Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Методические указания к практическим занятиям

Омск – 2005

Составитель Сечкина Ирина Викторовна, доцент, канд. пед. наук

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета.

Основные вопросы данного курса разбиваются на три группы:

1. Алгебра высказываний; булевы функции; релейно-контактные схемы.
2. Логические и кванторные операции над предикатами; равносильность формул логики предикатов.
3. Представления об алгоритмах, машина Тьюринга; вычислительные алгоритмы.

Подобное разбиение учебного материала осуществляется и на практических занятиях.

Главное внимание сосредоточено на усвоении важнейшего в математической логике понятия булевой алгебры и её основных моделей: алгебры множеств, высказываний, событий и релейно-контактных схем.

Основные умения

1) Равносильные преобразования формул алгебры высказываний и их представление совершенными формами;
2) Равносильные преобразования формул логики предикатов с помощью тавтологий, приведение формулы к приведенной форме;
3) Описание и примеры работы машины Тьюринга;
4) Конструирование релейно-контактных схем.

План практических занятий

1. Алгебра Буля и её модели.
2. Представление булевых функций формулами. Сводка тавтологий. Совершенные формы.
3. Конструирование и упрощение релейно-контактных схем.
4. Логические функции (предикаты) и операции над ними.
5. Общезначимые формулы. Представление формул логики предикатов в предваренной нормальной форме.
6. Логика предикатов и алгебра множеств. Уравнения и неравенства как логические функции (предикаты). Комплекс теорем в геометрии. Необходимые и достаточные условия.
7. Машина Тьюринга.
8. Вычислительные алгоритмы.
9. Контрольные мероприятия. Лабораторная работа.

Занятие 1. Алгебра Буля и её модели

Основоположником формальной (классической) логики считается Аристотель – древнегреческий ученый (384-322 гг. до н. э.), а создателем математической логики – Джордж Буль - английский ученый (1815-1864 гг.).

Разработанная Д. Булем алгебра названа в честь её автора **булевой алгеброй,** которая по своим свойствам отличается от обычной алгебры чисел.

Определение 1. Алгеброй Буля называется произвольное множество элементов α, β, γ, … , для которых определены две операции – сложение и умножение, сопоставляющие каждым двум элементам α и β их сумму $\alpha+\beta$ и произведение $\alpha\cdot\beta$; определена операция «черта», сопоставляющая каждому элементу α новый элемент $\overline{\alpha}$; имеются два «особых» элемента 0 и 1 и выполняются следующие правила.

Правила, относящиеся к операции сложения	Правила, относящиеся к операции умножения
1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$,	1а) $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$.

Коммутативные законы

2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$, 2а) $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$.

Ассоциативные законы

3) $\alpha+\alpha=\alpha$ 3а) $\alpha\cdot\alpha=\alpha$.

Идемпотентные законы

Правила, связывающие сложение и умножение:

4) $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$, 4а) $\alpha\cdot\beta+\gamma=(\alpha+\gamma)\ (\beta+\gamma)$.

Дистрибутивные законы

Правила, относящиеся к элементам 0 и 1:

5) $\alpha+0=\alpha$, 5а) $\alpha\cdot 1=\alpha$;

6) $\alpha+1=1$, 6а) $\alpha\cdot 0=0$.

Правила, относящиеся к операции «черта»:

7) $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$;

8) $\bar{0} = 1$, 8a) $\bar{1} = 0$.

Правила, связывающие операцию «черта» со сложением и умножением:

9) $\overline{\alpha+\beta} = \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$, 9a) $\overline{\alpha\cdot\beta} = \bar{\alpha}+\bar{\beta}$.

Правила де Моргана

Примеры алгебр Буля.

1) Алгебра двух чисел «0» и «1», где операции **заданы** таблицей «умножения» и таблицей «сложения»

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

Таблица умножения

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

Таблица сложения

Заметим, что в этой алгебре «1»+«1»=«1», а не 1 + 1 = 2, как в обычной алгебре чисел.

2) Алгебра максимумов и минимумов, где $\oplus$ означает взятие наибольшего числа из двух данных, а $\otimes$ означает взятие наименьшего числа из двух данных. Такое «сложение» и «умножение» можно задать таблицами:

$\oplus$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
1	1	1	1	1	1

$\otimes$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1

3) Алгебра наименьших общих кратных и наибольших общих делителей двух чисел.

$\oplus$	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

$\otimes$	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

4) Алгебра множеств с операциями «сложения» (объединения), «умножения» (пересечение) и «черта» (дополнение).

5) Алгебра высказываний с операциями «сложения» (дизъюнкция), «умножения» (конъюнкция) и «черта» (отрицание).

6) Алгебра контактных схем с операциями «сложения» (параллельное соединение контактов), «умножения» (последовательное соединение контактов) и «черта» («замкнут» переводит в «разомкнут» и наоборот).

7) Алгебра событий в теории вероятностей с операциями «сложения» (сумма событий), «умножения» (произведение событий) и «черта» (противоположное событие).

Упражнения

1. Проверить выполнение аксиом алгебры Буля для алгебр Буля из примеров 1) - 7).

2. Используя диаграммы Эйлера, показать справедливость правил де Моргана (1806-1871), английского математика, в теории множеств:

$$C(A \cup B) = CA \cap CB,$$

$$C(A \cap B) = CA \cup CB,$$

где $CA = \overline{A}$ – дополнение множества A до некоторого универсального множества U.

3. Пусть дизъюнкция, конъюнкция, импликация и эквиваленция высказываний заданы таблицей истинности:

a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Здесь a и b – высказывания, т. е. предложения, о которых можно судить: истинны они или ложны (1 или 0), $a \vee b$ – дизъюнкция высказываний a и b (a или b); $a \wedge b$ – конъюнкция высказываний (a и b); $a \Rightarrow b$ – импликация (если a, то b) и $a \Leftrightarrow b$ – эквиваленция (a тогда и только тогда, когда b), $\overline{a}$ – отрицание a (не a).

1) Используя таблицу истинности, показать справедливость правил де Моргана:

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b};$$

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}.$$

2) Используя операции над высказываниями, дать определение

а) объединения и пересечения двух множеств;

б) суммы и произведения событий;

в) «суммы» и «произведения» двух контактов.

3) Построить контактную схему, отвечающую высказываниям:

а) $(a \vee b) \wedge (c \vee d)$;

б) $(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \overline{b}) \vee \overline{a}$;

в) проверить «равенство» двух контактных схем

$$(a \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee d) \quad \text{и} \quad (a \wedge b) \vee c \wedge d.$$

Задания на самостоятельную работу

1. Составить таблицу «сложения» и «умножения» для алгебры Буля из трех чисел 0, $\frac{1}{2}$ и 1, где $x \oplus y = \max\{x, y\}$, $x \otimes y = \min\{x, y\}$. Проверить для этой алгебры выполнение аксиом алгебры Буля.

2. Проверить с помощью диаграммы Эйлера справедливость соотношения $A \cup (CA \cap B) = A \cup B$.

3. Сконструировать контактные схемы, соответствующие высказываниям:

а) $(A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C})$;

б) $(A \wedge B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B) \wedge \overline{C}$.

Занятие 2. Представление булевых функций формулами. Сводка тавтологий. Совершенные формы

Определение 2. Переменными высказываниями или **пропозициональными переменными** называются переменные X_1, X_2, … , вместо которых можно подставлять высказывания (истинные или ложные). **Формулы алгебры высказываний** определяются индуктивно:

а) любая пропозициональная переменная есть формула;

б) если F_1 и F_2 – формулы алгебры высказываний, то $\overline{F}_1$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \Rightarrow F_2$, $F_1 \Leftrightarrow F_2$ также являются формулами алгебры высказываний;

в) других формул алгебры высказываний, кроме формул, построенных по правилам а) и б), нет.

Формула $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется **выполнимой,** если существует набор высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_n$, обращающий её в **истинное** высказывание. Формула $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется **тавтологией,** если она обращается в **истинное** высказывание при всех наборах значений пропозициональных переменных (обозначается $\models F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$).

Основные тавтологии алгебры высказываний

$P \vee \neg P$	закон исключенного третьего
$\neg(P \wedge \neg P)$	закон отрицания противоречия
$\neg\neg P \leftrightarrow P$	закон двойного отрицания
$P \to P$	закон тождества
$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$	закон контрапозиции
$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$	закон противоположности
$((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$	правило цепного заключения
$P \to (Q \to P)$	правило «истина из чего угодно»
$\neg P \to (P \to Q)$	правило «из ложного что угодно»
$(P \wedge (P \to Q)) \to Q$	правило modus popens
$((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P$	правило modus tollens
$(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R))$	правило перестановки посылок
$(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \to R)$	правило объединения и разъединения посылок

$((P \to R) \wedge (Q \to R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \to R)$	правило разбора случаев
$(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$	правило приведения к противоречию
$(P \wedge Q) \to P$	конъюнкция сильнее каждого из сомножителей
$P \to (P \vee Q)$	дизъюнкция слабее каждого из слагаемых

$(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

$P \to (Q \to (P \wedge Q))$

$((P \to Q) \wedge (P \to R)) \to (P \to (Q \wedge R))$

$((P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)) \to (P \leftrightarrow R)$

Определение 3. Формула $G(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется **логическим следствием** формул $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n), \dots, F_m(X_1, X_2, \dots, X_n)$, если она обращается в истинное высказывание на всяком наборе значений переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$, для которого все формулы $F_1, \dots, F_m$ обращаются в истинные высказывания. Обозначают $F_1, \dots, F_m \models G$.

Формулы F и G называются **равносильными** (эквивалентными), если при любых значениях переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ значения истинности высказываний, получающихся из формул $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и $G(X_1, X_2, \dots, X_n)$, совпадают. Обозначают $F \sim G$.

Основные равносильности алгебры высказываний

$\neg\neg P \sim P$	закон двойного отрицания
$P \wedge P \sim P$	идемпотентность конъюнкции
$P \vee P \sim P$	идемпотентность дизъюнкции
$P \wedge Q \sim Q \wedge P$	коммутативность конъюнкции
$P \vee Q \sim Q \vee P$	коммутативность дизъюнкции

$(P \wedge Q) \wedge R \sim P \wedge (Q \wedge R)$ — ассоциативность конъюнкции

$(P \vee Q) \vee R \sim P \vee (Q \vee R)$ — ассоциативность дизъюнкции

$P \wedge (Q \vee R) \sim (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ — дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции

$(P \vee (Q \wedge R)) \sim (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ — дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции

$$\left.\begin{array}{l} P \wedge (Q \vee P) \sim P \\ P \vee (Q \wedge P) \sim P \end{array}\right\}$$ законы поглощения

$$\left.\begin{array}{l} \neg(P \wedge Q) \sim \neg P \vee \neg Q \\ \neg(P \vee Q) \sim \neg P \wedge \neg Q \end{array}\right\}$$ законы де Моргана

$P \leftrightarrow Q \sim Q \leftrightarrow P$ $\qquad$ $P \leftrightarrow Q \sim (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

$P \to Q \sim \neg P \vee Q$ $\qquad$ $P \vee \neg P \sim 1, \quad P \wedge \neg P \sim 0$

$P \to Q \sim \neg(P \wedge \neg Q)$ $\qquad$ $P \vee 1 \sim 1, \quad P \wedge 1 \sim P$

$P \wedge Q \sim \neg(P \to \neg Q)$ $\qquad$ $P \vee 0 \sim P, \quad P \wedge 0 \sim 0$

$P \vee Q \sim \neg P \to Q$

Определение 4. Конъюнктивным (дизъюнктивным) одночленом от переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ называется конъюнкция (дизъюнкция) этих переменных или их отрицаний. Дизъюнктивной (конъюнктивной) **нормальной формой** называется произвольная дизъюнкция (конъюнкция) конъюнктивных (дизъюнктивных) одночленов.

Одночлен от переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ называется **совершенным,** если каждая из этих переменных входит в него только один раз со знаком отрицания или без знака отрицания.

Нормальная форма от переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ называется **совершенной** (обозначается СДНФ или СКНФ), если каждый входящий в эту форму одночлен является совершенным одночленом переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Определение 5. Функцией алгебры логики называется всякая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, принимающая значения 0 или 1 (истина или ложь), когда её пропозициональные переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ (аргументы) принимают значения 0 или 1.

Кроме уже известных по занятию 1 функций конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция, рассматривают функции: штрих Шеффера $x \mid y$, стрелка Пирса $x \downarrow y$ и сумма $x + y$ Жигалкина (сложение по модулю два), за данные таблицей истинности

x	y	$x \mid y$	$x \downarrow y$	$x + y$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

Определение 6. Система булевых функций G называется **полной,** если любая функция алгебры логики есть суперпозиция функций системы G.

Система булевых функций G называется **независимой,** если никакая функция $f \in G$ не представима суперпозицией функций из подсистемы $G \setminus \{f\}$.

Система булевых функций из G называется **замкнутой,** если вместе с любыми функциями этой системы в нее входят и любые суперпозиции булевых функций системы.

Независимая система функций G называется **базисом** замкнутого класса булевых функций K, если любая функция $f \in K$ есть суперпозиция функций системы G.

Примеры.

1) $a \to b \leftrightarrow \bar{a} \vee b;$ 2) $(a \to b) \leftrightarrow \overline{a + b};$ 3) $a \mid b \leftrightarrow \overline{a + b}.$

4) Следующие системы булевых функций является полными:

$$\{\wedge, \vee, \neg\}, \quad \{\vee, \neg\}, \quad \{\wedge, \neg\}, \quad \{\to, \neg\}.$$

5) Следующие системы булевых функций является неполными:

$$\{\wedge, \vee, \to\}, \quad \{\neg\}.$$

Упражнения.

1) Показать, что $a \downarrow b \leftrightarrow \overline{a \vee b}.$

2) Выразить с помощью суперпозиций:

а) $\wedge$ и $\to$ через $\vee$ и $\neg$;

б) $\vee$ и $\to$ через $\wedge$ и $\neg$.

3) Показать, что

а) $a \wedge b \leftrightarrow \overline{\bar{a} \vee \bar{b}};$ (см. пример 1);

б) $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (a \to b) \wedge (b \to a) \leftrightarrow (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}).$

4) Показать, что

а) $a | b \leftrightarrow \overline{a} \vee \overline{b}$ (см. пример 3);

б) $\overline{a} \leftrightarrow a \,|\, a$;

в) $a \wedge b \leftrightarrow (a \,|\, b) \,|\, (a \,|\, b)$;

г) $a \vee b \leftrightarrow (a \,|\, a) \,|\, (b \,|\, b)$;

д) $a \to b \leftrightarrow a \,|\, (b \,|\, b)$;

5) Выразите с помощью суперпозиций булевы функции $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $|$, $+$ через стрелку Пирса $\downarrow$.

Задания на самостоятельную работу

1) Покажите, что а) $\overline{a} \leftrightarrow a+1$; б) $a \vee b \leftrightarrow ((a+1) \wedge (b+1))+1$;
в) $a \to b \leftrightarrow ((a \wedge b)+a)+1$; г) $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (a+b)+1$,

где "$+$"$-$ сумма Жегалкина, $1=1(x)=1$ для всех x.

2) Построить таблицы истинности для следующих булевых функций:

а) $f(a, b) = ((a \to b) \wedge \overline{b}) \to \overline{a}$;

б) $f(a, b, c) = (((a \,|\, b) \downarrow c) \,|\, b) \downarrow c$.

3) Выразить с помощью суперпозиций функции $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $+$, $|$, $\downarrow$ через функции $\wedge$ и $\neg$.

Чтобы привести формулу $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не являющуюся тождественно ложной, к СДНФ, достаточно:

1) привести её к какой-нибудь ДНФ;
2) удалить члены дизъюнкции, содержащие переменную с её отрицанием;
3) из одинаковых членов дизъюнкции оставить только один член;
4) из одинаковых членов каждой конъюнкции удалить все, кроме одного члена;
5) если в какой-нибудь конъюнкции нет переменной x_i из переменных, входящих в исходную формулу, то добавить к этой конъюнкции член $x_i \vee \overline{x}_i$ и применить дистрибутивный (распределительный) закон конъюнкции относительно дизъюнкции, затеи опять воспользоваться правилом 3) по удалению одинаковых членов дизъюнкции.

Полученная формула будет СДНФ.

Если данная формула $F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ не является тавтологией (тождественно истинной), то её КНФ будет совершенной формой, т. е. будет СКНФ, если выполнены следующие свойства:

1) различны все члены конъюнкции;
2) различны все члены каждой дизъюнкции;
3) ни одна дизъюнкция не содержит переменную вместе с её отрицанием;
4) каждая дизъюнкция содержит все переменные, входящие в исходную формулу.

Примеры решения задач

1. Дана формула $\overline{\bar{X} \vee Y} \wedge (\bar{Z} \to X)$. Найти её СДНФ.

Решение. Имеем $\overline{\bar{X} \vee Y} \equiv \bar{\bar{X}} \wedge \bar{Y} \equiv X \wedge \bar{Y} \equiv X\bar{Y}$, здесь опущен для удобства записи знак конъюнкции.

$$X\bar{Y} \wedge (\bar{Z} \to X) \equiv X\bar{Y}(\bar{\bar{Z}} \vee X) \equiv X\bar{Y}(Z \vee X) \equiv X\bar{Y}Z \vee X\bar{Y}X \equiv X\bar{Y}Z \vee X\bar{Y},$$

здесь использовано соотношение $A \to B = \bar{A} \vee B$.

Так как второй член $X\bar{Y}$ не содержит переменной Z, добавим сомножитель $Z \vee \bar{Z} \equiv 1$. Получим $Z\ \ \bar{Y}\ \ Z \vee X\ \ \bar{Y} \equiv Z\ \ \bar{Y}\ \ Z \vee X\ \ \bar{Y}\ \ (Z \vee \bar{Z}) \equiv$

$$\equiv Z\ \ \bar{Y}\ \ Z \vee X\ \ \bar{Y}\ \ Z \vee X\ \ \bar{Y}\ \ \bar{Z} \equiv X\ \ \bar{Y}\ \ Z \vee X\ \ \bar{Y}\ \ \bar{Z},$$

здесь убрали один из повторяющихся членов $X\ \ \bar{Y}\ \ Z$. Итак, $X\ \ \bar{Y}\bar{Z} \vee X\ \ \bar{Y}\bar{Z}$ – СДНФ формулы $\overline{\bar{X}\ \ \ \ \vee Y} \wedge (\bar{Z} \to X)$. Заметим, что

$$\equiv Z\ \ \bar{Y}\ \ Z \vee X\ \ \bar{Y}\ \ \bar{Z} \equiv X\ \ \bar{Y}\ \ (Z \vee \bar{Z}) \equiv X\ \ \bar{Y} \wedge 1 \equiv X\ \ \bar{Y} \equiv X \wedge \bar{Y},$$

т. е. исходная форма допускает упрощение: переменную Z можно без ущерба опустить.

2. Дана формула $\overline{X\ \ Y\ \ Z} \wedge (X\ \ Y \to Z\ \ \bar{Y}\ \ \bar{Z})$. Найти её СКНФ.

Решение. Имеем

$$\overline{X\ \ Y\ \ Z} \wedge (X\ \ Y \to Z\ \ \bar{Y}\ \ \bar{Z}) \equiv (\bar{X}\ \ \vee \bar{Y} \vee \bar{Z})\ \ (\overline{X\ \ Y} \vee X\ \ \bar{Y}\ \ \bar{Z}) \equiv$$

$$\equiv (\bar{X} \vee\ \ \bar{Y} \vee \bar{Z})\ \ (\bar{X} \vee \bar{Y} \vee X\ \ \bar{Y}\ \ \bar{Z}) \equiv$$

$$\equiv (\bar{X} \vee \bar{Y} \vee \bar{Z})\ \ (\bar{X} \vee \bar{Y} \vee X)\ \ (\bar{X} \vee \bar{Y} \vee \bar{Y})\ \ (\bar{X} \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}),$$

здесь мы воспользовались дистрибутивным законом дизъюнкции относительно конъюнкции (выражения $\bar{X} \vee \bar{Y}$ относительно $X \;\; \bar{Y} \;\; \bar{Z}$), т. е. «первую скобку» не изменили, а «вторую скобку» записали как произведение трёх «новых скобок».

Далее имеем $\left(\bar{X} \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}\right) \; \left(\bar{X} \vee \bar{Y}\right) \equiv \left(\bar{X} \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}\right) \; \left(\bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z \;\; \bar{Z}\right) \equiv$

$$\equiv \left(\bar{X} \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}\right) \; \left(\bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z\right) \; \left(\bar{X} \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}\right) \equiv \left(\bar{X} \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}\right) \; \left(\bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z\right),$$

т. е. получим искомую СКНФ исходной формулы.

Упражнения

1. Привести к СКНФ следующие формулы:

   а) $\left(X \vee Y\right) \; \left(X \vee \bar{Y}\right)$; б) $X \;\; Y \;\; Z \vee X \;\; \bar{Y}$; в) $X \; \left(\bar{Y} \;\; \vee Z\right)$.

2. Привести к СКНФ следующие формулы:

   а) $X \;\; \vee Y \;\; \bar{Y}$; б) $X \; \left(\bar{X} \vee \bar{Y} \;\right)$; в) $X \;\; Y \;\; Z \vee \bar{X} \;\; \bar{Y} \;\; \bar{Z}$;

Задания на самостоятельную работу

1. Привести к СКНФ следующие формулы:

   а) $\overline{\bar{X} \;\; \vee Y} \;\; \vee X \;\; \bar{Y}$; б) $\left(X \vee Y \vee Z\right) \; \left(\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z}\right)$; в) $\left(X \to Z\right) \;\; X \;\; Y$.

2. Привести к СКНФ следующие формулы:

   а) $X \;\; \bar{Y} \;\; \vee \bar{X} \;\; \bar{Y}$; б) $X \;\; Y \;\; \bar{Z} \;\; \vee \bar{X} \;\; \bar{Y}$; в) $\left(X \leftrightarrow Y\right) \wedge \;\; \bar{X} \;\; \bar{Z}$.

Занятие 3. Конструирование и упрощение контактных схем

Определение 7. Релейно-контактной (просто контактной) **схемой** называется устройство, состоящее из проводников и двухпозиционных контактов, которые соединяют источник тока с потребителем.

Если реле срабатывает, то соответствующая ему переменная x принимает значение 1 (не срабатывает, тогда $x = 0$). Контакты бывают замыкающие и размыкающие и обозначаются на схеме соответственно буквами x и x'. Всей схеме ставится в соответствие булева функция – **функция проводимости,** которая равна 1, если схема проводит ток (0, в противном случае).

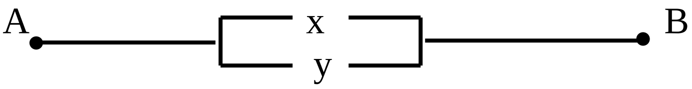
Две схемы называются **равносильными,** если они имеют одинаковые функции проводимости. Из равносильных схем **более простой** считается та, которая имеет меньше число контактов.

Примеры.

1) Схемы

а)

б)

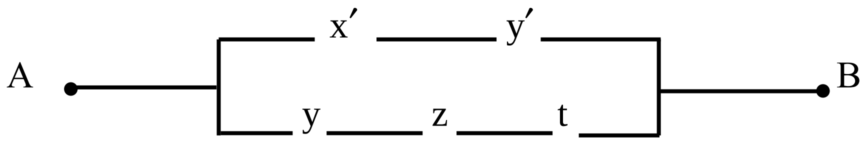


в)

г)

имеют соответственно следующие функции проводимости: $f(x;\ \ y) = x \wedge y;$
$f(x;\ \ y) = x \vee y;$ $\quad f(x;\ \ y) \equiv 1;$ $\quad f(x;\ \ y) \equiv 0.$

2) Функция проводимости схемы

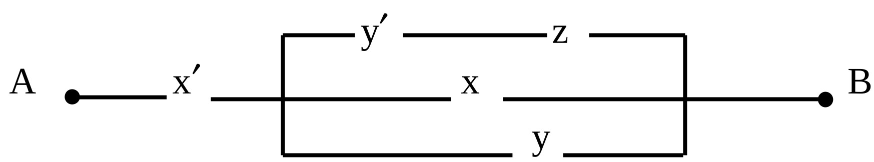


имеет вид $f(x;\ \ y;\ \ z;\ \ t) = (x' \wedge y') \vee (y \wedge z \wedge t)$.

3) Сконструировать релейно-контактную схему с заданной функций проводимости

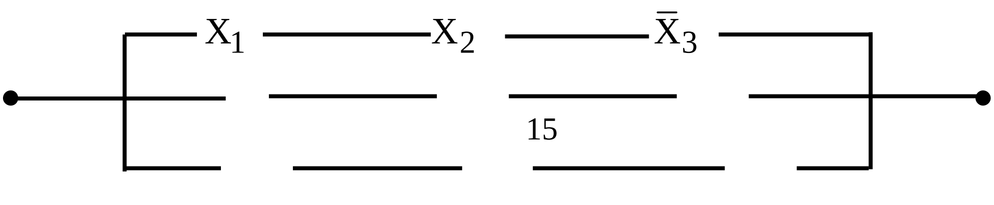
$$f(x;\ \ y;\ \ z) = x' \cdot (y' \ \ z \vee x \vee y).$$

Решение. Данной функции проводимости соответствует, например, следующая схема:



4) Построить цепь с тремя независимыми контактами, которая проводит ток тогда и только тогда, когда замкнуты ровно два контакта.

Решение. Искомой схеме соответствует формула $F(X_1,\ \ X_2,\ \ X_3) =$
$= X_1 \ \ X_2 \ \ \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \ \ X_2 \ \ X_3 \vee X_1 \ \ \bar{X}_2 \ \ X_3$, и сама схема имеет вид:



A $\overline{X}_1$ X_2 X_3 B

X_1 $\overline{X}_2$ X_3

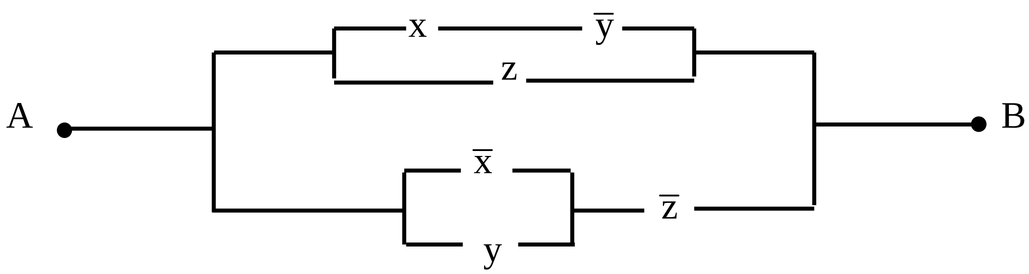
Отечественный математик О.Б.Лупанов доказал, что любую схему, соответствующую формуле с n переменными, всегда можно устроить так, что число контактов в этой схеме не превысит числа $\frac{2^n}{n}$.

Упрощение схем производится на основе основных тавтологий и основных равносильностей алгебры высказываний, например, часто используются законы поглощения

$$P \wedge (Q \vee P) \cong P, \qquad P \vee (Q \wedge P) \cong P,$$

когда контакт, соответствующий переменной Q, оказывается **«лишним».**

5) Упростить схему



Решение. Данная схема имеет следующую функцию проводимости:

$$f(x;\ \ y;z) = (x \quad \overline{y} \ \ \vee z) \vee \left[(\overline{x} \vee y) \wedge \overline{z}\right].$$

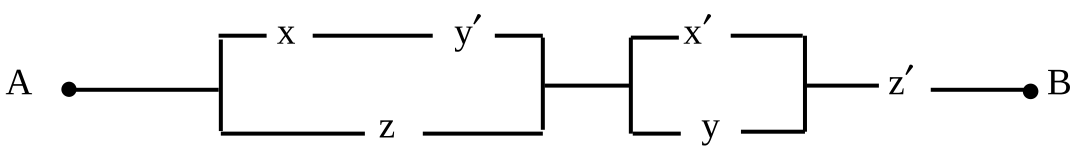
Обозначим $f_1 = x \quad \overline{y} \vee z,$ $f_2 = (\overline{x} \vee y) \wedge \overline{z},$ имеем

$$\overline{f}_1 = \overline{x \quad \overline{y} \ \vee \ z} = \overline{x \quad \overline{y}} \wedge \overline{z} = (\overline{x} \vee \overline{\overline{y}}) \wedge \overline{z} = (\overline{x} \vee y) \wedge \overline{z} = f_2.$$

Следовательно, $f(x;\ \ y;\ \ z) = f_1 \vee f_2 = f_1 \vee \overline{f}_1 = 1.$

Итак, упрощенная схема, равносильная данной, имеет вид: A ●——● B .

6) Упростить схему



Решение. Имеем $f(x;\ \ y;\ \ z) = (x \quad y' \vee z) \quad (x' \vee y) \quad z' =$

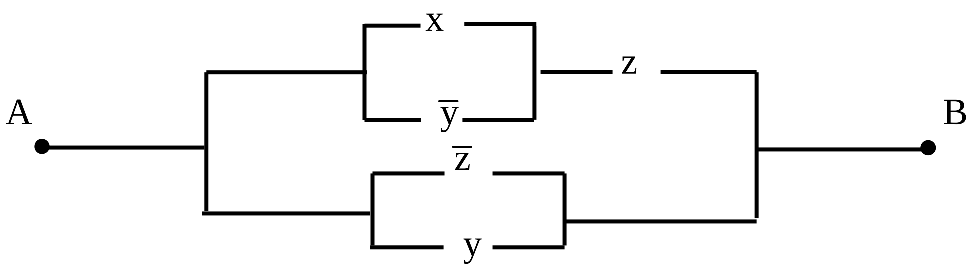
$$= x \quad x' \quad y' \quad z' \vee z \quad x' \quad z' \vee x \quad y' \quad y \quad z' \vee z \quad y \quad z' \equiv 0.$$

Итак, данная схема равносильна схеме: A • • B.

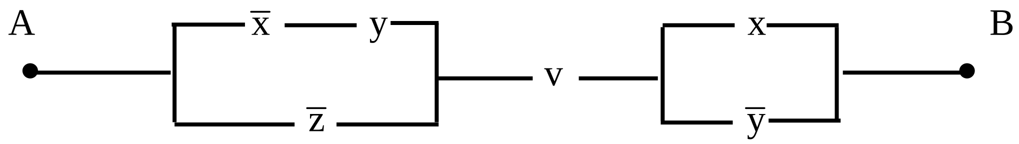
Упражнения

1) Найти функцию проводимости данных релейно-контактных схем:

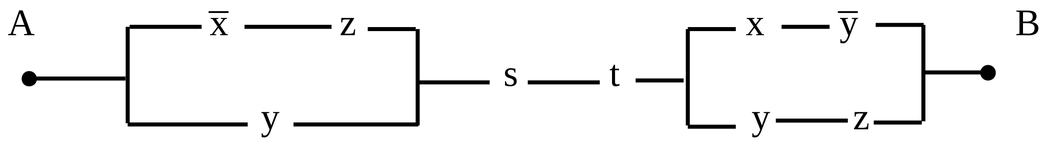
а)



б)



в)



Ответы: а) $f(x,\ y,\ z) = \left[(x \vee \overline{y}) \quad z\right] \vee (\overline{z} \vee y)$.

2) Построить релейно-контактную схему с заданной функций проводимости:

а) $f(x;\ \ y;\ \ z) = \overline{x} \wedge (\overline{y} \quad z \vee x \vee y)$;

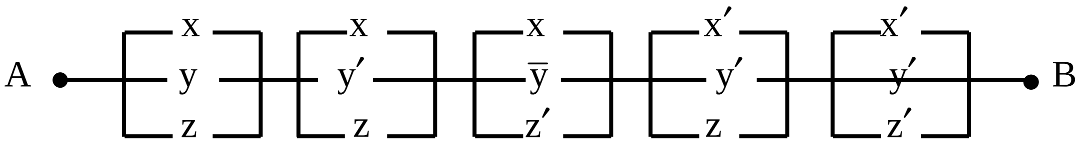
б) $f(x;\ \ y;\ \ z) = [(\overline{x} \vee y) \wedge (y \quad z \vee x)] \vee z$;

в) $f(x;\ \ y;\ \ z) = (x \to y) \to (\ \overline{x} \wedge (y \vee z))$;

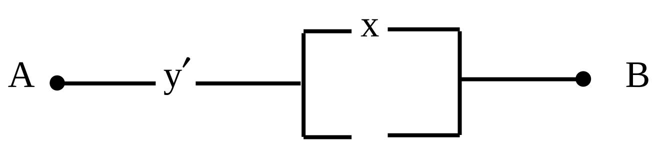
Указание: $x \to y \cong \overline{x} \vee y$.

3) Упростить следующие релейно-контактные схемы:

а)

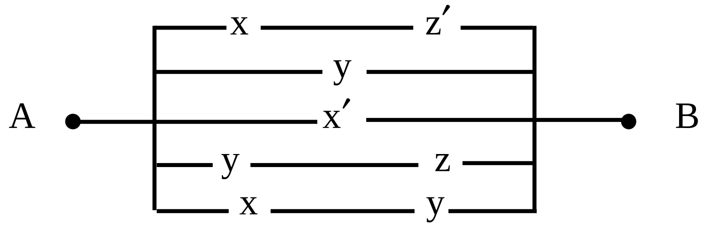


Ответ:

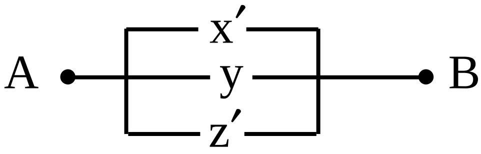


z

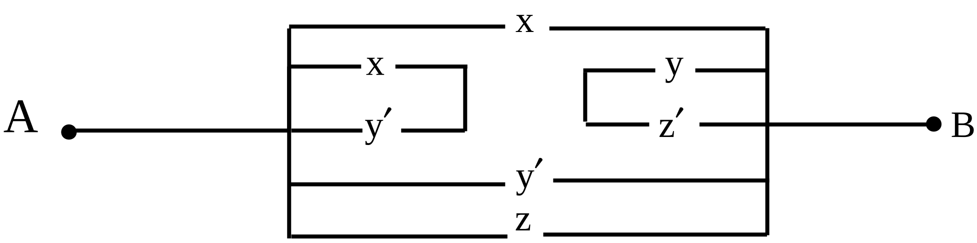
б)



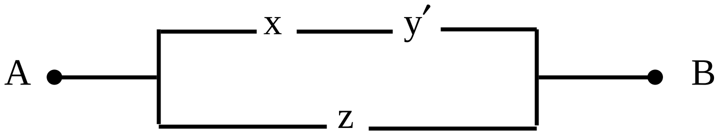
Ответ:



в)



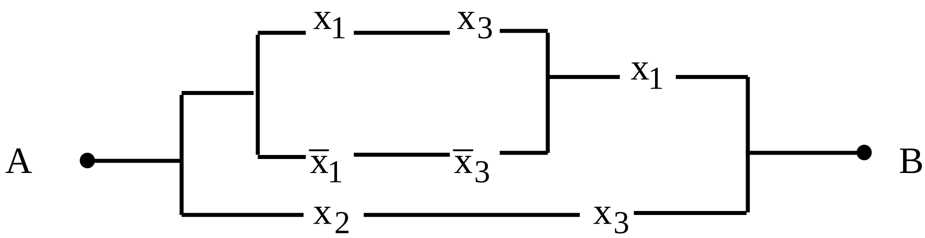
Ответ:



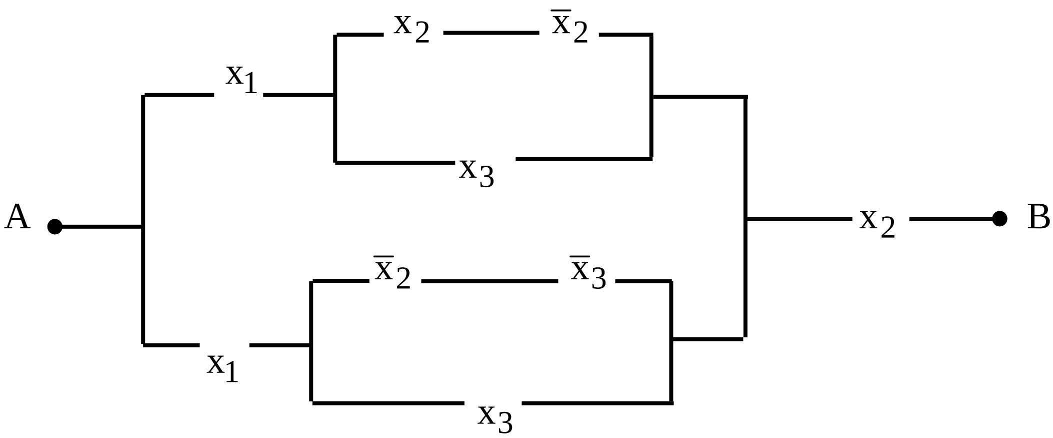
Задания на самостоятельную работу

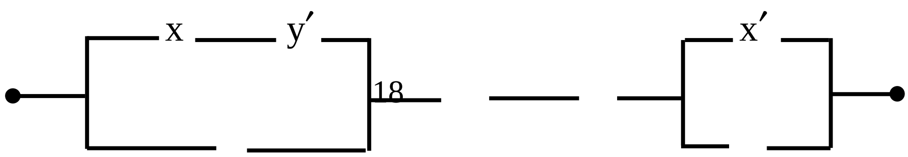
1). Найти функцию проводимости данных релейно-контактных схем:

а)

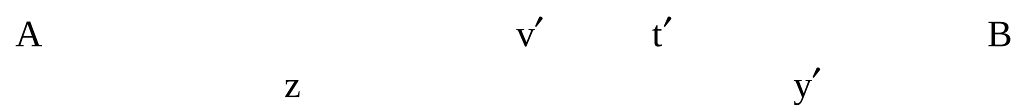


б)





в)



Ответы: в) $f\left(x,\ \ y,\ \ z\right)=\left[x\quad y'\vee x\right]\cdot\left(v'\cdot t'\right)\cdot\left[x'\vee y'\right]$.

2). Построить релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости:

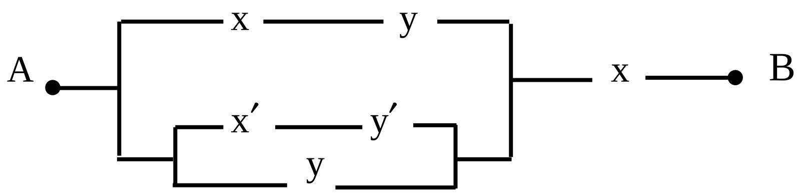
а) $f\left(x;\ \ y;\ \ z\right)=\left(x\vee y\right)\ \ z\vee\overline{z}\ \ \ y;$

б) $f\left(x;\ \ y;\ \ z\right)=\left(x\to y\right)\vee x;$

в) $f\left(x;\ \ y;\ \ z\right)=\left(x\leftrightarrow y\right)\ \ \ z;$

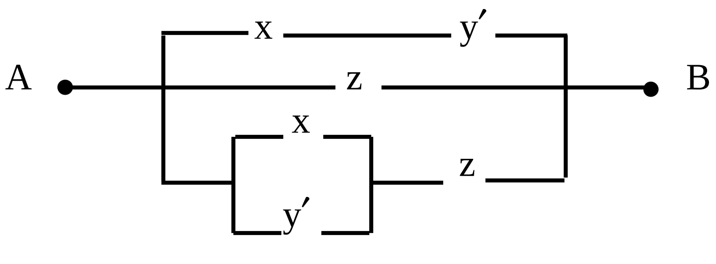
3). Упростить следующие релейно-контактные схемы:

а)

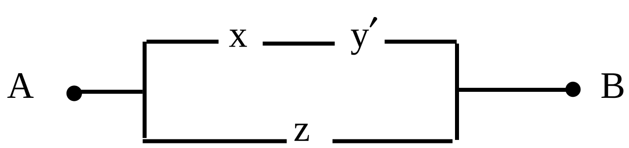


Ответ:

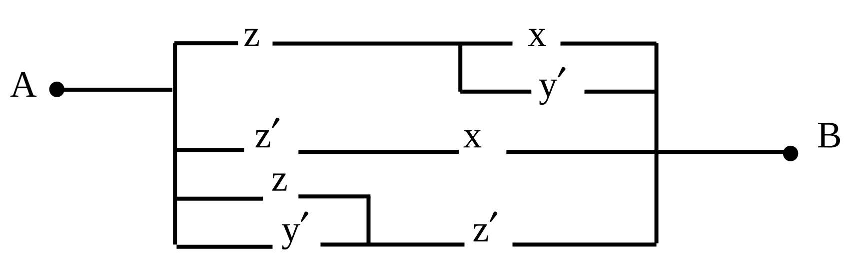
б)



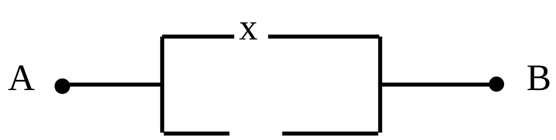
Ответ:



в)



Ответ:



y'

4). Составьте схему цепи с тремя независимыми контактами, которая замкнута тогда и только тогда, когда:

а) замкнута по меньшей мере два контакта;

б) замкнуты не более, чем два контакта;

в) разомкнут только один контакт.

Занятие 4. Логические функции (предикаты) и операции над ними

В традиционной логике в элементарном высказывании различаются **субъект** (то, что утверждается о субъекте), иначе говоря, подлежащее (субъект) и сказуемое (предикат). Предикат означает в этом случае свойство предмета.

В математической логике понятие предиката берется в более широком смысле как отношение между предметами, то есть предикат трактуется как **логическая функция** одной или нескольких предметных переменных.

Определение 8 [3]. $n-$**местным предикатом,** определенным на множествах $M_1,\ M_2,\dots\ ,M_n,$ называется предложение, содержащее n переменных $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,$ превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств $M_1,\ M_2,\dots\ ,M_n$ собственно. Это высказывание может быть либо истинным (предикат принимает значение 1), либо ложным (предикат принимает значение 0). Если $M = M_1 \times M_2 \times \ \dots \times M_n$ есть область определения предиката $P,$ то есть подмножество $I \subset M$, на котором он обращается в истинное высказывание, называется **множеством истинности,** то есть

$$I = P^+ = \{(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n) : P(x_1,\ x_2,\dots,x_n) = 1\}\ .$$

Если $P^+ = M\left(P^+ \neq M\right),$ то предикат P называется тождественно истинным (опровержимым).

Если $P^+ = \varnothing\left(P^+ \neq \varnothing\right),$ то предикат P называется тождественно ложным (выполнимым).

Два предиката P и называются **равносильными,** если $P^+ = Q^+$. Предикат Q называется следствием предиката P, если $P^+ \subset Q^+$. Обозначается: $P \leftrightarrow Q$ и $P \to Q,$ где $"\leftrightarrow"-$ знак равносильности, $"\to"-$логическое следствие.

Над предикатами можно осуществлять те же **логические операции**, что и над высказываниями: отрицание, конъюнкцию, дизъюкнцию, импликацию, эквиваленцию и другие (известные нам) операции. При этом имеем

$$1)\ (P \wedge Q)^{+} = P^{+} \cap Q^{+} \qquad (1)$$

$$2)\ (P \vee Q)^{+} = P^{+} \cup Q^{+} \qquad (2)$$

$$3)\ (\neg P)^{+} = M \setminus P^{+}, \qquad (3)$$

где $M-$ общая область определении предикатов P и Q (формулы (1) –(2)) или область определения предиката P (в формуле (3));

$$4)\ (P \to Q)^{+} = \left(M \setminus P^{+}\right) \cup Q^{+} \qquad (4)$$

$$5)\ (P \leftrightarrow Q)^{+} = \left[M \setminus \left(P^{+} \cup Q^{+}\right)\right] \cup \left(P^{+} \cap Q^{+}\right) \qquad (5)$$

Логические операции преобразуют предикаты в предикаты. Рассмотрим теперь две операции, преобразующие предикаты в высказывания:

1) подстановка вместо всех предметных переменных их значений:

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2, \ldots,\ x_n = a_n;$$

2) связывание всех переменных кванторами общности или существования;
3) подстановки вместо переменных, не связанных кванторами (то есть вместо **свободных** переменных), их значений – это комбинация первых двух операций.

Связанные переменные – это те переменные, которые фигурируют и в предикате, и в кванторной записи типа $\forall x,\ \exists y$ и т.п., где $\forall x -$ для всякого $x -$ квантор всеобщности (общности), а $\exists y -$ существует $y -$ квантор существования.

Упражнения

1. Определить значение истинности следующих высказываний:

а) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 7)$

б) $(\exists y)(\forall x)(x + y = 7)$

в) $(\exists x)(\exists y)(x + y = 7)$

Ответ: а) истинное высказывание.

2. Найти множества истинности следующих предикатов и изобразить их на числовой прямой:

а) $x < 3$; б) $|x| = 4$; в) $|x| > 2$.

Ответ: а) $P^{+} = (-\infty;\ 3)$.

0 3 x

Является ли один из предикатов, заданных на $M = Ш$
3.следствием другого?:

а) " $|x| < -3$ " и " $x^2 - 3x + 2 = 0$ ".

Здесь $P = (|x| < -3)$, $Q = \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0$, $P^+ = \varnothing$, $Q^+ = \{1;\ 2\}$, $P^+ \subset Q^+$. Значит $P \to Q$.

Ответ: $P \to Q$.

б) "$x^2 = 16$" и "$x^2 = -2$";

в) "$\sin x = 3$" и "$x + 1 = 1 + x$".

3. Выяснить, равносильны ли следующие предикаты, если дано, что:
1) $M = Ш$ 2) $M = Q$; 3) $M = Z$; 4) $M = N$;

а) "$x^2 = 1$ и "$(x-1)\left(x+\sqrt{2}\right)(x-1{,}5)(x+1) = 0$";

б) "$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15$" и "$\sqrt{xy} = 15$";

в) "$|x| = |y|$" и "$x = y$".

4. Определить значение истинности полученных из предиката $P:\ x < y$ навешиванием кванторов высказываний:

а) $\forall x\ \forall y : x < y$;
б) $\forall y\ \forall x : x < y$;
в) $\exists x\ \exists y : x < y$;
г) $\exists y\ \exists x : x < y$;
д) $\forall x\ \exists y : x < y$;
е) $\exists y\ \forall x : x < y$;
ж) $\exists x\ \forall y : x < y$;
з) $\forall y\ \exists x : x < y$;

Ответы: д) 1; е) 0.

5. Определить значение истинности следующих высказываний:

а) $\forall x\ \forall y : x + y = y + x$;

б) $\forall x\ \exists y : x + y = 3$;

в) $\exists y\ \forall x : x + y = 3$;

Ответы: б) 1; в) 0.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти значение истинности следующих высказываний:

   а) $\exists x\ \exists y : x + y = 5;$

   б) $\forall x\ \forall y : x + y = 5;$

   в) $\exists x\ \exists y : (x > y > 0) \wedge (x + y = 0);$

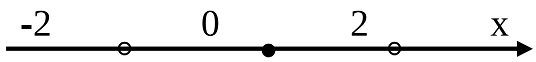
   г) $\forall x : \left(x^2 > x\right) \leftrightarrow \left[(x > 1) \vee (x < 0)\right].$

Ответы: а) 1; б) 0; в) 0; г) 1.

2. Найти множества истинности следующих предикатов и изобразить их на числовой прямой:

а) $x^2 + 6x - 16 \le 0;$ б) $|x| < 2;$ г) $|x - 4| \ge 1;$ д) $|x - 1| \le |2x + 4|.$

Ответы: б) $P^+ = (-2;\ 2).$



2) $(x - 4 \ge 1)$ или $(x - 4 \le -1)$, т. е. $(x \ge 5)$ или $(x \le 3)$, следовательно, $P^+ = (-\infty;\ 3] \cup [5;\ +\infty).$

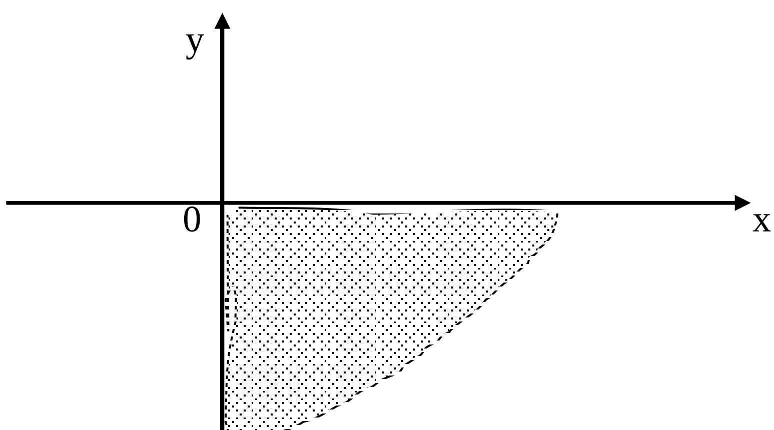
3. Изобразить на координатной плоскости множества истинности следующих предикатов:

а) $(x \ge 0) \wedge (y \le 0);$

б) $(|x| < 3) \wedge (|y| < 2);$

г) $(x > 0) \vee (x + y = 3).$

Ответ: а) Координаты любой точки четвертой четверти, включая её границу, обращают данный предикат в истинное высказывание. Следовательно, множество P^+ совпадает со всей четвертой четвертью (см. рис. 1).



P^{+}

Рис. 1

б) P^{+} совпадает с внутренней областью прямоугольника:

$$P^{+}=\{(x;\,y):-3<x<3;\ -2<y<2\}\ \text{(см. рис. 1)}$$

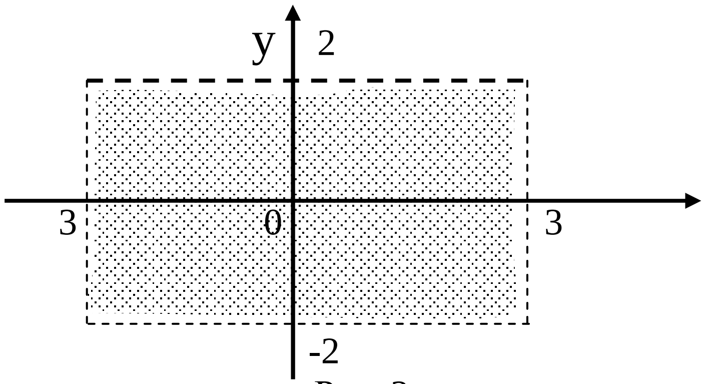


Рис. 2

4. Определить является ли один из предикатов следствием другого, если они оба заданы на $M =$ ш:

а) "$x^2=16$" и "$x^2=-4$";

б) "$\sin x = 4$" и "$x+2=2+x$";

в) "$x^2=1$" и "$x-1=0$".

Ответ: б) $P^{+}(\text{"}\sin = 4\text{"}) = \varnothing$;

$P^{+}(\text{"}\ x+2=2+x\ \text{"}) =$ ш: Так как $\varnothing \subset$ ш, то предикат "$x+2=2+x$" является следствием предиката "$\sin x = 4$".

5. Из следующих предикатов с помощью навешивания кванторов и подстановки значений свободных переменных получить высказывания и определить их значения истинности:

а) $(x<0)\vee(x=0)\vee(x>0)$;

б) $x^2=25$; в) $|x-y|\le 3$.

Ответ: б) $(\forall x : x^2 = 25)$ – ложь;

$(\exists x : x^2 = 25)$ – истина.

в) $(\exists x \exists y : |x-y| \le 3)$ – истина;

$(\forall x \forall y : |x-y| \le 3)$ – ложь.

Занятие 5. Общезначимые формулы. Представление формул логики предикатов в предваренной нормальной форме

В **алфавит** символов, из которых конструируются формулы алгебры предикатов, входят:

1) предметные переменные $x, y, z, \ldots$;
2) нульместные предикатные переменные (высказывания);
3) n – местные $(n \ge 1)$ предикатные переменные $P(,\ldots,), Q(,\ldots,), \ldots$;
4) символы логических операций: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$;
5) кванторы: $\forall x, \exists y, \ldots$;
6) вспомогательные символы: скобка, запятая.

Определение 9.

1) Каждая нульместная предикатная переменная есть формула.

2) Если $P(,\ldots,)$ – n – местная предикатная переменная, то $P(x_1,\ldots,x_n)$ есть формула, в которой все предметные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются свободными переменными.

3) Если F – формула, то $\neg F$ – также формула.

4) Если F_1 и F_2 – формулы, то $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$ также формулы.

5) Если F – формула со свободной переменной x, то $(\forall x)(F)$ и $(\exists x)(F)$ также формулы со связанной переменной x.

6) Никаких других формул логики предикатов, кроме перечисленных в пунктах 1–5, нет. Формулы, перечисленные в пунктах 1–2, называются **элементарными,** остальные – составными. Формулы, в которых нет свободных предметных переменных, называются **замкнутыми;** формулы, содержащие свободные переменные, называются **открытыми.**

Определение 10. Формула логики предикатов называется **выполнимой (опровержимой)** на множестве M, если при подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на M, она превращается в выполнимый (опровержимый) предикат. Формула логики предикатов называется **тождественно истинной (тождественно ложной)** на множестве M, если при подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на M, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Формула логики предикатов называется **общезначимой** или **тавтологией (тождественно ложной** или **противоречием),** если при подстановке вместо предметных переменных любых предикатов, заданных на каких-угодно множествах, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Заметим, что в алгебре высказываний есть общий метод определения, является или нет формула тавтологией – это составление таблиц истинности данной формулы, а в логике предикатов такого общего метода нет (это доказано в 1936 году А. Чёрчем). Поэтому полезно знать основные равносильности и основные тавтологии логики предикатов.

Определение 11. Формулы F и H логики предикатов называются равносильными на множестве M (просто **равносильными)**, если при подстановке в них вместо предикатных переменных любых предикатов, определенных на множестве M (на любом множестве), формулы превращаются в равносильные предикаты. Обозначается $F \cong H$. Заметим, что $F \cong H$ тогда и только тогда, когда $F \leftrightarrow H$ является тавтологией.

Основные равносильности логики предикатов

$$\neg(\forall x)\left(F(x)\right) \cong (\exists x)\left(\neg F(x)\right)$$

$$\neg(\exists x)\left(F(x)\right) \cong (\forall x)\left(\neg F(x)\right)$$

$$(\forall x)\left(F(x)\right) \wedge (\forall x)\left(G(x)\right) \cong (\forall x)\left(F(x) \wedge G(x)\right)$$

$$(\exists x)\left(F(x)\right) \vee (\exists x)\left(G(x)\right) \cong (\exists x)\left(F(x) \vee G(x)\right)$$

$$H \wedge (\exists x)\left(F(x)\right) \cong (\exists x)\left(H \wedge F(x)\right)$$

$$H \vee (\forall x)\left(F(x)\right) \cong (\forall x)\left(H \vee F(x)\right)$$

$$H \to (\exists x)\left(F(x)\right) \cong (\exists x)\left(H \to F(x)\right)$$

$$H \to (\forall x)\left(F(x)\right) \cong (\forall x)\left(H \to F(x)\right)$$

$$(\exists x)\left(F(x)\right) \to H \cong (\forall x)\left(F(x) \to H\right)$$

$$(\forall x)\left(F(x)\right) \to H \cong (\exists x)\left(F(x) \to H\right)$$

$$(\forall x)(\forall y)\left(F(x)\right) \cong (\forall y)(\forall x)\left(F(x, y)\right)$$

$$(\exists x)(\exists y)(F(x, y)) \cong (\exists y)(\exists x)(F(x, y))$$

Основные тавтологии логики предикатов

$$(\exists y)(\forall x)(F(x, y)) \to (\forall x)(\exists y)(F(x))$$

$$(\forall x)(F(x)) \to F(t)$$

$$F(t) \to (\exists x)(F(x))$$

Определение 12. Приведенной формой для формулы логики предикатов называется такая равносильная ей формула, в которой из операций алгебры высказываний имеются лишь операции $\neg, \wedge, \vee,$ а знаки отрицания относятся лишь к предикатным переменным или к высказываниям. **Предварённой нормальной формой** для формулы логики предикатов называется такая её приведенная форма, в которой все кванторы стоят в её начале, а область действия каждого из них распространяется до конца формулы (либо кванторы в формуле совсем отсутствуют).

Можно доказать [3, с. 158-159], что для каждой формулы логики предикатов существует предваренная нормальная форма.

Упражнения

1. Указать свободные и связанные переменные в следующих формулах:

а) $(\forall x)(P(x))$; б) $(\forall x)(P(x)) \to P(y)$;

в) $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$; г) $P(x) \to (\exists x) \to (\exists x)(Q(x))$.

Ответы: б) x – связанная переменная, y – свободная переменная;

в) x – связанная переменная, а формула $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$ служит примером приведенной нормальной формы формулы алгебры предикатов.

2. **Интерпретация** замкнутой формулы состоит из следующих шагов [2, с.107]:

1) задается множество M;

2) каждой предикатной букве, входящей в n – местный предикатный символ, ставится в соответствие n – местный предикат, определенный на M;

3) каждому нуль-местному предикатному символу приписывается одно из значений истинности.

Если формула – открытая, то добавляется ещё один шаг:

4)каждому свободному вхождению переменной ставится в соответствие элемент множества M.

Пример. Дать интерпретацию открытой формуле

$$\exists\ y\ \forall\ x\ \ P(x,\ y) \to (Q(x) \wedge \square\ ).$$

1) Пусть $M = \{1, 2\}$;

2) предикатной букве P поставим в соответствие предикат, заданный таблицей

$(1; 1)$	$(1; 2)$	$(2; 1)$	$(2; 2)$
1	0	1	0

а предикатной букве Q – предикат, заданный таблицей

1	2
1	0

3) предикатному символу P припишем значение 1 (истина);

4) свободному вхождению переменной x припишем значение 1.

При такой интерпретации данная формула обращается в истинное высказывание. Действительно, существует $y = 1$, такое, что $\forall x\ P(x, y)$ истинно $\left(\left|P(1; 1)\right| = 1,\quad \left|P(2; 1)\right| = 1\right)$. Следовательно, посылка (антецедент) импликации принимает значение 1, а заключение (консеквент) $Q(1) \wedge ?$ тоже истинно. Значит, импликация истинна.

Дать интерпретации следующим формулам (см., например, [3, с. 144-145]:

$$\text{а) } (\forall x)(\exists y)(P(x; y));$$

$$\text{б) } (\exists\ z)\ \ (P(x,\ y,\ z) \to Q(x,\ y,\ z)) \to \mathrm{P}$$

3. Для следующих формул найти равносильную им приведенную форму:

$$\text{а) } (\exists x)(P(x) \to (\forall y)(Q(y)));$$

$$\text{б) } \neg((\forall\ x)\ \ (P(x)) \to (\exists y)\ \ (Q\ \ (y)));$$

$$\text{в) } (\forall x)\ \ (P(x)) \to \neg(Q(y) \to (\forall z)\ \ (\square\ (Z))).$$

Ответы: а) $(\exists x(\neg P(x) \vee \forall y)(Q(y)));$

б) $(\forall x)(P(x)) \vee (\forall y)(\neg Q(y))$;

в) $(\exists x)\ (\neg P(x)) \vee (Q(y) \wedge (\exists z)\ (\neg\square\ (Z)))$.

4. Привести следующие формулы к предваренной (пренексной) нормальной форме:

а) $(\forall x)(P(x)) \to (\forall x)(Q(x))$;

б) $(\forall\ y)\ (Q(y,\ z)) \to (\exists\ x)\ (\square\ (x,\ t,\ z))$.

Ответы: а) $(\forall x)(P(x)) \to (\forall x)(Q(x)) \cong (\forall x)P(x) \to (\forall y)(Q(y)) \cong$

$\cong (\exists x)(P(x) \to (\forall y)(Q(y))) \cong (\exists\ x)\ (\forall y)\ (P(x) \to Q(y))$.

б) $(\forall y)\ (\exists x)\ (Q(y,\ z) \to (x,\ t,\ z))$. P

Упражнения для самостоятельной работы

1. Указать свободные и связанные переменные в следующих формулах:

а) $(\exists x)(\exists y)(P(x,y) \wedge Q(z))$;

б) $(\forall x)(\exists y)(x < y + z)$;

в) $(\exists x)(\forall z)(z < x + y)$.

Ответы: а) x и y – связанные переменные, z – свободная переменная.
б) x и y – связанные переменные, z – свободная переменная.

2. Дать интерпретацию следующим формулам логики предикатов:

а) $(\exists\ x)\ (\exists\ y)\ (P(x,\ y) \wedge \square\ )$;

б) $(\forall\ x)\ (\exists\ y)\ (P(x,\ \ y) \wedge Q(x) \wedge \square\ )$.

3. Для следующих формул найти равносильную им приведенную форму:

а) $\neg[(\forall\ x)\ (P(x)) \vee (\exists x)\ (Q(x) \to \square\ (x))]$;

$$\text{б)}\quad \big((\exists x)\ \ (P(x)) \to (\forall y)\ \ (Q(y))\big) \to \square\ (Z\square\ );$$

$$\text{в)}\quad \neg\Big[(\forall x)\ \ \big(P(x) \to Q(x) \wedge (\exists y)\ \ (\neg\square\ (y) \wedge S(z))\big)\Big]\ .$$

Ответы: а) Используя правило де Моргана для предикатов, имеем:

$$\neg\ \ (\forall x)\ \ (P(X)) \wedge \neg(\exists x)\ \ (Q(x) \to \square\ (x)) \cong$$

$$\cong (\exists x)\ \ (\neg P(X)) \wedge (\forall x)\neg\ \ (\neg Q(x) \vee \square\ (x)) \cong$$

$$\cong (\exists x)\ \ (\neg P(X)) \wedge (\forall x)\ \ (Q(x) \wedge \neg\square\ (x))\ .$$

$$\text{б)}\quad \big((\exists x)\ \ (P(x)) \wedge (\exists y)\ \ (\neg Q(y))\big) \to \square\ (Z\square\ );$$

$$\text{в)}\quad (\exists x)\ \ (P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall y)\ \ (\square\ (y) \vee \neg S(z))\ .$$

4. Привести следующие формулы к предварённой (пренексной) нормальной форме:

$$\text{а)}\ (\exists y)\big[P(x) \to Q(y)\big] \to (\forall y)\big[P(y) \vee (\forall z)\,(Q(z))\big];$$

$$\text{б)}\ P(y) \to \neg\big[(\forall x)\,(Q(x,\ y)) \to P(y)\big].$$

Ответы: а) $(\exists y)\big[P(x) \to Q(y)\big] \to (\forall y)\big[P(y) \vee (\forall z)(Q(z))\big] \cong$

$$\cong (\exists y)\big[P(x) \to Q(Y)\big] \to (\forall t)\big[P(t) \vee (\forall z)(Q(Z))\big] \cong$$

$$\cong (\forall y)\Big\{\big[P(x) \to Q(y)\big] \to (\forall t)\,(\forall z)\big[P(t) \vee Q(z)\big]\Big\} \cong$$

$$\cong (\forall y)(\forall t)(\forall z)\Big\{\big[P(x) \to Q(y)\big] \to \big[P(t) \vee Q(z)\big]\Big\};$$

$$\text{б)}\ (\forall x)\big[P(y) \to \neg\big(Q(x,\ y) \to P(y)\big)\big].$$

Занятие 6. Логика предикатов и алгебра множеств. Уравнения и неравенства как логические функции (предикаты). Комплекс теорем в геометрии. Необходимые и достаточные условия

Тема «Уравнения и неравенства» лучше всего проясняется на основе понятия логической функции (предиката).

Рассмотрим вначале уравнения с одной переменной x, $x \in X$, $X \subset$ □□

Определение 13. Уравнением

$$A(x) = B(x) \tag{1}$$

$x \in X$, называется одноместный предикат с (предметной) переменной x, $x \in X$, имеющий вид **равенства** двух выражений, содержащих (предметную) переменную x. **Множество решений** уравнения (1) – это множество истинности $I = P^{+}$ предиката (1).

Всякий элемент $x \in I$ называется **решением (корнем)** уравнения (1). **Решить** уравнение (1) – значит найти множество истинности I предиката (1).

Два уравнения называются **равносильными,** если они представляют собой один и тот же предикат (логическую функцию). Отсюда следует, что у равносильных уравнений совпадают множества истинности.

Переход от одного уравнения к другому, равносильному первому, называется **равносильным преобразованием.**

Определение 14. Системой (совокупностью) двух уравнений называется конъюнкция (дизъюнкция) этих двух предикатов.

В соответствии с определением 14, множество истинности системы (совокупности) является **пересечением** (объединением) множеств истинности уравнений, входящих в систему (совокупность). Два уравнения называются **несовместными,** если пересечение их множеств истинности пусто.

Определение 15. Если в предикате (1) $I = P^{+} = \varnothing$, то уравнение (1) называется **противоречивым.** Если $I = P^{+} = X$, то уравнение (1) называется **тождеством** (на X).

Аналогично определяются уравнения с большим числом (предметных) переменных и неравенства:

$$A(x) > B(x),\ x \in X \tag{2}$$

с одним (предметным) переменным x или несколькими переменными $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$.

Остановимся теперь на том, как пояснить общую схему нахождения решения уравнений, неравенств, их систем и совокупность: в основу нужно положить понятия **логического следования** $\rightarrow$ и логической равносильности $\leftrightarrow$.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся на практике равносильности:

I. Важные дизъюнкции

1. $f(x)\ \ \varphi(x) = 0 \leftrightarrow f(x) = 0 \vee \varphi(x) = 0$

2. $f(x)\quad \varphi(x) > 0 \leftrightarrow (f(x) > 0 \wedge \varphi(x) > 0) \vee \left(f(x) < 0 \wedge \varphi(x) < 0\right)$

3. $f(x)\cdot\varphi(x) < 0 \leftrightarrow \left(f(x) > 0 \wedge \varphi(x) < 0\right) \vee \left(f(x) < 0 \wedge \varphi(x) > 0\right)$

4. $f(x) \geq a \leftrightarrow f(x) > a \vee f(x) = a$

5. $\left.\begin{array}{l} |f(x)| = |\varphi(x)| \\ |f(x)| = \varphi(x) \\ f(x) = \pm\varphi(x) \end{array}\right\} \leftrightarrow f(x) = \varphi(x) \vee f(x) = -\varphi(x)$

Здесь каждая логическая функция слева логически равносильна предикату справа.

6. $|f(x)| > a \leftrightarrow f(x) > a \vee f(x) < -a$

7. $f(x) \neq a \leftrightarrow f(x) > a \vee f(x) < a$

8. $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} > 0 \leftrightarrow f(x)\cdot\varphi(x) > 0$ (см. 2)

9. $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} < 0 \leftrightarrow f(x)\cdot\varphi(x) < 0$ (см.3)

10. $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{array}\right. \leftrightarrow f(x) = 0 \vee \varphi(x) = 0$

Здесь $[-$ знак совокупности уравнений.

П. Важные конъюнкции

1. $f(x)\quad \varphi(x) = 0 \leftrightarrow f(x) \neq 0 \wedge \varphi(x) \neq 0$

2. $|f(x)| < a \leftrightarrow f(x) > -a \wedge f(x) < a$

3. $a \leq f(x) \leq b \leftrightarrow f(x) \geq a \wedge f(x) \leq b$

4. $\sum\limits_{i=1}^{n}\left|f_i(x)\right|=0 \leftrightarrow f_1(x)=0 \wedge f_2(x)=0 \wedge \ldots \wedge f_n(x)=0$

5. $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0 \leftrightarrow f(x)=0 \wedge \varphi(x)\neq 0$

6. $\begin{cases} F_1(x,\, y)=0 \\ F_2(x,\, y)=0 \end{cases} \leftrightarrow F_1(x,\, y)=0 \wedge F_2(x,y)=0$

Здесь $\{$ – знак системы уравнений.

Примеры.

1. Решить уравнение $x^2+3|x|+2=0.$

Исходное уравнение имеет вид $F(x,\,|x|)=0,$ оно эквивалентно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} F(x,\, x)=0 \\ x\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} F(x_1-x)=0 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Поэтому $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+3x+2=0 \\ x\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=-2; \quad x_2=-1 \\ x\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_3=2; \quad x_4=1 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \begin{cases} x\in\varnothing \\ x\in\varnothing \end{cases} \leftrightarrow \varnothing.$

Ответ: $I=\varnothing$ **(**решений нет).

2. Решать неравенство $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right|\leq 3.$

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{3x+1}{x-3} \le 3 \\ \dfrac{3x+1}{x-3} \ge -3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+1}{x-3} - 3 \le 0 \\ \dfrac{3x+1}{x-3} + 3 \ge 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{x-3} \le 0 \\ \dfrac{6x-8}{x-3} \ge 0 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ (6x-8)(x-3) \ge 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ \left(x-\dfrac{4}{3}\right)(x-3) \ge 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le \dfrac{4}{3} \end{array}\right. \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<3 \\ x \ge 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x<3 \\ x \le \dfrac{4}{3} \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left(x \le \dfrac{4}{3}\right).$$

Ответ: $I = \left(-\infty; \dfrac{4}{3}\right)$**.**

Обратимся к изучению комплекса теорем. Для каждого предложения вида $A \to B$ можно составить три предложения:

1) $B \to A$ (**обратное** данному предложению $A \to B$;

2) $\overline{A} \to \overline{B}$ (противоположное данному);

3) $\overline{B} \to \overline{A}$ (обратно-противоположное или противоположно-обратное).

Здесь A называется условием, а B – заключением теоремы $A \to B$. По известному нам закону контрапозиции $A \to B \cong \neg B \to \overline{A},$ то есть вместо прямой теоремы $A \to B$ можно доказать эквивалентную ей обратно-противоположную теорему $\overline{B} \to \overline{A}$.

Упражнения

1. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$ ([5], с. 207).

Ответ: $I = P^{+} = [-5; -1] \cup [1; +\infty)$.

2. Решить неравенство $\left|3x^2 - x - 1\right| > 1$ ([5], с. 179).

Ответ: $I = P^{+} = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

3. Решить уравнение $|x| + |x-1| = 1$.

Указание. Использовать метод интервалов.

Ответ: $I = P^{+} = [0; 1]$.

4. Решить уравнение $\left|x^2 - 9\right| + |x-2| = 5$ методом интервалов.

Ответ: $I = P^{+} = \left\{-3;\ 2;\ \frac{-1+\sqrt{65}}{2}\right\}$.

5. Решить уравнение $\lg\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| = 0$.

Ответ: $x_1 = -2;\ x_2 = 0$.

6. Решить уравнение $2^{\left|x^2-2x\right|} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $I = P^{+} = \left\{1-\sqrt{2};\ \ 1;\ \ 1+\sqrt{2}\right\}$.

6. Пользуясь законом контрапозиции, доказать следующие теоремы:
   а) Если mn – нечетное число, то m и n нечетны.
   б) Если значение выражения $\frac{2t}{1+t^2}$ – иррациональное число, то t – иррационально.
   в) Если предложение $A \to B$ является теоремой, то говорят, что A есть **достаточное условие** B, а B есть **необходимое условие** A.

Теорему «Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали перпендикулярны» сформулировать в виде необходимого и достаточного условия.

Упражнения на самостоятельную работу

1. Решить неравенство $\frac{1-\sqrt{8x-3}}{4x} \geq 0$.

Ответ: $I = P^{+} = \varnothing$.

2. Решить неравенство $\left|2\sqrt{2x-1} - 1\right| < 3$.

Ответ: $I = P^{+} = \left[\frac{1}{2};\ \frac{5}{2}\right)$.

3. Решить уравнение $\log_{|x-1|} 2 = 1$.

Ответ: $I = P^+ = \{3\}$, то есть $x = 3$.

4.Решить уравнение $\left|2^x - 1\right| + \left|2^x - 2\right| = 1$.

Указание. Использовать метод интервалов.

Ответ: $I = P^+ = \{0; 1\}$, т. е. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

5. Для данных теорем сформулировать обратную теорему и теорему, равносильную данной по закону контрапозиции:

а) Если параллелограмм – ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

б) Если каждое слагаемое суммы чётно, то сумма чётна.

в) В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

Какие из «обратных» теорем верны, а какие нет?

Занятие 7. Машина Тьюринга

Английский инженер и математик Алан Матисон Тьюринг (1912-1954) ввел понятие математической машины, моделирующей умственную деятельность человека и уточняющей интуитивное представление об алгоритмах.

Определение 15. Машина Тьюринга ([4], с.119) полностью определяется:

а) **внешним алфавитом** $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, где a_0 – символ пустой ячейки, $a_1 = 1$;

б) **алфавитом внутренних состояний** $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}$, где q_0 – состояние остановки, q_1 – начало работы;

в) **программой** (функциональной схемой), где выражения

$$T(i, j), i = 1, \dots, m; \qquad j = 0, 1, \dots, n,$$

вида $q_i a_j \to q_k a_\ell$, $\quad q_i a_j \to q_k a_\ell П$, $\quad q_i a_j \to q_k a_\ell Л$,

$0 \le k \le m$, $0 \le \ell \le n$, называют **командами.**

Машина имеет бесконечную в обе стороны ленту, разбитую на ячейки, в которых записано по одной букве из A.

В каждый момент времени (такт работы) машина находится в одном из состояний из Q и «обозревает» одну ячейку ленты.

По команде $q_i \; a_j \to q_k a_\ell \; X$, где $X = П$ или $X = Л$ или X отсутствует, означающей, что машина в состоянии q_i обозревает ячейку, в который записана буква a_j, машина переходит в состояние q_k, в обозреваемой ячейке a_j

заменяет буквой a_ℓ. Затем машина переходит к обозреванию ячейки справа при $X = П$ или слева при $X = Л$. Если же X в команде отсутствует, то машина продолжает «обозревать» ту же ячейку, куда записана буква a_ℓ.

На следующем такте работы машины выполняется следующая команда программы и так далее, до выполнения всей программы целиком.

Определение 16. Словом в алфавите A, или в алфавите Q, или в алфавите $A \cup Q$, называется любая последовательность букв соответствующего алфавита. Под $k-$**ой конфигурацией** понимается изображение ленты машины с информацией, сложившейся на ней к началу $k-$го такта (или слово в алфавите A, записанное на ленте к началу $k-$го такта), и с указанием того, какая ячейка обозревается в этот такт и в каком состоянии находится машина.

Имеют смысл лишь **конечные конфигурации,** когда лишь конечное число ячеек заполнено, остальные пусты.

Определение 17. Говорят, что непустое слово α в алфавите $A \setminus \{a_0\} = \{a_1, \dots, a_n\}$ воспринимается машиной **в стандартном положении,** если это слово записано в последовательных ячейках ленты, остальные ячейки пусты, а машина «обозревает» самую правую из тех ячеек, где записано слово α. Стандартное положение называется **начальным (заключительным),** если машина находится в состоянии q_1 (в состоянии q_0). Говорят, что слово α **перерабатывается** машиной в слово β, если от слова α в начальном стандартном положении машина переходит к слову β в заключительном стандартном положении после выполнения всей программы.

Определение 18. Пусть на множестве слов алфавита $\{a_1, a_2, \dots, a_\ell\}$ задана $k-$местная функция, значениями которой являются слова в том же алфавите.

Предположим, что имеется машина Тьюринга с алфавитом $A = \{a_0, \ a_1, \ a_2, \ \dots, \ a_n\}$ где $n \geq \ell$, которая любой набор из k слов, входящий в область определения функции, записанный на ленту последовательно с промежутками в одну ячейку между словами, перерабатывает в слово, являющееся значением функции на этом наборе, а на любом наборе из k слов, не входящих в область определения функции, машина работает бесконечно. Тогда говорят, что машина Тьюринга **вычисляет данную функцию,** а сама функция называется вычислимой по Тьюрингу или, короче, вычислимой.

Основная гипотеза (тезис Тьюринга-Чёрча, Алонзо Чёрч – американский математик и логик), связывающая понятие алгоритма и вычислимой функции, формулируется так: **всякая функция, для нахождения значения которой имеется некоторый алгоритм, является вычислимой,** то есть этот алгоритм может быть реализован, если должным образом подобрать машину Тьюринга.

Тезис Тьюринга-Чёрча является аксиомой, состоятельность которой подтверждена опытом работы математиков ([3], с. 231).

Упражнения

1. Применение машины Тьюринга к словам. Имеется машина Тьюринга с внешним алфавитом $A=\{a_0;1\}$, алфавитом внутренних состояний $Q=\{q_0;\ q_1\}$ и программой из двух команд $q_1a_0 \to q_01$, $q_11 \to q_11$ П. Определить, в какое слово переработает машина каждое из следующих слов, если она находится в начальном состоянии q_1 и «обозревает» указанную ячейку:

а) $1\,a_0\,11\,a_0\,a_0\,11$ («обозревается» ячейка 4, считая слева);

б) $11\,a_0\,111\,a_0 1$ («обозревается» ячейка 2);

в) $1\ a_0\ a_0\ 1\ 1\ 1$ («обозревается» ячейка 3).

Решение. а) Начальная конфигурация выглядит следующим образом:

				q_1					
	1	a_0	1	1	a_0	a_0	1	1	

После выполнения команды $q_11 \to q_11П$ конфигурация изменится:

					q_1				
	1	a_0	1	1	a_0	a_0	1	1	

После выполнения команды $q_1a_0 \to q_01$ конфигурация приобретает вид:

					q_0				
	1	a_0	1	1	1	a_0	1	1	

и машина останавливается.

Получилось слово: $1\,a_0 111\,a_0 11$.

Ответ: б) $111111\,a_0 1$; в) $1\,a_0\,1111$.

2. Конструирование машин Тьюринга.

а) Известно, что на ленте записано слово $\underbrace{11\ldots1}_{n}$, $n \geq 1$. Постройте машину Тьюринга с внешним алфавитом $\{a_0;\ 1\}$, которая отыскивала бы левую единицу этого слова и останавливалась, если в начальный момент головка машины «обозревает» одну из ячеек с буквой этого слова.

б) Постройте машину Тьюринга, которая бы к натуральному числу в десятичной системе счисления прибавляла единицу.

в) Дана конечная совокупность единиц, вписанных в ячейки, взятые подряд без пропусков. Постройте машину Тьюринга, которая записывала бы в десятичной системе число этих единиц.

Решение. б) $A=\{a_0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$. $Q=\{q_0; q_1\}$.

Начальное положение машины стандартное. Программу машины изобразим в виде функциональной схемы ([4],с. 128).

$Q \backslash A$	q_1
a_0	$q_0 1$
1	$q_0 1$
2	$q_0 3$
3	$q_0 4$
4	$q_0 5$
5	$q_0 6$
6	$q_0 7$
7	$q_0 8$
8	$q_0 9$
9	$q_1 0Л$
0	$q_0 1$

Ответы: а) Программа машины: $q_1 1 \to q_1 1Л$, $q_1 a_0 \to q_2 a_0 П$, $q_2 1 \to q_0 1$.

в) Функциональная схема программы имеет следующий вид $([4]$, с.$155)$:

$Q \backslash A$	q_1	q_2	q_3
0	$1q_3$	q_0	П
1	$2q_3$	q_0	П
2	$3q_3$	q_0	П
3	$4q_3$	q_0	П
4	$5q_3$	q_0	П

5	$6q_3$	q_0	П
6	$7q_3$	q_0	П
7	$8q_3$	q_0	П
8	$9q_3$	q_0	П
9	$0q_1$ Л	q_0	П
a_0	$1q_3$	q_0	$a_0\, q_2$ Л
1	$1q_1$ Л	$a_0\, q_1$ Л	П

3. Вычислимые по Тьюрингу функции.

Докажите, что следующие функции вычислимы по Тьюрингу, для чего постройте машины Тьюринга, вычисляющие их:

а) $f(x, y) = x + y$;

Решение. Искомая машина Тьюринга определяется следующей функциональной схемой ([4],с. 123):

A \ Q	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3\, 1$ П	$q_1\, a_0$ Л
1	$q_2\, a_0$ Л	$q_2 1$Л	$q_3\, 1$ П
*	$q_0\ a_0$	$q_2 *$ Л	$q_3 *$ П

Покажите, что следующие слова при начальном стандартном состоянии (q_1 и «обозревает» крайнюю правую ячейку из тех, где записано слово) переводятся машиной в слова:

1) $111*111$ в 111111;

2) $1111*11$ в 111111;

3) $111*1$ в 1111.

б) $f(x, y) = x - y$.

Ответ: Машина Тьюринга определяется следующей функциональной схемой ([4], с. 124):

A \ Q	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	$q_1 a_0$ П	$q_3\ a_0$ П	$q_3 a_0$ Л	$q_1\ a_0$ Л
1	$q_2 a_0$ Л	$q_2 1$Л	$q_4\ a_0$ П	q_4 1П
*	$q_0\ a_0$	q_3* Л		q_4 * П

Убедитесь, что следующие слова машина при начальном стандартном состоянии переведет в слова:

1) $111*11$ в 1;

2) $11*11$ в a_0;

3) $1111*1$ в 111.

в) Машина Тьюринга имеет следующую функциональную схему:

A \ Q	q_1	q_2	q_3
0	$q_2 1$Л	q_3 1 П	q_0 0
1	q_1 1 П	$q_2 1$Л	q_0 1

Найти формульное выражение функции $f(x)$, вычисляемое этой машиной.

Ответ: $f(x) = x + 2$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A_0 = \{a_0;\ 1\}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0;\ q_1;\ q_2;\ q_3;\ q_4;\ q_5;\ q_6;\ q_7\}$ и программой:

Q / A	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
a_0	$q_4\ a_0$ П	$q_6\ a_0$ П	$q_6\ a_0$ П	$q_0\ 1$	$q_4\ a_0$ П	$q_0\ a_0$	$q_6\ a_0$ П
1	$q_2 1$Л	$q_3 1$Л	$q_1\ 1$ Л	$q_5\ a_0$	$q_5\ a_0$	$q_7\ a_0$	$q_7\ a_0$

В какие слова переведёт машина из начального стандартного положения следующие слова:

а) 11111; б) 111111; 1111 ;

Ответ: а) a_0; б) 1; в) a_0.

2. Сконструируйте машину Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0;\ 1\}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0;\ q_1;\ q_3;\ q_3\}$, которая каждое слово в алфавите $A_1 = \{1\}$ перерабатывает в пустое слово, исходя из стандартного начального состояния.

Ответ: Программа искомой машины может иметь вид: $q_1\ a_0 \to q_2\ a_0$ П, $q_2\ 1 \to q_2 1$ П, $q_2 a_0 \to q_3 a_0$ Л, $q_3 1 \to q_3 a_0$ Л, $q_3 a_0 \to q_0 a_0$.

Занятие 8. Вычислительные алгоритмы

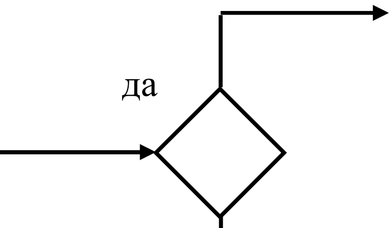
При решении задач на ЭВМ проходятся следующие этапы: создание математической модели, разработка алгоритма, написание и отладка программы, выполнение расчетов и анализ результатов.

Алгоритмом называется последовательность шагов, действий, операций, ведущих от исходных данных к результату.

Разделение арифметических и логических этапов в процессе составления алгоритма можно производить с помощью блок-схем.

Блок-схема алгоритма – это графическое изображение структуры алгоритма, где под блоком понимается арифметический или логический этап алгоритма.

Блок-схема содержит блоки общей обработки в виде прямоугольника с одним входом и одним выходом и элементы принятия решений (логические элементы) в форме ромба с одним входом и двумя выходами (соответственно, рис. 1 и рис.2).



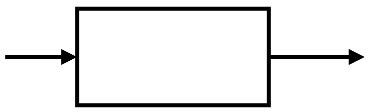


Рис. 1
Элемент общей
обработки

Рис.2
Элемент принятия решений

Пример 1. ([7], с. 97). Блок-схема вычисления функции

$$y = \begin{cases} \ln x, & \text{если} \quad x > 1, \\ 1 - x, & \text{если} \quad x \le 1, \ \text{имеет вид} \end{cases} \quad \text{(см. рис. 3):}$$

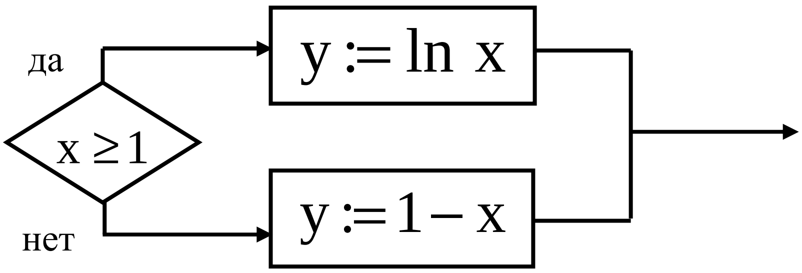


Рис. 3. Вычисление функции

При словесной записи алгоритма логическому элементу соответствует предписание условного перехода: если p идти к N, где $p -$ проверяемое условие, $N -$ номер предписания, к которому следует переходить, когда p истинно.

Если p ложно, то происходит переход к следующему после предписания условного перехода предложению (в порядке возрастания номеров).

Пример 2. ([7], с. 107). Алгоритм решения уравнения $a\,x = b$ в словесной записи имеет вид:

1 чтение $a,\ b$
2 если $a = 0$ идти к 5
3 $x := b/a$
4 запись x; идти к 8
5 если $b = 0$ идти к 7
6 запись «решений нет»; идти к 8
7 запись «$x -$любое»; идти к 8
8 конец.

В этом примере несколько раз использовано предписание безусловного перехода «идти к N». Если при решении задачи словесное описание алгоритма её решения содержит повторяющуюся несколько раз группу предписаний, то процесс вычисления носит **циклический характер.**

Пример 3. ([7], с. 111). Блок-схема алгоритма Евклидова нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух целых положительных чисел a и b имеет вид (см. рис. 4):

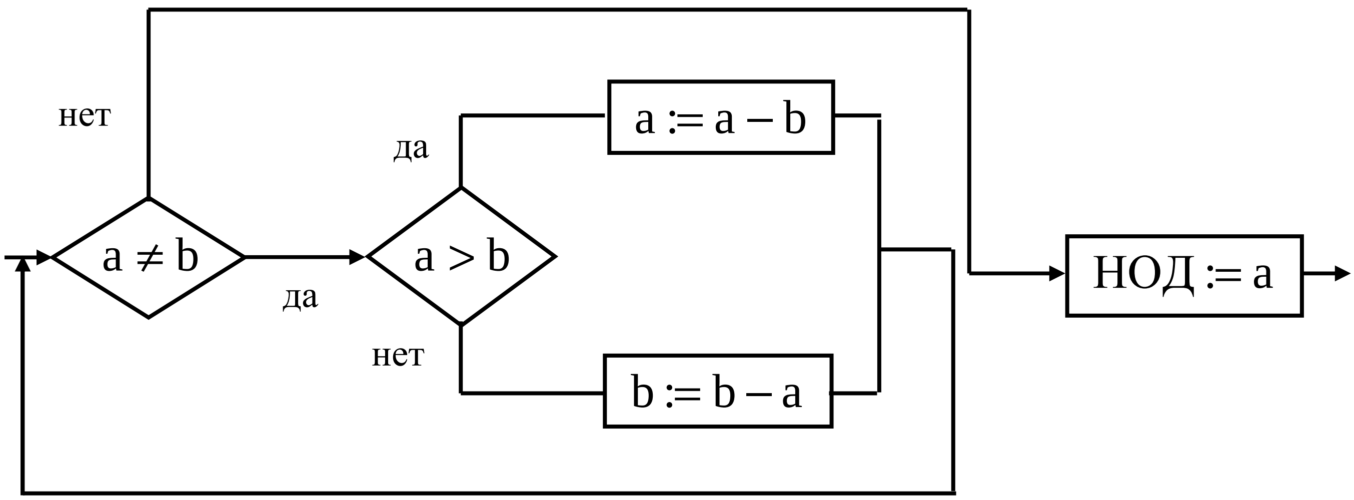


Рис. 4. Алгоритм Эвклида нахождения НОД

В процессе составления алгоритмов решения различных задач используют **базовые алгоритмические структуры: развилка, цикл и следование.**

Развилка бывает: **полная** (рис. 5 а) и **неполная** (рис. 5 б)

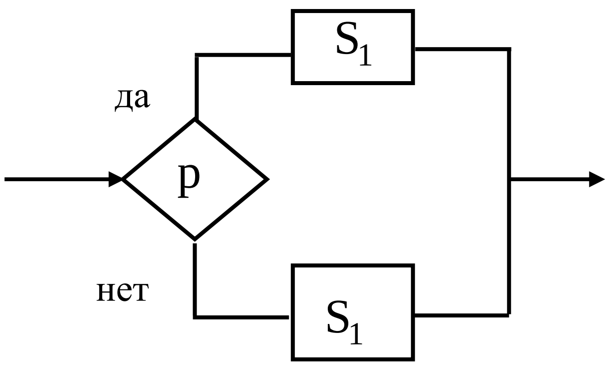


Рис. 5 а. Полная развилка

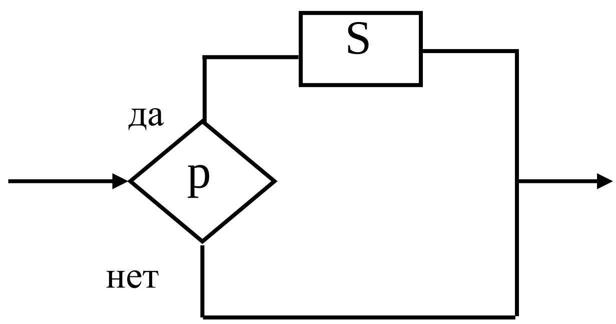
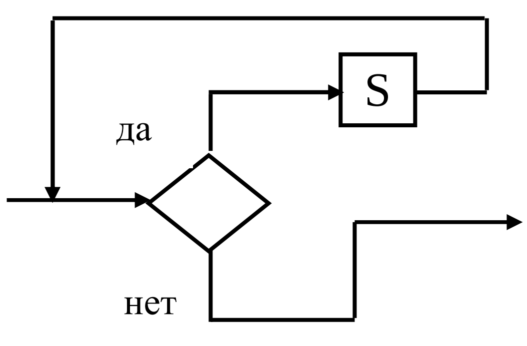
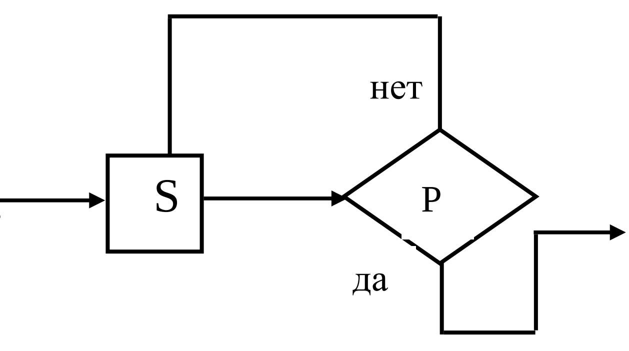


Рис. 5 б. Неполная развилка

Циклы бывают: цикл-пока (рис.6 а) и цикл-до (рис. 6 б).





p p

Рис. 6 а. Цикл-ПОКА Рис. 6 б. Цикл-ДО

В случае ЦИКЛА-ПОКА тело цикла S исполняется до тех пор, **пока** условие p истинно; в случае ЦИКЛА-ДО тело цикла S исполняется до того, как условие p станет истинным.

Наконец, структура **следование** имеет вид (см. рис. 7):

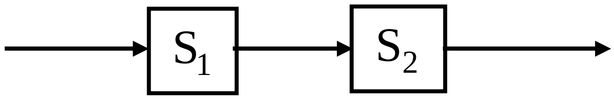
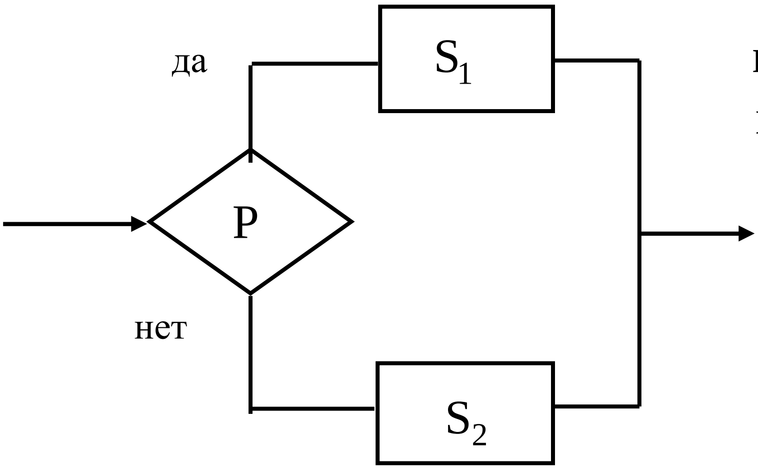


Рис. 7. Следование

Для записи базовых структур используется специальная нотация (см. табл. 1): ([7], табл. 40, с. 146-147).

Алгоритмический язык Бейсик (BASIC – «Beqinners $A\ell\ell -$Purpose Symbolic Instruction Code), построенный по принципу построчной нотации, позволяет представить базовые структуры алгоритмов следующим образом:

Полная развилка



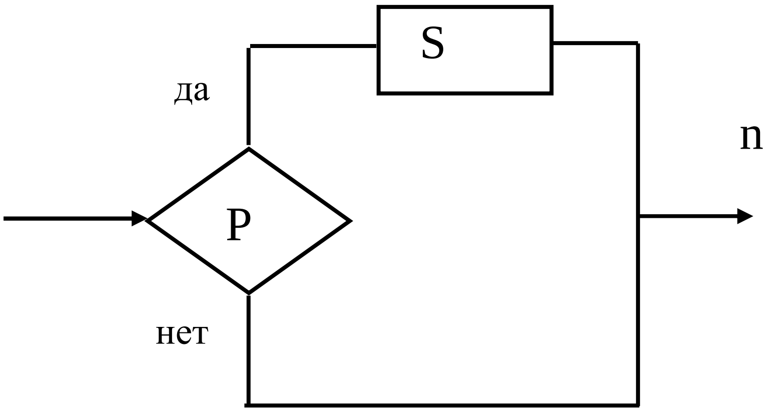
n **IF P THEN** $n+20$

$n+10$ S_2 : GOTO $n+30$

$n+20$ S_1

$n+30$ Выход

Неполная развилка

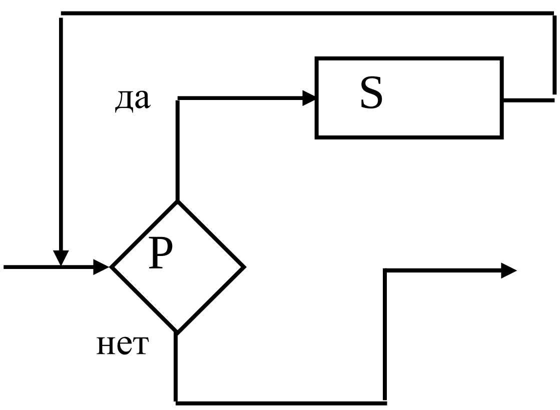


n **IF P THEN** $n+20$

$n+10$ S

$n+20$ Выход

ЦИКЛ-ПОКА

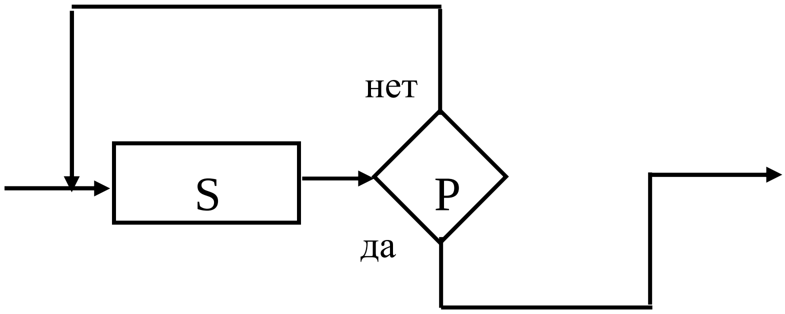


n **IF P THEN** $n+20$

$n+10$ S : GOTO n

$n+2$ Выход

ЦИКЛ-ДО



$n \quad S$

$n+10 \quad \text{IF } \overline{P} \text{ THEN } n$

$n+20$ Выход

Здесь еще раз (из методических соображений) приведены блок-схемы базовых алгоритмических структур.

Пример 4. ([8], с. 112). Составить программу решения уравнения $ax = b$ для произвольных значений числовых параметров a и b.

Составим программу с использованием операторов DATA и READ для трех пар значений a и b $(a = b = 0;\ a = 0,\ b = 4;\ a = 2,\ b = 3)$, иллюстрирующих работу алгоритма в каждом из трех логически возможных случаев:

```
1Ø  REM  УРАВНЕНИЕ  AX = B
2Ø  READ   A, B
3Ø  IF  A= Ø  THEN  7 Ø
4Ø  LET  X = B / A
5Ø  PRINT  «РЕШЕНИЕ  X = "; X
6Ø  GOTO  11Ø
7Ø  IF  B =Ø  THEN  1Ø
8Ø  PRINT  «РЕШЕНИЙ  НЕТ»
9Ø  GOTO  11Ø
10 Ø  PRINT  «РЕШЕНИЙ  БЕСК. МН.»
11Ø  GOTO  2Ø
12 Ø  DATA  Ø,  Ø,  Ø,  4,  2,  3
13 Ø  END
```

Пример 5 ([8], с.115). Составить программу нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух целых положительных чисел A и B.

Программа использует структуру ЦИКЛ-ПОКА (см. пример 3) и имеет вид:

```
1Ø  REM   НОД (A, B)
2Ø  INP∪T    A, B
3Ø  X = A;   Y = B
4Ø   IF   X = Y   THEN 8Ø
5Ø  IF   X > Y   THEN 7Ø
```

```
6Ø  Y = Y − X :GOTO 4Ø
7Ø  X = X − Y :GOTO 4Ø
8Ø  PRINT «НОД» ( "; A; ", "; B; ") = " ; X
9Ø  GOTO 2Ø
```

Часто один и тот же алгоритм можно построить с использованием разных базовых структур.

Пример 6. ([8], с.116-117). Составить программу вычисления (генерирования) 100 членов последовательности

$$a_k = \frac{k^2}{k^3+1} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 100).$$

Способ 1. Используя структуру ЦИКЛ-ПОКА по блок-схеме (см. рис. 8),

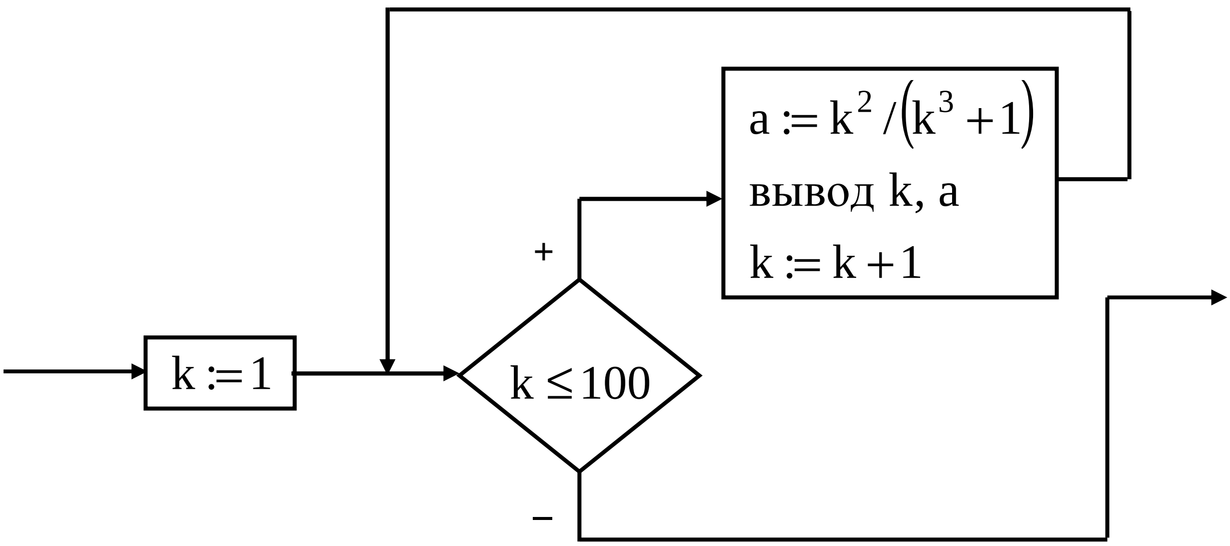


Рис. 8. Генерирование членов последовательности с ЦИКЛОМ-ПОКА

Получаем программу:

```
1Ø  REM  A = K ↑ 2/(K ↑ 3+1)
2Ø  REM  ЦИКЛ-ПОКА
3Ø  K = 1
4Ø  IF K > 1ØØ THEN 9Ø
5Ø  A = K ↑ 2/(K ↑ 3+1)
6Ø  PRINT K; A
7Ø  K = K + 1
8Ø  GOTO 4Ø
9Ø  END
```

Способ 2. Используя структуру ЦИКЛ-ДО по блок-схеме (см. рис. 9),

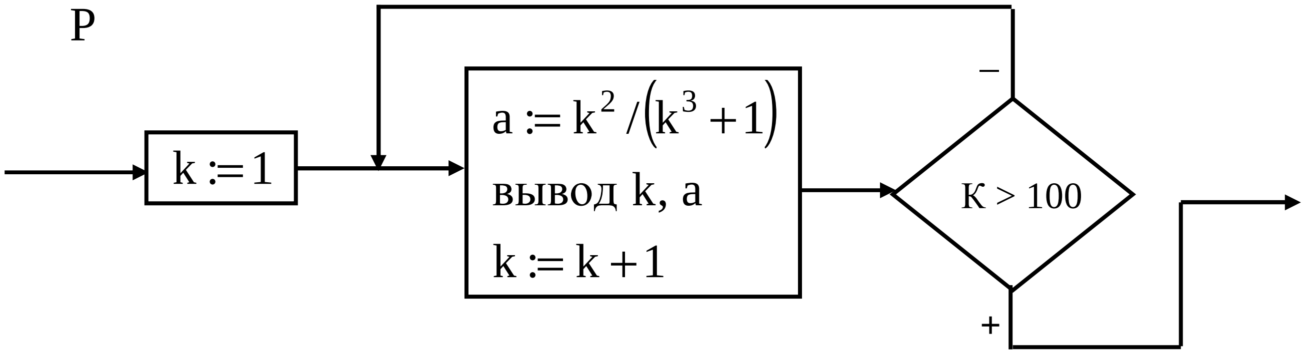


Рис. 9. Генерирование членов последовательности с ЦИКЛОМ-ДО

Получим программу:

```
1Ø  REM   A = K ↑ 2/(K ↑ 3+1)
2Ø  REM  ЦИКЛ-ДО
3Ø  K = 1
4Ø  A = K ↑ 2/(K ↑ 3+1)
5Ø  PRINT  " A( "; K;  ")= "; A
6Ø  K = K + 1
8Ø  IF  K < 1ØØ  THEN  4Ø
9Ø  END
```

В заключение рассмотрим особый случай, когда условием P в базовой структуре ЦИКЛ-ДО является неравенство $\alpha > \beta$, а параметр цикла α изменяется от α_0 по закону $\alpha := \alpha + h$, где h – заданный шаг (разность арифметической прогрессии).

Для программирования таких циклов в Бейсике используются операторы FOR и NEXT (начало цикла и конец цикла), а также оператор STEP (шаг цикла). Если шаг цикла равен +1, то указание STEP 1 может опускаться.

Пример 7. Программа генерирования членов последовательности

$$a_k = \frac{k^2}{k^3+1} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 100)$$

имеет вид ([8], с. 121).

```
1Ø  REM   A = K ↑ 2/(K ↑ 3+1)
2Ø  REM  FOR-NEXT
```

```
3Ø  FOR K = 1  TO  1ØØ
4Ø  A = K ↑ 2/(K ↑ 3+1)
5Ø  PRINT " A( '; K;  ")= "; A
6Ø  NEXT K
```

Здесь тело цикла составляют строки 4Ø и 5Ø, параметром цикла является переменная K, и выражение STEP в строке 3Ø опущено.

Упражнения

1. Составить блок-схему и программу на Бейсике решения неравенства $a\,x > b,$ где a и b – произвольные действительные числа.

Указание. См. рис. 53 и пример 4.3.2. из [7], с. 166-167.

2. Составить программу вычисления суммы всех членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{k}{x^{k+1}}$, не меньших по абсолютной величине заданного числа ε.

Указание. См. рис. 55 и пример 4.4.3 из [7], с. 171.

3. Составить программу табулирования функции $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2+1}$ на отрезке [0; 1] с шагом 0,05.

Указание. См. пример 4.5.5 из [8],с. 121.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Составить блок-схему и программу на Бейсике решения квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$ в области действительных чисел.

Указание. См. пример 3.4.2. из [9], с. 131.

2. Составить блок-схему и программу на Бейсике вычисления факториала $n!,$ где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n.$

Указание. См. пример 3.4.3. из [9], с. 131-132.

3. Составить блок-схему и программу на Бейсике вычисления членов последовательности $a_k = \dfrac{3k}{k^2+2} \; (k = 1, 2, \ldots, 40).$

4. Даны три числа $a, b, c.$ Составить блок-схему алгоритма, позволяющего определить, имеются ли среди них хотя бы одна пара взаимно обратных чисел.

Указание. См. рис. 49 и рис. 50 из [9], с. 120-121.

5. Дан массив $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Требуется определить, имеется ли в этом массиве хотя бы одна пара взаимно обратных чисел.

Указание. См. пример 3.3.9. и рис. 51-53 из [9], с. 121-122.

6. Составить блок-схему поиска максимального элемента в массиве $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Указание. См. пример 3.3.7. и рис. 27 из [8], с. 91.

7. Составить блок-схему и программу на Бейсике решения задачи: имеется ли среди трех чисел a, b, c хотя бы одна пара равных между собой чисел.

8. Составить блок-схему и программу на Бейсике решения задачи: подсчитать количество отрицательных чисел среди чисел a, b и c.

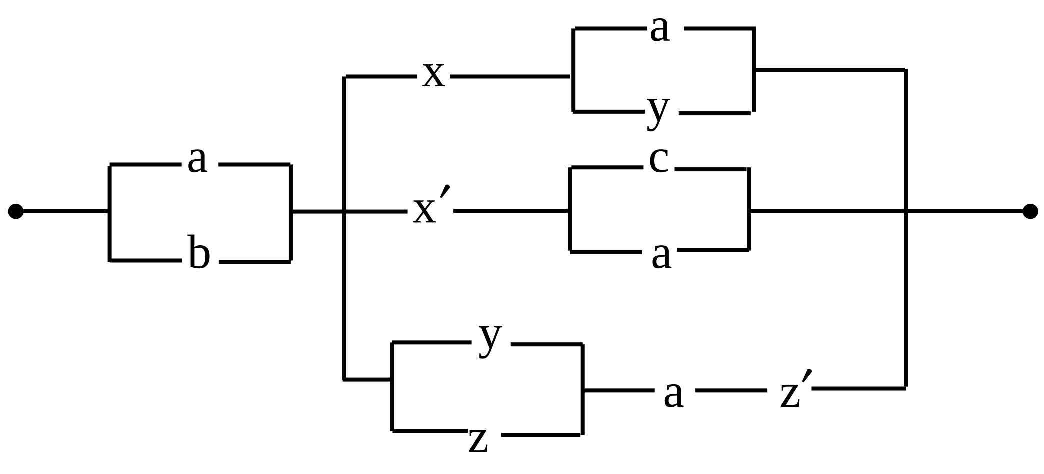
Занятие 9. Контрольные мероприятия. Лабораторная работа.

1. Составив таблицу истинности, выяснить, равносильны ли следующие формулы алгебры высказываний:

$$F(X,\ Y,\ Z) = ((X \to \neg Y) \vee Z) \wedge (\neg(X \wedge Y) \leftrightarrow \neg Z),$$

$$G(X,\ Y,\ Z) = (X \wedge Y \wedge Z) \vee ((X \to \neg Y) \wedge \neg Z).$$

2. Упростить схему:



Здесь $z' = \overline{z} = \neg z$ (отрицание z).

3. Разложить предикат на простейшие функции и найти его множество истинности

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} < 2 \quad ([5],\ с.\ 172\text{-}173).$$

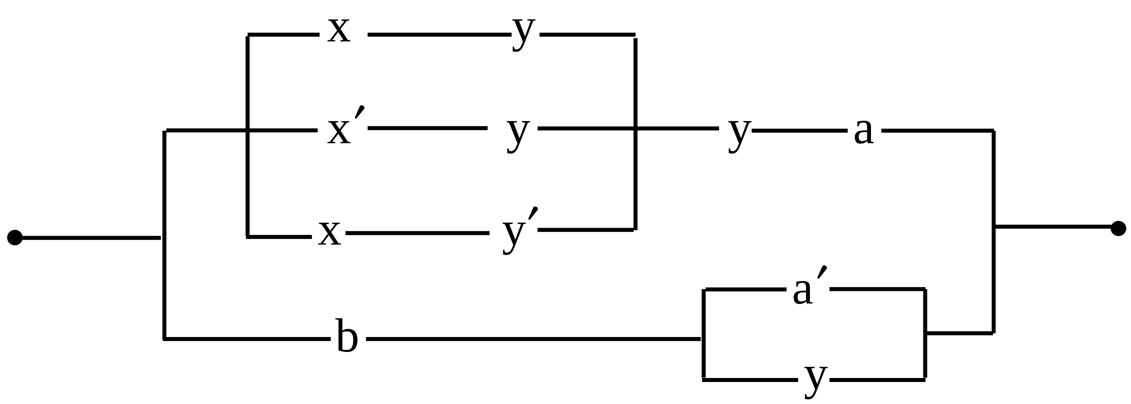
Вариант № 2

(Формулировка заданий в этом и последующих вариантах аналогична таковой варианта № 1)

1. $F(X,\ Y,\ Z) = (\neg(X \leftrightarrow (Y \vee \neg Z))) \wedge \neg X,$

$G(X,\ Y,\ Z) = X \vee (Y \to Z).$

2.



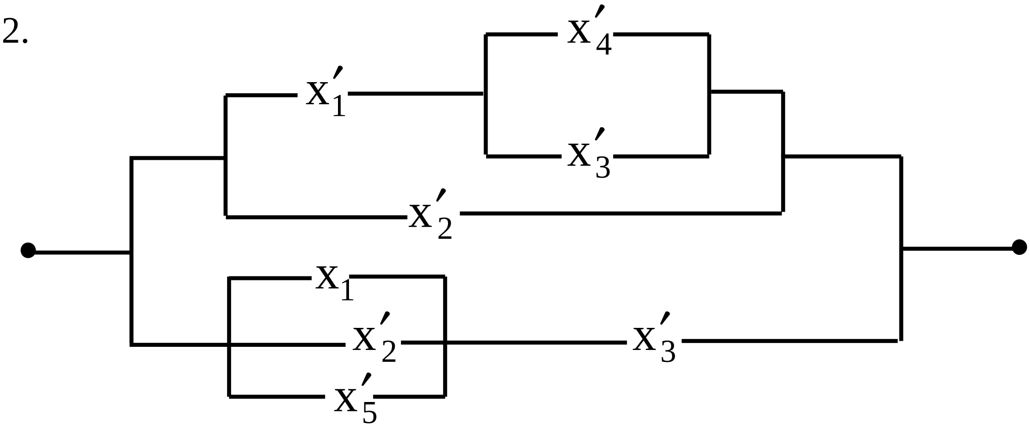
3. $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}} > -2$ ([5], с.172).

Вариант № 3

1. $F(X,\ Y,\ Z) = \neg(\neg Y \vee \neg Z) \leftrightarrow X$

$G(X,\ Y,\ Z) = (X \wedge Y \wedge Z) \vee \neg X \vee (X \wedge \neg Y)$

2.



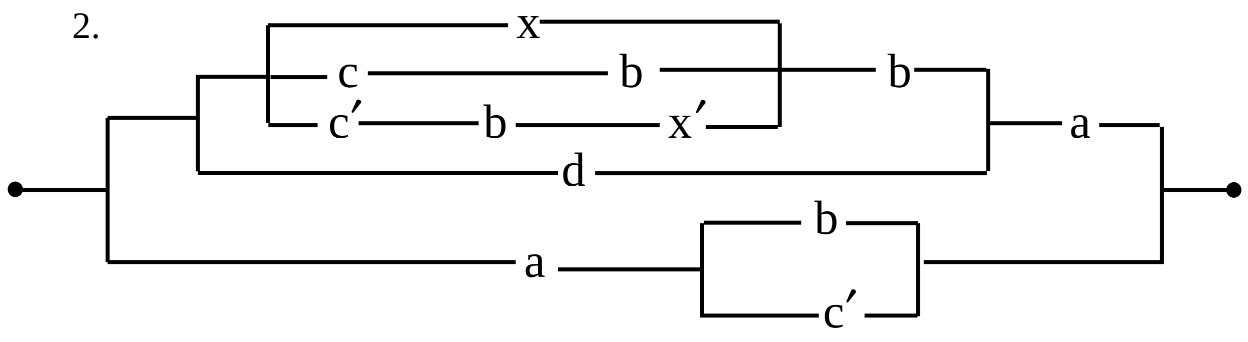
3. $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} > 2$ ([5], с.171).

Вариант № 4

1. $F(X,\ Y,\ Z) = \neg X \leftrightarrow ((Y \vee \neg Z) \to \neg(X \vee \neg Y))$

$G(X,\ Y,\ Z) = ((\neg X \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Z)) \wedge \neg Y$

2.



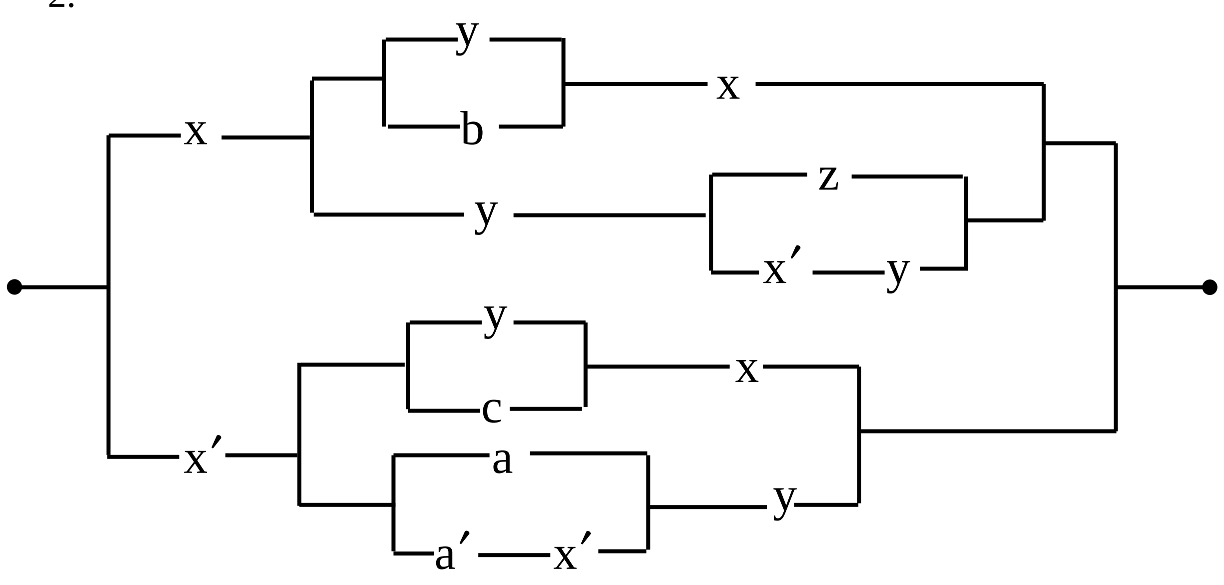
3. $\sqrt{(x+2)\,(x-5)} > 8 - x$ ([5], с.174-175).

Вариант 5

1. $F(X,\ Y,\ Z) = (X \wedge (Y \to Z)) \vee \neg(X \vee \neg Z)$

$G(X,\ Y,\ Z) = \neg(X \to Z) \vee Y$

2.



3. $\sqrt{6-x} < 3x - 4$ ([5], с.175).

Типовой расчет

Вариант № 1

1. Равносильными преобразованиями привести следующую формулу алгебры предикатов к предваренной нормальной форме ([4], с. 142).

$$(\forall x)[P(x) \to (\forall y)(Q(x, y) \to \neg(\forall z)R(y, z))]$$

2. Машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1\}$ определяется следующей программой ([4], с. 125).

A \ Q	q_1	q_2	q_3
a_0	$q_2 a_0 П$	$q_2 a_0 П$	$q_0 a_0$
1	$q_1 1П$	$q_3 1П$	$q_3 1П$

Остановится ли когда-нибудь эта машина, если она начнет перерабатывать данное слово $111a_0 a_0 1$ (в начальный момент в состоянии q_1 машина «обозревает» ячейку, в которой записана самая левая буква данного слова).

Ответ: Машина остановится; в результате получится исходное слово.

3. Построив таблицы значений, выяснить, равны ли следующие булевы функции:

$$f(x, y, z) = ((x \vee y) \vee z) \to ((x \vee y)(x \vee z))$$

$$q(x, y, z) = x \leftrightarrow z \qquad ([4],\ с.\ 67).$$

Ответ: не равны.

Вариант № 2

(Формулировка заданий в этом и последующих вариантах аналогична таковой в варианте № 1)

1. $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)(P(x, y, z, u)) \wedge$

$\wedge (\forall x)(\exists y)(\forall z) \wedge (\exists u)(Q(x, y, z, u)).$

2. Данное слов $11a_0\ a_0 11a_0 1.$

Ответ: Машина остановится; получится исходное слово.

3. $f(x,\ y,\ z) = (x' \vee y)(y \vee z);$

$q(x,\ y,\ z) = (x \vee y \vee z)(x' \vee y \vee z)(x' \vee y \vee z').$

Ответ: равны.

Вариант № 3

1. $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)(P(x,\ y,\ z,\ u)) \to$

$\to (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)(Q(x,\ y,\ z,\ u)).$

2. Данное слово $111111.$

Ответ: Машина неограниченно движется вправо.

3. $f(x,\ y,\ z) = (x \to y) \to z;$

$q(x,\ y,\ z) = x \to (y \to z).$

Ответ: не равны.

Вариант № 4

1. $R(x,\ y) \to (\exists y)(P(y) \to ((\exists x)(P(x)) \to Q(y))).$

2. Данное слово $1\,a_0\ a_0\ 11\,a_0 1.$

3. $f(x,\ y) = ((x + y) \to (x \vee y))((x' \to y) \to (x + y));$

$q(x,\ y) = x|y.$

Ответ: равны.

Вариант № 5

1. $(\forall x)(P(x) \to Q(x,\ y)) \to ((\exists y)(P(y)) \to (\exists z)(Q(y,\ z))).$

2. Данное слово $1\,a_0 111\,a_0\,a_0 11.$

3. $f(x,\ y,\ z) = ((x \vee y')z) \vee (x z') \vee (z(y \vee z'));$

$q(x,\ y,\ z) = x \vee z.$

Ответ: равны.

Вариант 6

1. $\neg(\forall x)(F(x,\ y) \wedge G(z))$

2. Данное слово $a_0 11 a_0 a_0 11$

3. $f(x,\ y,\ z) = (x \vee y)\ (x' \vee z)$
   $q(x, y, z) = x' y \vee z x.$

Ответ: равны.

Вариант № 7

1. $\neg(\exists\, x(F(x,\ y) \vee G\ (z)))$

2. Данное слово $1 a_0 1 a_0 1\ a_0 11$

3. $f(x,\ y,\ z) = ((x \to y) \to x) \to y;$

   $q(x,\ y,\ z) = x \to y.$

Ответ: равны.

Вариант № 8

1. $(\forall x)\ (F(x, y)) \wedge (\forall x)(G(x, y))$

2. Данное слово $11\,1 a_0\ a_0\ \ a_0 11$

3. $f(x, y, z) = x' y z \vee x\, y' z \vee x\, y\, z$

   $q(x,\ y,\ z) = (x \vee y) \cdot z$

Ответ: равны.

Вариант № 9

1. $(\exists x)\ (F(x, y)) \vee (\exists x)(G(x, z))$

2. Данное слово $a_0 1\, a_0 1\ a_0 1\, a_0 1$

3. $f(x,y,z) = x\,y' \vee x\,z' \vee x'\,y\,z'$

$q(x,\ y,\ z) = x\,y' \vee y\,z'.$

Ответ: равны.

Вариант № 10

1. $H(z) \wedge (\exists x)\,(F(x,y))$

2. Данное слово $a_0 11\, a_0 111$

3. $f(x,y,z,t) = x'\,y\,z \vee x'\,y'\,z \vee x \vee x'\,y'\,z' \vee t$

$q(x,\ y,\ z,t) = x \vee y' \vee z \vee t.$

Ответ: равны.

Вариант № 11

1. $H(y) \vee (\forall x)\,(F(x,z))$

2. Данное слово $11 a_0 11\, a_0\, a_0$

3. $f(x,y,z,t) = x\,y\,z \vee x\,y\,z' \vee x\,y'\,z\,t \vee x\,y\,z\,t' \vee x\,y\,z\,t$

$q(x,\ y,\ z,t) = x(y \vee z\,t).$

Ответ: равны.

Вариант № 12

1. $H(y) \to (\exists x)\,(F(x,y))$

2. Данное слово $1\, a_0 11\, a_0\, a_0 11$

3. $f(x,y,z,t) = x\,y\,(z\,t' \vee y' \vee x) \vee x'(z \vee t)\,(x \vee y)$

$q(x,\ y,\ z,t) = y(x \vee z' \vee t).$

Ответ: равны.

Вариант № 13

1. $H(y) \to (\forall x)(F(x,z))$

2. Данное слово $1111\, a_0\, a_0\, a_0$

3. $f(x,y,z,t) = xyz \vee yzt \vee xy't' \vee x'yzt' \vee xy't'$

$q(x,\ y,\ z,t) = yz \vee y't'.$

Ответ: равны.

Вариант № 14

1. $H(z) \to (\exists x)(F(x,y))$

2. Данное слово $111\, a_0 1\, a_0\, a_0\, 1$

3. $f(x,y,z,t,s) = xt(x' \vee y's \vee t) \vee t'(y \vee s')(x \vee z) \vee xtt'$

$q(x,\ y,\ z,t,s) = s(y \vee z \vee s').$

Ответ: равны.

Вариант № 15

1. $(\exists x)(F(x,y)) \to H(z)$

2. Данное слово $a_0 1\, a_0 1\, a_0\, a_0 11$

3. $f(x,y,z) = [(x \to y) \to (y \to x)] \wedge z$

$q(x,\ y,\ z) = (y \to x) \wedge z.$

Ответ: равны.

Вариант № 16

1. $\neg(\exists x)(P(x,y))$

2. Данное слово $a_0 1\, a_0 11\, a_0\, a_0 1$

3. $f(x,\ y) = (x' \to y) \to (y' \to x)$

$q(x, y) = x \vee y$

Ответ: равны.

Вариант № 17

1. $\neg(\forall x)\,(P(x, y))$

2. Данное слово $a_0 11\, a_0 111$

3. $f(x,\ y, z) = x\,y\,z' \vee x'\,y\,z \vee x'\,y\,z' \vee x\,y\,z \vee x\,y'\,z \vee x'\,y'\,z$

$q(x, z) = y \vee z$

Ответ: равны.

Вариант № 18

1. $(\forall x)\,(P(x, y)) \wedge (\forall x)(Q(x,\ z))$

2. Данное слово $1\, a_0 1\ a_0 1 a_0 1 a_0$

3. $f(x,\ y) = x \to (y \to x)$

$q(x) = x \vee \overline{x}$

Ответ: равны.

Вариант № 19

1. $(\exists x)\,(P(x, y)) \vee (\exists x)(Q(x,\ z))$

2. Данное слово $a_0 1\ a_0 1\, a_0 1 a_0 1$

3. $f(x,\ y, z) = (y \vee x)(x' \vee z)z$

$q(x, y, z) = x'\,y \vee x\,z$

Ответ: равны.

Вариант № 20

1. $H(z) \wedge (\exists x)(P(x,y))$

2. Данное слово $11\ a_0 a_0\ a_0 11 a_0\ a_0$

3. Решить булево уравнение: $x \vee y = 0$

Ответ: $x = y = 0.$

Вариант № 21

1. $H(z) \wedge (\forall x)(P(x,y))$

2. Данное слово $a_0 a_0 11 a_0\ a_0 11$

3. Решить булево уравнение: $x\,y = 1.$

Ответ: $x = y = 1.$

Вариант № 22

1. $H(z) \vee (\forall x)(P(x,y))$

2. Данное слово $1a_0 11a_0 111$

3. Решить булево уравнение: $(1 \to x) \to y = 0.$

Ответ: $x = 1;\ y = 0.$

Вариант № 23

1. $H(z) \to (\exists x)(P(x,y))$

2. Данное слово $1a_0 111a_0\ a_0$

3. Решить булево уравнение: $x \vee y = x'.$

Ответ: $x = 0;\ y = 1.$

Вариант № 24

1. $H(z) \to (\forall x)(P(x,y))$

2. Данное слово $a_0 1 a_0 11 a_0 a_0 1$

3. Решить булево уравнение: $x \to y = y'.$

Ответ: $x = y = 0.$

Вариант № 25

1. $(P(y) \wedge Q(x)) \to \neg(\forall y)(R(y,z))$

2. Данное слово $a_0 1 a_0 1\, a_0 111$

3. Решить булево уравнение: $x \leftrightarrow y = x \vee y.$

Ответ: $x = y = 1.$

Лабораторная работа
Разработка алгоритмов с ветвлениями и циклами для обработки числовых и литерных величин

Типы заданий ([10], с. 32-41):

1) алгоритм с ветвлениями для обработки числовых величин;
2) алгоритм с ветвлениями для обработки литерных величин;
3) алгоритмы с циклами для обработки числовых величин;
4) алгоритмы с циклами для обработки литерных величин.

Выполнение лабораторной работы сопровождается устным и письменным отчетом.

Варианты заданий типа 1-4 см. в [10], но в работе [10] имеются также задания по разработке алгоритмов обработки графической информации, прямоугольных таблиц (матриц, массивов) и алгоритмов, включающих обращение к вспомогательным алгоритмам, что может быть использовано в самостоятельной внеаудиторной работе студентов.

Библиографический список

1. Яглом И.М. Необыкновенная алгебра. М.: Наука, 1968. 71с.
2. Никольская И.Л. Математическая логика. М.: Высшая школа, 1981. 127с.
3. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. Саратов: Изд-во Сарат. Ун-та, 1991. 256 с.
4. Игошин В.И. Задачник-практикум по математической логике. М.: Просвещение, 1986. 159 с.
5. Шарова Л.И. Уравнения и неравенства. Пособие для подготовительных отделений. Киев: Вища школа, 1981. 280 с.
6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теорем алгоритмов. М.: Наука, 1984. 224 с.
7. Лапчик М.П. Вычисления. Алгоритмизация. Программирование. М.: Просвещение, 1988. 208 с.
8. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Техника вычислений и алгоритмизация. М.: Просвещение, 1987. 160 с.
9. Лапчик М.П. Вычислительная техника и программирование. М.: Просвещение. 1987. 239 с.
10. Основы информатики и вычислительной техники. Ч. 1. Методические рекомендации по лабораторному практикуму. Сост. В.А.Буцик. Омск, ОГПИ,1990. 48 с.

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01
Подписано в печать Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. Уч.-изд. л.
Тираж 100 экз. Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ