x_{11} + x_{12} \le 70$, аналогично из Д $x_{21} + x_{22} \le 30$. Имеем систему ограничений:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 40 \\ x_{12} + x_{22} = 50 \\ x_{11} + x_{12} \le 70 \\ x_{21} + x_{22} \le 30 \\ x_{ij} \ge 0,\ \square\square\square\ i,j = 1,2 \end{cases} \qquad (3)$$

Целевая функция F, выражающая стоимость перевозок имеет вид

$$F = 2x_{11} + 6x_{12} + 5x_{21} + 3x_{22} \to \min. \qquad (4)$$

Задача 3 (о составлении плана выпуска при определенной загрузке оборудования).

Некоторому заводу требуется составить оптимальный план выпуска двух видов изделий, которые отрабатываются на четырех видах машин. Известные определенные возможности и производительность оборудования; цена изделий, обеспечивающая прибыль заводу составляет 4 тыс. руб. за изделие I вида, 6 тыс. руб. за изделие II вида. Составить план выпуска этих изделий так, чтобы от реализации их завод получил наибольшую прибыль. В таблице указано время, необходимое для обработки каждого из двух видов изделий на оборудовании всех четырех видов.

Изделия	Виды машин			
	1	2	3	4
I	1	0,5	1	0
II	1	1	0	1
Возможное время работы машин	18	12	12	9

Построим математическую модель.

В задаче необходимо определить план выпуска изделий, обозначим за x – количество изделий I вида, за y – количество изделий II вида. Тогда, определим сколько времени затратит 1-ая машина на обработку всех производственных изделий. Она тратит 1 ед. времени на 1 изделие типа I, значит на x штук изделий потратит x ед. времени, на обработку y изделий типа II затратится y ед. времени. Всего резерв времени работы 1-й машины 18 единиц времени. Значит, $x + y \le 18$. Аналогичные рассуждения со 2-й машиной, 3-й и 4-й дадут систему ограничений:

$$\begin{cases} x + y \le 18 \\ 0{,}5x + y \le 12 \\ x \le 12 \\ y \le 9 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases} \tag{5}$$

Общая прибыль будет выражена в целевой функции:

$$F = 4x + 6y \to \max. \tag{6}$$

Задача состоит в нахождении на множестве решений системы (5) такого решения, при котором значение целевой функции (6) было бы максимальным.

Еще одна распространенная задача ЛП – задача о составлении смеси. Примером таких задач может быть задача о составлении таких смесей нефтепродуктов, которые бы удовлетворяли определенным техническим требованиям и были наиболее дешевыми по стоимости. Либо задачи о рационе, когда известна потребность в определенных веществах и содержание этих веществ в различных продуктах. Необходимо составить рацион так, чтобы удовлетворить потребности в необходимых веществах и при этом продуктовая корзина имела бы минимальную стоимость, при заданных ценах на продукты.

Рассмотрим пример.

Задача 4 (о смесях).

Для откорма пушных зверей на звероферме в их рацион необходимо включать не менее 33 единиц вещества А, 23 единицы питательного вещества В, 12 единиц С. Для откорма используются 3 вида корма. Данные о содержании питательных веществ в каждом виде корма заданы таблицей. Также известны: стоимость кормов. Необходимо составить наиболее дешевый рацион.

Корма-продукты	Вещества			Стоимость 1 ед. корма
	A	B	C	
I	4	3	1	20
II	3	2	1	20
III	2	1	2	10

Для понимания задачи можете представить себе, что вещества A, B, C – это жиры, белки, углеводы, а продукты I, II, III – то, чем кормят зверей, например, рыба, комбикорм, витаминные добавки. Тогда, первая строка таблицы показывает содержание в 1 ед. рыбы: 4 единиц белка, 3 ед. жиров, 1 ед. углеводов. Вторая строка содержание белков, жиров, углеводов в 1 ед. II продукта и т. д.

Если постановка задачи ясна, приступим к построению математической модели.

Опять стоит вопрос, что обозначить за неизвестные? В качестве ответа к поставленной задаче мы должны предложить рацион, т. е. указать сколько и каких кормов взять, чтобы необходимое количество питательных веществ было соблюдено, и при этом он стоил как можно дешевле.

Обозначим за X_1 – количество кормов типа I в рационе, за X_2 – количество кормов типа II, и соответственно X_3 – количество корма III в рационе. Тогда, вещества A при потреблении продуктов типа I звери получат $4X_1$, при потреблении II продукта– $3x_2$, при потреблении III– $2x_3$. Всего вещества A необходимо употребить по условию задачи не менее 33 единиц, следовательно .

Аналогично рассуждая с веществом B, имеем:

$$3x_1 + 2x_2 + 1x_3 \geq 23 \quad \text{и} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 12 \quad \text{для C.}$$

Таким образом, получим систему ограничений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ \geq \ 33 \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 \ \geq \ 23 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ \geq \ 12 \\ x_1 \ \geq \ 0 \\ x_2 \ \geq \ 0 \\ x_3 \ \geq \ 0 \end{cases} \tag{7}$$

Переменные неотрицательны по смыслу задачи. При этом стоимость рациона выражается функцией:

$$F = 20x_1 + 20x_2 + 10x_3 \to \min, \tag{8}$$

т. к. 20, 20, 10 – стоимость одной единицы продуктов I, II, III типов соответственно, а в рационе их содержится x_1, x_2, x_3 единиц.

Система ограничений (7), вместе с целевой функцией (8) и составляют математическую модель исходной задачи. Решить ее, значит найти такие x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие системе ограничений и обращающие значение функции F в минимальное.

Задача 5 (о раскрое).

Пусть из заготовок для замков-молний, длиной 1 метр, выпускаются замочки размером 12 см, 18 см и 35 см. Известны различные варианты раскроя метровых заготовок на замочки и остатки для каждого варианта. Также заданы потребности в замочках каждой длины. Необходимо определить: по каким вариантам кроить, чтобы получить необходимое количество замочков, при этом количество отходов должно быть минимальным.

Типы замков-молний	Варианты раскроя			Потребности в замках
	1	2	3	
12 см	1	5	2	20
18 см	1	2	2	20
35 см	2	0	1	10
отходы	0	4	5	

Построение модели.

Обозначим за x_1 - количество метровых заготовок, раскраиваемых по 1-ому варианту, за x_2 - количество метровых заготовок, раскраиваемых по 2-ому варианту, за x_3 - количество метровых заготовок, раскраиваемых по 3-ому варианту.

Тогда посчитаем количество замков:

$$
\begin{aligned}
&\text{длиной 12 см: } 1x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 20,\\
&\text{длиной 18 см: } 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 20,\\
&\text{длиной 35 см: } 2x_1 + 0x_2 + 1x_3 \geq 10.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Количество отходов определяет целевую функцию и равно:

$$F = 0x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \min \tag{10}$$

§ 2.2 Графический способ решения систем линейных неравенств

Некоторые задачи ЛП можно решить графически. Этот метод решения применяется, если неизвестных всего два, либо задача может быть сведена к задаче с двумя переменными.

Система ограничений такой задачи состоит из неравенств от двух переменных:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \le b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x + a_{n2}y \le b_n \\ x \ge 0, y \ge 0, \end{cases}$$

и целевая функция имеет вид $F = C_1x + C_2y$, которую необходимо максимизировать или минимизировать.

Ответим на вопрос: какие пары чисел $(x;\ y)$ являются решениями системы неравенств, т. е. удовлетворяют каждому из неравенств одновременно?

Предварительно необходимо понять, что является решением одного линейного неравенства с двумя неизвестными.

Решить линейное неравенство с двумя неизвестными – это значит определить все пары значений неизвестных при которых неравенство выполняется.

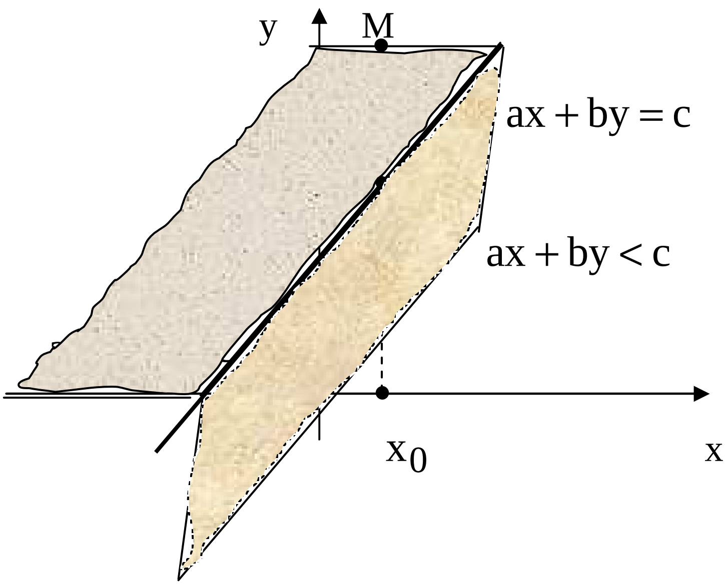
Например, неравенству $3x - 5y \ge 42$ удовлетворяют пары $(x;\ y)$: (100,2), (3, -10) и т. д. Задача состоит в нахождении всех таких пар.

Справедливо утверждение:

Рассмотрим произвольные неравенства: $ax + by \le c,\ ax + by \ge c.$ **Прямая** $ax + by = c$ **делит плоскость на две полуплоскости так, что координаты точек одной из них удовлетворяют неравенству** $ax + by > c$**, а другой** $ax + by < c$**..**

Действительно, возьмем точку с координатой $x = x_0;$; тогда точка, лежащая на прямой и имеющая абсциссу x_0, имеет $y_0 = \frac{-a}{b} \cdot x_0 + \frac{c}{b}$, итак $P\left(x_0;\ -\frac{a}{b} \cdot x_0 + \frac{c}{b} \right)$.

Пусть для определенности $a < 0,\ b > 0,\ c > 0.$ Все точки с абсциссой x_0, лежащие выше P (например, точка M) имеют $y_M > y_0$, а все точки, лежащие ниже точки P, с абсциссой x_0, имеют $y_M < y_0$. Поскольку



x_0 – произвольная точка, то всегда с одной стороны от прямой будут находится точки, для которых $ax + by > c$, образующие полуплоскость. А с другой стороны точки, для которых $ax + by < c$. Знак неравенства в полуплоскости зависит от знака чисел a, b, c.

В этом факте и заключён способ графического решения систем линейных неравенств от двух переменных. Для решения системы необходимо:

1. Для каждого неравенства выписать уравнение. Соответствующее данному неравенству.

2. Построить прямые, являющиеся графиками функций, задаваемых уравнениями.

3. Для каждой прямой определить полуплоскость, которая задается неравенством. Для этого взять произвольную точку, не лежащую на прямой, подставив ее в уравнение, определить знак, сравнить со знаком исходного неравенства. Если они совпадают, то полуплоскость, содержащая выбранную точку, и является решением исходного неравенства. Если знаки разные, то полуплоскость по другую сторону прямой является решением данного неравенства.

4. Чтобы решить систему неравенств необходимо найти **область пересечения всех полуплоскостей,** являющихся решением каждого неравенства системы.

Эта область может оказаться пустой, тогда система неравенств не имеет решений, **несовместна.** В противном случае говорят, что система **совместна.**

Решений может быть конечное число и бесчисленное множество. Область может представлять собой замкнутый многоугольник, или же быть открытой.

Рассмотрим три соответствующих примера.

Пример 1. Определить область решения системы:

$$\begin{cases} x + y - 1 \le 0 \\ -2x - 2y + 5 \ge 0 \end{cases}$$

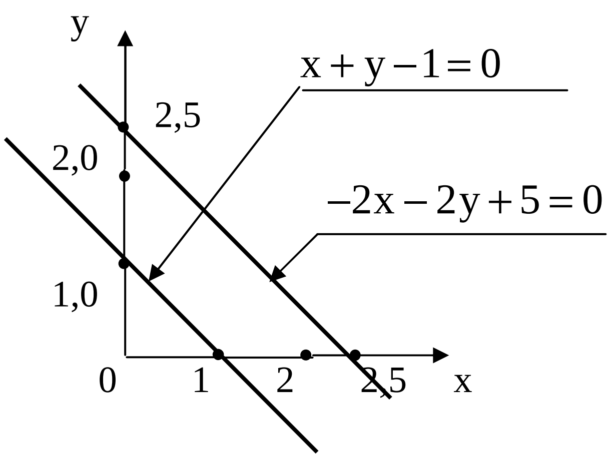
Решение:

1) рассмотрим уравнения $x + y - 1 = 0$ и $-2x - 2y + 5 = 0$, соответствующие неравенствам;
2) построим прямые, определяющиеся этими уравнениями.

$x + y - 1 = 0$

$-2x - 2y + 5 = 0$

Определим полуплоскости, задаваемые неравенствами. Возьмём произвольную точку, пусть $(0;\,0)$. Рассмотрим $x+y-1=0$, подставим точку $(0;\,0)$ в уравнение $0+0-1=-1\le 0$, значит в той полуплоскости, где лежит точка $(0;\,0)$ неравенство выполняется $x+y-1=0$, т.е. полуплоскость, лежащая ниже прямой является решением первого неравенства.



Подставив эту точку $(0;\,0)$ во второе $-2x-2y+5=0$, т.е. в полуплоскости, где лежит $(0;\,0)$, а нас спрашивали, где $-2x-2y+5\le 0$, следовательно, в другой полуплоскости – в той, что выше прямой.

3) Найдём пересечение этих двух полуплоскостей. Прямые параллельны, поэтому плоскости нигде не пересекаются, значит, система данных неравенств решений не имеет, несовместна.

Пример 2. Найти графически решение системы неравенств:

$$\begin{cases} x+2y-2\le 0 \\ y-x-1\le 0 \\ y+2\ge 0 \end{cases}$$

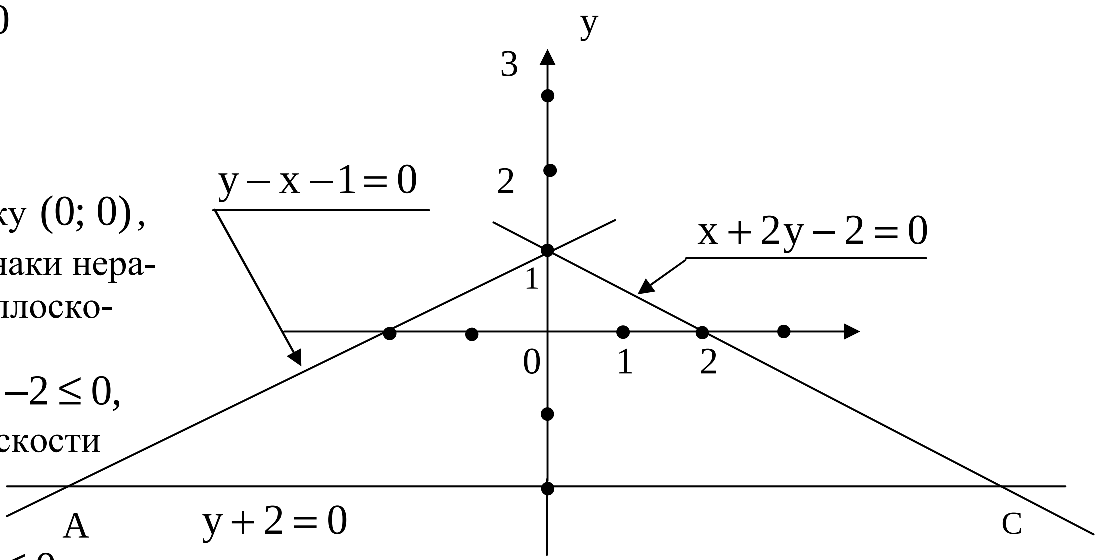
1) Выпишем уравнения, соответствующие неравенствам и построим прямые

$x+2y-2=0$
$y-x-1=0$
$y=-2$

2)Выбрав точку $(0;\,0)$, определим знаки неравенств в полуплоскостях:

$0+2\cdot 0-2=-2\le 0$,

т.е. в полуплоскости ниже прямой



$0-0-1=-1\le 0$,

т.е. $y-x-1\le 0$ в полуплоскости ниже прямой; $0+2=2\ge 0$, т.е. $y+2\ge 0$ в полуплоскости выше прямой.

3) Пересечение этих трех полуплоскостей будет являться область, являющаяся треугольником. Нетрудно найти вершины области, как пересечение соответствующих прямых:

$$A:\ \begin{cases} y+2=0 \\ y-x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ -2-x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$B:\ \begin{cases} y-x-1=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ x+2(x+1)-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ 3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$$

$$C:\ \begin{cases} x+2y-2=0 \\ y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x+2\cdot(-2)-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=6 \end{cases}$$

Решив системы методом подстановки, определим координаты A(–3;–2), B(0;1), C(6;–2).

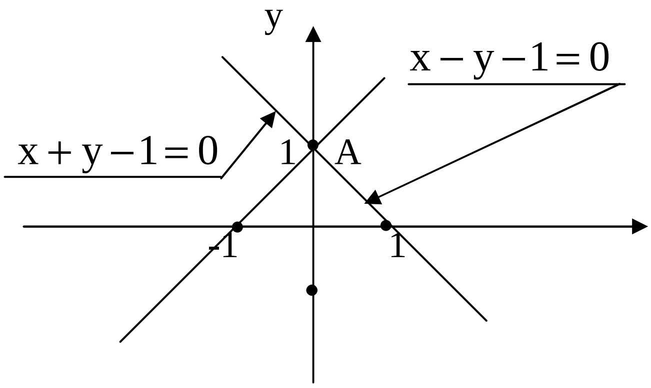
Рассмотрим еще один пример, в котором получившаяся область решения системы – открытая.

Пример 3. Решить графически систему

$$\begin{cases} x+y-1\le 0 \\ y-x-1\ge 0 \end{cases}$$

1) Выпишем уравнения, соответствующие неравенствам и построим прямые

$$x+y-1=0$$
$$y-x-1=0$$



2) Определим знаки в полуплоскостях. Выберем точку $(0;\,0)$ $0-0-1=-1\le 0$, т.е. $y-x-1\le 0$ ниже прямой, $0+0-1=-1\le 0,$ т.е. $x+y-1\le 0$ ниже прямой.

3) Пересечением двух плоскостей является угол с вершиной в т. $A(0;1)$. Этот угол, представляющий собой открытую область, является решением исходной системы неравенств.

§ 2.3 Решение задачи линейного программирования графически

Итак, мы научились решать системы линейных неравенств от двух переменных и выяснили, что решением является некоторая область плоскости.

Вернемся к ЗЛП. Любая ЗЛП состоит из ограничений, являющихся системой неравенств, и целевой функции.

Определение. Любое решение системы ограничений называется допустимым решением ЗЛП.

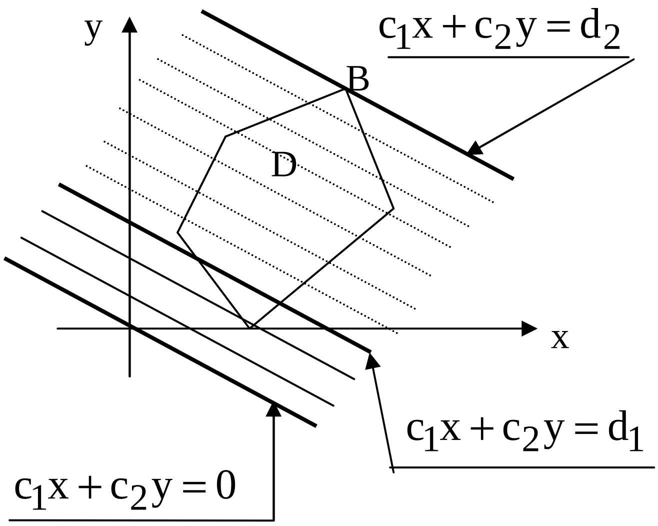
Определение. Допустимое решение, в котором целевая функция достигает максимального или минимального значения, называется оптимальным решением.

В силу этих определений задача ЛП может быть сформулирована следующим образом:

Среди всех точек выпуклой области, являющейся решением системы ограничений, выбрать такую, координаты которой минимизируют (максимизируют) линейную функцию $F = C_1x + C_2y$.

Заметим, что переменные x, y в ЗЛП принимают, как правило, неотрицательные задачи ($x \ge 0$, $y \ge 0$,, поэтому область расположены в I четверти координатной плоскости.

Заметим, что переменные (x, y) в ЗЛП принимают, как правило, неотрицательные задачи $x \ge 0$, $y \ge 0$,, поэтому область расположены в I-ой четверти координатной плоскости.



Рассмотрим линейную функцию $F = C_1x + C_2y$ и зафиксируем какое-нибудь её значение F, пусть, к примеру $F = 0$ или $C_1x + C_2y = 0$, графиком этого уравнения будет прямая, проходящая через начало координат $(0; 0)$. При изменении этого фиксированного значения $F = d$, прямая $C_1x + C_2y = d$, будет смещаться параллельно и «зачертит» всю плоскость. Пусть $D -$ многоугольник – область решения системы ограничений. При изменении d прямая $C_1x + C_2y = d$, при некотором значении $d = d_1$ достигает многоугольника D, назовём эту точку $A -$ «точкой входа», и затем, пройдя многоугольник, при некотором значении $d = d_2$ будем иметь с ним последнюю общую точку B, назовём $B -$ «точкой выхода».

Вектор (C_1, C_2) является градиентом функции F и показывает **направление роста функции.** Функция F **перпендикулярна** этому вектору. Очевидно, что своего наименьшего значения целевая функция $F = C_1x + C_2y$ достигнет в точке «входа» A и наибольшего значения в точке «выхода» B.

Учитывая, что оптимальное значение на множестве допустимых, целевая функция принимает в точке «входа» или «выхода», т. е. в вершинах области решений, можно предложить следующий план решения ЗЛП:

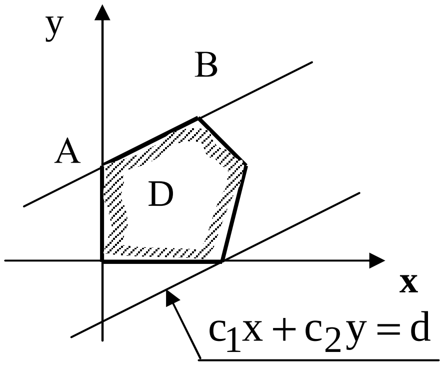
1) построить область решений системы ограничений;

2) построить прямую для целевой функции, перпендикулярную вектору (C_1, C_2), и параллельным переносом этой прямой, найти точку «входа» или «выхода» (в зависимости от требования минимизировать или максимизировать целевую функцию);

3) определить координаты этой точки, вычислить в них значение целевой функции.

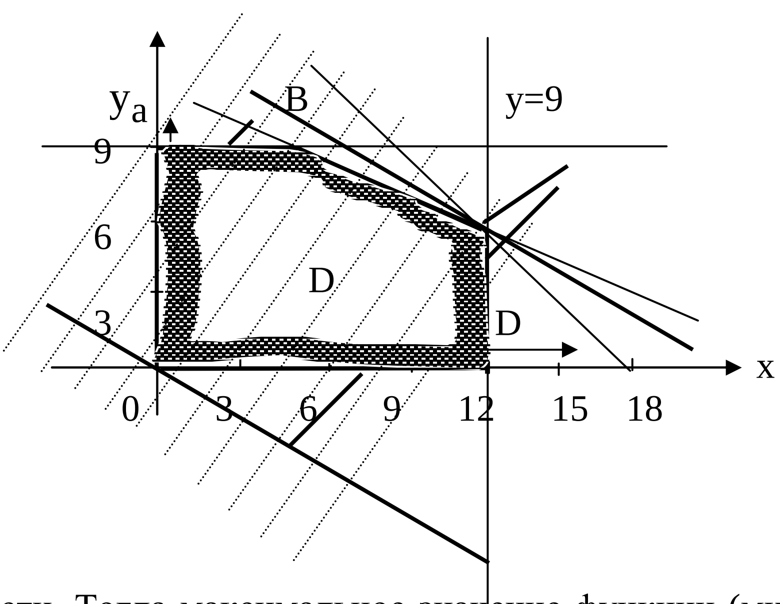
4) При графическом решении ЗЛП возможны два случая, которые требуют особого обсуждения.

Случай 1.



При перемещении прямой $C_1x + C_2y = d$ “вход” или “выход” (как на рисунке) произойдет по стороне многоугольника. Это случится, если в многоугольнике есть стороны, параллельные прямой $c_1x + c_2y = d$.

В этом случае, точек «выхода» («входа»), бесконечное множество, а именно, любая точка отрезка AB. Это означает, что целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение не в одной точке, а во всех точках, лежащих на соответствующей стороне многоугольника D.



Случай 2. Рассмотрим случай, когда область допустимых значений открыта, как например, случалось в рассмотренном примере 3. В случае открытой области целевая функция может быть задана таким образом, что соответствующая ей прямая не имеет точки «выхода» (или «входа») из области. Тогда максимальное значение функции (минимальное) не достигается никогда, говорят, что **функция неограниченно возрастает.**

Рассмотрим решение задачи графическим способом на примере задачи 3 (о составлении плана) темы 2.1.

Необходимо найти максимальное значение целевой функции $F = 4x = 6y \to max$, при системе ограничений:

$$\begin{cases} x + y \le 18 \\ 0{,}5x + y \le 12 \\ x \le 12 \\ y \le 9 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

1) Построим область допустимых значений, являющуюся решением системы неравенств. Для этого построим каждую прямую и определим полуплоскости, заданные неравенствами.

$x = 12 -$ параллельна оси OY;

$x \le 12 -$ полуплоскость левее $x = 12$;

$y = 9 -$ параллельна оси OX;

$y \le 9 -$ полуплоскость ниже $y = 9$;

$x = 0 -$ ось OY; $x \ge -$ полуплоскость правее оси OY;

$y = 0 -$ ось OX; $y \ge --$ полуплоскость выше оси OX;

$0{,}5x + y \le 12 -$ полуплоскость ниже прямой $0{,}5x + y = 12$;

$x + y \le 18 -$ полуплоскость ниже прямой $x + y = 18$.

2) Пересечением всех этих полуплоскостей является. очевидно, пятиугольник ОАВСД, с вершинами в точках О(0;0), А(0;9), В(6;9), С(12;6), Д(12;0). Этот пятиугольник и образует область допустимых значений задачи.

3) Рассмотрим целевую функцию задачи $F = 4x + 6y \to max$.

Вектор градиента целевой функции имеет вид $n(4, 6)$. Построим прямую, перпендикулярную этому вектору $4x + 6y = 0$. Будем двигать эту прямую параллельным образом. Из всего семейства прямых $4x + 6y = const$ последней вершиной, через которую пройдет прямая, при выходе за границу многоугольника, будет вершина $C(12, 6)$. Именно в ней $F = 4x + 6y$ достигнет своего максимального значения.

Значит, при $x = 12$, $y = 6$ *функция F достигает своего максимального значения* $F = 4 \cdot 12 + 6 \cdot 6 = 84$,, *равного 84.* Точка (12; 6) удовлетворяет всем неравенствам системы ограничений, и в ней значение целевой функции оптимально $F^* = 84$ (оптимальное значение будем обозначать «*»). Задача решена.

Ответ: необходимо выпустить 12 изделий I вида и 6 изделий II вида, при этом прибыль составит 84 ед.

Еще раз обратим внимание на то, что графический метод применялся нами для решения задач, которые имели в системе ограничений только две переменных. В принципе этот метод может применяться и для систем неравенств, имеющих три переменных. Геометрически ситуация будет иная, роль прямых будут играть плоскости в трехмерном пространстве, а решением неравенства от трех переменных будет являться полупространство, находящееся по одну сторону от плоскости. Роль областей будут играть многогранники, являющиеся пересечением полупространств. Идея метода остается в этом случае той же. Желающие ознакомиться подробнее могут обратиться к книге А. С. Солодовникова «Системы линейных неравенств» (популярные лекции по математике)

§ 2.4 Каноническая форма задач ЛП

В каждой задаче ЛП ищутся значения переменных при условии, чтобы:
1) эти значения удовлетворяли некоторой системе линейных уравнений или неравенств;
2) при этих значениях целевая функция обращалась бы в минимум или максимум.

Одним из универсальных методов ЛП является симплексный метод, который можно применять если задача ЛП имеет каноническую форму.

Определение. Задача ЛП имеет каноническую форму, если все ограничения системы состоят только из уравнений, переменные неотрицательны, и целевую функцию необходимо максимизировать.

Однако, в большинстве экономических задач, чаще всего в систему ограничений первоначально входят не только уравнения, но и неравенства, как было у нас в задачах 2,3,4,5.

Утверждение. Любая общая задача ЛП может быть приведена к канонической форме.

Приведение любой общей задачи ЛП к канонической форме достигается путем введения новых (или их называют **дополнительными**) переменных. Вернемся к задаче 3. Система ограничений (3) этой задачи состоит из четырех неравенств. Введя дополнительные переменные $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0$, можно перейти к системе ограничений:

$$\begin{cases} x + y + y_1 = 18 \\ 0{,}5x + y + y_2 = 12 \\ x + y_3 = 12 \\ y + y_4 = 9 \\ x,\ y \geq 0,\ y_i \geq 0, i = 1{,}4 \end{cases} \qquad (9)$$

Эти дополнительные переменные y_i имеют абсолютно ясный экономический смысл, а именно означают величину неиспользованного времени работы (простоя) машины i – го вида.

Например, если бы машины первого вида работали все 18 ч., то $x + y = 18$, следовательно $y_1 = 0$. Но мы допускаем возможность неполного использования времени работы 1-й машины $x+y<18$. В этом случае y_1 приобретает положительное значение и может рассматриваться как неиспользованный лимит времени. Например, зная решение этой задачи из результатов § 2.2, $x=12$, $y=6$, мы можем из системы ограничений (9) сделать вывод, что $y_1=y_2=y_3=0$, а $y_4=12-6=6$. То есть машины 1-го , 2-го, 3-го вида используют свое рабочее время полностью. А вот 4-я машина загружена лишь наполовину, 6 часов, при заданном оптимальном плане, простаивает. Возможно, после таких выводов руководителю предприятия захочется загрузить ее другой работой, сдать в аренду на это время и т. д.

Итак, введением дополнительных переменных мы можем любое ограничение типа неравенства привести к уравнению.

Рассмотрим задачу о смеси (задача 4). Система ограничений (7) имела вид:

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3\ge 33 \\ 3x_1+2x_2+x_3\ge 23 \\ x_1+x_2+2x_3\ge 12 \\ x_i\ge 0,\ i=1,3 \end{cases}$$

Неравенства были обращены в сторону «больше», поэтому вводя дополнительные переменные $y_1,\ y_2,\ \ y_3\ge 0$ их необходимо **отнять** от левой части, чтобы уравнять ее с правой. Получим систему ограничений в канонической форме:

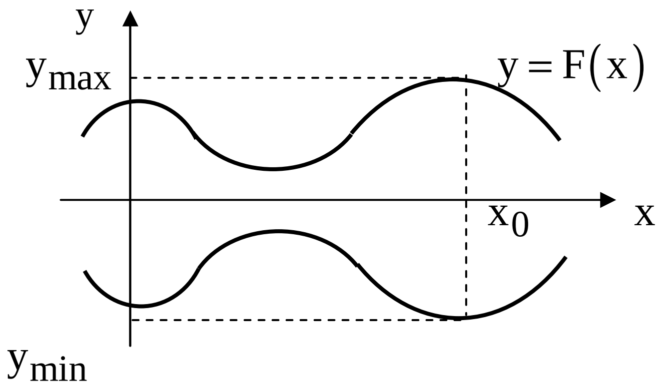
$$\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3-y_1\ =33 \\ 3x_1+2x_2+x_3-y_2\ =23 \\ x_1+x_2+2x_3-y_3\ =12 \\ x_i\ge 0,\ y_i\ge 0,\ i=1,3 \end{cases}$$

Переменные y_1 также будут иметь экономический смысл. Если вы вспомните практическое содержание задачи, то переменная y1 будет означать количество излишнего вещества A в смеси, y_2 – количество излишков вещества B в смеси, y_3 – излишки C в смеси.

Задача нахождения минимального значения целевой функции может быть сведена к нахождению максимума для функции –F. Ввиду очевидности утверждения $\max F=-\min(-F)$. Посмотрите на рисунок, если в какой-то точке $x=x_0$ функция $y=F(x)$ достигает своего максимума, то функция $y=-F(x)$, симметричная ей относительно оси OX, в этой же точке x_0 достигнет минимума, причем $y_{max=-y_{min}}$ при $x=x_0$. Вывод:

Для представления задачи ЛП в канонической форме необходимо:

1) неравенства, входящие в систему ограничений задачи, преобразовать в уравнения, с помощью дополнительных переменных;
2) если целевая функция $F \to \min$ (минимизируется), ее следует заменить на функцию $-F \to \max$ (максимизируется),



3) если какая-то переменная не является неотрицательной, то ее представляют в виде разности двух переменных, которые уже в свою очередь неотрицательны: $x_i = x_i' - x_i''$

§ 2.5 Идея симплекс-метода

Симплекный метод имеет широчайшее применение в связи с развитием ПК и является универсальным методом линейного программирования. Его алгоритм состоит из ряда шагов, следуя которым вы приходите к решению задачи ЛП. В этой теме нас будет интересовать идея этого метода, которая при общем взгляде на алгоритм, или на «замурованную» программу в ЭВМ не столь ясна, как если бы рассмотреть ее на конкретном примере.

Итак, если мы решаем ЗЛП в канонической форме, то система ограничений это обычная система линейных уравнений. При решении задач ЛП получаются системы линейных уравнений неопределенные, т.е имеющие много решений.

Например, пусть есть система

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 5 \\ x_2 + 5x_3 = 11 \end{cases}$$

Здесь число уравнений равно 2, а неизвестных 3, уравнений меньше – система недоопределена. Выразим x_1 и x_2 через x_3:

$$\begin{cases} x_1 = 5\text{-}4x_3 \\ x_2 = 11\text{-}5x_3 \end{cases}$$

Это общее решение системы, если переменной x_3 придавать любые, произвольные числовые значения, то будем находить частные решения системы. Например, $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 6.$ Имеем $(1, 6, 1)$ – частное решение. Пусть $x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 1, (-3, 1, 2)$ – другое частное решение. Таких частных решений бесконечно много.

Переменные x_1 и x_2 называются базисными, а переменная x_3 не базисная, свободная.

Совокупность переменных x_1 и x_2 образуют **базис:** $Б(x_1, x_2)$. Если $x_3 = 0$ равно нулю, то полученное частное решение (5,11,0) называется базисным решением соответствующим базису $Б(x_1, x_2)$.

Базисным называется решение, соответствующее нулевым значениям свободных переменных.

В качестве базисных можно было взять и другие переменные (x_1, x_3) или (x_2, x_3).

Как переходить от одного базиса $Б(x_1, x_2)$ к другому базису $Б(x_1, x_3)$?

Для этого надо переменную x_3 перевести в базисные, а x_2 – в небазисные. То есть в уравнениях надо x_3 выразить через x_2, и подставить в 1-е:

$$x_3 = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_2$$

$$x_1 = 5 - 4x_3 = 5 - 4\left(\frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_2\right) = -\frac{19}{5} + \frac{4}{5}x_2$$

Базисное решение, соответствующее базису $Б(x_1, x_3)$ таково: $(-19/5;\ 0;\ 11/5)$.

Если теперь от базиса $Б(x_1, x_3)$ нам захочется перейти к базису $Б(x_2, x_3)$, то

$$x_2 = \frac{19}{4} + \frac{5}{4}x_1$$

$$x_3 = -\frac{7}{8} - \frac{5}{8}x_1$$

Базисное решение, соответствующее базису $Б(x_2, x_3)$: (0;19/4;7/8).

Из трех найденных базисных решений, решение соответствующее базису $Б(x_1, x_3)$ – отрицательное $x_1 < 0$, нас в ЗЛП интересуют только **неотрицательные** решения. Если задача ЛП имеет решение, то оно достигается на множестве **базисных неотрицательных** решений системы ограничений канонической формы.

Поэтому идея симплекс-метода и состоит в последовательном переходе от одного базиса к другому, лучшему, с точки зрения значения целевой функции. Рассмотрим пример. Функцию $F = x_1 - x_2 \to \max$ необходимо максимизировать, при заданной системе ограничений:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 12 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Эти ограничения могут рассматриваться как произошедшие из неравенств, а переменные $(x_3,\ x_5,\ x_4)$ как дополнительные. Запишем ограничения, выбрав базис из переменных $Б\{x_3,\ x_4,\ x_5\}$:

$$\begin{cases} x_3 = 2 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 2 + 2x_2 - x_1 \\ x_5 = 5 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

Этому базису соответствует базисное неотрицательное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$, $x_5 = 5$ или (0,0,2,2,5).

Теперь нужно выразить F через небазисные переменные, в нашем случае это уже сделано: $F = x_1 - x_2$.

1) Проверим, достигла ли функция F своего максимального значения. Для этого базисного решения, $F = 0 - 0 = 0 -$ значение функции равно 0. Но его можно увеличить, если x_1 будет возрастать, т. к. коэффициент в функции при x_1 положителен. Однако, при увеличении x_1 значения переменных x_4, x_5 уменьшается (смотрите 2-е и 3-е равенство системы ограничений). Переменная x_1 не может быть увеличена больше, чем до 2, иначе x_4 станет отрицательной (ввиду равенства 2), и не больше, чем до 5, иначе x_5 – отрицателен. Итак, из анализа следует, что переменную x_1 можно увеличить до 2, при этом значение функции уменьшится.

2) Перейдем к новому базису Б2, введя переменную x_1 в базис вместо x_4 Итак, $Б_2\{x_1,\ x_3,\ x_5\}$.Выразим эти базисные переменные через небазисные. Для этого, сначала выразим x_1 из 2-го уравнения и подставим в остальные, в том числе и в функцию.

Имеем:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 - x_4 \\ x_3 = 6 + 3x_2 - 2x_4 \\ x_5 = 3 - 3x_2 + x_4 \end{cases}$$

$$F = 2 + x_2 - x_4$$

Базисное решение, соответствующее базису $Б_2\{x_1, x_3, x_5\}$ имеет вид (2,0,6,0,3) и функция принимает значение $F = 2$ в этом базисе.

3) Значение функции можно и дальше увеличивать, увеличивая x_2. Однако, глядя на систему, x_2 можно увеличивать лишь до 1, т. к. иначе из последнего равенства $x_5 = 3 - 3x_2 + x_4$ следует, что при $x_2 > 1$, x_5 станет отрицателен. Остальные уравнения системы не дают ограничений на x2. Поэтому увеличим x_2 до 1, введя его в базис вместо x_5.

$Б_3\{x_1, x_2, x_3\}$

Выразим x_2 через x_5 и подставим во все уравнения:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \\ x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_3 = 9 - x_4 - x_5 \end{cases}$$

$$F = 3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5$$

Базисное решение, соответствующее базису $Б_3\{x_1, x_2, x_3\}$ выписывается (4, 1, 9, 0 ,0), и функция принимает значение $F = 3$. Заметим, что значение F увеличилось, т. е. улучшилось по сравнению с предыдущим базисом.

Посмотрев на вид целевой функции $F = 3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5$, заметим, что улучшить, т. е. увеличить значение F нельзя. Только при $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, значение $F = 3$, как только x_4, x_5 станут положительными, значение F только уменьшится, т. к. коэффициенты при x_4, x_5 отрицательны. Значит, функция F достигла своего оптимального значения $F^* = 3$. Итак, наибольшее значение F, равное 3, достигается при $x_1^* = 4$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 9$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 0$. Пример завершен.

На этом примере очень наглядно продемонстрирована идея метода: постепенно переходя от базиса к базису, при этом, всегда обращая внимание на значения целевой функции, которые должны улучшиться, мы приходим к такому базису, в котором значение целевой функции улучшить нельзя, оно оптимально. Заметим, что базисов конечное число, поэтому количество шагов, совершаемых нами до того нужного базиса, конечно. Осталось эту идею воплотить в четкий алгоритм, чтобы избежать тяжелого вычислительного процесса, и отдать полученный в результате симплекс-метод на «вооружение» машине-компьютеру.

§ 2.6 Симплексный метод решения задач линейного программирования

Если в задачи три и более переменных, а в реальных экономических задачах, как раз такая ситуация, трудно представить наглядно графически область решений системы ограничений. Такие задачи решаются с помощью симплекс–метода или методом последовательных улучшений. По определенному правилу находятся первоначальный опорный план (некоторая вершина области ограничений). Проверяется, является ли план оптимальным. Если да, то задача решена. Если нет, то переходим к другому улучшенному плану – к другому базису. Значение целевой функции в новом базисе (в новой вершине) заведомо лучше, чем в предыдущей. Алгоритм перехода осуществляется с помощью некоторого вычислительного шага, который удобно записывать в виде таблиц, называемых симплекс-таблицами. Так как вершин конечное число, то за конечное число шагов мы приходим к оптимальному решению.

Рассмотрим симплексный метод на конкретном примере задачи о составлении плана.

Еще раз заметим, что симплекс–метод применим для решения канонических задач ЛП, приведенных к специальному виду, т.е. имеющих базис, положительные правые части, и целевую функцию, выраженную через небазисные переменные. Если задача не приведена к специальному виду, то нужны дополнительные шаги, о которых мы поговорим позже.

Рассмотрим задачу о планировании производства, предварительно построив модель и приведя ее к специальному виду.

Задача 7 (о планировании производства изделий).

Для изготовления изделия А и В склад может отпустить сырья не более 80 единиц. Причем на изготовление изделия А расходуется 2 единицы, а изделия В – одна единица сырья. Требуется спланировать производство так, чтобы была обеспечена наибольшая прибыль, если изделий А требуется изготовить не более 50 шт., а изделий В не более 40 шт. Причем прибыль от реализации одного изделия А – 5 руб., а от В – 3 руб.

Построим математическую модель, обозначив за x_1 – количество изделий А в плане, за x_2 – количество изделий В, тогда система ограничений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 \le 50 \\ x_2 \le 40 \\ 2x_1 + x_2 \le 80 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$F = 5x_1 + 3x_2 \to \max$$

Приведем задачу к каноническому виду, введя дополнительные переменные $x_1;\ x_4;\ x_5$ ::

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 50 \\ x_2 + x_4 = 40 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 80 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (10)$$

$$F = 5x_1 + 3x_2 \to \max$$

Эта задача имеет специальный вид (с базисом, правые части неотрицательны). Ее можно решить симплекс–методом.

I этап. Запись задачи в симплекс–таблицу.

Между системой ограничений задачи (10) и симплекс–таблицей взаимно-однозначное соответствие. Строчек в таблице столько, сколько равенств в системе ограничений; а столбцов столько, сколько свободных переменных. Базисные переменные заполняют первый столбец, свободные – верхнюю строку таблицы. Нижняя строка называется индексной, в ней записываются числа, противоположные коэффициентам при переменных в целевой функции. В правом нижнем углу первоначально записывается 0, если в функции нет свободного члена. На этом месте (в правом нижнем углу) будет значение целевой функции, которое при переходе от одной таблице к другой должно увеличиваться. Итак, нашей системе ограничений соответствует таблица 1, и можно переходить ко 2 этапу решения.

Таблица 6.1

базисные	$-x_1$	$-x_2$	свободные
x_3	1	0	50
x_4	0	1	40
x_5	2	1	80
F	–5	–3	0

II этап. Проверка опорного плана на оптимальность.

Данной таблице 1 соответствует следующий опорный план $(x_1, x_2, x_3, x_4,\ x_5) = (0,\ 0,\ 50,\ 40,\ 80)$. Свободные переменные $\{x_1,\ x_2\}$ равны 0; $x_1 = 0,\ x_2 = 0$. А базисные переменные $\{x_3,\ x_4,\ x_5\}$ принимают значения $x_3 = 50,\ x_4 = 40,\ x_5 = 80 -$ чисел столбца свободных членов. Значение целевой функции $F = 5x_1 + 3x_2 = 5\cdot$.

Наша задача проверить является ли данный опорный план оптимальным, для этого необходимо просмотреть индексную строку – строку целевой функции F.

Возможны ситуации:

1) В индексной F–строке нет отрицательных элементов. Значит план оптимален, можно выписать решение задачи. Целевая функция достигла своего оптимального значения, равного числу, стоящему в правом нижнем углу, взятым с противоположным знаком. Переходим к IV этапу.

2) В индексной строке есть хотя бы один отрицательный элемент, в столбце которого нет положительных. Тогда делаем вывод о том, что целевая функция $F \to \infty$ неограниченно возрастает.

3) В индексной строке есть отрицательный элемент, в столбце которого есть хотя бы один положительный. Тогда переходим к следующему III шагу, пересчитываем таблицу, улучшая опорный план.

III этап. Улучшение опорного плана.

1) Из отрицательных элементов индексной F–строки выберем наибольший по модулю, назовем соответствующий ему столбец – разрешающим, и пометим "$\uparrow$".

2) Чтобы выбрать разрешающую строку, необходимо вычислить отношения элементов столбца свободных членов к только положительным элементам разрешающего столбца. Выбрать из полученных отношений минимальное. Соответствующий элемент, на котором достигается минимум, называется разрешающим. Будем выделять его квадратом.

В нашем примере, $\min\left\{\frac{50}{1}; \frac{80}{2}\right\} = 40,$ элемент $\boxed{2}$–разрешающий. Строка, соответствующая этому элементу тоже называется разрешающей.

Таблица 6.2

базисные	$-x_1$	$-x_2$	свободные	
x_3	1	0	50	
x_4	0	1	40	
x_5	$\boxed{2}$	1	80	$\leftarrow$
F	–5	–3	0	
$\uparrow$				

3. Выбрав разрешающий элемент, делаем перечет таблицы по правилам:

3.1. В новой таблице, таких же размеров, что и ранее, **переменные** разрешающей строки и столбца меняются местами, что соответствует переходу к новому базису. В нашем примере: x_1 входит в базис, вместо x_5, которая выходит из базиса, и теперь свободная.

Таблица 6.3

базисные	$-x_5$	$-x_2$	свободные	
x_3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	10	
x_4	0	$\boxed{1}$	40	$\leftarrow$

x_5	$1/2$	$1/2$	40
F	$5/2$	$-1/2$	200

3.2. На месте разрешающего элемента $\boxed{2}$ записываем обратное ему число $1/2$.

3.3. Элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент.

3.4. Элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и записываются с противоположным знаком.

3.5. Чтобы заполнить оставшиеся элементы таблицы 3, осуществляем пересчет по правилу прямоугольника.

Пусть мы хотим посчитать элемент, XXXXXX. Соединяем **пересчитываемый** элемент мысленно **с разрешающим,** находим произведение, вычитаем произведение элементов, находящихся на другой диагонали получившегося прямоугольника. Разность делим на разрешающий элемент.

Итак, $\frac{50\cdot 2-80\cdot 1}{2}=10$. Записываем 10 на место, где было 50. Аналогично:

$$\frac{0\cdot 2-1\cdot 1}{2}=-\frac{1}{2}, \qquad \frac{1\cdot 2-0\cdot 1}{2}=1, \qquad \frac{-3\cdot 2-1\cdot(-5)}{2}=-\frac{1}{2},$$

$$\frac{2\cdot 40-0\cdot 80}{2}=40, \qquad \frac{0\cdot 2-80\cdot(-5)}{2}=200.$$

Таблица 6.4

базисные	$-x_5$	$-x_2$	свободные
x_3	$-1/2$	$-1/2$	10
x_4	0	$\boxed{1}$	40
x_1	$1/2$	$1/2$	40

F	$5/2$	$-1/2$	200

Имеем новую таблицу 4, базисными переменными теперь являются переменные $\{x_3, x_4, x_1\}$. Значение целевой функции стало равно 200, т.е. увеличилось. Чтобы проверить данное базисное решение на оптимальность надо перейти опять ко II этапу. Процесс очевидно, конечен, критерием остановки является пункт 1 и 2 II этапа. Доведем решение задачи до конца.

Для этого проверим индексную строку и увидев в ней отрицательный элемент $-1/2$, назовем ему соответствующий столбец – разрешающим, и согласно III этапу пересчитаем таблицу. Составив соотношения $\min\left\{\dfrac{40}{1};\dfrac{40}{1/2}\right\}=40,$ выбрав среди них минимальное, определили разрешающий элемент 1, теперь пересчет осуществляем согласно правилам 3.2–3.5.

Таблица 6.5

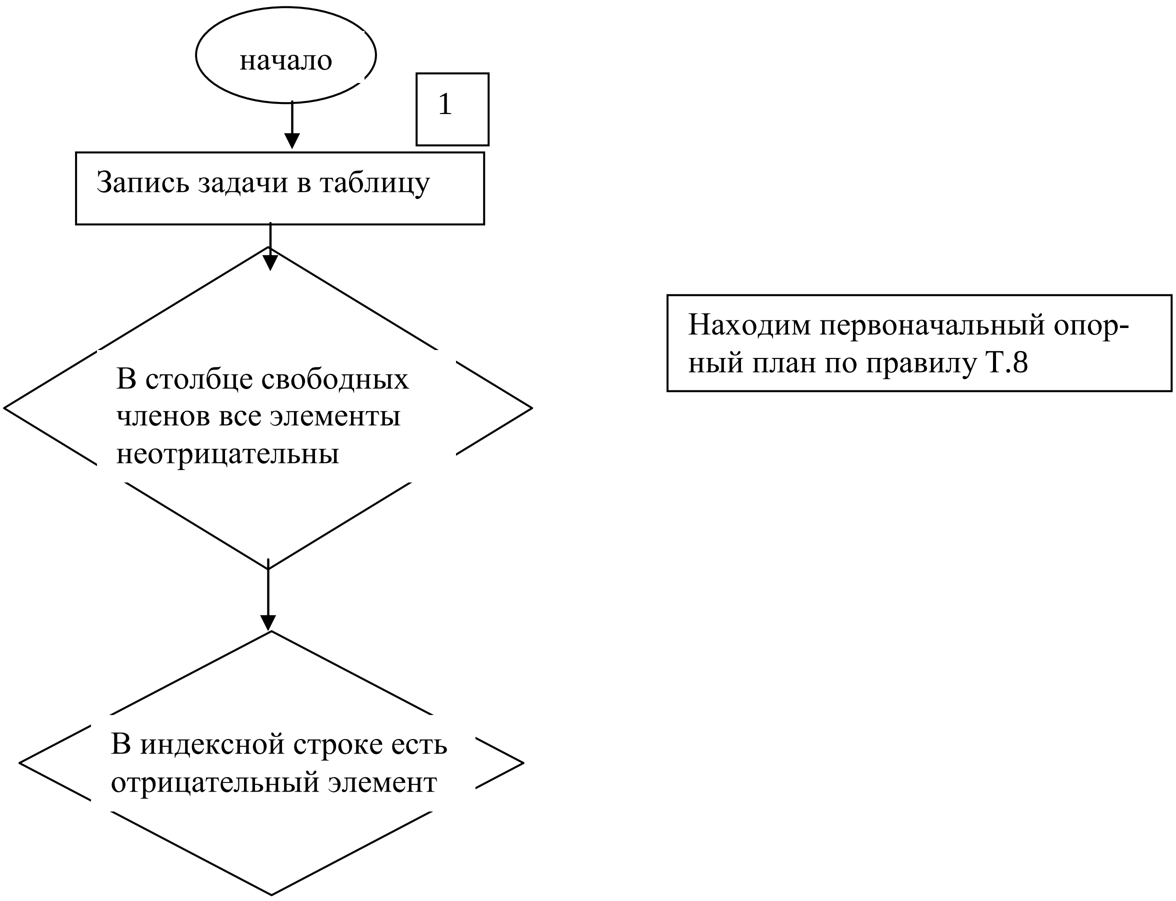
базисные	$-x_5$	$-x_2$	свободные
x_3	$-1/2$	$-1/2$	30
x_2	0	1	40 ←
x_1	$1/2$	$-1/2$	20
F	$5/2$	$1/2$	200

После пересчета таблицы, убеждаемся, что в индексной строке нет отрицательных элементов, следовательно, задача решена, базисный план оптимален. Выписываем оптимальное решение.

IVэтап. Выписывание оптимального решения.

Если симплекс–метод остановился согласно пункту 1 II этапа, то решение задачи выписывается следующим образом. Базисные переменные принимают значения столбца свободных членов соответственно. В нашем примере $x_3 = 30,\ x_2 = 40,\ x_1 = 20.$ Свободные переменные равны 0: $x_5 = 0,\ x_4 = 0.$ Целевая функция принимает значение последнего элемента столбца свободных членов: $F = 220.$. Итак, $x^* = (20, 40, 30, 0, 0),\ F^* = 220.$

Ответ к задаче: необходимо в план выпуска включить 20 изделий типа А, 0 изделий типа В, при этом прибыль будет максимальной и составит 220 руб.
В конце этого параграфа приведем блок–схему алгоритма симплекс–метода, которая в точности повторяет этапы, но возможно для некоторых читателей будет более удобна в пользовании, т.к. стрелочки указывают четкую направленность действий. Ссылки над прямоугольниками в блок-схеме показывают к какому этапу или подпункту относится соответствующая группа преобразований.



§ 2.7 Поиск первоначального опорного плана

Предположим, что каноническая задача ЛП имеет не специальный вид, к примеру, правые части уравнений системы ограничений могут быть отрицательны.
Этот случай возникает, например, при решении задачи о смесях и раскрое. Канонический вид задачи, рассмотренной в § 2.3, выглядит так:

$$\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -33 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -23 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_6 = -12 \\ x \geq 0, i = \overline{1,6} \end{cases}$$

$$-F = -20x_1 - 20x_2 - 10x_3 \rightarrow \max$$

Запишем задачу в симплекс–таблицу:

Таблица 7.1

базисные	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	свободные
x_4	$\boxed{-4}$	–3	–2	–33
x_2	–3	–2	–1	–23
x_1	–1	–1	–2	–12
F	20	20	10	0

Базисное решение, соответствующее базису $\{x_4, x_5, x_6\}$ и равное (0; 0; 0; –33; -23; -12) не является допустимым, ввиду отрицательности $x_4 < 0,\ \ x_5 < 0,\ \ x_6 < 0.$

Сформулируем правило нахождения допустимого первоначального опорного плана.

Если в столбце свободных членов есть отрицательные элементы, выберите из них наибольший по модулю, а в его строке любой отрицательный. Взяв этот элемент в качестве разрешающего, пересчитайте таблицу по прежним правилам 3.1–3.5.

Если в полученной таблице все элементы столбца свободных членов стали положительны, либо 0, то данное базисное решение можно взять в качестве первоначального опорного плана. Далее симплекс–методом дорешать задачу. Если в столбце свободных членов не все элементы неотрицательны, то еще раз воспользоваться этим правилом.

Проведем этот шаг для задачи о рационе. В качестве разрешающей строки табл.7.1 нужно выбрать первую. А разрешающим элементом выберем, к примеру, элемент – 4. Заметим, что строка определяется по правилу однозначно, т.к. $33 > 23 > 12$, а выбор разрешающего элемента имеет некоторую степень свободы.

Таблица 7.2

базисные	$-x_4$	$-x_2$	$-x_3$	свободные
x_1	$1/4$	$3/4$	$1/2$	$33/4$
x_5	$-3/4$	$1/4$	$1/2$	$4/7$
x_6	$-1/4$	$-1/4$	$\boxed{-3/2}$	$-15/4$

F	5	5	0	165

Заметим, что переменная x_1 вошла в базис вместо x_4 (все вычисления осуществлялись по правилу 3.2–3.5). В правом столбце еще остался отрицательный элемент, воспользуемся правилом еще раз. Строка переменной x_6 – разрешающая, а в качестве разрешающего элемента возьмем, к примеру $-{}^{3}\!/_{2}$, здесь есть некоторая возможность выбора.

Таблица 7.3

базисные	$-x_4$	$-x_2$	$-x_6$	свободные
x_1	$-{}^{1}\!/_{3}$	${}^{2}\!/_{3}$	${}^{1}\!/_{3}$	7
x_5	$-{}^{5}\!/_{6}$	${}^{1}\!/_{6}$	${}^{1}\!/_{3}$	${}^{1}\!/_{2}$
x_6	${}^{1}\!/_{6}$	${}^{1}\!/_{6}$	$-{}^{2}\!/_{3}$	${}^{5}\!/_{2}$
F	5	5	0	165

Полученный базисный план $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,) = \left(7,\ 0,\ \frac{5}{2};\ 0,\ \frac{1}{2}, 0\right)$ является допустимым, и к тому же оказывается оптимальным, т.к. в индексной строке нет отрицательных элементов. Оптимальное значение целевой функции равно F*=165. Действительно,

$$F = 20x_1 + 20x_2 + 10x_3 = 20 \cdot 7 + 0 + 10 \cdot \frac{5}{2} = 140 + 25 = 165.$$

В этой задаче не пришлось улучшать найденный первоначальный опорный план, т.к. он оказался оптимальным. Иначе, мы должны были вернуться к III этапу.

§ 2.8 Двойственность в линейном программировании

Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие другую задачу линейного программирования – **двойственную.** Решая одну из них, автоматически решается и другая задача. Такие задачи называют взаимодвойственными. Рассмотрим наиболее распространенные задачи о планировании производства, решим ее прямым симплекс-методом. А затем построим и решим двойственную ей задачу, обсудим экономический смысл полученных результатов.

Задача 8 (о плане). Предприятие располагает 3 видами сырья и намеревается выпускать четыре вида продукции. Технологические коэффициенты в таблице указывают затраты соответствующего вида сырья на 1 единицу определенного вида продукции, а также прибыль от реализации 1 единицы продукции и общие запасы ресурсов. Найти оптимальный план производства продукции, при котором будет обеспечена максимальная прибыль.

Таблица 8.1

изделия / сырье	I	II	II	IV	Запасы сырья
1	5	0,4	2	0,5	400
2	0	5	1	1	300
3	1	0	1	1	100
Прибыль	3	5	4	5	

Составим математическую модель. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – количество продукции I, II, III, IV вида соответственно в плане. Тогда, количество используемого сырья и его запасы выразится в неравенствах:

$$\begin{cases} 5x_1 + 0,4x_2 + 2x_3 + 0,5x_4 \le 400 \\ 5x_2 + x_3 + x_4 \le 300 \\ x_1 + x_3 + x_4 \le 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 \to \max$$

Целевая функция выражает собой общую суммарную прибыль, полученную от реализации всей плановой продукции. А каждое из неравенств выражает затраты определенного вида продукции. Понятно, что затраты не должны превышать запасов сырья.

Приведем задачу к канонической форме, и к специальному виду, введя дополнительные переменные x_5, x_6, x_7 в каждое из неравенств.

Очевидно, что, если 1-ого ресурса необходимо для производства плановой продукции $5x_1 + 0,4x_2 + 2x_3 + 0,5x_4$, то x_5 обозначает просто излишки 1-ого ресурса, как разность между имеющимся запасом и требуемым для производства. Аналогично x_6 и x_7. Итак, дополнительные перемены задачи ЛП обозначают излишки сырья, времени, других ресурсов, остающихся в производстве данного оптимального плана.

Запишем задачу в таблицу, предварительно выписав ее каноническую форму.

$$\begin{cases} 5x_1 + 0{,}4x_2 + 2x_3 + 0{,}5x_4 + x_5 = 400 \\ 5x_3 + x_3 + x_4 + x_6 = 300 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_7 = 100 \\ x_1 \geq 0, \quad i = \overline{1{,}7} \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 \to \max$$

I этап. Эта задача специального вида, базис составляют переменные $\{x_5, x_6, x_7\}$, правые части уравнений неотрицательны, план $x = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 400,\ 300,\ 100)$ – опорный. Он соответствует симплекс–таблице.

Таблица 8.2

базисные	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	свободные
x_5	5	0,4	2	0,5	400
x_6	0	5	1	1	300
x_7	1	0	1	$\boxed{1}$	100
F	-3	-5	-4	-5	0

I этап. Проверим план на оптимальность. Так как в индексной F–строке есть отрицательные элементы, то план неоптимален, переходим к III этапу.

III этап. Улучшение опорного плана. Выберем в качестве разрешающего столбца четвертый, могли выбрать и второй, т.к. в обоих – 5. Остановившись на четвертом, выберем в качестве разрешающего элемента 1, т.к. именно на нем достигается минимум соотношений $\left\{\dfrac{400}{0{,}5};\ \dfrac{300}{1};\ \dfrac{100}{1}\right\}$. С разрешающим элементом $\boxed{1}$ проводим преобразование таблицы по правилам 3.2–3.5.

Таблица 8.3

базисные	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_7$	свободные
x_5	4,5	0,4	1,5	-0,5	350
x_6	-1	$\boxed{5}$	-1	-1	200
x_7	1	0	1	1	100
F	2	-5	5	5	500

Полученный план опять неоптимален, т.к. в $F-$строке есть отрицательный элемент –5, этот столбец разрешающий.

В качестве разрешающего элемента выбираем 5, т.к. $\min\left\{\frac{350}{0,4}; \frac{200}{5}\right\} = 40$.

Пересчитываем еще раз таблицу. Заметим, что пересчет удобно начинать с индексной строки, т.к. если в ней все элементы неотрицательны, то план оптимален, и чтобы его выписать, достаточно пересчитать столбец свободных членов, нет необходимости вычислять «внутренность» таблицы.

Таблица 8.4

базисные	$-x_1$	$-x_6$	$-x_3$	$-x_7$	свободные
x_5					334
x_2					40
x_4					100
F	1	1	1	4	700

План оптимален, т.к. в индексной строке нет отрицательных элементов, выписываем его.

IV этап. Базисные переменные $\{x_5, x_2, x_4\}$ принимают значения из столбца свободных членов, а свободные переменные равны 0. Итак, оптимальный план $x^* = (0, 40, 0, 100, 334, 0, 0)$ и $F^* = 700.$

Действительно, $F = 3x_1 + 4x_3 + 5x_2 + 5x_4 = 5 \cdot 40 + 5 \cdot 100 = 700.$ Т.е. для получения максимальной прибыли в 700 руб., предприятие должно выпускать изделия II вида в количестве 40 штук, IV вида в количестве 100 штук, изделия I, III вида производить невыгодно. При этом, напомним смысл дополнительных переменных – это излишки сырья, следовательно сырье 2–ого и 3–его вида будет израсходовано полностью, а сырья 1ого вида останется 334 единицы $(x_5 = 334,\ x_6 = 0,\ x_7 = 0)$.

Построим двойственную ей задачу по следующим правилам:

1) Количество переменных в двойственной задаче равно количеству неравенств в исходной.
2) Матрица коэффициентов двойственной задачи является транспонированной к матрице коэффициентов исходной.
3) Столбец свободных членов исходной является строкой коэффициентов для целевой функции двойственной, и наоборот. Целевая функция в одной задаче максимизируется, в другой минимизируется.
4) Условиям неотрицательности переменных исходной задачи соответствуют неравенства - ограничения двойственной, направленные в другую сторону. И

наоборот, неравенствам-ограничениям в исходной соответствуют условия неотрицательности в двойственной. При записи задачей их нужно располагать рядом друг с другом, точно определяя соответствие неравенств (показано стрелочками).

Исходная задача I **Двойственная задача II**

$$F = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 \to \max \qquad G = 400y_1 + 300y_2 + 100y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 0,4x_2 + 2x_3 + 0,5x_4 \le 400 \\ 5x_2 + x_3 + x_4 \le 300 \\ x_1 + x_3 + x_4 \le 100 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_3 \ge 0 \\ x_4 \ge 0 \end{cases} \begin{matrix} \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} y_1 \ge 0 \\ y_2 \ge 0 \\ y_3 \ge 0 \\ 5y_1 + y_3 \ge 3 \\ 0,4y_1 + 5y_2 \ge 5 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \ge 4 \\ 0,5y_1 + y_1 + y_3 \ge 5 \end{cases}$$

Напомним, что транспонированной называется матрица, у которой строки и столбцы меняются местами. Поэтому коэффициенты при переменных y_1 в задаче II это, соответственно, коэффициенты $i-$ого неравенства в задаче I.

Неравенства, соединенные стрелочками, будем называть сопряженными.

Теоремы двойственности.

Двойственность является фундаментальным понятием в теории линейного программирования. Основные результаты теории двойственности заключены в двух теоремах, называемых теоремами двойственности.

Теорема 1 (первая теорема двойственности).

Если одна из пары двойственных задач I и II разрешима, то разрешима и другая, причем значения целевых функций на оптимальных планах совпадают, $F\left(x^*\right) = G\left(y^*\right)$, ***где*** x^*, y^* ***– оптимальные решения задачи I и II***

Теорема 2 (вторая теорема двойственности).

Планы x^* ***и*** y^* ***оптимальны в задачах I и II тогда и только тогда, когда при подстановке их в систему ограничений задачи I и II соответственно, хотя бы одно из любой пары сопряженных неравенств обращается в равенство.***

Доказательства теорем опускаем, а на конкретном примере нашей задаче покажем, как они работают. Теорема 2 позволяет по решению одной задачи находить решение двойственной.

Итак, имеем оптимальное решение $x^* = (0,\ 40,\ 0,\ 100)$ и $F\left(x^*\right) = 700$ задачи I. Найдем решение двойственной задачи II $y^* = (y_1,\ y_2,\ y_3)$, не прибегая к симплекс–методу, а, воспользовавшись второй теоремой двойственности и известным оптимальным планом x^*.

Для этого необходимо подставить оптимальное решение x^* в каждое неравенство системы ограничений и посмотреть как оно выполняется строго или нет.

$$\begin{cases} 5x_1 + 0,4x_2 2x_3 + 0,5x_4 \le 400 & < 5\cdot 0 + 0,4\cdot 40 + 2\cdot 0 + 0,5\cdot 100 = 66 < 400 \\ 5x_2 + x_3 + x_4 \le 300 & = 5\cdot 40 + 1\cdot 0 + 100 = 300 \\ x_1 + x_3 + x_4 \le 100 & = 0 + 0 + 100 = 100 \\ x_1 \ge 0 & = x_1 = 0 \\ x_2 \ge 0 & > x_2 = 40 > 0 \\ x_3 \ge 0 & = x_3 = 0 \\ x_4 \ge 0 & > x_4 = 100 > 0 \end{cases}$$

Поскольку 1, 5, 7 неравенства строгие (имеют знак «<» или «>»), то соответствующие им неравенства в задаче II из пары сопряженных, по II теореме двойственности **обязаны обратиться в равенства,** имеем:

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ 0,4y_1 + 5y_2 = 5 \\ 0,5y_1 + y_2 + y_3 = 5 \end{cases} \quad \text{Решаем систему, имеем} \quad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 4, \end{cases}$$

т.е. $y^* = (0, 1, 4) -$ оптимальное решение. Заметим, что действительно, I теорема двойственности справедлива: $G\left(y^*\right) = 400y_1 + 300y_2 + 100y_3 = 400\cdot 0 + 300\cdot 1 + .$

$+100\cdot 4 = 700 = F\left(x^*\right).$

Итак, в силу второй теоремы двойственности, мы быстро нашли оптимальное решение задачи II, пользуясь условием обращения в равенство хотя бы одного из пары сопряженных неравенств в системах ограничений двойственных задач.

Между переменными исходной задачи и переменными двойственной существует связь. А именно, после приведения обеих задач I и II к каноническому виду, основные и дополнительные переменные задач, соответствуют друг другу следующим образом:

Установив такую связь, внимательный читатель заметит, что решив задачу I симплекс–методом, и получив последнюю симплекс–таблицу (табл. 8.4), мы фактически решим и задачу

$$\begin{array}{cccc} \overbrace{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4}^{\text{основные}} & \qquad & \overbrace{x_5,\ x_6,\ x_7}^{\text{дополнительные}} \\ \updownarrow\quad \updownarrow\quad \updownarrow\quad \updownarrow & & \updownarrow\quad \updownarrow\quad \updownarrow \\ \underbrace{y_4,\ y_5,\ y_6,\ y_7}_{\text{дополнительные}} & & \underbrace{y_1,\ y_2,\ y_3}_{\text{основные}} \end{array}$$

Запишем таблицу 8.4, учитывая соответствие между переменными x_i и y_j.

Таблица 8.5

		y_4	y_2	y_6	y_3	
	базисные	$-x_1$	$-x_6$	$-x_3$	$-x_7$	свободные
y_1	x_5					334
y_5	x_2					40
y_7	x_4					100
	F	1	1	1	4	700

Если последняя симплекс-таблица известна, то, пользуясь соответствием, можно найти решение двойственной задачи. Переменные, которые в левом столбце $y_1,\ y_5,\ y_7$ обязаны равняться 0, т.к. $x_5,\ x_2,\ x_4 > 0$ строго. А переменные из верхней строки $y_4,\ y_2,\ y_6$ принимают значения нижней строки 1, 1, 1, 4 соответственно, т.к. им соответствующие переменные $x_1,\ x_6,\ x_3,\ x_7$ равны 0, как свободные. Итак, из последней таблицы задачи II, не проводя никаких вычислений, и пользуясь лишь соответствием переменных, можно определить $y^* = \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*\right) = (0, 1, 4, 1, 0, 1, 0)$.

Необходимо знать оба способа решения двойственной задачи. Т.к. если исходная задача решалась на компьютере, и вы не имеете симплекс-таблиц, но знаете оптимальный план, по второй теореме двойственности найдете решение. Если же вы находили исходный план вручную, нет необходимости решать систему линейных уравнений, достаточно посмотреть в последнюю симплекс-таблицу. Итак, мы научились по решению исходной задачи находить решения двойственной. Это возможно, благодаря глубокой связи между переменными x_i и y_j. Осталось разобраться каково экономическое содержание этих взаимосвязей.

§ 2.10 Экономическая интерпретация двойственной задачи и теории двойственности

Исходная задача I имела следующий экономический смысл: основные переменные x_i обозначали количество произведенной продукции i-ого вида, дополнительные переменные обозначали количество излишков соответствующего вида ресурсов, каждое из неравенств выражало собой расход определенного вида сырья в сравнении с запасом этого сырья. Целевая функция определяла прибыль при реализации всей продукции. Предположим теперь, что предприятие имеет возможность реализовывать сырье на сторону. Поставим вопрос: **какую минимальную цену надо установить за единицу каждого вида сырья** при условии, что доход от реализации всех его запасов должен быть не меньше дохода от реализации продукции, которая может быть выпущена из этого сырья. Иначе говоря, выгодно было бы продавать сырьем, чем производить изделия. Так вот переменные двойственной задачи y_1, y_2, y_3 имеют смысл – это **условные цены за ресурсы** 1, 2, 3 вида соответственно. Тогда доход от продажи видов сырья, расходуемого на производство одной единицы продукции I, равен: $5y_1 + 1 \cdot y_3$.. Но, если мы хотим, чтобы доход от продажи сырья был не меньше, чем от реализации продукции, то должно быть $5y_1 + y_3 \geq 3$.. Именно в силу такого экономического толкования, система ограничений двойственной задачи принимает вид:

$$\begin{cases} 5y_1 + y_3 \geq 3 \\ 0,4y_1 + 5y_2 \geq 5 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 4 \\ 0,5y_1 + y_2 + y_3 \geq 5 \end{cases}$$

А целевая функция $G = 400y_1 + 300y_2 + 100y_3$ подсчитывает условную суммарную стоимость всего имеющегося сырья. Понятно, что в силу I теоремы двойственности $F\left(x^*\right) = G\left(y^*\right)$,равенство означает, что максимальная прибыль от продажи всей готовой продукции совпадает с минимальной условной ценой ресурсов. Итак, условные оптимальные цены y_i показывают наименьшую стоимость ресурсов, при которой выгодно обращать эти ресурсы в продукцию, производить. **Величина y_i показывает насколько увеличится значение целевой функции, если запас сырья увеличить на 1 ед.**

Еще раз обратим внимание на то, что y_i это лишь условные, предполагаемые, а не реальные цены на сырье. Иначе, читателю может показаться странным, что например, y_1^*. Этот факт вовсе не означает, что реальная цена 1–ого ресурса нулевая, ничего бесплатного в этом мире нет. Равенство нулю условной цены означает лишь, что этот ресурс не израсходован полностью, имеется в излишке, недефицитен. Действительно, посмотрим на 1–ое неравенство в системе ограничений задачи I, в котором подсчитывается расход 1–ого ресурса: $5x_1^* + 0,4x_2^* + 2x_3^* + 0,5x_4^* = 66 < 400$, его избыток составляет $x_5 = 334$ ед. при данном оптимальном плане производства. Этот ресурс имеется в избытке, и поэтому для производителя он недефицитен, его условная цена равна 0, его не надо закупать. Наоборот, ресурс, 2 и 3–ий используется полностью, причем $y_3 = 4$ а $y_2 = 1$, т.е. сырье третьего вида более дефицитно, чем второго, его условная цена больше. Если производитель продукции имел бы возможность приобретать дополнительно сырье к уже имеющемуся, с целью получения максимального дохода от производства, то увеличив сырье 2–ого вида на 1 единицу, он бы получил дополнительно доход в y_2 денежных единиц, а увеличив на 1 единицу сырье 3–его вида, значение целевой функции увеличилось бы еще на y_3 единицы.

Если перед производителем стоит вопрос: «выгодно ли производить какую–либо новую продукцию, при условии, что затраты на 1 единицу продукции составят 3, 1, 4 единиц сырья соответственно, а прибыль от реализации равна 23 единицам?», то в силу экономического истолкования задачи, ответить на этот вопрос несложно. Поскольку затраты и условные цены ресурсов известны: затраты равны 3, 1, 4, а цены $y_1^* = 0,\ y_2^* = 1,\ y_3^* = 4,$ значит можно посчитать суммарную условную стоимость ресурсов, необходимых для производства этой новой продукции: $3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 17 < 23.$ Т.е. продукцию производить выгодно, т.к. прибыль от реализации превышает затраты на ресурсы, в противном случае, ответ бы на этот вопрос был отрицательным.

Замечание. Иногда при решении задач ЛП применяют двойственный симплекс-метод. Этот метод удобно применять при решении задачи о рационе, задачи о раскрое и некоторых других. Поскольку, решая исходную задачу, мы автоматически получаем решение двойственной, то иногда удобно выбирать, какую из задач решать. Двойственный симплекс–метод основан на очень простой идее. К данной задаче нужно построить двойственную, решить двойственную (ее форма имеет более простой вид), а затем выписать решение исходной.

Можно продемонстрировать на примере уже рассмотренной нами задаче о рационе.

$$\text{I.}\ \begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3 \ge 33 \\ 3x_1+2x_2+x_3 \ge 23 \\ x_1+x_2+2x_3 \ge 12 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_3 \ge 0 \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} y_1 \ge 0 \\ y_2 \ge 0 \\ y_3 \ge 0 \\ 4y_1+3y_2+y_3 \le 20 \\ 3y_1+2y_2+y_3 \le 20 \\ 2y_1+y_2+2y_3 \le 10 \end{cases}$$

$$F = 20x_1+20x_2+10x_3 \to \min \qquad G = 33y_1+23y_2+12y_3 \to \max$$

Решаем симплекс–методом задачу II.

Баз.	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	Своб.
y_4	$\boxed{4}$	3	1	20
y_5	3	2	1	20
y_6	2	1	2	10
G	-33	-23	-12	0

Баз.	$-y_4$	$-y_2$	$-y_3$	Своб.
y_1	1/4	3/4	1/4	5
y_5	-3/4	-1/4	1/4	5
y_6	-1/2	-1/2	$\boxed{3/2}$	0
G	-33	-23	-15/4	165

Баз.	$-y_4$	$-y_2$	$-y_3$	Своб.
y_1			-1/6	5
y_5			-1/6	5
y_3	-1/3	1/3	2/3	0
G	7	1/2	5/2	165

Выписываем решение $y^* = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = (5, 0, 0, 0, 5, 0)$. Найдем решение исходной, пользуясь II теоремой двойственности. $y_3 = 5 > 0 \Rightarrow \Rightarrow x_1+x_2+2x_3 = 12$; т.к.неравенство $3y_1+2y_2+y_3 = 15 < 20$, то $x_2 = 0$.

Найдем x_1 и x_3 из системы $\begin{cases} x_1+2x_3 = 12 \\ 20x_1+10x_3 = 165 \end{cases} \Rightarrow x_3 = \frac{5}{2},\ x_1 = 7.$

Итак, $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = (7, 0, 5/2)$, $F^* = 165 -$ решение исходной задачи о рационе.

Еще раз отметим, что мы воспользовались тем, что двойственная задача имела специальный вид, и ее удобно было решать, а затем уже вернуться к исходной. Но в силу тесной связи между этими двумя парами задач, на самом деле симплекс–таблицы, полученные сейчас, и ранее § 2.7, совпадают с точностью до транспонирования. Фактически мы лишь упростили внешний вид табл. 7.1-7.3, избавив себя от излишних «минусов».

§ 2.11 Постановка транспортной задачи общего вида

Наиболее часто в практической деятельности человеку приходится встречаться с транспортными задачами ЛП. Пример простейшей задачи транспортного типа рассмотрен в § 2.2.

Классическая постановка транспортной задачи общего вида такова.

Имеется m пунктов отправления («поставщиков») и n пунктов потребления («потребителей») некоторого одинакового товара. Для каждого пункта определены:

a_i – объемы производства i – ого поставщика, $i = 1, \ldots, m$;

b_i – спрос j – потребителя, $j = 1,$;

c_{ij} – стоимость перевозки одной единицы продукции из пункта A_i i – ого поставщика, в пункт B_j j – ого потребителя.

Для наглядности данные удобно представлять в виде таблицы, которую называют таблицей стоимостей перевозок

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	…	B_n	запасы
A_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{21}		c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2		b_n	

Требуется в задаче найти план перевозок, при котором бы полностью удовлетворялся спрос всех потребителей, при этом хватало бы запасов поставщиков, и суммарные транспортные расходы были бы минимальными.

Под планом перевозок естественно понимают объем перевозок – количество товара, которое необходимо перевезти от i –ого поставщика к j –ому потребителю. Для построения математической модели задачи необходимо ввести $m \cdot n$ штук переменных $x_{ij}, i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m,$ каждая переменная x_{ij} обозначает объем перевозок из пункта A_i в пункт B_j. Набор переменных $X = \{x_{ij}\}$ и будет планом, который необходимо найти, исходя из постановки задачи.

Ограничения задачи примут вид:

$$\begin{cases} f(x)=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_y x_y \to \min & \text{– условие минимизации суммарных транспортных расходов} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i=1,\dots,m & \text{– ограничения по запасам} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=1,\dots,n & \text{– ограничения по потребностям} \\ x_{ij} \ge 0,\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n & \text{– условие неотрицательности} \end{cases}$$

Очевидно, что для разрешимости задачи (10.1) необходимо, чтобы суммарный спрос не превышал объемы производства у поставщиков: $\sum\limits_{j=1}^{n} в_j \le \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$. Если это неравенство выполняется строго, то задача называется «открытой» или «несбалансированной», если же $\sum\limits_{i} a_i = \sum\limits_{j} в_j$, то задача называется «закрытой» транспортной задачей.

Мы остановимся сейчас на решении закрытых транспортных задач (ЗТЗ).

В силу ограничений (12.1) нетрудно увидеть, что ЗТЗ является задачей ЛП, и может быть решена симплекс–методом после приведения ее к специальному виду. Но структура системы ограничений имеет некоторою специфику, а именно каждая переменная x_{ij} входит ровно два раза в неравенства системы, и все переменные входят в неравенства системы с коэффициентом 1. В силу этой специфики существует более простой метод решения, называемый методом потенциалов. По–прежнему идеей является переход от одного опорного плана к другому, обязательно «лучшему», с точки зрения значения целевой функции. Каждому опорному плану также соответствует своя распределительная таблица. Переход осуществляется пока полученный план не будет удовлетворять условию оптимальности. Необходимо научиться строить первоначальный опорный план. В качестве первоначального плана годится любое решение системы уравнений (12.1). Заметим, что это система линейных уравнений, стоящая из $m+n$ уравнений, с mn неизвестными. Можно доказать, что линейно–независимых уравнений в системе (12.1) $m+n-1$, ввиду условия сбалансированности, т.е. базисных переменных должно быть $m+n-1$, остальные будут нулевыми. Итак, в качестве плана будем представлять себе таблицу размера $m \cdot n$, в которой должно быть занято **ровно** $m+n-1$ клеток, отвечающих **базисным** переменным x_{ij}, нули в таблице не записываем. Стоимости перевозок

c_{ij} всегда будем записывать в правом верхнем углу ячейки таблицы, естественно считая их постоянными на протяжении решения задачи.

§ 2.12 Алгоритм метода потенциалов

Алгоритм состоит из трех основных шагов:

1) Построение первоначального опорного плана.
2) Проверка плана на оптимальность.
3) Улучшение плана.

Шаг 1. Построение первоначального опорного плана.

Существует два наиболее часто применяемых способа для нахождения первого плана: метод наименьшей стоимости и метод северо-западного угла. Метод наименьшей стоимости позволяет найти план наиболее близкий к оптимальному, метод северо-западного угла легче программируется, и поэтому до сих пор живет. Но, если вы решаете задачу «вручную», то применение метода наименьшей стоимости, как правило, уменьшает количество итераций.

Идея метода наименьшей стоимости проста и отражается в названии метода, сначала следует организовать перевозки к тем поставщикам, где стоимость минимальна. Рассмотрим ее на конкретном примере.

Транспортная задача. Пусть имеется 4 поставщика некоторой продукции и 5 потребителей. Стоимости перевозок от $i-$ого поставщика к $j-$ому потребителю, а также потребности потребителей и возможности поставщиков заданы таблицей 12.1

Таблица 12.1

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	запасы
A_1	21	19	11	12	12	24
A_2	26	29	14	1	26	12
A_3	39	1	22	8	25	18
A_4	53	23	40	26	28	16
потребности	11	13	26	10	10	60 60

Эта транспортная задача является закрытой или сбалансированной, т.к. 24+12+18+16=60 и 11+13+26+10+10=60 (потребности равны запасам). Будем заполнять первую распределительную таблицу. Стоимости перевозок в новой таблице будем располагать в правом верхнем углу клеток. А в центр клеток по мещать числа, соответствующие первоначальному опорному плану перевозок.

Итак, минимальная стоимость перевозки – это число 1, оно встречается на двух местах, с номерами (2, 4) и (3, 2). Выберем любое, к примеру, (2, 4). Рассуждаем: у поставщика A_2 имеется запас товара 12 ед., а потребителю B_4 требуется 10 ед., можем удовлетворить его потребности и привезти ему 10, тогда у A_2 останется в запасах 12-10=2 ед. Поместим в клетку (2, 4) наименьшее из чисел 10 и 12, т.е. перевозку 10. При этом, заметим, потребности потребителя B4 удовлетворены, можем вычеркнуть 4–ый столбец из рассмотрения, запомнив сбоку, что запасов осталось на 2-ом складе 2 ед. (см.табл. 12.2).

В таблице 12.2 теперь снова ищем минимальный по стоимости элемент, это опять 1 на месте (3, 2). Записываем в эту клетку число 13, как наименьшее из чисел 13 и 18 и вычеркиваем 2–ой столбец, потребности B2 удовлетворены (табл. 12.3).

Таблица 12.2

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	запасы
A_1	^{21}	^{19}	^{11}	$-^{12}$	^{12}	24
A_2	^{26}	^{29}	^{14}	10^{1}	^{26}	12/2
A_3	^{39}	^{1}	^{22}	$-^{8}$	^{25}	18
A_4	^{53}	^{23}	^{40}	$-^{26}$	^{28}	16
потребности	11	13	26	10/0	10	

Таблица 12.3

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	запасы
A_1	^{21}	^{19}	^{11}	$-^{12}$	^{12}	24
A_2	^{26}	^{29}	^{14}	10^{1}	^{26}	12/2
A_3	^{39}	13^{1}	^{22}	$-^{8}$	^{25}	18/5
A_4	^{53}	^{23}	^{40}	$-^{26}$	^{28}	16
потребности	11	13/0	26	10/0	10	

Следующее минимальное число по стоимости в таблице после двух вычеркиваний это число 11 на месте (1, 3). Вписываем в клетку перевозку 24 и вычеркиваем 1–ую строку, запасы у поставщика A_1 исчерпаны. Переходим к клетке (2, 3) с минимальной стоимостью 14. Помещаем туда число 2, т.к. в A_2 имеется 12 единиц продукции, но 10 из них мы уже вывезли в B_4, осталось 2 ед.. При этом вычеркиваем и столбец и строку. Далее заполняем клетку (3, 5), сюда мы можем перевезти 5 единиц груза, т.к. 13 уже вывезли в B_2, а у A_3 возможности исчерпаны, вычеркиваем 3-ю строку. Далее заполняем клетку (4, 5), поместим туда 5 единиц груза, т.к. 5 уже вывезли в B_5, а ему всего необходимо 10. После всех мысленных вычеркиваний в таблице осталось одна клетка (4, 1), поместим туда число 11, что соответствует потребностям B_1 и возможностям A_4. Имеем таблицу 12.4

Проверим, что сумма чисел построчно и по столбцам совпадает с возможностями и потребностями. Число занятых клеток соответствующих базисным переменным x_{ij} опорного плана, обязано равняться: $m+n-1=4+5-1=8$. Но иногда занятых клеток может оказаться меньше, у нас клеток, занятых перевозками 7. В этом случае добавляют в одну из ячеек таблицы *фиктивную нулевую* перевозку. Например, в клетку (3,4) ставим 0. При выборе клетки руководствуются опять-таки соображениями минимальной стоимости, а также, чтобы в каждой строке и каждом столбце была по крайней мере одна занятая клетка.

Таблица 12.4

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	запасы
A_1	21	19	11 24	12	12	24
A_2	26	29	14 2	1 10	26	12
A_3	39	1 13	22	8 0	25 5	18
A_4	53 11	23	40	26	28 5	16
потребности	11	13	26	10	10	

Итак, первоначальный план построен. Обычно, проводя построение плана, достаточно иметь одну таблицу, производя в ней все необходимые вычеркивания. Чтобы не загромождать запись, рассуждения проводятся устно.

Шаг 2. Проверка плана на оптимальность.

При построении первоначального плана мы ставим задачу найти хоть какой–нибудь, не обязательно лучший план, удостоверяющий ограничениям задачи. Теперь нам хотелось бы уметь отвечать на вопрос: является ли найденный опорный план оптимальным? И если нет, то улучшать» его. Эту задачу решает метод потенциалов, предложенный в 1949 г. советскими учеными Л.В. Канторовичем и М.К. Гавуриным, теоретической основой метода является теорема.

Теорема. Если для некоторого опорного плана $X=\{x_{ij}\}$ **транспортной задачи можно подобрать систему из** $m+n$ **чисел** $u_1, u_2, \ldots, u_m,$ **,** $v_1, v_2, \ldots, v_n$**, называемых потенциалами, то план оптимален тогда и только тогда, когда выполняются условия:**

$$\text{1) } u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{для всех} \quad x_{ij} > 0 \qquad (*)$$

$$\text{2) } u_i + v_j \le c_{ij} \quad \text{для всех} \quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}, \qquad (**)$$

где $\{c_{ij}\}$ – матрица стоимостей перевозок.

Доказательство теоремы опускаем, оно основывается на рассмотрении двойственной задачи к исходной транспортной. Покажем, как находить числа, называемые потенциалами. Отведем им место в таблице – правый столбец и нижняя строка. Условие (*) представляет собой систему из $(m+n-1)$ линейных уравнений с $(m+n)$ неизвестными потенциалами. Поэтому одно из неизвестных полагаем равным 0 для определенности, затем последовательно находим остальные потенциалы.

Проведем эти вычисления, записывая найденные потенциалы в дополнительно зарезервированный столбец и строку.

Таблица 12.5

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	v_j
A_1	21	19	11 24	12	12	40
A_2	26	29	14 2	1 10	26	43
A_3	39	1 13	22	8 0	25 5	50
A_4	53 11	23	40	26	28 5	53
u_i	0	–49	–29	–42	–25	

Проводя вычисления смотрим **только на занятые клетки** и на числа, стоящие в правом верхнем углу – стоимости перевозок.

1) Полагаем один из потенциалов равным 0. Пусть $u_1 = 0$, найдем из условия (*) для занятой клетки (4,1) $0 + v_4 = 53$, т.е. $v_4 = 53$. Затем из занятой клетки (4,5) $u_5 + v_4 = 28$, т.е. $u_5 = 28 - 53 = -25$. После $u_3 = 50$ $(v_3 + u_5 = 25)$. Затем можем найти $u_2 = -49$ $(u_2 + 50 = 1)$, после $u_4 = -42$ $(u_4 + 50 = 8)$. Найдем $v_2 = 43$ из $u_4 + v_2 = 1$, и наконец, $u_3 = -29$ из $u_3 + 43 = 14$ и $v_1 = 40$, ,т.к. $u_3 + v_1 = 11$. Все потенциалы u_i, v_1 найдены. Вычисления обычно проводятся устно, с особой внимательностью, не путая стоимости перевозок c_{ij}, стоящие в правых верхних углах клеток, с самими перевозками x_{ij}, стоящие в клетках. Их значения на этом шаге нам не нужны, важно лишь, что они определяют занятость клетки.

2) После нахождения системы потенциалов можно собственно и заняться проверкой плана на оптимальность, ради чего мы и вычисляли потенциалы. Для проверки плана на оптимальность необходимо проверить условие (**). Необходимо для свободных клеток посчитать суммы $u_i + v_j$ и сравнить их с числами c_{ij}– стоимостями перевозок. Если $u_1 + v_j \le c_{ij}$, то по теореме, план является оптимальным, задача решена. Иначе, если хотя бы для одной клетки $u_i + v_j > c_{ij}$, план нужно улучшать. Переходить к 3-ему шагу алгоритма. Сде-

лаем проверку условия (**) для нашей таблицы, записывая в правом верхнем углу выполнение неравенств.

Таблица 12.6

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	v_j
A_1	40>21	–9<19	11=11 24	–2<12	15>12	40
A_2	43>26	–6<29	14=14 2	1=1 10	18<26	43
A_3	50<39	1=1 13	21<22	8=8 0	25=25 5	50
A_4	53=53 11	4<23	14<40	11<26	28=28 5	53
u_i	0	–49	–29	–42	–25	

В нашей задаче первоначальный опорный план не оптимален, условие (**) нарушено в клетках (1, 1), (1, 5), (2, 1), (3, 1).

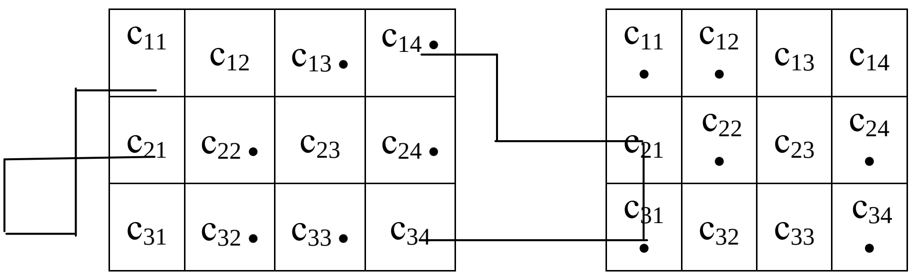
Шаг 3. Улучшение плана.

Для проведения операции улучшения плана, нам понадобится понятие цикла – контура перераспределения ресурсов.

Циклом будем называть набор клеток таблицы, в котором две и ровно две соседние клетки расположены в одной строке или в одном столбце; первая и последняя клетка набора лежит тоже в одной строке или столбце, то есть выполняется замкнутость, вершины поочередно обозначаются «+» и «-».

Графически нетрудно представить цикл в виде ломанной, каждое звено которой лежит в строке или в столбце, причем в каждой строке или столбце не более, чем по одному звену. Звенья ломаной располагаются под прямым углом. Цикл начинается со свободной клетки, в которой нарушено условие оптимальности, и проходит **только по занятым.**

Примеры циклов:



С понятием цикла связаны важные свойства планов:

1) допустимый план является опорным, когда из занятых этим планом клеток нельзя образовать ни одного цикла;

2) если имеем опорный план, то для каждой свободной клетки можно образовать единственный цикл, содержащий данную клетку и некоторые из занятых.

Улучшение плана производится по следующей схеме. В подчеркнутых клетках табл. 12.6. находим клетку с наибольшей разностью $u_i + v_j - c_{ij}$, т.е. где условие (**) нарушается максимально.

Затем, для этой клетки, согласно утверждению 2 строим единственный цикл. Набор клеток в цикле помечаем поочередно знаками «+» и «–», начиная с «+» в свободной клетке. Имеем таблицу 12.7

Таблица 12.7

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	запасы
A_1	40>21 +	–9<19	11=11 – 24	–2<12	15>12	24
A_2	43>26	–6<29	14=14 + 2	1=1 – 10	18<26	12
A_3	50>39	1=1 13	21<22	8=8 + 0	25=25 – 5	18
A_4	53=53 11 –	4<23	14<40	11<26	28=28 + 5	16
потребно- сти	11	13	26	10	10	

Начиная с клетки (1, 1), где условие (**) нарушено максимально, строим цикл. Клетку (1, 1) помечаем знаком «+», далее ходим по занятым клеткам, поворачивая под прямым углом, знаки чередуем, пока не попадем в тот столбец или строку, откуда начали. Если вы нашли цикл, то он верный, т.к. по утверждению выше цикл единственен. У нас все занятые клетки вошли в цикл, но это необязательно.

Рассмотрим элементы плана x_{ij}, расположенные в клетках цикла со знаком «–» : $x_{13} = 24$, $x_{24} = 10$, $x_{35} = 5$, $x_{41} = 11$, выберем из них наименьший $x_{35} = 5$, обозначим $\Delta = 5$. Строим новый план x^n по правилу:

по правилу:

$$x''_y = \begin{cases} x_{ij} - \Delta & \text{для клеток с "}-\text{"} - \text{клетка разгружается,} \\ x_{ij} + \Delta & \text{для клеток с "}+\text{"} - \text{клетка загружается,} \\ x_{ij} & \text{для клеток, не входящих в цикл.} \end{cases}$$

Новый план записываем в таблицу 12.8. Клетка, в которой разница $x_{ij} - \Delta$ равна 0, у нас (3, 5), теперь **будет свободной**. Проверьте, что число занятых клеток по прежнему равно 8.

Таблица 12.8

	B1	B2	B3	B4	B5	запасы
A1	21 5	19	11 19	12	12	24
A2	26	29	14 7	1 5	26	12
A3	39	1 13	22	8 5	25	18
A4	53 6	23	40	26	28 10	16
потребности	11	13	26	10	10	

Очевидно, что полученный план будет удовлетворять прежним ограничениям, т.к. сдвиг перевозки происходит по циклу, а значит, не нарушает суммарную перевозку по столбцу и по строке (в одном месте прибавили, а в другом столько же отняли). Общая же стоимость перевозок уменьшается на число, равное $\left(u_i + v_j - c_{ij}\right) \cdot \Delta$, где Δ–объем перевозок, перемещаемый по циклу, у нас эта величина равна $5 \cdot (40–21)=5 \cdot 19=95$.

Действительно, для плана X общая суммарная стоимость перевозки равнялась:

$$f(x) = \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} = 11 \cdot 24 + 14 \cdot 2 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 13 + 8 \cdot 0 + 5 \cdot 25 + 53 \cdot 11 + 5 \cdot 28 = 1163$$

Для нового плана $X^{н}$:

$$f(X^{н}) = x_{ij}^{н} = 5 \cdot 21 + 19 \cdot 11 + 7 \cdot 14 + 5 \cdot 1 + 13 \cdot 1 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 53 + 10 \cdot 28 = 1068$$

Итак, мы построили новый «лучший» план, 3 шаг закончен. И теперь переходим к следующей итерации: находим новые потенциалы, проверяем план на оптимальность, улучшаем, если план не оптимален.

Для нашей задачи проведем дальнейшее решение. Новая система потенциалов записана в табл. 12.9.

Таблица 12.9

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\mathbf{v_j}$
A_1	21 5 +	−19<19	11 19 −	−2<12	−4<12	21
A_2	24<26	−6<29	14 7 +	1 5 −	−1<26	24
A_3	31<39	1 13	21<22	8 5	6<25	31
A_4	53 6 -	23=23	43>40	30>26 +	28 10	53
u_i	0	–30	–10	–23	–25	

Условие (**) не выполняется в клетках (4, 3) и (4, 4). С клетки (4, 4) начинаем строить цикл. Выбираем наименьшее из чисел $\{19,\ 5,\ 6\}$, $\Delta = 5$.. Строим новый план, добавляя Δ к клеткам с «+», и вычитая Δ из клеток с «–». Новый план выглядит так:

Таблица 12.10

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	v_j
A_1	21 10	–13>19	11 14	–6<12	–4<12	21
A_2	24<26	–10<29	14 12	–3<1	–1<26	26
A_3	35<39	1 13	–25<22	8 5	10<25	35
A_4	53 1	19<23	43>40 +	26 5	28 10	53
u_i	0	–34	–10	–27	–25	

Найдем новую систему потенциалов, запишем в таблицу 12.10.

Оказывается план не оптимален, в клетки (4, 3) нарушается неравенство (**), еще раз строим цикл, улучшаем план, Δ=1.

Находим новую систему потенциалов (табл. 12.11), проверяем на оптимальность, убеждаемся, что полученный план оптимален.

Таблица 12.11

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	v_j
A_1	21 11	–10<19	11 13	–3<12	–1<12	21
A_2	24<26	–7<29	14 12	0<1	2<26	24
A_3	32<39	1 13	22=22	8 5	10<25	32
A_4	50<53	19<23	40 1	26 5	28 10	50
u_i	0	31	–10	–24	–22	–62

Итак, предложенный таблицей 12.11, план перевозок является оптимальным, при этом суммарная стоимость перевозок равна:

$$f(x) = 11\cdot21+13\cdot11+12\cdot14+13\cdot1+5\cdot8+1\cdot40+5\cdot26+10\cdot28=1045$$

Действительно, после второй итерации стоимость перевозок уменьшилась на величину (30–26)$\cdot$5=20, после третьей (43–40)$\cdot$1=3, т.е. 1068–23=1045, что мы и имеем. Задача решена.

Замечание. Если транспортная задача является задачей открытого типа, в которой условие баланса не выполняется, а именно сумма запасов больше суммы потребностей, то решить такую задачу можно по предложенной схеме методом потенциалов, введя дополнительного потребителя, с потребностью равной разности балансов и нулевыми стоимостями перевозок от каждого поставщика к этому потребителю.

§ 2.13 Усложненные задачи транспортного типа

Мы рассмотрели метод потенциалов для решения классической транспортной задачи. В действительности, в сфере экономики и сервиса встречается много задач, имеющих похожие на транспортную математические модели, но не являющиеся задачами о перевозках. Или это могут быть транспортные задачи с какими-либо дополнительными ограничениями в некоторых усложненных ситуациях. Рассмотрим несколько типов.

1) **Отдельные поставки** от отдельных поставщиков должны быть исключены (по причине недоверия, отсутствия необходимых условий хранения и т. п.). Это ограничение означает, чтобы в таблице перевозок определенные клетки должны оставаться свободными. Для этого необходимо в этих клетках стоимость перевозок искусственно завысить, положить равной значению заведомо больше всех, с которыми придется сравнивать в процессе решения задачи.

2) В качестве цели стоит определение минимальных затрат **на производство (оказание услуг) и транспортировку.** В таких задачах в качестве стоимостей c_{ij} берут сумму затрат на производство и транспортировку.

3) **Некоторые маршруты перевозки имеют ограничения** по пропускной способности. Например, по пути из A_i в B_j можно доставить только z единиц груза. Тогда столбец B_j разбивается на два столбца. В первом столбце потребность определим равной ограничению z, и стоимость оставим прежней, во втором потребность равна разности $b_j - z$, затраты на перевозку искусственно завысим, как в 1-ом типе – клетка блокируется.

4) **Поставки по определенным маршрутам обязательны,** вне зависимости от того выгодны они по стоимости или нет. Для этого от запаса поставщика и потребности потребителя вычитают эту необходимую поставку и решают обычным образом задачу с измененным спросом и предложением, затем ответ корректируют на величину этой поставки.

5) **Задачи об эффективном распределении имеющегося оборудования, кадров по определенным типам работ.** После построения модели решается обычным методом потенциалов.

6) **Транспортные задачи, в которых целевая функция максимизируется.** Решаются методом потенциалов, но сначала при поиске первоначального плана заполняются клетки с наибольшей стоимостью. При проверке на оптимальность надо, чтобы сумма потенциалов была больше стоимости $u_i + v_j > c_{ij}$, и из тех клеток, где это условие не выполнено, выбирают ту, в которой $u_i + v_j - c_{ij}$, минимальное отрицательное.

Приведем примеры таких задач.

13.1. Имеются два сервисных цеха обслуживания швейных машин, которые выполняют обслуживание и ремонт для трех предприятий. Стоимость ремонта, затраты на транспортировку в цех и обратно, производственные мощности, прогнозируемое количество ремонтов указаны в таблице. Требуется определить, какое количество машин из каждого предприятия надо отправить в каждый цех, чтобы суммарные расходы на ремонт и транспортировку были минимальными.

цех	Стоимость ремонта одной машины	Затраты на транспортировку			Произв. мощность
		1 предпр.	2 предпр.	3 предпр.	
I	520	60	70	20	10
II	710	40	50	30	18
Прогноз.ремонт		6	7	5	

13.2. Необходимо распределить четыре станка по шести типам работ. Пусть имеются 30, 45, 25,20 станков соответствующих типов. Шесть типов работ характеризуются 30, 20, 10, 40,10 и 10 операциями соответственно. На станке 3 не может выполняться работа 6. В таблице указаны коэффициенты стоимости операции, исходя из которых, следует оптимально распределить работы по станкам.

Тип станков	Тип работ					
	1	2	3	4	5	6
1	10	1	3	7	14	8
2	4	8	12	2	10	7
3	12	3	14	6	2	-
4	11	12	9	5	1	3

13.3. В данной задаче суммарный спрос превосходит объем производства. Пусть штрафы за недопоставку к потребителям 1, 2, и 3 равны 6,4 и 2. найти оптимальное распределение.

Заводы	потребители			Объем производства
	1	2	3	
I	3	2	4	50
II	5	4	5	75
III	1	6	7	30
потребность	60	40	70	

13.4. Пусть в задаче 13.4 не введены штрафы, а спрос 1 потребителя должен быть полностью удовлетворен. Измените модель задачи и постройте оптимальный план.

13.5. Имеется несбалансированная транспортная задача, в которой назначается плата за хранение каждой единицы невывезенного груза. Пусть коэффициенты стоимости хранения груза равны соответственно 5,6 и 2. найти оптимальный план, если весь объем груза пункта 2 должен быть вывезен, чтобы освободить место для новой продукции.

Пункты хранения	потребители			Запасы продукции
	1	2	3	
1	1	0	4	300
2	3	1	2	400
3	1	2	1	250
спрос	280	320	200	

13.6. Три нефтеперерабатывающих завода с суточной производительностью 10, 8 и 6 млн. галлонов бензина снабжают три бензохранилища, спрос которых составляет 6, 11, 7 млн. галлонов. Бензин транспортируется по трубопроводу, стоимость перекачки на 1 км составляет 5 ден.ед. на 100 галлонов. Завод 1 не связан с хранилищем 3. Расстояние от заводов до бензохранилищ следующее:

заводы	бензохранилища		
	1	2	3
1	100	150	-
2	420	180	60
3	200	280	120

Построить модель и решить задачу на минимум издержек.

13.7. Пусть в задаче 13.6. производительность завода 1 снизилась до 8 млн. галлонов, кроме того, обязательно выполнение спроса 2 бензохранилища. Недопоставки в хранилища 1 и 3 штрафуются на сумму 8 д.е. за каждый галлон. Составьте новую модель задачи и решите. Найдя оптимальный план с минимумом издержек.