Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

Транспортная задача. Матричные игры.

Методические указания для студентов экономических специальностей

Омск -2007

Составители: Соколовский Мирон Наумович, доцент

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

Редактор
ИД___________ от ___________
Подписано в печать . Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .
Тираж 100 экз. Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

Транспортная задача

Транспортная задача (ТЗ) является примером экономической задачи, приводящей к модели линейного программирования (ЛП), и формулируется следующим образом.

Имеется m пунктов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ производства однородного продукта (например, угля), объем производства в пункте A_i составляет a_i единиц. Продукт потребляется в n пунктах $B_1, B_2, \ldots, B_n$, потребность в пункте B_j составляет в b_j единиц. Предполагается , что суммарный объём производства совпадает с суммарной потребностью

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = D \qquad (1)$$

(условие баланса). Стоимость перевозки одной единицы продукта из A_i в B_j равна c_{ij}, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n.$ Требуется составить план перевозок из пунктов A_i в пункты B_j так, чтобы вывезти из каждого пункта A_i весь запас продукта, полностью удовлетворить потребность в каждом из пунктов B_j и минимизировать транспортные расходы. Для наглядности представим условия ТЗ в виде таблицы, строкам которой соответствуют пункты производства A_i, а столбцам – пункты потребления B_j:

Таблица 1

c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	… …	c_{1j} x_{1j}	… …	c_{1n} x_{1n}	a_1
c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	… …	c_{2j} x_{2j}	… …	c_{2n} x_{2n}	a_2
… …	… …	… …	… …	… …	… …	…
c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	… …	c_{ij} x_{ij}	… …	c_{in} x_{in}	a_i
… …	… …	… …	… …	… …	… …	…
c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	… …	c_{mj} x_{mj}	… …	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_1	b_2	… …	b_j	… …	b_n	

В клетке $(i,\ j)$ таблицы 1 записаны соответствующая стоимость перевозки c_{ij} (правый верхний угол) и переменная x_{ij} (в центре клетки), смысл

x_{ij} - планируемый объем перевозки из A_i в B_j. Справа от каждой строки и под каждым столбцом записаны соответствующие запасы a_i и потребности b_j.

План ТЗ представляет собой матрицу $X=\{x_{ij}\}$ размера $m \times n$. При плане $X=\{x_{ij}\}$ расходы на перевозку из A_i в B_j равны $c_{ij}x_{ij}$, а общая стоимость всех перевозок – сумме этих выражений по всем клеткам таблицы 1. Требования вывоза всех запасов и удовлетворения всех потребностей означают, что сумма всех x_{ij} в $i-$ой строке ($j-$ом столбце) равна $a_i(b_j)$. Таким образом, **математическая модель** ТЗ имеет вид

$$F=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,x_{ij} - \min, \tag{2}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ 1 \le i \le m, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ 1 \le j \le n, \end{cases} \tag{3}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le m \tag{4}$$

то есть является задачей ЛП в канонической форме и может быть решена симплекс-методом. Основная идея симплекс-метода заключается в построении последовательности «улучшающихся» опорных планов, в которой последний план – оптимальный. При решении задачи ЛП общего вида планы последовательности представляются **симплексными таблицами,** то есть различными формами записи системы уравнений из условия задачи. В транспортной задаче система (3) имеет очень простую структуру. Использование особенностей системы (3) позволяет заменить симплексные таблицы на другой способ представления опорных планов, **опорные таблицы ТЗ,** и существенно упростить как нахождение начального плана, так и переход от текущего плана к следующему.

При условии (1) система (3) $m+n$ уравнений с mn неизвестными **совместна** – числа $x_{ij}=a_i b_j / D$ образуют одно из её решений (проверьте!). Для определения **ранга** (числа независимых уравнений) системы заметим, что результатом сложения уравнений, соответствующих **всем строкам** таблицы 1, будет

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = (\text{сумма } \textbf{всех } x_{ij}) = a_1 + a_2 + \ldots + a_m = D,$$

и **это же** уравнение получается при сложении всех уравнений, соответствующих **столбцам.** Отсюда $m+n$ уравнений (3) **зависимы,** более того, каждое из них является следствием $m+n-1$ остальных. С другой стороны, рассмотрим какие-нибудь $m+n-1$ уравнений из (3), например, результат удаления уравнения $x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1$, соответствующего 1-ой строке таблицы 1. При любом j, $1\le j\le n$, переменная x_{1j} входит только в **одно** из этих $m+n-1$, уравнений – то, которое соответствует $j-$ому столбцу таблицы 1. Используя это свойство легко проверить, что никакое из $m+n-1$ рассматриваемых уравнений не является следствием $m+n-2$ остальных. Аналогично доказывается независимость любых $m+n-1$ уравнений из (3).

Таким образом, система (3) имеет ранг $r=m+n-1$, и, следовательно, любой **базис** системы [1, стр.18], содержит $m+n-1$ переменную. Напомним, что любой **опорный** план задачи ЛП, [1, стр.20], порождается некоторым базисом и все **свободные** (небазисные) переменные этого плана равны **нулю.** В случае **вырожденной** задачи ЛП, [1, стр.26], который возможен и для ТЗ (см. упражнение 2), существуют опорные планы с нулевыми значениями не только всех свободных, но и некоторых базисных переменных. Вырожденный опорный план может порождаться несколькими различными базисами.

Таблицы ТЗ и циклы. Таблицу 1 можно **заполнить,** заменяя символы переменных x_{ij} в **некоторых** клетках на конкретные числа **(занятые клетки)** и стирая все остальные x_{ij} **(незанятые клетки).** Заполненная таблица представляет не только условие ТЗ (числа c_{ij}, a_i, b_j), но и конкретный план этой задачи, в котором значение x_{ij} равно заменившему её числу для занятых клеток и **нулю** для незанятых клеток. Заполненная таблица называется просто **таблицей ТЗ,** если все числа в занятых клетках **неотрицательны,** а их сумма в каждой строке и каждом столбце равна соответствующему запасу a_i или потребности b_j. Таблицы ТЗ представляют, очевидно, **допустимые** планы данной задачи.

Любой **опорный** план можно представить таблицей ТЗ, в которой заняты **ровно** $m+n-1$ клеток, соответствующих порождающему этот план базису; такие таблицы называются **опорными.** Для невырожденного опорного плана представляющая его опорная таблица единственна, в ней все $m+n-1$ чисел в занятых клетках положительны (не равны нулю). Для вырожденного опорного плана занятые нулями клетки позволяют восстановить один из порождающих этот план базисов.

При описании свойств и преобразований таблиц ТЗ важную роль играет понятие **цикла.**

Последовательность (неповторяющихся) клеток прямоугольной таблицы называется **циклом,** если **любые две соседние** клетки последовательности, а так же **первая с последней,** расположены в одном ряду (строке или столбце), а любой ряд таблицы содержит только одну такую пару или не содержат их вовсе. Графически цикл изображается ломаной линией, в которой **чередуются** горизонтальные и вертикальные звенья, соединяющие соседние клетки. Число клеток в цикле обязательно **чётное.** Примеры циклов даны на рисунке 1.

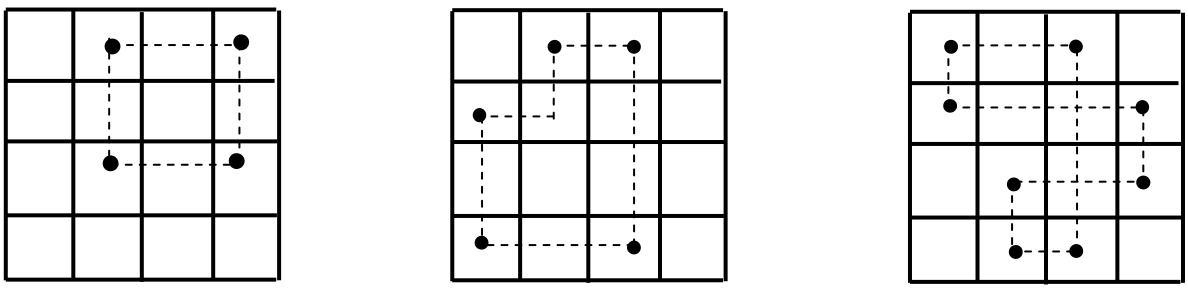


Рис.1

Сформулируем без доказательства основные свойства таблиц ТЗ, связанные с понятием цикла.

Теорема 1. Таблица ТЗ является опорной тогда и только тогда, когда в ней ровно $m+n-1$ занятых клеток и любой цикл таблицы содержит хотя бы одну незанятую клетку.

Теорема 2. Для каждой незанятой клетки опорной таблицы ТЗ можно образовать, и при этом только один содержащий данную клетку цикл, в котором все остальные клетки заняты.

Пример 1. На рис.2 представлены четыре заполненные таблицы одной и той же ТЗ с $m=3$ поставщиками и $n=4$ потребителями (циклы в таблицах в) и г) относятся не к условию задачи данного примера, а к её решению).

а)

5^{11}	5^{1}	5^{21}	^{12}	15
^{13}	5^{8}	10^{10}	10^{21}	25
^{1}	5^{15}	^{17}	^{19}	5
5	15	15	10	

б)

^{11}	^{1}	15^{21}	^{12}	15
5^{13}	10^{8}	^{10}	10^{21}	25
^{1}	5^{15}	^{17}	^{19}	5
5	15	15	10	

в)

5^{11}	^{1}	10^{21}	^{12}	15
^{13}	15^{8}	^{10}	10^{21}	25
0^{1}	^{15}	5^{17}	^{19}	5
5	15	15	10	

г)

5^{11}	^{1}	^{21}	10^{12}	15
^{13}	10^{8}	15^{10}	^{21}	25
0^{1}	5^{15}	^{17}	^{19}	5
5	15	15	10	

Рис.2

Требуется: 1) убедиться, что все четыре таблицы являются таблицами ТЗ и найти значения F_1, F_2, F_3, F_4 целевых функций (транспортных расходов) для соответствующих допустимых планов; 2) указать, какие из таблиц ТЗ являются опорными, какие представляют опорные планы; 3) в таблице г) построить цикл, в котором (1, 3) – единственная незанятая клетка.

Решение. 1) Все таблицы заполнены только неотрицательными числами, их суммы в строках и столбцах равны соответствующим запасам или потребностям – все требования к таблицам ТЗ выполнены. Для таблицы а)

$$F_1 = 11 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 21 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + 10 \cdot 10 + 21 \cdot 10 + 15 \cdot 5 = 590,$$

Аналогично находим $F_2 = 745$, $F_3 = 680$, $F_4 = 480$.

2) В опорных таблицах должно быть $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ занятых клеток. Таблицы а) и б) – не опорные, т.к. в них заняты $7 > 6$ и $5 < 6$ клеток, соответственно. В таблице в) занято 6 клеток, но существует цикл, в котором все клетки заняты (изображён на рис. 2в), по теореме 1 эта таблица не опорная. В таблице г) из шести занятых клеток (или их части) нельзя образовать цикл (проверьте!), по теореме 1 она является опорной.

Таблица а) представляет не опорный план, т. к. в нем $7 > 6$ положительных $(\neq 0)$ значений x_{ij}, таблица г) представляет опорный план, как и любая опорная таблица. Таблицы б) и в) также представляют опорные планы, т. к. их можно превратить в опорные таблицы ТЗ, не меняя представляемого ими плана: для б) достаточно заполнить числом 0 клетку (1, 1) (есть и другие варианты, какие?), для в) – перенести 0 из клетки (3, 1) в любую незанятую (почему?). Заметим, что в занятых клетках каждой из таблиц б), в) и г) всего пять **положительных** $(\neq 0)$ чисел, и, следовательно, все эти таблицы представляют **вырожденные** опорные планы.

3) В искомом цикле должно быть горизонтальное звено, соединяющее (1, 3) с одной из занятых клеток 1-й строки, т. е. с (1, 1) или (1, 4). Но из (1, 4) нельзя провести следующее, вертикальное звено, т. к. в 4-ом столбце нет других занятых клеток. Из клетки (1, 1) можно провести вертикальное звено в (3, 1), затем, чередуя горизонтальные и вертикальные звенья, пройти через клетки (3, 2), (2, 2), (2, 3) и вернуться в (3, 1) - на всех шагах следующее звено выбирается однозначно. Искомый цикл построен и очевидна его единственность, т.е. получено подтверждение справедливости теоремы 2 в данном частном случае.

Построение начальной опорной таблицы. По теореме 1 в опорной таблице ТЗ занятые клетки и записанные в них **неотрицательные** числа выбраны так, что

а) сумма чисел в занятых клетках любого ряда совпадает с соответствующим значением a_i или b_j (это просто определение таблицы ТЗ);

б) число занятых клеток равно $m + n - 1$;

в) любой цикл таблицы содержит хотя бы одну незанятую клетку.

Будем выбирать занятые клетки искомой таблицы и заполнять их **неотрицательными** числами постепенно, шаг за шагом, по **одной** клетке на каждом шаге. Пусть $(i_k,\ j_k)$ и $x_k \geq 0$ – клетка и число, выбранные на k – ом шаге, $k \geq 1$. В процессе заполнения каждому шагу соответствуют определенные значения **невязок** строк и столбцов,

$\delta(i,\ k) = a_i$ – (сумма чисел i – ой строки после k – го шага), $1 \leq i \leq m$;

$\sigma(j,\ k) = b_j$ – (сумма чисел j – ого столбца после k – го шага), $1 \leq j \leq n$.

В начале процесса все клетки незаняты и

$$\delta(i,\ 0) = a_i,\ 1 \leq i \leq m;\ \sigma(j,\ 0) = b_j,\ 1 \leq j \leq n. \qquad (5)$$

После очередного шага любая невязка **сохраняет своё прежнее значение или уменьшается,** так как при $k \geq 1$ по определению

$$\begin{aligned} &\delta(i,\ k) = \delta(i,\ k-1),\ i \neq i_k; \quad \delta(i_k,\ k) = \delta(i_k, k-1) - x_k; \\ &\sigma(j,\ k) = \sigma(j,\ k-1),\ j \neq j_k; \quad \sigma(j_k,\ k) = \sigma(j_k, k-1) - x_k. \end{aligned} \qquad (6)$$

Если $x_k = 0$ (такое возможно в вырожденных ТЗ), сохраняются значения **всех** невязок, при $x_k > 0$ уменьшаются невязки i_k – ой строки и j_k – го столбца. Очевидно, что при любом k сумма невязок k – го шага по строкам совпадает с суммой невязок k – го шага по столбцам (условие **баланса невязок,** сравните с (1)).

Свойства а) и б) опорных таблиц ТЗ эквивалентны требованиям «на последнем шаге все невязки равны нулю» и «процесс заполнения заканчивается на $m+n-1$ – ом шаге», т.е. системе $m+n$ равенств

$$\delta(i,\ m+n-1) = 0,\ \ 1 \leq i \leq m;\ \ \sigma(j,\ m+n-1) = 0,\ \ 1 \leq j \leq n. \qquad (7)$$

Покажем, как надо выбирать клетки $(i_k,\ j_k)$ и числа $x_k \geq 0$, чтобы в конце процесса выполнялись свойства а), б) и в).

На первом шаге выберем $(i_1,\ j_1)$ произвольно и запишем в неё число x_1, равное **меньшему** из чисел $a_{i_1} = \delta(i_1,\ 0)$ или $b_{j_1} = \sigma(j_1,\ 0)$. Из начальных условий (5) и равенств (6) следует, что x_1 и все невязки 1-го шага неотрицательны, а хотя бы одна из невязок $\delta(i_1, 1) = \delta(i_1, 0) - x_1$, $\sigma(j_1, 1) = \sigma(j_1, 0) - x_1$ (возможно обе) **равна 0. Выделим** i_1 – ую строку или j_1 – ый столбец – тот из этих двух рядов, в котором невязка 1-го шага **равна 0.**

В случае $\delta(i_1 1) = \sigma(j_1, 1) = 0$ выделим любой, но **только один** из этих рядов.

Пусть $k \geq 2$ и на первых $k-1$ шагах уже заполнены $k-1$ клеток и выделены $k-1$ рядов. Предположим, что **часть таблицы,** полученная **удалением выделенных** рядов, содержит m_k строк и n_k столбцов, $m_k \geq 1$, $n_k \geq 1$, $m_k + n_k = m + n - (k-1)$. На $k-$ом шаге выберем клетку (i_k, j_k) **в этой части** таблицы, запишем в неё **меньшую** из невязок $\delta(i_k, k-1)$ или $\sigma(j_k, k-1)$ и выделим i_k-ую строку или j_k-ый столбец так же, как это было сделано на 1-ом шаге.

При таком способе заполнения на любом шаге сохраняется неотрицательность невязок и чисел x_k. После k шагов заполнены k клеток и выделены k рядов, невязки выделенных рядов равны 0. На каждом шаге одно из чисел m_k или n_k уменьшается на единицу. Заполнение таблицы по указанным выше правилам становится невозможным после $k-$го шага только тогда, когда $m_{k+1} = 0$ или $n_{k+1} = 0$ и, следовательно, $m_k = 1$ или $n_k = 1$. Пусть, например, $m_k = 1$. Из условия баланса следует, что невязка $\delta(i_k, k)$ **единственной** невыделенной строки равна сумме невязок $\sigma(j, k)$ невыделенных столбцов, и, следовательно, $\sigma(j, k) \leq \delta(i_k, k)$, т.е. на $k-$ом шаге можно **выделить** любой из невыделенных ранее **столбцов.** При выделении столбца получим, очевидно $m_{k+1} = m_k = 1$, $n_{k+1} = n_k - 1$, и поэтому заполнение таблицы нельзя продолжить только в случае $m_k = n_k = 1$, т. е при $k = m + n + 1 - (m_k + n_k) = m + n - 1$. В случае $n_k = 1$ возможность продолжения процесса до $(m + n - 1)-$го шага включительно, т.е. выполнение **свойства б),** доказывается аналогично. На $(m + n - 1)-$ом шаге равны нулю $(m + n - 1)$ невязок, соответствующих выделенным рядам; по условию баланса равна нулю и последняя, $(m + n)-$я невязка. Это означает справедливость всех равенств (7), т.е. выполнение **свойства а).**

Свойство в) очевидно для циклов С, **не содержащих** занятых клеток – в таких циклах **не заняты все** клетки. Пусть С **содержит** занятые клетки таблицы после $(m + n - 1)-$го шага, и (i_s, j_s) имеет **наименьший** номер среди всех занятых клеток цикла С. Рассмотрим клетки (i_s, j) и (i, j_s), **соседние** с (i_s, j_s) в С. Хотя бы одна из них должна остаться **незанятой,** так как **после** $s-$го шага выбор клеток из i_s-ой строки или j_s-го столбца прекращается.

В описанном выше процессе на $k-$ом шаге можно заполнять любую из $m_k \times n_k$ клеток «незапрещенной» части таблицы. Различные методы построения начальной опорной таблицы получили свои названия по правилу выбора очередной занятой клетки. В методе **северо-западного угла (СЗУ)** всегда выбирается левая верхняя (северо-западная) клетка незапрещенной части таблицы, в методе **минимальной стоимости (МС)** – та из клеток этой части, которой соответствует наименьшее значение стоимости c_{ij}.

Пример 2. Для ТЗ из примера 1 построить начальную опорную таблицу методом СЗУ; методом МС.

Решение. На первом шаге **метода СЗУ** запишем в левую верхнюю клетку (1, 1) число $x_1 = \min\{15,5\} = 5;$ вычислим $\delta(1,1) = a_1 - x_1 = 15 - 5 = 10,$ $\sigma(1,1) = b_1 - x_1 = 5 - 5 = 0;$ выделим 1-ый столбец (символы $\wedge$ во всех незанятых клетках); запишем новое значение невязки 1-ой строки $\delta(1,1) = 10.$ Результат 1-го шага представлен на рис.3а).

а)

5	?			15,10
$\wedge$				25
$\wedge$				5
5	15	15	10	

б)

5	10	$\wedge$	$\wedge$	15,10
$\wedge$	?			25
$\wedge$				5
5	15,5	15	10	

в)

5	10	$\wedge$	$\wedge$	15,10
$\wedge$	5	15	5	25,20,5
$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$		5
5	15,5	15	10,5	

г)

5^{11}	10^{1}	^{21}	^{12}	15
^{13}	5^{8}	15^{10}	5^{21}	25
^{1}	^{15}	^{17}	5^{19}	5
5	15	15	10	

$F_{сз} = 455$

Рис. 3

На втором шаге в левую верхнюю клетку (1, 2) «незапрещенной» части таблицы а) запишем $x_2 = \min\{10, 15\} = 10,$ выделим 1-ую строку и запишем новое значение невязки 2-го столбца $\sigma(2, 2) = 15 - 10 = 5$ - получается таблица б). Таблицы, соответствующие 3-ему и 4-ому шагу, опущены, результат 5-го шага представлен на рис. 3в); стоимости c_{ij} в «текущих» таблицах а), б) и в) опущены, т.к. в методе СЗУ они не используются. На последнем, 6-ом шаге запишем в клетку (3, 4) число $x_6 = \min\{5,5\} = 5$ и удалим все «вспомогательные» записи – символы $\wedge$ и текущие значения невязок. Окончательный результат метода СЗУ – опорная таблица на рис. 3г), соответствующее ей значение целевой функции $F_{сз} = 11 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + \ldots + 19 \cdot 5 = 455.$

Заполнение таблицы **методом МС** можно начинать с клеток (1, 2) или (3, 1), так как $c_{12} = c_{31} = 1 = \min c_{ij}$. Выберем клетку (1, 2) и запишем в неё число $x_1 = \min\{a_1, в_2\} = \min\{15, 15\} = 15.$ При этом $\delta(1,1) = \sigma(2,1) = = 15 - 15 = 0,$ и на 1-ом шаге допустим любой из двух вариантов выделения ряда: выделить 2-ой столбец и заменить $\delta(0, 1) = 15$ на $\delta(1,1) = 0$ или выделить 1-ю строку и заменить $\sigma(2, 0) = 15$ на $\sigma(2, 1) = 0.$ Выбрав первый из этих вариантов, получим таблицу а) на рис. 4.

а)

^{11}	15 ^{1}	^{21}	^{12}	15,0
^{13}	$\wedge$ ^{8}	^{10}	^{21}	25
? ^{1}	$\wedge$ ^{15}	^{17}	^{19}	5
5	15	15	10	

б)

$\wedge$ ^{8}	15 ^{1}	^{21}	^{12}	15,0
$\wedge$ ^{13}	$\wedge$ ^{8}	? ^{10}	^{21}	25
5 ^{1}	$\wedge$ ^{15}	^{17}	^{19}	5 ,0
5	15	15	10	

в)

$\wedge$ ^{11}	15 ^{1}	$\wedge$ ^{21}	^{12}	15,0
$\wedge$ ^{13}	$\wedge$ ^{8}	15 ^{10}	^{21}	25,10
5 ^{1}	$\wedge$ ^{15}	$\wedge$ ^{17}	^{19}	5 ,0
5	15	15	10	

г)

^{11}	15 ^{1}	^{21}	0 ^{12}	15
^{13}	^{8}	15 ^{10}	10 ^{21}	25
5 ^{1}	^{15}	^{17}	0 ^{19}	5
5	15	15	10	

$F_{мс} = 380$

Рис. 4

В «незапрещенной» части таблицы а) $\min c_{ij} = c_{31} = 1.$ Запишем в клетку (3, 1) $x_2 = \min\{5,5\} = 5,$ выделим 1-ый столбец и заменим $\delta(3,1) = 5$ на $\delta(3,2) = 0$ (опять один из двух допустимых вариантов); после 2-го шага получим таблицу б). В «незапрещенной» части таблицы б) $\min c_{ij} = c_{23} = 10,$ после 3-го шага получим таблицу в), в которой не выделен только один столбец (4-ый). Очевидно, что на следующих шагах в клетки этого столбца надо просто «перенести» текущие невязки всех невыделенных строк, в данном случае числа 0, 10 и 0. Результат применения метода МС представлен на рис. 4г), соответствующее значение целевой функции $F_{МС} = 1 \cdot 15 + 12 \cdot 0 + \ldots + 19 \cdot 0 = 380$. Отметим, что обычно (но не всегда!) начальный план метода МС ближе к оптимальному, чем начальный план метода СЗУ. Именно так получилось в данном примере, $380 = F_{МС} < F_{СЗ} = 455$.

Потенциалы, псевдостоимости, признак оптимальности. Набор $m+n$ чисел $u_1, u_2, \ldots, u_m, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$, соответствующих строкам и столбцам опорной таблицы ТЗ, называется системой **потенциалов** этой таблицы, если выполнены следующие условия:

$$u_i + \nu_j = c_{ij} \text{ для любой **занятой** клетки } (i,\ j). \tag{8}$$

Условия (8) представляют собой систему $m+n-1$ уравнений (по числу занятых клеток) с $m+n$ неизвестными. Значения потенциалов можно определить, придавая **одному** из них произвольное значение (обычно полагают $u_1 = 0$) и затем решая систему $m+n-1$ уравнений (8) относительно $m+n-1$ остальных потенциалов. На самом деле систему (8), имеющую очень простую структуру, совсем не обязательно выписывать в явном виде - потенциалы можно вычислить последовательно непосредственно по таблице ТЗ, см. пример 3 ниже.

Умножим каждое уравнение системы (3) на соответствующий потенциал u_i или ν_j и просуммируем левые и правые части полученных уравнений. Результатом такого суммирования будет уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(u_i + \nu_j\right) x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \nu_j = \gamma_0.$$

С учётом этого уравнения выражение целевой функции (2) можно записать в виде

$$F = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(c_{ij} - u_i - \nu_j\right) x_{ij} = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_{ij}. \tag{9}$$

Величины

$$s_{ij} = c_{ij} - u_i - \nu_j, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n, \tag{10}$$

называются **псевдостоимостями** клеток таблицы. По определению потенциалов (8) $s_{ij} = 0$ для занятых клеток, и формула (9) даёт выражение целевой функции любого допустимого плана через **свободные** (соответствующие незанятым клеткам таблицы) переменные. Из **единственности** такого выражения следует, что γ_0 и псевдостоимости s_{ij} **не зависят** от выбора значения u_1

при вычислении потенциалов. Формула (9) позволяет сформулировать следующий

Признак оптимальности. Опорная таблица ТЗ, в которой **все** псевдостоимости **неотрицательны,** $s_{ij} \ge 0$, представляет **оптимальный** план ТЗ.

Действительно, пусть $X^0 = \{x_{ij}^0\}$ – план, соответствующий такой таблице, $X = \{x_{ij}\}$ – **произвольный** допустимый план. Тогда $x_{ij} \ge 0$, $x_{ij}^0 = 0$ для всех незанятых клеток, и по формуле (9) $F(X) \ge \gamma_0 = F(X^0)$, т.е. $F(X_0) = \min F(X)$.

Пример 3. Вычислить потенциалы и псевдостоимости опорной таблицы на рис. 3г) в примере 2. Проверить выполнение признака оптимальности.

Решение. Результаты всех вычислений представлены на рис.5: таблица 3г) из примера 2 **дополнена** значениями потенциалов – числа слева от строк и над столбцами, и псевдостоимостей - числа в левых нижних углах незанятых клеток (цикл и метки "+", "−" на рис.5 понадобятся нам позже, при разборе данного примера на них надо просто не обращать внимания).

	11	1	3	14	
0	− 11 5	+ 1 10	21 18	12 −2	15
7	13 −5	− 8 5	10 15	+ 21 5	25
5	+ 1 −15	15 9	17 9	− 19 5	5
	5	15	15	10	

Рис.5

Значения потенциалов находятся следующим образом. Сначала полагаем $u_1 = 0$. Затем, пользуясь равенством (8) для занятых клеток 1-ой строки, (1, 1) и (1, 2), вычисляем $v_1 = c_{11} - u_1 = 11 - 0 = 11$, $v_2 = c_{12} - u_1 = 1 - 0 = 1$.Далее, выбирая каждый раз занятую клетку (i, j), для которой **уже** вычислен **один** из потенциалов u_i или v_j, вычисляем второй по формуле (8): $u_2 = c_{22} - v_2 = 8 - 1 = 7$; $v_3 = c_{23} - u_2 = 10 - 7 = 3$, $v_4 = c_{24} - u_2 = 21 - 7 = 14$, $u_3 = c_{34} - v_4 = 19 - 14 = 5$. Псевдостоимости находятся по формулам (10): $s_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 21 - 0 - 3 = 18$, $s_{14} = 12 - 0 - 14 = -2$... В данной таблице среди псевдостоимостей есть отрицательные – признак оптимальности не выполнен.

Перестройка по циклу и метод потенциалов. В заданной опорной таблице ТЗ выберем **незанятую** клетку (p, q). По теореме 2 существует единственный содержащий эту клетку цикл C_{pq}, в котором все остальные клетки заняты. **Перестройкой по циклу** C_{pq} называется преобразование исходной таблицы по следующим правилам:

1^0. В клетках цикла C_{pq} расставим **метки** "$+$" или "$-$" так, чтобы (p, q) получила метку "$+$", а соседние клетки цикла – метки разных знаков; обозначим через θ **наименьшее** из чисел x_{ij}, записанных в клетках с меткой "$-$".

2^0. Выберем клетку (r,s) с меткой "$-$", для которой $x_{rs} = \theta$; если таких клеток несколько, выберем **одну** (любую) из них.

3^0. В клетку (p, q) **запишем** число $\tilde{x}_{pq} = \theta$, (p, q) становится **занятой;** в клетке (r,s) **сотрем** число $x_{rs} = \theta$, (r,s) становится **незанятой.**

4^0. В остальных клетках цикла заменим x_{ij} на $\tilde{x}_{ij} = x_{ij} \pm \theta$, где знак перед θ совпадает с меткой клетки; все клетки, не входящие в цикл C_{pq} оставим без изменений.

При перестройке по правилам $1^0 - 4^0$ **сохраняются** все свойства опорных таблиц ТЗ (см. а), б), в) на стр.7):

- неотрицательность всех «новых» $\tilde{x}_{pq}$ следует из определения числа θ;
- для любого ряда таблицы возможны изменения только в двух клетках, соседних по циклу C_{pq}, сумма чисел ряда при этом не меняется, т.е. сохраняется свойство а);
- по правилу 3^0 (p, q) становится занятой, а (r,s) - незанятой, поэтому число занятых клеток не меняется и сохраняется свойство б);
- если в некотором цикле C **есть отличная от** (p, q) незанятая клетка исходной таблицы, то эта клетка будет незанятой и в новой таблице; если $(p, q) -$ **единственная** незанятая клетка исходной таблицы в C, то по теореме 2 цикл C совпадает с C_{pq} и незанятой клеткой новой таблицы в C будет $(r,s) -$ в любом случае при перестройке сохраняется свойство в).

Таким образом, результатом перестройки по циклу всегда будет новая **опорная таблица ТЗ.**

Пусть $X = \left\{x_{ij}\right\}$ и $\tilde{X} = \left\{\tilde{x}_{ij}\right\} -$ опорные планы, соответствующие исходной и перестроенной таблицам. Сравним $F(X)$ и $F(\tilde{X})$, вычисляя **оба** значения целевой функции по формуле (9) с псевдостоимостями s_{ij} и свободным членом γ_0 **исходной** таблицы. Напомним, что в занятых клетках исходной таблицы $s_{ij}=0$. В незанятых клетках исходной таблицы равны 0 все числа x_{ij} и $\tilde{x}_{ij}$, кроме $\tilde{x}_{pq}=\theta$ (проверьте!). Подставляя эти значения s_{ij}, x_{ij}, $\tilde{x}_{ij}$ в (9), получим $F(X)=\gamma_0$, $F(\tilde{X})=\gamma_0+s_{pq}\cdot\theta$ и, следовательно,

$$F(\tilde{X})=F(X)+\Delta F=F(X)+s_{pq}\cdot\theta. \qquad (11)$$

Если план X – не оптимальный, выберем клетку (p, q) для которой $s_{pq}<0$ (см. признак оптимальности). Число $\theta=x_{rs}$ всегда неотрицательно, $\theta\geq 0$, причем $\theta=0$ возможно только для вырожденного плана X. При $s_{pq}<0$, $\theta>0$ по формуле (11) $\Delta F=F(\tilde{X})-F(X)=s_{pq}\cdot\theta<0$, т.е. перестройка по циклу **улучшает** план исходной таблицы. В случае $\theta=0$ исходная и перестроенная таблицы отличаются только расположением занятых нулями клеток и представляют один и тот же (вырожденный) план.

При решении ТЗ **методом потенциалов** строится **та же самая** последовательность улучшающихся планов, которая получилась бы при применении симплекс-метода. Однако вычисления, связанные с перестройкой по циклу, гораздо проще, чем соответствующий пересчет симплексных таблиц.

Алгоритм метода потенциалов

Шаг 1. Построить начальную опорную таблицу ТЗ методом СЗУ или методом МС, объявить полученную таблицу и соответствующий опорный план **текущими.**

Шаг 2. (Проверка оптимальности). В текущей таблице вычислить потенциалы и псевдостоимости.

а) если все псевдостоимости **неотрицательны,** то текущий план-оптимальный; если все псевдостоимости **незанятых** клеток **положительны** (нет равных нулю), то оптимальный план – **единственный.**

б) если среди псевдостоимостей есть отрицательные, выбрать клетку (p, q) с **максимальной по модулю отрицательной** псевдостоимостью (любую, если таких несколько) и построить цикл C_{pq}, в котором (p, q) - единственная незанятая клетка.

Шаг 3 (Улучшение плана). Текущую таблицу перестроить по циклу C_{pq}, объявить полученную таблицу и соответствующий опорный план **текущими.**

Шаг 4. Перейти к шагу 2.

Пример 4. Найти оптимальный план ТЗ из примера 1 методом потенциалов.

Решение: Примем за начальную таблицу, построенную методом СЗУ в примере 2, рис.3г). Потенциалы и псевдостоимости этой таблицы вычислены в примере 3, рис.5. Среди псевдостоимостей s_{ij} есть отрицательные, из них максимальной по модулю является $s_{31} = -15$. Цикл C_{31} с единственной незанятой клеткой $(p, q) = (3,1)$ и метки "+" и "−" в его вершинах изображены на рис. 5. Выполним перестройку по циклу C_{31}. Для этого вычислим $\theta = \min\{x_{11}, x_{22}, x_{34}\} = \min\{5, 5, 5\} = 5$ и выберем одну из клеток (r,s), с меткой "−", для которой $x_{rs} = \theta = 5$, например, клетку (1, 1). Далее запишем $\theta = 5$ в клетку (3, 1), $\tilde{x}_{31} = 5$, сотрем $\theta = 5$ в клетке (1, 1) и пересчитаем значения x_{ij} в остальных клетках из $C_{31}: \tilde{x}_{34} = 5 - \theta = 0$,

$$\tilde{x}_{24} = 5 + \theta = 10, \quad \tilde{x}_{22} = 5 - \theta = 0, \quad \tilde{x}_{12} = 10 + \theta = 15.$$

а)

	−4	1	3	14	
0	11	− 1 15	21	+ 12 −2	15
7	13	+ 8 0	10 15	− 21 10	25
5	1 5	15	17	19 0	5
	5	15	15	10	

$F_1 = 380, \ \theta_1 = 10, \ \Delta F_1 = -20$

б)

	−6	1	3	12	
0	11 17	1 5	21 18	12 10	15
7	13 12	8 10	10 15	21 2	25
7	1 5	15 7	17 7	19 0	5
	5	15	15	10	

$F_2 = 360 = F_{min}$

Рис. 6

Новая текущая таблица, полученная перестройкой по циклу C_{31}, представлена на рис.6а). Слева от строк и над столбцами уже записаны потенциалы этой таблицы – они находятся так же, как в примере 3. Вычисляя псевдостоимости по формуле (10), находим, что (1, 4) – **единственная** клетка с **отрицательной** псевдостоимостью $s_{14} = = c_{14} - u_1 - v_4 = 12 - 0 - 14 = -2$ (проверьте!). Цикл $C_{pq} = C_{14}$ текущей таблицы (см. шаг 2б) в алгоритме метода потенциалов) содержит незанятую клетку (1, 4) и занятые клетки (1, 2), (2, 2), (2, 4); в этом цикле $\theta_1 = \min\{x_{12}, x_{24}\} = \min\{15,10\} = 10$ и $x_{rs} = x_{24} = 10$. Результатом перестройки таблицы а) на рис.6 по циклу C_{14} будет таблица б) на рис.6, которая удовлетворяет признаку оптимальности (проверьте!) и, следовательно, представляет оптимальный план $X^* = \{x_{ij}^*\}$,

$x_{12}^* = 5, \quad x_{14}^* = 10, \ x_{22}^* = 10, \ x_{23}^* = 15, \ x_{31}^* = 5, \ x_{ij}^* = 0$ для всех остальных клеток. В данной ТЗ оптимальный план – **единственный,** так как в заключительной опорной таблице $s_{ij} > 0$ для всех незанятых клеток.

Текущие значения целевой функции проще вычислять по формуле (11), $F_1 = F_{c3} + \Delta F_{c3} = 455 + (-15)\cdot 5 = 380,$ $F_2 = F_{min} = F_1 + \Delta F_1 = 380 + (-2)\cdot 10 = 360;$ в заключительной таблице целесообразно проверить значение F_{min} непосредственным вычислением, в нашем примере $F_{min} = 1\cdot 5 + 12\cdot 10 + {}$ $+ 8\cdot 10 + 10\cdot 15 + 1\cdot 5 = 360.$

Пример 5. Найти **все** оптимальные планы ТЗ, в которой $m = 2,\ n = 3;$ $a_1 = a_2 = 3;\ b_1 = b_2 = b_3 = 2;\ c_{11} = 1,\ c_{12} = c_{21} = 2,\ c_{13} = c_{22} = c_{23} = 3.$

Решение: Начальная опорная таблица данной ТЗ, построенная методом МС, представлена на рис. 7а). Вычисляя потенциалы и псевдостоимости, находим $s_{13} = 1,\ s_{21} = 0 -$ начальная таблица удовлетворяет признаку оптимальности и $F_{min} = F^* = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 13.$ По формуле (9) $F(X) =$

а)

	1	2	2	
0	− 2 (1)	+ 1 (2)	1 (3)	3
1	+ 0 (2)	− 1 (3)	2 (3)	3
	2	2	2	

б)

$2-\delta$ (1)	$1+\delta$ (2)	(3)	3
δ (2)	$1-\delta$ (3)	2 (3)	3
2	2	2	

Рис. 7

$= 13 + 1\cdot x_{13} + 0\cdot x_{21} = 13 + x_{13}$ для **любого допустимого** плана $X = \{x_{ij}\}$, в **оптимальных** планах $x_{13} = 0,\ x_{21} = \delta \ge 0$ (почему?). Используя ограничения (3), последовательно находим $x_{11} = 2 - x_{21} = 2 - \delta,\ x_{12} = 3 - x_{11} - x_{13} =$ $= 3 - (2 - \delta) - 0 = 1 + \delta,$ $x_{22} = 2 - x_{12} = 2 - (1 + \delta) = 1 - \delta,$ $x_{23} =$ $= 3 - x_{21} - x_{22} = 3 - \delta - (1 - \delta) = 2.$ Условие (4) неотрицательности всех $x_{ij} = x_{ij}(\delta)$ выполнено, очевидно, при $0 \le \delta \le 1.$ Множество оптимальных планов рассматриваемой ТЗ **бесконечно,** каждому δ из $[0; 1]$ соответствует оптимальный план задачи, представленный таблицей ТЗ на рис. 7б) (при каких δ этот план будет опорным?)

Замечание 1. В примере 5 преобразование таблицы 7а) в таблицу 7б) отличается от перестройки по циклу C_{21} только тем, что при вычислении новых значений x_{ij} в клетках цикла число $\theta = \min\{x_{22}, x_{11}\} = \min\{1, 2\} = 1$ за-меняется на число δ из промежутка $[0, \theta] = [0, 1]$. В общем случае такое преобразование опорной таблицы можно выполнить, принимая за «начальную» в цикле перестройки любую незанятую клетку (p, q); результатом преобразования всегда будет таблица ТЗ. Если исходная таблица удовлетворяет признаку оптимальности и, кроме того, $s_{pq} = 0$, $\theta > 0$, различным δ из $[0, \theta]$ будут соответствовать таблицы ТЗ, представляющие **бесконечное множество оптимальных планов.**

Замечание 2. При применении метода потенциалов к **вырожденной** ТЗ возможно **зацикливание,** см. [1, стр.27]. Уточнение алгоритма метода потенциалов, позволяющее избежать зацикливания, выходят за рамки данных указаний.

Открытая модель ТЗ. Задача (2) – (4) называется **закрытой моделью ТЗ,** в этой модели предполагается выполнение условия баланса (1). **Открытая модель ТЗ** представляет собой математическую постановку задачи минимизации транспортных расходов в ситуации, когда условие баланса нарушено. Открытая модель отличается от закрытой только тем, что в одной из групп ограничений (3), соответствующих строкам или столбцам таблицы 1, уравнения заменяются на неравенства. Если суммарный запас в пунктах производства **больше** суммарной потребности в пунктах потребления,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m > b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \tag{1а}$$

ограничения (3) закрытой модели заменяются на ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad 1 \le i \le m; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad 1 \le j \le n. \tag{3а}$$

Если суммарный запас **меньше** суммарной потребности,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m < b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \tag{1б}$$

ограничения (3) заменяются на ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad 1 \le i \le m; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \quad 1 \le j \le n. \tag{3б}$$

Объяснение содержательного смысла ограничений (3а) и (3б) предоставляется читателю.

Открытая модель ТЗ сводится к закрытой введением дополнительного **фиктивного пункта потребления** B_{n+1} в случае (1а) или **фиктивного пункта производства** A_{m+1} в случае (1б). Покажем на конкретном примере, как это делается.

Пример 6. Найти оптимальный план ТЗ, представленной таблицей а) на рис. 8.

а)

8	20	10
10	11	15
10	7	12
19	14	

б)

8	20	0	10
10	11	0	15
10	7	0	12
19	14	4	

в)

8 10	20	0	10
10 9	11 2	0 4	15
10	7 12	0	12
19	14	4	

$F^* = 276$

Рис. 8

Решение: В данной ТЗ $a_1 + a_2 + a_3 = 10 + 15 + 12 = 37$, $b_1 + b_2 = 19 + 14 = 33$, условие баланса нарушено, запасы больше потребностей на 37-33=4 единицы. Введём дополнительный **фиктивный** пункт потребления B_3, в который будут «свозиться» эти излишки запасов, т.е. положим $b_3 = 4$. Поскольку на самом деле пункт потребления B_3 не существует и никакие перевозки в этот пункт не осуществляются, стоимости перевозок c_{13}, c_{23}, c_{33} равны нулю. Таким образом исходная открытая модель преобразуется в закрытую, представленную таблицей б) на рис. 8. Описанное выше преобразование фактически является известным способом перехода к **канонической** форме задачи ЛП с помощью **балансовых** переменных x_{13}, x_{23}, x_{33}, [1,стр. 7, последний абзац], содержательный смысл переменной x_{i3} – «невывезенная» (оставшаяся на складе) часть запаса продукта в пункте производства $A_i, 1 \le i \le 3$.

Результат решения закрытой ТЗ методом потенциалов представлен на рис. 8в) (проверьте выполнение признака оптимальности). В оптимальном плане исходной задачи $x_{11}^* = 10$, $x_{21}^* = 9$, $x_{22}^* = 2$, $x_{32}^* = 12$, $x_{12}^* = x_{31}^* = 0$, стоимость перевозок $F_{min} = F^* = 276$; остатки запасов продукта в пунктах A_1, A_2, A_3 равны $x_{13}^* = 0$, $x_{23}^* = 4$, $x_{33}^* = 0$ единиц соответственно.

В примере 6 рассматривалась открытая ТЗ, удовлетворяющая условию (1а). При сведении к закрытой модели задач, удовлетворяющих (1б), вводится **фиктивный пункт производства** A_{m+1} с запасом $a_{m+1} = (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$ и стоимостями перевозок $c_{m+1j} = 0$, $1 \le j \le n$, содержательный смысл балансовой переменной x_{m+1j} в этом случае – «недопоставка» продукта в пункт потребления B_j, $1 \le j \le n$.

Задача о назначениях. К транспортной модели (2)-(4) сводится **задача о назначениях**, которая формулируется следующим образом.

Имеется n работ и n станков, каждый станок может выполнить любую из работ. Известно, что затраты на выполнение $i-$ой работы $j-$ым станком составляют c_{ij} денежных единиц, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$. Требуется распределить работы по станкам (по одной работе на каждый станок) так, чтобы минимизировать суммарные затраты.

Положим

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i-\text{ая работа выполняется } j-\text{ым станком,} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Математическую модель задачи о назначениях можно записать в виде

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij} - \min; \qquad (12)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ 1 \le i \le n;\ \ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ 1 \le j \le n; \qquad (13)$$

$$x_{ij} \text{ равно либо } 0, \text{ либо } 1. \qquad (14)$$

Ограничения (13)-(14) отражают требования, что каждая работа выполняется только одним станком и каждый станок выполняет только одну работу.

Заметим, что с учётом (13) ограничения (14) можно заменить на $x_{ij} \ge 0$, $x_{ij} -$целые числа, т.е. задача (12)-(14) отличается от задачи (2)-(4) только дополнительным требованием **целочисленности** всех переменных x_{ij}. С другой стороны, применение **метода потенциалов** к ТЗ с **целыми** значениями всех a_i и b_j всегда даёт **целочисленный** оптимальный план, см. упражнение 6 . В (13) все правые части целые (равны единице), и поэтому задачу о назначениях можно просто решать методом потенциалов, не обращая внимания на условие целочисленности x_{ij}.

Пример 7. Решить задачу о назначениях с исходными данными $c_{11} = 1$, $c_{12} = 3$, $c_{13} = 7$, $c_{21} = 8$, $c_{22} = 4$, $c_{23} = 6$, $c_{31} = 7$, $c_{32} = 5$, $c_{33} = 8$.

Решение. На рис 9а) представлена начальная опорная таблица, полученная методом МС. Признак оптимальности не выполнен, $s_{32} = -1 < 0$. После перестройки по циклу C_{32} получается таблица 9б), удовлетворяющая признаку оптимальности (проверьте!). В соответствующем оптимальном плане $x^*_{11} = x^*_{23} = x^*_{32} = 1$, $x^*_{ij} = 0$ для шести остальных переменных, т е. минимум затрат $F^{*}=12$ достигается при выполнении 1-ой работы на 1-ом станке, 2-ой – на 3-ем, 3-ей – на 2-ом.

а)

	1	3	5	
0	1 1	3 0	7	1
1	8	– 4 1	+ 6 0	1
3	7	+ 5 • –1	– 8 1	1
	1	1	1	

$F_0=13,\ \theta=1,\ \Delta F=-1$

б)

1 1	3 0	7	1
8	4 0	6 1	1
7	5 1	8	1
1	1	1	

$F^{*}=12$

Рис.9

Задача о назначениях вырождена – любая её опорная таблица содержит $n-1$ заполненных нулями занятых клеток. Это приводит к тому, что в методе потенциалов возможно многократное повторение **одного и того же плана,** представленного **различными о**порными таблицами. Описание способов «ускорения» поиска оптимального плана задачи о назначениях выходит за рамки данных указаний.

Упражнения

1. Построить начальные опорные таблицы методом СЗУ и методом МС, сравнить соответствующие им значения целевой функции $F_{СЗ}$ и $F_{МС}$ для транспортных задач, условия которых представлены в следующих таблицах:

1)

2	5	1	10
3	7	4	11
5	6	3	8
8	4	7	6
12	5	18	

2)

4	7	2	70
2	8	1	40
5	3	4	30
7	4	3	60
6	5	2	50
20	110	120	

2. В ТЗ выполнено условие баланса (1) и равенство

$$a_1+a_2+\ldots+a_p=b_1+b_2+\ldots+b_q,$$

где $1 \le p < m$, $1 \le q < n$. Доказать, что задача вырождена. У к а з а н и е. Рассмотреть две «подзадачи» исходной ТЗ: первая – с производителями $A_1,\ A_2, \dots, A_p$ и потребителями $B_1,\ B_2, \dots, B_q$; вторая – с производителями $A_{p+1}, \dots, A_m$ и потребителями $B_{q+1}, \dots, B_n$. Для каждой из подзадач построить начальную опорную таблицу с $p+q-1$ и $(m-p)+$ $+(n-q)-1$ занятыми клетками соответственно.

3. Решить методом потенциалов ТЗ из упражнения 1.

4. Найти **все** оптимальные планы следующих ТЗ:

1)

5	4	5	7	9
2	1	4	6	7
4	2	1	3	14
8	5	5	12	

2)

1	2	5	5
2	3	4	5
4	4	5	2
4	4	4	

5. Решить следующие ТЗ с открытой моделью:

1)

4	3	2	7	46
1	1	6	4	34
3	5	9	4	40
40	35	30	45	

2)

2	4	5	1	60
2	3	9	4	70
8	4	2	5	50
40	30	20	50	

6. Доказать, что а) при целых значениях всех запасов a_i и потребностей b_j начальный опорный план ТЗ, построенный методом СЗУ или МС, является целочисленным (все x_{ij} – целые числа); б) перестройка по циклу сохраняет свойство целочисленности опорного плана.

7. Решить задачи о назначениях с заданными матрицами затрат:

1). $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 \\ 9 & 7 & 10 & 9 \\ 4 & 5 & 11 & 7 \\ 8 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 9 & 2 \\ 7 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 5 & 9 \\ 7 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Матричные игры

В различных видах практической деятельности часто возникают ситуации, в которых интересы отдельных лиц (сторон) не совпадают или даже прямо противоположны. В таких **конфликтных** ситуациях эффективность решений, принимаемых каждой из сторон, зависит от действий других участников. При этом, как правило, каждая из сторон вынуждена действовать **в условиях неопределенности,** не зная заранее, какие решения будут приняты другими.

Модели конфликтных ситуаций и различные подходы к определению «разумного» поведения сторон в условиях неопределенности изучаются математической теорией, получившей название **теория игр.** Математическая модель конфликтной ситуации называется **игрой,** участники конфликта - **игроками.** Мы будем рассматривать только **игры двух лиц с нулевой суммой (антагонистические игры).** В конкретной игре двух лиц с нулевой суммой между игроками А и В считаются заданными

- два множества X и Y всех возможных **стратегий** (способов действий) игроков А и В соответственно;

- **платежная функция** $u(x, y)$ с действительными значениями (любого знака), определенная на каждой паре стратегий (x, y), $x \in X$, $y \in Y$.

Исход (результат) игры определяется выбором одной из своих возможных стратегий каждым игроком. В игре с нулевой суммой выигрыш игрока А совпадает с проигрышем игрока В и равен $u(x, y)$, где $x \in X$ и $y \in Y -$стратегии, выбранные игроками (в данной «партии» игры). Цель игрока А - максимизировать свой выигрыш, цель игрока В – минимизировать выигрыш игрока А, т.е. свой проигрыш.

Конечные игры. Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой, в которой множества возможных стратегий игроков А и В **конечны** и имеют мощности m и n соответственно. Обозначим $A_1, A_2, \ldots, A_m -$ стратегии игрока А; $B_1, B_2, \ldots B_n -$стратегии игрока В. В такой **конечной** игре значения платежной функции $u(A_i, B_j) = a_{ij}$ образуют матрицу $M = (a_{ij})$ размера $m \times n$, которая называется **платежной матрицей** или просто **матрицей игры.** Строки M соответствуют стратегиям игрока А, столбцы – стратегиям игрока В.

Выбрав определенную стратегию A_i, игрок А получит выигрыш, равный одному из элементов $i -$ой строки $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ матрицы M; конкретное значение выигрыша зависит от неизвестного игроку А выбора стратегии (столбца матрицы) игроком В. Игрок В не знает, какую стратегию выбрал А. Однако «осторожный» игрок А учитывает, что В мог каким-то образом догадаться о сделанном им выборе A_i и ответить такой стратегией B_j, для которой $a_{ij} -$наименьшее из чисел $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. Число

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \tag{15}$$

называется **гарантированным выигрышем стратегии** A_i. Наибольшее значение гарантированного выигрыша,

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} \tag{16}$$

называется **нижней ценой игры** или **максимином.** Стратегия A_k с максимальным гарантированным выигрышем $\alpha_k = \alpha$ (таких может быть несколько) называется **максиминной.** Эта стратегия является наилучшим выбором с точки зрения «осторожного» игрока А и обеспечивает ему выигрыш **не меньше нижней цены** α против **любой** стратегии игрока В.

Величины, связанные с осторожным поведением игрока В, определяются аналогично. Наибольший элемент $j-$го столбца матрицы M,

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, \tag{17}$$

называется **гарантированным проигрышем стратегии** B_j. Наименьшее из чисел β_j,

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}, \tag{18}$$

называется **верхней ценой игры** или **минимаксом.** Стратегия B_r с минимальным гарантированным проигрышем $\beta_r = \beta$ называется **минимаксной** стратегией, эта стратегия обеспечивает игроку B проигрыш **не больше верхней цены** β против **любой** стратегии игрока А. Максиминная и минимаксная стратегии называются **гарантирующими.**

В любой игре нижняя цена не больше верхней,

$$\alpha \le \beta. \tag{19}$$

Действительно, из определений гарантированных выигрышей (15) и гарантированных проигрышей (17) следует, что

$$\alpha_i \le a_{ij} \le \beta_j; \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n. \tag{20}$$

Неравенство (19) получается из (20) при $i = k$, $j = r$, где A_k и B_r − максиминная и минимаксная стратегии, для которых $\alpha_k = \alpha$, $\beta_r = \beta$.

Пример 8. (Антагонистическая конкуренция). Две фирмы А и В производят и реализуют сезонный товар, который пользуется спросом n дней. Цена единицы товара установлена антимонопольным законом и не может быть использована в борьбе за рынок сбыта. Единственный инструмент каждой из фирм в этой борьбе – выбор момента поступления своего товара на рынок. Ежедневный спрос на товар равен $2C$ (единиц товара), не меняется в течении всего периода и может быть удовлетворён даже каждой фирмой в отдельности. Считается, что: товар фирмы, которая вышла на рынок позже другой, имеет более высокое качество; в любой день реализуется только товар более высокого качества; при одновременном выходе фирм на рынок ежедневная реализация товара каждой из них составляет 50 % спроса. Цель фирмы А - максимизировать объём своих продаж за сезон, цель фирмы В - минимизировать объём продаж фирмы А («разорить» фирму А).

Составить матрицу игры, соответствующей описанной конфликтной ситуации при $n = 4$ и $n = 5$, найти гарантированные выигрыши и проигрыши, нижнюю и верхнюю цены, гарантирующие стратегии.

Решение: Каждая фирма должна принять решение о дне начала продаж. Игрок (фирма) А имеет n стратегий (вариантов принятия решения) вида: A_i $-$начать продажи с $i-$го дня сезона, $1 \le i \le n$. Стратегии игрока В описываются аналогично: B_j $-$начать продажи с $j-$го дня сезона, $1 \le j \le n$.

Элемент a_{ij} платёжной матрицы размера $n \times n$ равен объёму продаж товара фирмы А за весь сезон при условии, что фирмы А и В начали продажи с $i-$го и $j-$го дня соответственно. При $i < j$ в течение $j - i$ дней, с $i-$го по $(j-1)-$ый включительно, реализуется только товар фирмы А, в остальные дни товар фирмы А не продаётся и, следовательно, $a_{ij} = 2C(j-i)$. При $i = j$ продажи фирмы А равны половине спроса за период с $i-$го по $n-$ый день и $a_{ii} = C(n-i+1)$, а при $j < i-$всему спросу за тот же период и $a_{ij} = 2C(n-i+1)$. Полученные формулы позволяют составить платёжную матрицу для любого n, в частности,

$$M_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$-$матрицы игры «антагонистическая конкуренция» при $n = 4$ и $n = 5$ соответственно (выбор конкретного значения $C > 0$ не влияет на исследование игры, в M_4 и M_5 принято $C = 1$).

По матрице M_4 последовательно находим гарантированные выигрыши (минимальные элементы строк) $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 1$, нижнюю цену игры $\alpha = \max\{2, 2, 2, 1\} = 2$ и максиминные стратегии A_1, A_2 и A_3 (для этих стратегий $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha = 2$). Аналогично определяются гарантированные проигрыши (максимальные элементы столбцов) $\beta_1 = 6$, $\beta_2 = 4$, $\beta_3 = 4$, $\beta_4 = 6$, верхняя цена игры $\beta = \min\{6, 4, 4, 6\} = 4$ и минимаксные стратегии B_2 и B_3 (для этих стратегий $\beta_2 = \beta_3 = \beta = 4$).Для игры с матрицей M_5 имеем: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 2$, $\alpha_5 = 1$, $\alpha = 2$, A_1, A_2, A_3, A_4 – максиминные стратегии; $\beta_1 = \beta_5 = 8$, $\beta_2 = \beta_4 = 6$, $\beta_3 = 4$, $\beta = 4$, B_3 – единственная минимаксная стратегия.

Отметим, что справедливое для всех конечных игр соотношение (19) в данном примере выполнено как **строгое неравенство** $2 = \alpha < \beta = 4$.

Пример 9. Найти гарантированные выигрыши и проигрыши, нижнюю и верхнюю цены, гарантирующие стратегии игры с матрицей

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычисление гарантированных выигрышей и проигрышей обычно оформляется следующим образом: рядом с каждой строкой (столбцом) платёжной матрицы справа (снизу) записывается наименьший (наибольший) элемент этой строки (столбца). В рассматриваемом примере получится таблица

$$\begin{array}{cc} M = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -3 \\ \boxed{-1} \\ -3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \boxed{-1} & 5 & \boxed{-1} \end{array} & \end{array}$$

Выделяя в «дополнительном» столбце (строке) наибольшее (наименьшее) число, находим нижнюю цену $\alpha = -1$ и верхнюю цену $\beta = -1$; в данном случае соотношение (19) реализуется в виде **равенства** $\alpha = \beta = -1$. Максиминной стратегией будет $A_2, \alpha_2 = \alpha = -1$, а минимаксными – B_1 и B_3, $\beta_1 = \beta_3 = \beta = -1$.

В конечной игре максиминная стратегия гарантирует игроку A выигрыш не меньше нижней цены α. В то же время A не может рассчитывать на выигрыш больше верхней цены β, т.к. B может выбрать одну из своих минимаксных стратегий и проиграть (дать выиграть игроку A) не больше β. Аналогичное рассуждение показывает, что игрок B, имея возможность проиграть не больше β, не может рассчитывать на проигрыш меньше α. Для **игры, в которой** $\alpha = \beta$, это означает, что гарантирующие стратегии дают игрокам результаты, которые **невозможно улучшить,** и, следовательно, соответствуют их **оптимальному** поведению. Очевидно, что в этом случае выбор любой пары (A_k, B_r) гарантирующих стратегий выгоден обоим игрокам.

При $\alpha<\beta$ нет таких убедительных причин считать гарантирующие стратегии «неулучшаемыми», как это было в случае $\alpha=\beta,$ и при выборе оптимального поведения надо использовать другие соображения. Рассмотрим для определенности игру с матрицей M_5 из примера 8 и возможные рассуждения игроков в этой игре. Предположим, что игрок A собирается применить одну из своих гарантирующих (максиминных) стратегий $A_1,\ A_2,\ A_3$ или $A_4,$ для которых $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha=2.$ Считая, что противник также планирует выбор своей (единственной) гарантирующей стратегии $B_3,$ он выберет, конечно, A_1 или $A_4,$ так как $a_{13}=a_{43}=4-$максимальные элементы 3-го столбца в матрице $M_5.$ Игрок B может **повторить** эти рассуждения игрока $A,$ отказаться от стратегии B_3 и применить B_2-наилучший ответ при условии, что A выбрал A_1 или A_4 (сравните пары чисел из 1-ой и 4-ой строки в столбцах матрицы M_5) и т.д. Понятно, что в любой игре, для которой $\alpha<\beta,$ подобные рассуждения можно продолжать бесконечно – окончательное решение о выборе стратегии так и не будет принято.

Учитывая всё вышеизложенное, введём следующие **определения:** если в конечной игре $\alpha=\beta,$ то общее значение $u^*=\alpha=\beta$ этих величин называется **ценой игры,** гарантирующие стратегии игроков называются **оптимальными,** а любая пара $\left(A^*,B^*\right)=\left(A_k,B_r\right)$ таких стратегий – **решением игры;** если $\alpha<\beta,$ то говорят, что конечная игра **не имеет решения.**

В соответствии с принятыми определениями игры из примера 8 не имеют решения $(2=\alpha<\beta=4),$ а игра из примера 9 имеет цену $u^*=-1$ и два решения, $\left(A_2,B_1\right)$ и $\left(A_2,B_3\right).$

По определению игра имеет решение тогда и только тогда, когда $\alpha=\beta.$ Чтобы проверить это равенство, достаточно вычислить α и β по формулам (16) и (18). Другая форма критерия существования решения связана с понятием **седловой точки.**

Элемент a_{kr} платёжной матрицы M называется **седловым,** если он является одновременно наименьшим в своей строке и наибольшим в своем столбце, т.е. удовлетворяет неравенствам

$$a_{ir}\le a_{kr}\le a_{kj},\quad 1\le i\le m,\ \ 1\le j\le n, \tag{21}$$

или, что то же самое, двойному равенству

$$\beta_r=a_{kr}=\alpha_k \tag{22}$$

Соответствующая пара стратегий $\left(A_k,B_r\right)$ также называется **седловой.** Справедлива следующая

Теорема о седловой точке. Пара стратегий $\left(A_k, B_r\right)$ является решением игры тогда и только тогда, когда эта пара седловая. Конечная игра имеет решение тогда и только тогда, когда платёжная матрица содержит (хотя бы один) седловой элемент.

Доказательство: Утверждение «$\left(A_k, B_r\right)$ - решение игры» по определению эквивалентно выполнению трёх равенств

$$\alpha = \beta, \quad \alpha_k = \alpha, \quad \beta_r = \beta. \tag{23}$$

Вторая часть утверждения теоремы следует из первой. Для доказательства первой части достаточно проверить, что каждая из систем равенств (22) и (23) является следствием другой.

Из равенств (23) и определений величин α_k и β_r следует, что

$$\alpha = \alpha_k = \min_j a_{kj} \le a_{kr} \le \max_i a_{ir} = \beta_r = \beta = \alpha.$$

В этой цепочке крайние числа совпадают (равны α), поэтому оба неравенства обращаются в равенства и $\alpha_k = a_{kr} = \beta_r$, т.е. выполнены равенства (22).

Наоборот, пусть выполнены равенства (22). Тогда

$$\beta = \min_j \beta_j \le \beta_r = a_{kr} = \alpha_k \le \max_i \alpha_i = \alpha \le \beta.$$

Здесь, кроме (22), использованы определения чисел β и α и неравенство (19); как и в предыдущей цепочке, все неравенства обращаются в равенства и, следовательно, $\beta = \beta_r = \alpha_k = \alpha$, т.е. выполнены равенства (23). Из доказательства теоремы следует также, что все седловые элементы платёжной матрицы совпадают между собой и равны цене игры $u^* = \alpha = \beta$ (если, конечно, такие элементы существуют).

В качестве упражнения предлагаем читателю проверить справедливость доказанной теоремы в примерах 8 и 9: в первом случае матрицы M_4 и M_5 не содержат седловых элементов, во втором решениям игры $\left(A_2, B_1\right)$ и $\left(A_2, B_3\right)$ соответствуют седловые элементы $a_{21} = a_{23} = u^* = -1.$

Смешанные стратегии. В конечной игре без седловых точек (т.е. при $\alpha < \beta$) у игроков нет оптимальных стратегий, а игрок, «угадавший» выбор противника, получает большое преимущество. Пусть, например, игрок A знает, что B выбрал B_j. Тогда A может применить стратегию A_k, соответствующую наибольшему элементу $j-$го столбца платежной матрицы, и выиграть $a_{kj} = \max_i a_{ij} = \beta_j \ge \beta > \alpha;$ этот результат, конечно, вполне устраивает игрока A и невыгоден игроку B. Понятно, что в такой ситуации каждый игрок стремится скрыть свой окончательный выбор и в то же время разведать намерения противника. Любые рассуждения игрока, стремящегося засекретить свой выбор, могут быть **восстановлены** разумным противником, которому известны правила игры. Естественный способ сделать собственный выбор непредсказуемым состоит в том, чтобы сделать его **случайным.**

Представим себе, что конечная игра повторяется много раз и игроков интересует не выигрыш в каждой отдельной партии, а **средний** выигрыш по многим партиям; такой средний выигрыш зависит, очевидно, от того, насколько часто игроки используют каждую из своих стратегий.

Смешанной стратегией игрока A называется вектор

$$p = (p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m), \quad \text{где} \quad p_i \ge 0,\ 1 \le i \le m; \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1.$$

Здесь координата p_i понимается как **вероятность (**или **частота)** применения стратегии A_i. Аналогично вводится понятие смешанной стратегии q игрока B,

$$q = (q_1,\ q_2, \ldots, q_n), \quad \text{где} \quad q_j \ge 0,\ \ 1 \le j \le n; \quad q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1.$$

Игра в смешанных стратегиях заключается в следующем. Игроки A и B выбирают (**независимо** друг от друга) определенные смешанные стратегии $p = (p_1,\ p_2, \ldots, p_m)$ и $q = (q_1,\ q_2, \ldots, q_n)$ соответственно. Затем игрок A организует лотерею, в которой стратегии $A_1, A_2, \ldots, A_m$ выпадают с вероятностями $p_1,\ p_2, \ldots, p_m$, а игрок B - лотерею, в которой $B_1, B_2, \ldots, B_n$ выпадают с вероятностями $q_1,\ q_2, \ldots, q_n$. Выигрыш игрока A совпадает с проигрышем игрока B и представляет собой **случайную величину,** для которой возможные значения a_{ij} имеют вероятности $p_i q_j,\ \ 1 \le i \le m,\ \ 1 \le j \le n.$

Платёжная функция $u(p, q)$ игры в смешанных стратегиях определяется как **математическое ожидание** (среднее значение) этой случайной величины и, следовательно,

$$u(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ p_i\ q_j. \tag{24}$$

В теории игр переход к случайному выбору стратегий называется **смешанным расширением игры,** стратегии исходной игры называются **чистыми.** а сама исходная игра – **игрой в чистых стратегиях.**

Чистой стратегии A_i поставим в соответствие смешанную стратегию $p^{(i)} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где число 1 стоит на $i-$ом месте: применение $p^{(i)}$ заключается в выборе A_i с вероятностью 1, т.е. во всех партиях. Аналогично связаны чистая стратегия B_j и смешанная стратегия $q^{(j)} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где число 1 стоит на $j-$ом месте. Из формулы (24) следует, что $u\left(p^{(i)},\ q^{(j)}\right)=$ $=a_{ij}=u\left(A_i,B_j\right)$, т.е. паре $\left(A_i,\ B_j\right)$ в конечной игре и паре $\left(p^{(i)},\ q^{(j)}\right)$ в её смешанном расширении соответствует один и тот же результат. Это означает, что чистые стратегии можно считать **частными случаями** смешанных, а игру в чистых стратегиях – частным случаем игры в смешанных стратегиях; для конечных игр и их смешанных расширений принято общее название **матричные игры**. Будем называть чистыми не только стратегии исходной игры, но и соответствующие им смешанные стратегии, а вместо $p^{(i)}$ и $q^{(j)}$ писать просто A_i и B_j. В этих обозначениях замена p на $p^{(i)}=(0,\ldots,1,\ldots,0)$ в формуле (24) запишется в виде

$$u\left(A_i,\ q\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,q_j,\quad 1\le i\le m. \tag{25}$$

Аналогично получаем

$$u\left(p,\ B_j\right)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\,p_i,\quad 1\le j\le n. \tag{26}$$

Величины $u\left(A_i,\ q\right)$ и $u\left(p,\ B_j\right)$ представляет собой средние выигрыши игрока A (проигрыши игрока B) в случаях, когда один из игроков применяет чистую стратегию. Нетрудно проверить, что значения платёжной функции (24) в общем случае выражаются через эти величины по формулам

$$u\left(p,\ q\right)=\sum_{j=1}^{n}q_j\ u\left(p,\ B_j\right)=\sum_{i=1}^{m}p_i\ u\left(A_i,q\right). \tag{27}$$

Определения основных понятий, связанных с игрой в смешанных стратегиях, повторяют все определения для конечных игр. Величины

$$\alpha(p)=\min_{q}u(p,\ q),\qquad \beta(q)=\max_{p}\ u(p,\ q) \tag{28}$$

называются гарантированным выигрышем стратегии p и гарантированным проигрышем стратегии q, а числа

$$\underline{u}=\max_{p}\alpha(p)=\max_{p}\min_{q}u(p,\ q),\quad \overline{u}=\min_{q}\beta(q)=\min_{q}\max_{p}u(p,q) \tag{29}$$

$-$нижней ценой и верхней ценой игры в смешанных стратегиях. Стратегия p (стратегия q) называется максиминной (минимаксной), если $\alpha(p)=$

$=\underline{u}$ $\left(\beta(q)=\overline{u}\right)$; максиминные и минимаксные стратегии называются гарантирующими.

Замечание. Все глобальные экстремумы в определениях (28), (29) существуют по известному свойству функций, непрерывных на замкнутом ограниченном множестве; в любой матричной игре существует хотя бы одна максиминная и хотя бы одна минимаксная смешанная стратегия.

В дальнейшем будет использоваться следующее свойство платёжной функции $u(p, q)$: экстремумы в (28) достигаются уже на чистых стратегиях, т.е. $\alpha(p)$ и $\beta(q)$ можно вычислять по формулам

$$\alpha(p)=\min_j u(p,B_j), \qquad \beta(q)=\max_i u(A_i,q). \tag{30}$$

Действительно, B_j – частный случай смешанной стратегии , поэтому $\alpha(p)=\min_q u(p, q)\le u\left(p, B_j\right)$ при любых j и, следовательно $\alpha(p)\le \min_j u\left(p, B_j\right)$.
В то же время из (27) и равенства $q_1+q_2+\ldots q_n=1$ следует, что

$$u(p, q)=\sum_{j=1}^{n} q_j\, u\left(p, B_j\right)\ge \sum_{j=1}^{n} q_j \min_j u\left(p, B_j\right)=\min_j u\left(p, B_j\right)$$

при любых p и q, поэтому $\alpha(p)=\min_q u(p,\ q)\ge \min_j u(p,B_j)$. Таким образом $\alpha(p)$ не больше и не меньше, чем $\min_j u(p,B_j)$, т.е. верно первое равенство в (30); второе равенство доказывается аналогично.

В любой матричной игре выполнены неравенства

$$\alpha\le \underline{u}\le \overline{u}\le \beta. \tag{31}$$

Здесь $\underline{u}\le \overline{u}$ доказывается аналогично (19) для чистых стратегий, а крайние неравенства получаются из определения чисел $\alpha, \beta, \underline{u}, \overline{u}$ с помощью (30). Например,

$$\underline{u}=\max_p \alpha\left(p\right)\ge \max_i \alpha\left(A_i\right)=\max_i \min_j u\left(A_i, B_j\right)=\alpha.$$

В этой цепочке последовательно используются: определение числа $\underline{u}$; то, что чистые стратегии – частные случаи смешанных; первое из равенств (30) при $p=A_i$; равенство $u\left(A_i, B_j\right)=a_{ij}$ и определение числа α.

Пара смешанных стратегий $\left(p^*, q^*\right)$ называется **седловой** или **решением матричной игры,** если для любых p и q выполнены неравенства

$$u\left(p, q^*\right) \le u\left(p^*, q^*\right) \le u\left(p^*, q\right) \qquad (32)$$

(сравните с определением (21) и теоремой о седловой точке игры в чистых стратегиях). Отметим сразу, что бесконечная совокупность неравенств (32) эквивалентна своей конечной части, состоящей из всех неравенств, для которых p и q - чистые стратегии, т.е. системе

$$u\left(A_i, q^*\right) \le u\left(p^*, q^*\right) \le u\left(p^*, B_j\right), \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n. \qquad (33)$$

Доказательство эквивалентности (32) и (33) предоставляется читателю (используйте формулы (27)).

Седловая пара смешанных стратегий существует тогда и только тогда, когда $\underline{u} = \overline{u}$; компонентами седловой пары могут быть только гарантирующие стратегии; из $\underline{u} = \overline{u}$ следует, что любая пара (p, q) гарантирующих смешанных стратегий является седловой и при этом $\alpha(p) = \beta(q) = u(p, q) = \underline{u} = \overline{u}$ – проверка всех этих утверждений аналогична доказательству теоремы о седловой точке в чистых стратегиях. Седловая пара $\left(A^*, B^*\right)$ чистых стратегий является, очевидно, решением матричной игры. Однако такие чистые пары существуют не в любой игре (только при $\alpha = \beta$). Основная теорема теории матричных игр – **теорема Джона фон Неймана о минимаксе** – утверждает, что $\underline{u} = \overline{u} = u^*$, т.е. для любой матричной игры существует решение $\left(p^*, q^*\right)$ в смешанных стратегиях и цена игры u^*.

Для произвольной платёжной матрицы нахождение решения (седловой пары) $\left(p^*, q^*\right)$ и цены u^* сводится к задаче ЛП. Матричные игры, в которых один из игроков имеет **только две** чистые стратегии, просто решаются графическим методом.

Графическое решение игр $2 \times n$ и $m \times 2$. При $m = 2$ матрица игры имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Выигрыши смешанных стратегий $p = \left(p_1, p_2\right) = \left(p_1, 1 - p_1\right)$, $0 \le p_1 \le 1$, игрока A против чистых стратегий противника находятся по формулам (26), в данном случае

$$u\left(p, B_1\right) = a_{11}\, p_1 + a_{21}\, p_2 = \left(a_{11} - a_{21}\right) p_1 + a_{21} = k_1 p_1 + a_{21},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$u\left(p, B_n\right) = a_{1n}\, p_1 + a_{2n}\, p_2 = \left(a_{1n} - a_{2n}\right) p_1 + a_{2n} = k_n p_1 + a_{2n},$$

а гарантированный выигрыш стратегии p – по формуле (30),

$$\alpha(p) = \min_j u\left(p, B_j\right) = \min\left\{k_1 p_1 + a_{21},\ k_2 p_1 + a_{22}, \ldots, k_n p_1 + a_{2n}\right\}.$$

В декартовой системе координат с осями p_1 и u графиком функции $u = u\left(p, B_j\right) = k_j p_1 + a_{2j}$ будет прямая, проходящая через точки $p_1 = 0$, $u = a_{2j}$ и $p_1 = 1, u = a_{1j}$, $1 \le j \le n$, а графиком функции $u = \alpha(p)$ – **нижняя огибающая** этих n прямых: при любом конкретном $p_1 \in [0; 1]$ точка (p_1, u) на графике $u = \alpha(p)$ совпадает с **самой нижней** из точек прямых $u = k_j p_1 + a_{2j}$ с заданной абсциссой p_1. Нетрудно понять, что нижняя огибающая представляет собой **выпуклую** вверх ломаную, звенья которой – отрезки некоторых из n рассматриваемых прямых. **Наибольшая** из ординат точек ломаной $u = \alpha(p)$ равна по определению (29) нижней цене $\underline{u}$, а абсцисса точки с ординатой $u = \underline{u}$ – вероятности p_1^* в **максиминной** смешанной стратегии $p^* = \left(p_1^*, p_2^*\right) = \left(p_1^*, 1 - p_1^*\right)$

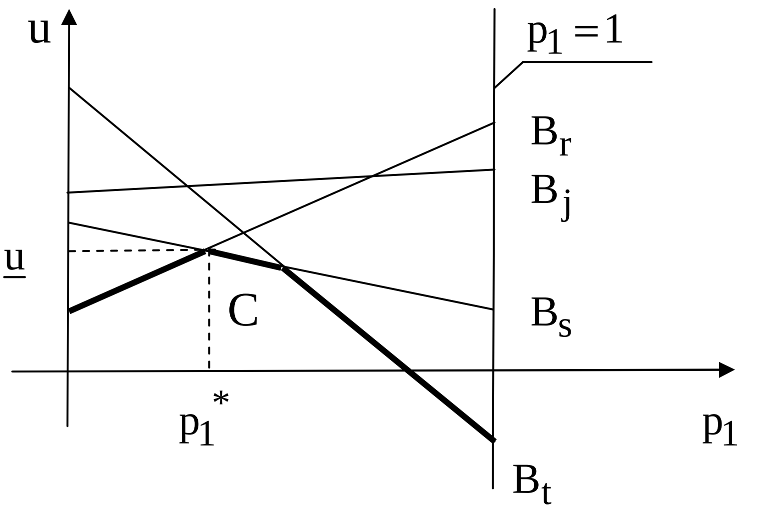


Рис.10

На рис.10 выпуклая ломаная $u = \alpha(p)$ состоит из отрезков трех прямых, соответствующих чистым стратегиям B_r, B_s, B_t; прямые, соответствующие остальным B_j, расположены выше ломаной. Наибольшую ординату имеет точка C пересечения прямых, соответствующих B_r и B_s, поэтому нижнюю цену игры $\underline{u}$ и максиминную стратегию $p^* = \left(p_1^*, p_2^*\right)$ можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} k_r p_1^* + a_{2r} = k_s p_1^* + a_{2s} = \underline{u}, \\ p_2^* = 1 - p_1^*. \end{cases} \tag{34}$$

Рассмотрим смешанную стратегию $q^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q^*_n\right)$ игрока B, в которой $q_j^* = 0$ при $j \neq r$, $j \neq s$, а вероятности q_r^* и q_s^* удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} k_r q_r^* + k_s q_s^* = 0, \\ q_r^* + q_s^* = 1. \end{cases} \tag{35}$$

Здесь угловые коэффициенты k_r и k_s имеют разные знаки (смотри рис.10) и поэтому $q_r^* > 0,\ q_s^* > 0$ (проверьте). Заметим, что уравнения двух прямых, проходящих через точку $C\left(p_1^*, \underline{u}\right)$, можно записать в виде

$$u = u\left(p, B_r\right) = k_r\left(p_1 - p_1^*\right) + \underline{u}; \quad u = u\left(p, B_s\right) = k_s\left(p_1 - p_1^*\right) + \underline{u}.$$

В первом из равенств (27) положим $q_r = q_r^*$, $q_s = q_s^*$, $q_j = 0$ при $j \neq r$, $j \neq s$, в двух оставшихся ненулевых слагаемых заменим $u\left(p, B_r\right)$ и $u\left(p, B_s\right)$ на выражения этих величин из уравнений соответствующих прямых. В результате получим

$$u\left(p, q^*\right) = q_r^*\left(k_r\left(p_1 - p_1^*\right) + \underline{u}\right) + q_s^*\left(k_s\left(p_1 - p_1^*\right) + \underline{u}\right),$$

а после очевидных преобразований и учёта равенств (35)

$$u\left(p, q^*\right) = \left(k_r q_r^* + k_s q_s^*\right)\left(p - p_1^*\right) + \left(q_r^* + q_s^*\right)\underline{u} = \underline{u}.$$

Равенство $u\left(p, q^*\right) = \underline{u}$ справедливо **для любых** p, поэтому $\beta\left(q^*\right) = \max\limits_p u\left(p, q^*\right) = \underline{u}$ и $\overline{u} = \min\limits_q \beta(q) \leq \beta\left(q^*\right) = \underline{u} \leq \overline{u}$. Из последней цепочки следует равенство $\underline{u} = \overline{u}$. Таким образом игра $2 \times n$ с графиком $u = \alpha(p)$, представленным на рис.10, имеет решение $\left(p^*, q^*\right)$ и цену $u^* = \underline{u} = \overline{u}$, которые определяются из систем уравнений (34) и (35). Аналогично находится решение и цена любой игры $2 \times n$, для которой максимальную ординату на ломаной $u = \alpha(p)$ имеет точка пересечения двух прямых с угловыми коэффициентами разных знаков. Другие возможные случаи расположения точек с максимальной ординатой на ломаной $u = \alpha(p)$ рассматриваются в упражнении 11.

Пример 10. Найти решение и цену игры с матрицей

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Игра не имеет решения в чистых стратегиях, т.к. $\alpha = 2 < 5 = \beta$ (проверьте). По матрице M находим выигрыши $u\left(p, B_j\right)$ стратегии $p =$ $= (p_1, p_2) = (p_1, 1 - p_1)$:

$$u(p, B_1) = 6p_1 + 0 \cdot p_2 = 6p_1,$$

$$u(p, B_2) = 5p_1 - 3p_2 = 8p_1 - 3,$$

$$u(p, B_3) = 5p_1 + 4p_2 = p_1 + 4,$$

$$u(p, B_4) = 2p_1 + 6p_2 = -4p_1 + 6.$$

Прямые $u = u\left(p, B_j\right), 1 \le j \le 4,$ и нижняя огибающая четырех прямых $u = \alpha(p)$ представлены на рис. 11(обратите внимание на то, как связаны с матрицей M ординаты точек пересечения прямых $u = u\left(p, B_j\right)$ с осью Ou и вертикальной прямой $p_1 = 1$).

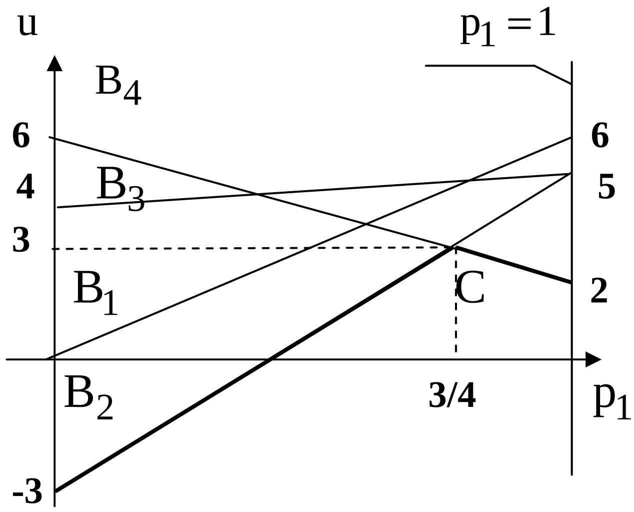


Рис. 11

По рис.11 определяем, что на ломаной $u = \alpha(p)$ наибольшую ординату имеет точка C пересечения прямых $u = u(p, B_2)$ и $u = u(p, B_4)$ с угловыми коэффициентами $k_2 = 8$ и $k_4 = -4$. Системы уравнений (34) и (35) в данном примере запишутся в виде:

$$\begin{cases} 8p_1^* - 3 = -4p_1^* + 6 = u^*, \\ p_2^* = 1 - p_1^*, \end{cases} \qquad \begin{cases} 8q_2^* - 4q_4^* = 0, \\ q_2^* + q_4^* = 1. \end{cases}$$

Решая обе системы, находим $p_1^* = 3/4$, $p_2^* = 1/4$, $u^* = 3$; $q_2^* = 1/3$, $q_4^* = 2/3$. Ответ: $p^* = (3/4;\ 1/4)$, $q^* = (0; 1/3;\ 0;\ 2/3)$, $u^* = 3$.

Решение и цену игры с матрицей размера $m \times 2$ можно найти по графику зависимости **гарантированного проигрыша** $u = \beta(q)$ **игрока** B от вероятности q_1 смешанной стратегии $q=(q_1, q_2)=(q_1, 1-q_1), 0 \le q_1 \le 1$. Этот график совпадает с **верхней** огибающей семейства прямых $u=u(A_i, q)$, $1 \le i \le m$, и представляет собой **вогнутую** (выпуклую вниз) ломаную линию. Графическое решение конкретной игры $m \times 2$ разбирается ниже в примере 11.

В некоторых случаях можно уменьшить размеры матрицы исследуемой игры за счет исключения заведомо невыгодных чистых стратегий. Говорят, что (чистая) стратегия A_k игрока A **доминируется** стратегией A_r, $r \ne k$, и пишут $A_k \prec A_r$, если **все** элементы $k-$ой строки матрицы игры **не больше** соответствующих элементов $r-$ой строки, $a_{kj} \le a_{rj}$, $1 \le j \le n$. Стратегия B_s игрока B **доминируется** стратегией B_t, $t \ne s$ (обозначение: $B_s \succ B_t$), если **все** элементы $s-$ого столбца **не меньше** соответствующих элементов $t-$ого столбца, $a_{is} \ge a_{it}$, $1 \le i \le m$.

По определению, замена чистой стратегии A_k на A_r не уменьшает выигрыш игрока A, а замена B_s на B_t не увеличивает проигрыш игрока B при любых ответах противника, если $A_k \prec A_r$ или $B_s \succ B_t$ соответственно. Используя это свойство, можно показать, что при исследовании игры, в которой есть доминируемые стратегии, надо просто «сократить» платёжную матрицу, вычеркнув из неё строки и столбцы, соответствующие доминируемым стратегиям. Цена исходной игры u^* равна цене игры с сокращенной матрицей; в решении (p^*, q^*) исходной игры вероятности доминируемых стратегий **равны нулю,** а все остальные совпадают с соответствующими вероятностями «сокращенной» игры.

Пример 11. Найти решение и цену игры с матрицей M_4 из примера 8. Описать оптимальное поведение фирм A и B в рассматриваемой конфликтной ситуации.

Решение: Игра не имеет решения в чистых стратегиях, т.к. $\alpha = 2 < 4 = \beta$ (см. пример 8). По матрице M_4 находим $A_4 \prec A_3$ $(2<4,\ 2<4,\ 2=2,\ 1<2)$ и $B_1 \succ B_2$ $(4>2,\ 6>3,\ 4=4,\ 2=2)$, т.е. A_4 и B_1-доминируемые стратегии (в данном случае это следует также из $A_4 \prec A_i$, $i=1,2,3$ и $B_1 \succ B_3$). Вычеркнув из M_4 4-ю строку и 1-ый столбец, получим матрицу, в которой можно вычеркнуть столбец, соответствующий B_4 (в «сокращенной» игре $B_4 \succ B_3$),

$$M_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \\ B_2\ B_3\ B_4 \end{array} \to \tilde{M}_4 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \\ B_2\ B_3 \end{array}$$

На рис.12 представлена геометрическая интерпретация игры с матрицей $\tilde{M}_4$.

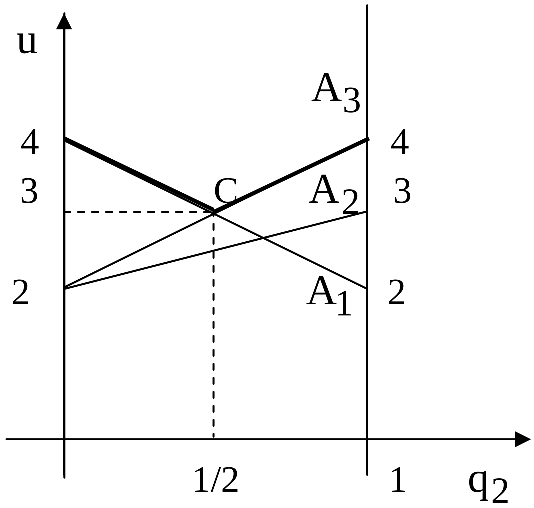


Рис.12

Здесь $q = (q_2,\, q_3) = (q_2,\, 1 - q_2)$,

$u(A_1,\, q) = 2q_2 + 4q_3 = 4 - 2q_2$,

$u(A_2,\, q) = 3q_2 + 2q_3 = 2 + q_2$,

$u(A_3,\, q) = 4q_2 + 2q_3 = 2 + 2q_2$.

Верхняя огибающая $u = \beta(q)$ прямых $u = u(A_i,\, q),\, 1 \le i \le 3$, состоит из двух звеньев, соответствующих A_1 и A_3.

По рис. 12 находим (сравните с примером 10) сначала $q_2^* = q_3^* = 1/2$, $u^* = 3$ из уравнений $u^* = 4 - 2q_2^* = 2 + 2q_2^*$, $q_3^* = 1 - q_2^*$, а затем $p_1^* =$ $= p_3^* = 1/2$ из уравнений $-2p_1^* + 2p_3^* = 0$, $p_1^* + p_3^* = 1$ ($k_1 = -2$ и $k_3 = 2$ – угловые коэффициенты прямых $u = u(A_1,\, q)$ и $u = u(A_3,\, q)$, пересекающихся в точке C). Все остальные вероятности p_i^* и q_j^* в решении $(p^*,\, q^*)$ равны нулю. Таким образом, в игре с матрицей M_4

$$p^* = (1/2;\ 0;\ 1/2;\ 0), \quad q^* = (0;\, 1/2;\ 1/2;\ 0), \quad u^* = 3,$$

т.е. в примере 8 при $n = 4$ фирма A должна с вероятностями $p_1^* = p_3^* = 1/2$ начинать продажу с 1-го или 3-го дня сезона, а фирма B – с вероятностями $q_2^* = q_3^* = 1/2$ со 2-го или 3-го дня сезона.

Приведение матричной игры к задаче ЛП. Покажем сначала, как сводится к задаче ЛП игра, в которой все элементы a_{ij} платёжной матрицы M **положительны.** Рассмотрим задачу ЛП

$$F = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - \max, \tag{36}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le 1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le 1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \ldots, \quad x_n \ge 0, \end{cases} \tag{37}$$

и двойственную к ней задачу [2, стр. 3]

$$G = y_1 + y_2 + \ldots + y_m - \min, \tag{38}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge 1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge 1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge 1, \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad \ldots, \quad y_m \ge 0, \end{cases} \tag{39}$$

Обе задачи имеют допустимые планы: ограничениям (37) удовлетворяют планы вида $X_\delta = (\delta, \delta, \ldots \delta)$ при достаточно малых $\delta > 0$, а ограничениям (39) – планы вида $Y_c = (c, c, \ldots, c)$ при достаточно больших $c > 0$. По первой теореме двойственности [2, стр.4] обе задачи разрешимы, т.е. имеют оптимальные планы $X^* = \left\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right\}$ и $Y^* = \left\{y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\right\}$ соответственно, причём экстремальные значения $F^* = F_{max}$ и $G^* = G_{min}$ целевых функций совпадают,

$$F^* = G^* = x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^* = y_1^* + y_2^* + \ldots + y_m^* = d > 0$$

(неравенство $d > 0$ следуют из допустимости планов $X_\delta : d = F^* \ge F(X_\delta) =$ $= n \cdot \delta > 0$). Положим

$$p_i^* = y_i^* / d, \ 1 \le i \le m; \quad q_j^* = x_j^* / d, \ 1 \le j \le n; \quad u^* = 1/d \tag{40}$$

и покажем, что смешанные стратегии $p^* = \left(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*\right)$,

$q^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\right)$ образуют седловую пару (решение) игры с матрицей $M = \left(a_{ij}\right)$, а u^* – цена этой игры.

Подставим $x_j = x_j^* = dq_j^*$, $y_i = y_i^* = dp_i^*$ в ограничения (37) и (39) и разделим все неравенства на $d > 0$. В результате получим систему неравенств.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j^* \le 1/d = u^*, \quad 1 \le i \le m; \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i^* \ge 1/d = u^*, \quad 1 \le j \le n,$$

которую с учётом (25) и (26) можно записать в виде

$$u\left(A_i, q^*\right) \le u^* \le u\left(p^*, B_j\right), \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n. \tag{41}$$

Из второй теоремы двойственности [2, стр. 4] следует (проверьте!), что

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_i^* x_j^* = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^*\right) y_i^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* = G^* = d,$$

и поэтому

$$u\left(p^*, q^*\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(y_i^*/d\right)\left(x_j^*/d\right) = \left(1/d^2\right)\cdot d = 1/d = u^*.$$

Из равенства $u^* = u\left(p^*, q^*\right)$ и (41) следует, что пара $\left(p^*, q^*\right)$ удовлетворяет системе неравенств (33), т.е. является седловой. Напомним, что $\underline{u} = \overline{u} = u(p, q)$ для любой седловой пары (p, q) (см. абзац после формулы (33)). Поэтому совпадение числа u^* из (40) с $u\left(p^*, q^*\right)$ означает, что u^* – цена игры.

Таким образом для игр с **положительной** платёжной матрицей M доказана справедливость теоремы Неймана о минимаксе: чтобы найти решение $\left(p^*, q^*\right)$ и цену u^* такой игры, надо **по матрице** M **составить пару двойственных задач ЛП (36-37) и (38-39), найти оптимальные планы этих задач и вычислить вероятности** p_i^*, q_j^* **и цену** u^* **по формулам (40).** Можно показать, что такой способ нахождения решения и цены игры **применим к любой матричной игре, удовлетворяющей условию** $\underline{u} > 0$. Последнее требование заведомо выполнено, если $\alpha > 0$ (см. (31)); неравенство $\alpha > 0$ легко проверяется.

Если $\alpha \le 0,$ прибавим ко всем элементам платёжной матрицы $M = \left(a_{ij}\right)$ одно и тоже число $a,\ a > -\alpha.$ Обозначим через $\tilde u\left(p, q\right)$ и $\tilde\alpha$ платёжную функцию и нижнюю цену в чистых стратегиях игры с матрицей $\tilde M = \left(a_{ij} + a\right).$ Тогда

$$\tilde u\left(p, q\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} + a\right) p_i q_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j + a \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} q_j = u\left(p, q\right) + a.$$

Очевидно, что $\tilde\alpha = \alpha + a > 0.$ Каждое двойное неравенство в критерии седловой пары (33) для функции $\tilde u\left(p,q\right) = u\left(p,q\right) + a$ эквивалентно такому же неравенству для функции $u(p, q)$ – постоянное слагаемое a сокращается. Это означает, что любое решение (седловая пара) $\left(p^*, q^*\right)$ игры с матрицей $\tilde M$ будет решением и в исходной игре с матрицей $M.$ Чтобы найти цену u^* исходной игры, надо отнять постоянную a от цены $\tilde u^*$ игры с матрицей $\tilde M,$ $u^* = u\left(p^*, q^*\right) = \tilde u\left(p^*, q^*\right) - a = \tilde u^* - a.$

Пример 12. Найти решение и цену игры с матрицей M_5 из примера 8. Описать оптимальное поведение фирм A и B в рассматриваемой конфликтной ситуации.

Решение. В игре с матрицей M_5 можно исключить сначала доминируемые стратегии A_5 и B_1 $\left(A_5 \prec A_4,\ \ B_1 \succ B_2\right),$ а затем стратегию B_5 (после первого сокращения $B_5 \succ B_4$),

$$M_5 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{matrix} & \end{array} \to \tilde M_5 = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} B_2 & B_3 & B_4 \end{matrix} & \end{array}.$$

По матрице $\tilde M_5$ (в ней все элементы положительны) составим задачу ЛП (36-37) и применим для её решения симплекс-метод [1,стр.25].

T_0	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	
S_1	2	4	6	1
S_2	4	2	4	1
S_3	$\boxed{6}$	3	2	1
S4	4	4	2	1
F	–1	–1	–1	0

$\rightarrow$

T_1	$-S_3$	$-x_3$	$-x_4$	
S_1	–1/3	3	$\boxed{16/3}$	2/3
S_2	–2/3	0	8/3	1/3
x_2	1/6	1/2	1/3	1/6
S4	–2/3	2	2/3	1/3
F	1/6	–1/2	–2/3	1/6

$\rightarrow$

T_2	$-S_3$	$-x_3$	$-S_1$	
x_4	–1/16	9/16	3/16	1/8
$\rightarrow S_2$	–1/2	–3/2	–1/2	0
x_2	9/48	5/16	–1/16	1/8
S_4	–5/8	$\boxed{13/8}$	–1/8	1/4
F	1/8	–1/8	1/8	1/4

$\rightarrow$

	(y_3)	(y_4)	(y_1)	
T_3	$-S_3$	$-S_4$	$-S_1$	
x_4				1/26
$(y_2)S_2$				3/13
x_2				1/13
x_3				2/13
F	1/13	1/13	3/26	7/26

Здесь S_1, S_2, S_3, S_4 – балансовые переменные [1, стр.7]; в начальной симплексной таблице T_0 эти переменные являются базисными. Отметим, что «внутренняя» часть T_0 **совпадает** с матрицей M_5. По заключительной таблице T_3 находим (сравните с примером 6 из [1]) оптимальные значения переменных и целевых функций задач (36-37) и (38-39), соответствующих матрице M_5: $x_2^* = 1/13$, $x_3^* = 2/13$, $x_4^* = 1/26$; $y_1^* = 3/26$, $y_2^* = 0$ (в таблице T_3 эта переменная двойственной задачи – свободная!), $y_3^* = 1/13$, $y_4^* = 1/13$; $F^* = G^* = d = 7/26$.

В решении исходной игры с матрицей M_5 вероятности доминируемых чистых стратегий равны нулю, $p_5^* = q_1^* = q_5^* = 0$, цена u^* и остальные вероятности вычисляются по формулам (40): $u^* = 1/d = 26/7$; $p_1^* = y_1^*/d =$ $3/7$, $p_2^* = y_2^*/d = 0$, $p_3^* = y_3^*/d = 2/7$, $p_4^* = y_4^*/d = 2/7$; $q_2^* =$ $= x_2^*/d = 2/7$, $q_3^* = x_3^*/d = 4/7$, $q_4^* = x_4^*/d = 1/7$. Окончательно получаем

$u^* = 26/7$, $p^* = (3/7;\ 0;\ 2/7;\ 2/7;\ 0)$, $q^* = (0;\ 2/7;\ 4/7;\ 1/7;\ 0,)$,

т.е. при $n = 5$ фирма A должна начинать продажи с 1-го, 3-го или 4-го дня сезона с вероятностями $3/7,\ 2/7$ и $2/7$ соответственно, а фирма $B-$со 2-го, 3-го или 4-го дня с вероятностями $2/7,\ 4/7$ и $1/7.$

Пример 13. Найти решение и цену игры с матрицей

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Игра не имеет решений в чистых стратегиях, т.к. $\alpha=-1<1=\beta$ (проверьте). Матрица M размера 3×3 в данном примере не сокращается, т.к. в игре нет доминируемых чистых стратегий (сравните все пары строк и все пары столбцов матрицы). При $m=n=3>2$ графический метод не применим, решение (в смешанных стратегиях) будем искать с помощью приведения игры к задаче ЛП.

В отличие от примера 12, в котором $a_{ij}>0$ и, следовательно, $\alpha>0,$ здесь $\alpha=-1<0.$ Поэтому ко всем элементам матрицы M надо прибавить число a такое, что $a>-\alpha=1,$ например $a=2.$ В результате получим матрицу

$$\tilde{M}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

При переходе от M к $\tilde{M}$ решение игры не меняется, цены двух игр связаны равенством $\tilde{u}^*=u^*+2.$ По матрице $\tilde{M}$ составим задачу ЛП (36-37) и решим эту задачу симплекс-методом:

$T_{.0}$	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	
S_1	$\boxed{3}$	1	0	1
S_2	1	1	5	1
S_3	1	5	3	1
F	-1	-1	-1	0

$\rightarrow$

T_1	$-S_1$	$-x_2$	$-x_3$	
x_1	$1/3$	$1/3$	0	$1/3$
S_2	$-1/3$	$2/3$	$\boxed{5}$	$2/3$
S_3	$-1/3$	$14/3$	3	$2/3$
F	$1/3$	$-2/3$	-1	$1/3$

$\rightarrow$

T_2	$-S_1$	$-x_2$	$-S_2$	
x_1	$1/3$	$1/3$	0	$1/3$
x_3	$-1/15$	$2/15$	$1/5$	$2/15$
S_3	$-2/15$	$\boxed{64/15}$	$-3/5$	$4/15$
F	$4/15$	$-8/15$	$1/5$	$7/15$

$\rightarrow$

	(y_1)	(y_3)	(y_2)	
T_3	$-S_1$	$-S_3$	$-S_2$	
x_1				$5/16$
x_3				$1/8$
x_2				$1/16$
F	$1/4$	$1/8$	$1/8$	$1/2$

По заключительной таблице T_3 находим: $x_1^* = 5/16,\ x_2^* = 1/16,\ x_3^* = 1/8;$ $y_1^* = 1/4,\ y_2^* = 1/8,\ y_3^* = 1/8;\ F^* = G^* = d = 1/2$. Цена игры $u^* = \tilde{u}^* - 2$ и вероятности $p_i^* = \tilde{p}_i^*,\ q_j^* = \tilde{q}_j^*$ вычисляются по формулам (40): $\tilde{u}^* = 1/d =$ $= 2 \to u^* = \tilde{u}^* - 2 = 0;\ \ p_1^* = y_1^*/d = 1/2,\ \ \ p_2^* = y_2^*/d = 1/4,\ \ \ p_3^* =$ $= y_3^*/d = 1/4;\ \ q_1^* = x_1^*/d = 5/8,\ q_2^* = x_2^*/d = 1/8,\ q_3^* = x_3^*/d = 1/4.$

Ответ: $p^* = (1/2;\ 1/4;\ 1/4),\ \ q^* = (5/8;\ 1/8;\ 1/4),\ \ u^* = 0.$

Упражнения

8. Для следующих платёжных матриц определить верхнюю и нижнюю цены в чистых стратегиях и гарантирующие чистые стратегии игроков

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{б)}\ \begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{в)}\ \begin{pmatrix} 4 & -4 & -5 & 6 \\ -3 & -4 & -9 & -2 \\ 6 & 7 & -8 & -9 \\ 7 & 3 & -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти седловые элементы матриц (если такие существуют) и соответствующие решения в чистых стратегиях.

9. Каким ограничениям должны удовлетворять числа f и g чтобы пара чистых стратегий (A_2, B_2) была седловой в следующих играх

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} 1 & f & 6 \\ g & 5 & 10 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{б)}\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & f \\ 4 & g & 6 \end{pmatrix}$$

10. Доказать, что пара смешанных стратегий $(p^*,\ q^*)$ является решением игры с матрицей M и найти цену игры

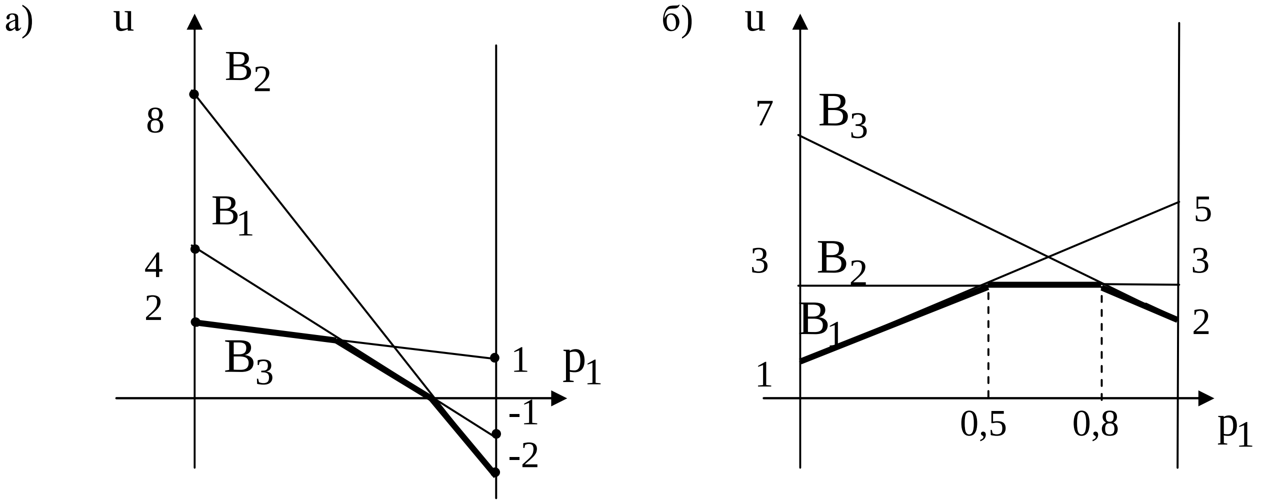
$$\text{а)}\ p^* = (1/6,\ 0,\ 5/6), \qquad \text{б)}\ p^* = (0{,}6;\ 0{,}4;\ 0),$$

$$q^* = (49/54,\ 5/54,\ 0), \qquad q^* = (0;\ 0{,}9;\ 0{,}1),$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 50 & 50 \\ 1 & 1 & 0{,}1 \\ 10 & 1 & 10 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 8 & 0 & -6 \\ -9 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Указание. Вычислить гарантированный выигрыш $\alpha(p^*)$, гарантированный проигрыш $\beta\left(q^*\right)$ по формулам (30) и убедиться, что $\alpha\left(p^*\right)=\beta\left(q^*\right)$.

11. По графикам $u=\alpha(p)$ гарантированных выигрышей игрока A двух игр размера 2×3



записать платежные матрицы этих игр. Доказать, что: первая игра имеет цену $u^*=2$, а её решением будет пара чистых стратегий (A_2, B_3), то есть $p_2{}^*=q_3{}^*=1$, $p_1{}^*=q_1{}^*=q_2{}^*=0$; вторая игра имеет цену $u^*=3$, решениями игры будут пары $\left(p^*, B_2\right)$, где $p^*=(\delta,\ 1-\delta)$, $0{,}5\le\delta\le0{,}8$.

12. Сократить платёжную матрицу и найти решение и цену игры графическим методом

а) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} -7 & 9 & 9 \\ 5 & 6 & 7 \\ -3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

13. Найти **все** решения и цену игры с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

У к а з а н и е. Через точку $p_1=1/2$, $u=5/2$ с наибольшей ординатой $u^*=5/2$ на ломаной $u=\alpha(p)$ проходят три прямые с угловыми коэффициентами $k_2=-1<0$, $k_3=1>0$, $k_4=-7<0$. Парам чистых стратегий B_2, B_3 и B_3, B_4 соответствуют две различные минимаксные смешанные стратегии q и $\tilde{q}$; все **выпуклые линейные комбинации** $\gamma q+(1-\gamma)\tilde{q}$, $0\le\gamma\le1$, этих стратегий также будут минимаксными.

14. Показать, что в примере 13 нельзя переходить к задачам ЛП без «сдвига» элементов матрицы M, так как задачи (36-37) и (38-39), составленные непосредственно по матрице M, неразрешимы: в первой из них целевая функция не ограничена сверху (смотри пример 9 в [1]), а во второй нет допустимых планов (аналогичное утверждение верно для любой матричной игры, в которой $u^*\le0$).

15. Найти решения и цены следующих игр методом ЛП:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}4&1&0\\0&1&4\\0&3&0\end{pmatrix}\qquad \text{б)}\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-2&2\\3&-3&3\end{pmatrix}\qquad \text{в)}\begin{pmatrix}1&2&-5&3\\-1&4&7&2\\5&-1&1&9\end{pmatrix}$$

16. (Игра «раз-два-три»). Каждый игрок выбирает одно из трёх чисел (стратегий) «раз», «два», или «три». Выигрыш игрока A равен выбранному им числу, если оно совпадает с выбором противника, и нулю в противном случае. Найти гарантирующие чистые стратегии, решение и цену игры в смешанных стратегиях.

17. (Угадай 1 или 2). Каждый игрок выбирает число 1 или 2 и одновременно пытается угадать выбор противника. Если только один игрок угадал правильно, его выигрыш равен сумме чисел, выбранных обоими игроками, во всех остальных случаях игра заканчивается вничью: (выигрыш A) =(проигрыш $B)=0$.. Найти решение и цену игры. У к а з а н и я: 1) каждый игрок имеет четыре чистые стратегии вида $(i,\ j)$, $i-$задуманное число, $j-$предполагаемый ответ противника; 2) в матрице игры $a_{ij}=-a_{ji}$ (кососимметрическая матрица), вектор $p-$максиминная смешанная стратегия тогда и только тогда, когда $p-$минимаксная стратегия; 3) задача ЛП, к которой сводится игра, имеет бесконечное множество оптимальных планов, смотри пример 8 в [1].

18. Противники A и B ведут борьбу за два стратегических пункта. В распоряжении A имеется два полка, в распоряжении $B-$три; обе стороны должны распределить свои силы между двумя пунктами. В каждом пункте выигрыш стороны, направившей в него i полков, против стороны, направившей j полков, равен $j+1$ при $i>j$, нулю при $i=j$, $-(i+1)$ при $i<j$. Общий выигрыш каждого противника равен сумме его выигрышей в двух пунктах. Сформулировать задачу как игру двух лиц с нулевой суммой и найти решение методом ЛП. У к а з а н и е. Пользуясь симметрией игры, можно привести к двум переменным (и решить графически) каждую из задач ЛП в двойственной паре.

Библиографический список

1. Линейное программироваине: Метод. указания /Сост.М.Н. Соколовский.- Омск: Изд-во ОмГТУ, 2003 – 36с.

2. Линейное программирование. Двойственность. Зависимость оптимальных планов от исходных данных: Метод указания /Сост. М.Н. Соколовский.- Омск: Изд-во ОмГТУ, 2003 -36 с.

3. Мулен Э. Теория игр (с примерами из математической экономики). – М.: Мир, 1985.

См. также библиографический список в [1].