

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

Транспортная задача. Матричные игры.

**Методические указания для студентов экономических
специальностей. Типовые расчёты**

Омск -2008

Составители: Соколовский Мирон Наумович, доцент

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
Омского государственного технического университета*

Редактор

ИД _____ от _____

Подписано в печать _____ . Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16

Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. ____ . Уч.-изд. л. ____ .

Тираж 100 экз. Заказ ____ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

В указаниях приводятся варианты и образцы выполнения расчётно-графических заданий (РГЗ) по темам «Транспортная задача» и «Матричные игры». Основные теоретические положения и методы решения задач по указанным темам содержатся в [1].

РГЗ «Транспортная задача»

В каждом варианте приведена таблица стоимостей перевозок c_{ij} для ТЗ с $m = 4$ поставщиками и $n = 5$ потребителями. Справа от строк и под столбцами записаны соответствующие запасы a_i и потребности b_j .

1. Проверить выполнение условия баланса. Найти начальные опорные таблицы ТЗ методом северо-западного угла (СЗУ) и методом минимальной стоимости (МС), сравнить полученные значения стоимостей всех перевозок $F_{СЗ}$ и $F_{МС}$.

2. Решить ТЗ методом потенциалов. Если оптимальный план перевозок не единственный, найти все оптимальные планы.

3. Найти оптимальный план и стоимость всех перевозок при условии, что пятый потребитель отказался от получения продукта, а запасы и потребности в остальных пунктах и стоимости перевозок не изменились.

Варианты заданий

Вариант № 1	Вариант № 2	Вариант № 3																																																																																										
<table border="1"> <tr><td>16</td><td>30</td><td>17</td><td>10</td><td>16</td><td>4</td></tr> <tr><td>30</td><td>27</td><td>26</td><td>9</td><td>23</td><td>6</td></tr> <tr><td>13</td><td>4</td><td>22</td><td>3</td><td>1</td><td>10</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>4</td><td>24</td><td>10</td></tr> <tr><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>2</td><td></td></tr> </table>	16	30	17	10	16	4	30	27	26	9	23	6	13	4	22	3	1	10	3	1	5	4	24	10	7	7	7	7	2		<table border="1"> <tr><td>15</td><td>1</td><td>22</td><td>19</td><td>1</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>18</td><td>11</td><td>4</td><td>3</td><td>20</td></tr> <tr><td>26</td><td>29</td><td>23</td><td>26</td><td>24</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>10</td><td>3</td><td>19</td><td>27</td><td>20</td></tr> <tr><td>19</td><td>19</td><td>19</td><td>19</td><td>4</td><td></td></tr> </table>	15	1	22	19	1	20	21	18	11	4	3	20	26	29	23	26	24	20	21	10	3	19	27	20	19	19	19	19	4		<table border="1"> <tr><td>17</td><td>20</td><td>29</td><td>26</td><td>25</td><td>15</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>15</td><td>24</td><td>15</td></tr> <tr><td>19</td><td>2</td><td>22</td><td>4</td><td>13</td><td>15</td></tr> <tr><td>20</td><td>27</td><td>1</td><td>17</td><td>19</td><td>15</td></tr> <tr><td>11</td><td>11</td><td>11</td><td>11</td><td>16</td><td></td></tr> </table>	17	20	29	26	25	15	3	4	5	15	24	15	19	2	22	4	13	15	20	27	1	17	19	15	11	11	11	11	16	
16	30	17	10	16	4																																																																																							
30	27	26	9	23	6																																																																																							
13	4	22	3	1	10																																																																																							
3	1	5	4	24	10																																																																																							
7	7	7	7	2																																																																																								
15	1	22	19	1	20																																																																																							
21	18	11	4	3	20																																																																																							
26	29	23	26	24	20																																																																																							
21	10	3	19	27	20																																																																																							
19	19	19	19	4																																																																																								
17	20	29	26	25	15																																																																																							
3	4	5	15	24	15																																																																																							
19	2	22	4	13	15																																																																																							
20	27	1	17	19	15																																																																																							
11	11	11	11	16																																																																																								
Вариант № 4	Вариант № 5	Вариант № 6																																																																																										
<table border="1"> <tr><td>20</td><td>26</td><td>24</td><td>26</td><td>29</td><td>13</td></tr> <tr><td>15</td><td>20</td><td>29</td><td>26</td><td>23</td><td>17</td></tr> <tr><td>4</td><td>10</td><td>27</td><td>30</td><td>7</td><td>17</td></tr> <tr><td>9</td><td>16</td><td>29</td><td>20</td><td>3</td><td>13</td></tr> <tr><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td></td></tr> </table>	20	26	24	26	29	13	15	20	29	26	23	17	4	10	27	30	7	17	9	16	29	20	3	13	12	12	12	12	12		<table border="1"> <tr><td>25</td><td>16</td><td>26</td><td>43</td><td>23</td><td>38</td></tr> <tr><td>30</td><td>23</td><td>28</td><td>48</td><td>27</td><td>13</td></tr> <tr><td>37</td><td>23</td><td>25</td><td>49</td><td>28</td><td>9</td></tr> <tr><td>22</td><td>1</td><td>4</td><td>25</td><td>10</td><td>20</td></tr> <tr><td>13</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td><td>28</td><td></td></tr> </table>	25	16	26	43	23	38	30	23	28	48	27	13	37	23	25	49	28	9	22	1	4	25	10	20	13	13	13	13	28		<table border="1"> <tr><td>10</td><td>17</td><td>9</td><td>20</td><td>30</td><td>15</td></tr> <tr><td>13</td><td>4</td><td>24</td><td>26</td><td>26</td><td>15</td></tr> <tr><td>22</td><td>24</td><td>30</td><td>27</td><td>29</td><td>19</td></tr> <tr><td>25</td><td>12</td><td>11</td><td>24</td><td>23</td><td>11</td></tr> <tr><td>9</td><td>24</td><td>9</td><td>9</td><td>9</td><td></td></tr> </table>	10	17	9	20	30	15	13	4	24	26	26	15	22	24	30	27	29	19	25	12	11	24	23	11	9	24	9	9	9	
20	26	24	26	29	13																																																																																							
15	20	29	26	23	17																																																																																							
4	10	27	30	7	17																																																																																							
9	16	29	20	3	13																																																																																							
12	12	12	12	12																																																																																								
25	16	26	43	23	38																																																																																							
30	23	28	48	27	13																																																																																							
37	23	25	49	28	9																																																																																							
22	1	4	25	10	20																																																																																							
13	13	13	13	28																																																																																								
10	17	9	20	30	15																																																																																							
13	4	24	26	26	15																																																																																							
22	24	30	27	29	19																																																																																							
25	12	11	24	23	11																																																																																							
9	24	9	9	9																																																																																								

Вариант № 7	Вариант № 8	Вариант № 9																																																																																										
<table border="1"> <tr><td>30</td><td>24</td><td>11</td><td>12</td><td>25</td><td>21</td></tr> <tr><td>26</td><td>4</td><td>29</td><td>20</td><td>24</td><td>19</td></tr> <tr><td>27</td><td>14</td><td>14</td><td>10</td><td>18</td><td>15</td></tr> <tr><td>6</td><td>14</td><td>28</td><td>8</td><td>2</td><td>25</td></tr> <tr><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>20</td><td></td></tr> </table>	30	24	11	12	25	21	26	4	29	20	24	19	27	14	14	10	18	15	6	14	28	8	2	25	15	15	15	15	20		<table border="1"> <tr><td>5</td><td>15</td><td>3</td><td>6</td><td>10</td><td>9</td></tr> <tr><td>23</td><td>8</td><td>13</td><td>27</td><td>12</td><td>11</td></tr> <tr><td>30</td><td>1</td><td>5</td><td>24</td><td>25</td><td>14</td></tr> <tr><td>8</td><td>26</td><td>7</td><td>28</td><td>9</td><td>16</td></tr> <tr><td>8</td><td>9</td><td>13</td><td>8</td><td>12</td><td></td></tr> </table>	5	15	3	6	10	9	23	8	13	27	12	11	30	1	5	24	25	14	8	26	7	28	9	16	8	9	13	8	12		<table border="1"> <tr><td>9</td><td>17</td><td>29</td><td>28</td><td>8</td><td>22</td></tr> <tr><td>13</td><td>21</td><td>27</td><td>16</td><td>29</td><td>13</td></tr> <tr><td>20</td><td>30</td><td>24</td><td>7</td><td>26</td><td>17</td></tr> <tr><td>11</td><td>19</td><td>30</td><td>6</td><td>2</td><td>18</td></tr> <tr><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>42</td><td></td></tr> </table>	9	17	29	28	8	22	13	21	27	16	29	13	20	30	24	7	26	17	11	19	30	6	2	18	7	7	7	7	42	
30	24	11	12	25	21																																																																																							
26	4	29	20	24	19																																																																																							
27	14	14	10	18	15																																																																																							
6	14	28	8	2	25																																																																																							
15	15	15	15	20																																																																																								
5	15	3	6	10	9																																																																																							
23	8	13	27	12	11																																																																																							
30	1	5	24	25	14																																																																																							
8	26	7	28	9	16																																																																																							
8	9	13	8	12																																																																																								
9	17	29	28	8	22																																																																																							
13	21	27	16	29	13																																																																																							
20	30	24	7	26	17																																																																																							
11	19	30	6	2	18																																																																																							
7	7	7	7	42																																																																																								
Вариант № 10	Вариант № 11	Вариант № 12																																																																																										
<table border="1"> <tr><td>30</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td>15</td><td>16</td></tr> <tr><td>5</td><td>29</td><td>9</td><td>5</td><td>7</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>24</td><td>14</td><td>6</td><td>26</td><td>14</td></tr> <tr><td>13</td><td>28</td><td>4</td><td>25</td><td>8</td><td>15</td></tr> <tr><td>6</td><td>6</td><td>13</td><td>20</td><td>15</td><td></td></tr> </table>	30	2	5	6	15	16	5	29	9	5	7	15	16	24	14	6	26	14	13	28	4	25	8	15	6	6	13	20	15		<table border="1"> <tr><td>12</td><td>11</td><td>25</td><td>17</td><td>21</td><td>17</td></tr> <tr><td>22</td><td>18</td><td>14</td><td>8</td><td>1</td><td>14</td></tr> <tr><td>9</td><td>13</td><td>2</td><td>28</td><td>15</td><td>21</td></tr> <tr><td>26</td><td>21</td><td>3</td><td>4</td><td>27</td><td>43</td></tr> <tr><td>19</td><td>22</td><td>23</td><td>17</td><td>14</td><td></td></tr> </table>	12	11	25	17	21	17	22	18	14	8	1	14	9	13	2	28	15	21	26	21	3	4	27	43	19	22	23	17	14		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>24</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>28</td></tr> <tr><td>20</td><td>10</td><td>15</td><td>27</td><td>7</td><td>13</td></tr> <tr><td>15</td><td>15</td><td>12</td><td>25</td><td>19</td><td>15</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>5</td><td>30</td></tr> <tr><td>27</td><td>16</td><td>25</td><td>11</td><td>7</td><td></td></tr> </table>	2	24	4	2	3	28	20	10	15	27	7	13	15	15	12	25	19	15	2	6	3	5	5	30	27	16	25	11	7	
30	2	5	6	15	16																																																																																							
5	29	9	5	7	15																																																																																							
16	24	14	6	26	14																																																																																							
13	28	4	25	8	15																																																																																							
6	6	13	20	15																																																																																								
12	11	25	17	21	17																																																																																							
22	18	14	8	1	14																																																																																							
9	13	2	28	15	21																																																																																							
26	21	3	4	27	43																																																																																							
19	22	23	17	14																																																																																								
2	24	4	2	3	28																																																																																							
20	10	15	27	7	13																																																																																							
15	15	12	25	19	15																																																																																							
2	6	3	5	5	30																																																																																							
27	16	25	11	7																																																																																								
Вариант № 13	Вариант № 14	Вариант № 15																																																																																										
<table border="1"> <tr><td>15</td><td>6</td><td>25</td><td>11</td><td>12</td><td>9</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>20</td><td>27</td><td>30</td><td>18</td></tr> <tr><td>16</td><td>7</td><td>19</td><td>10</td><td>21</td><td>23</td></tr> <tr><td>1</td><td>29</td><td>23</td><td>25</td><td>18</td><td>26</td></tr> <tr><td>11</td><td>22</td><td>31</td><td>6</td><td>6</td><td></td></tr> </table>	15	6	25	11	12	9	13	14	20	27	30	18	16	7	19	10	21	23	1	29	23	25	18	26	11	22	31	6	6		<table border="1"> <tr><td>22</td><td>24</td><td>25</td><td>23</td><td>29</td><td>24</td></tr> <tr><td>1</td><td>21</td><td>10</td><td>7</td><td>19</td><td>14</td></tr> <tr><td>2</td><td>26</td><td>18</td><td>30</td><td>27</td><td>19</td></tr> <tr><td>22</td><td>10</td><td>29</td><td>26</td><td>23</td><td>17</td></tr> <tr><td>22</td><td>9</td><td>12</td><td>13</td><td>18</td><td></td></tr> </table>	22	24	25	23	29	24	1	21	10	7	19	14	2	26	18	30	27	19	22	10	29	26	23	17	22	9	12	13	18		<table border="1"> <tr><td>6</td><td>11</td><td>20</td><td>17</td><td>8</td><td>12</td></tr> <tr><td>1</td><td>25</td><td>3</td><td>18</td><td>17</td><td>17</td></tr> <tr><td>9</td><td>39</td><td>16</td><td>30</td><td>31</td><td>18</td></tr> <tr><td>23</td><td>15</td><td>4</td><td>3</td><td>28</td><td>13</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td><td></td></tr> </table>	6	11	20	17	8	12	1	25	3	18	17	17	9	39	16	30	31	18	23	15	4	3	28	13	10	8	12	14	16	
15	6	25	11	12	9																																																																																							
13	14	20	27	30	18																																																																																							
16	7	19	10	21	23																																																																																							
1	29	23	25	18	26																																																																																							
11	22	31	6	6																																																																																								
22	24	25	23	29	24																																																																																							
1	21	10	7	19	14																																																																																							
2	26	18	30	27	19																																																																																							
22	10	29	26	23	17																																																																																							
22	9	12	13	18																																																																																								
6	11	20	17	8	12																																																																																							
1	25	3	18	17	17																																																																																							
9	39	16	30	31	18																																																																																							
23	15	4	3	28	13																																																																																							
10	8	12	14	16																																																																																								

Вариант № 16	Вариант № 17	Вариант № 18																																																																																										
<table border="1"> <tr><td>7</td><td>10</td><td>16</td><td>27</td><td>19</td><td>17</td></tr> <tr><td>30</td><td>18</td><td>8</td><td>29</td><td>15</td><td>19</td></tr> <tr><td>3</td><td>18</td><td>28</td><td>19</td><td>13</td><td>11</td></tr> <tr><td>9</td><td>12</td><td>2</td><td>25</td><td>21</td><td>13</td></tr> <tr><td>5</td><td>15</td><td>11</td><td>9</td><td>20</td><td></td></tr> </table>	7	10	16	27	19	17	30	18	8	29	15	19	3	18	28	19	13	11	9	12	2	25	21	13	5	15	11	9	20		<table border="1"> <tr><td>4</td><td>21</td><td>12</td><td>8</td><td>1</td><td>21</td></tr> <tr><td>20</td><td>8</td><td>25</td><td>15</td><td>23</td><td>21</td></tr> <tr><td>17</td><td>1</td><td>11</td><td>5</td><td>3</td><td>23</td></tr> <tr><td>23</td><td>10</td><td>24</td><td>6</td><td>5</td><td>23</td></tr> <tr><td>22</td><td>22</td><td>22</td><td>11</td><td>11</td><td></td></tr> </table>	4	21	12	8	1	21	20	8	25	15	23	21	17	1	11	5	3	23	23	10	24	6	5	23	22	22	22	11	11		<table border="1"> <tr><td>5</td><td>3</td><td>24</td><td>10</td><td>25</td><td>24</td></tr> <tr><td>30</td><td>2</td><td>22</td><td>16</td><td>7</td><td>15</td></tr> <tr><td>30</td><td>24</td><td>27</td><td>29</td><td>10</td><td>16</td></tr> <tr><td>15</td><td>17</td><td>21</td><td>2</td><td>3</td><td>24</td></tr> <tr><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>31</td><td>9</td><td></td></tr> </table>	5	3	24	10	25	24	30	2	22	16	7	15	30	24	27	29	10	16	15	17	21	2	3	24	12	13	14	31	9	
7	10	16	27	19	17																																																																																							
30	18	8	29	15	19																																																																																							
3	18	28	19	13	11																																																																																							
9	12	2	25	21	13																																																																																							
5	15	11	9	20																																																																																								
4	21	12	8	1	21																																																																																							
20	8	25	15	23	21																																																																																							
17	1	11	5	3	23																																																																																							
23	10	24	6	5	23																																																																																							
22	22	22	11	11																																																																																								
5	3	24	10	25	24																																																																																							
30	2	22	16	7	15																																																																																							
30	24	27	29	10	16																																																																																							
15	17	21	2	3	24																																																																																							
12	13	14	31	9																																																																																								
Вариант № 19	Вариант № 20	Вариант № 21																																																																																										
<table border="1"> <tr><td>21</td><td>19</td><td>11</td><td>12</td><td>12</td><td>24</td></tr> <tr><td>26</td><td>29</td><td>14</td><td>1</td><td>26</td><td>12</td></tr> <tr><td>39</td><td>1</td><td>22</td><td>8</td><td>25</td><td>18</td></tr> <tr><td>53</td><td>23</td><td>40</td><td>26</td><td>28</td><td>16</td></tr> <tr><td>11</td><td>13</td><td>26</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr> </table>	21	19	11	12	12	24	26	29	14	1	26	12	39	1	22	8	25	18	53	23	40	26	28	16	11	13	26	10	10		<table border="1"> <tr><td>25</td><td>28</td><td>20</td><td>15</td><td>7</td><td>16</td></tr> <tr><td>27</td><td>5</td><td>11</td><td>23</td><td>10</td><td>12</td></tr> <tr><td>1</td><td>25</td><td>14</td><td>16</td><td>16</td><td>14</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>4</td><td>16</td><td>18</td><td>18</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>4</td><td>11</td><td>30</td><td></td></tr> </table>	25	28	20	15	7	16	27	5	11	23	10	12	1	25	14	16	16	14	8	6	4	16	18	18	7	8	4	11	30		<table border="1"> <tr><td>14</td><td>25</td><td>18</td><td>19</td><td>23</td><td>33</td></tr> <tr><td>2</td><td>17</td><td>16</td><td>24</td><td>2</td><td>25</td></tr> <tr><td>29</td><td>3</td><td>7</td><td>15</td><td>22</td><td>25</td></tr> <tr><td>5</td><td>20</td><td>17</td><td>23</td><td>10</td><td>17</td></tr> <tr><td>33</td><td>11</td><td>11</td><td>11</td><td>34</td><td></td></tr> </table>	14	25	18	19	23	33	2	17	16	24	2	25	29	3	7	15	22	25	5	20	17	23	10	17	33	11	11	11	34	
21	19	11	12	12	24																																																																																							
26	29	14	1	26	12																																																																																							
39	1	22	8	25	18																																																																																							
53	23	40	26	28	16																																																																																							
11	13	26	10	10																																																																																								
25	28	20	15	7	16																																																																																							
27	5	11	23	10	12																																																																																							
1	25	14	16	16	14																																																																																							
8	6	4	16	18	18																																																																																							
7	8	4	11	30																																																																																								
14	25	18	19	23	33																																																																																							
2	17	16	24	2	25																																																																																							
29	3	7	15	22	25																																																																																							
5	20	17	23	10	17																																																																																							
33	11	11	11	34																																																																																								

Вариант № 22						Вариант № 23						Вариант № 24					
8	1	19	1	15	18	30	20	27	15	26	33	11	10	15	8	7	16
8	27	30	7	7	23	25	6	28	20	5	33	12	14	29	20	20	15
10	20	19	26	20	17	19	24	11	29	23	33	18	7	5	25	28	24
18	28	25	7	22	22	1	4	6	6	8	11	24	4	30	24	26	15
21	21	9	9	20		22	22	22	22	22		15	15	15	15	10	
Вариант № 25						Вариант № 26						Вариант № 27					
29	53	39	29	22	33	12	6	29	19	21	13	28	26	12	22	11	24
15	33	16	3	3	18	14	3	30	10	10	27	20	23	25	22	9	27
16	27	16	3	5	32	15	27	28	11	24	16	23	15	11	22	7	16
35	50	39	20	23	17	1	23	25	15	13	24	1	26	10	11	19	13
20	20	20	20	20		14	14	14	14	14		16	16	16	16	16	
Вариант № 28						Вариант № 29						Вариант № 30					
29	4	7	6	16	14	20	5	27	10	26	15	17	29	2	8	18	32
21	13	25	21	7	14	7	17	18	21	28	25	14	8	25	15	21	8
20	10	12	6	2	14	27	21	9	23	26	5	29	11	15	13	20	13
17	7	4	6	19	18	1	13	17	23	7	15	27	15	19	8	14	27
12	12	12	12	12		7	8	13	12	20		15	15	15	15	20	
Вариант № 31						Вариант № 32						Вариант № 33					
14	5	27	29	23	18	30	17	26	14	3	24	17	10	7	5	13	34
17	7	16	19	2	14	18	14	27	6	20	8	12	28	25	9	10	18
20	12	15	29	5	16	8	24	17	17	26	12	14	15	18	9	28	6
14	24	18	7	13	12	1	18	21	16	12	16	25	16	21	12	8	12
8	11	11	9	21		11	11	11	11	16		10	10	10	10	30	

Образец выполнения РГЗ «Транспортная задача» (вариант 33)

1. Условие баланса выполнено: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 34 + 18 + 6 + 12 = 70$, $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 10 + 10 + 10 + 10 + 30 = 70$. Последовательность операций метода СЗУ представлена в следующей таблице (числа в скобках указывают номер шага, на котором заполнена клетка или выделены соответствующие строки и столбцы):

	(1)	(2)	(3)	(5)		
(4)	$10_{(1)}^{17}$	$10_{(2)}^{10}$	$10_{(3)}^7$	$4_{(4)}^5$	13	34, 24, 14, 4
	12	28	25	$6_{(5)}^9$	12^{10}	18, 12
	14	15	18	9	6^{28}	6
	25	16	21	12	12^8	12
	10	10	10	10,6	30	

На 1-ом шаге левая верхняя (северо-западная) клетка (1,1) заполняется числом $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{34, 10\} = 10$; 1-ый столбец, для которого равна нулю невязка 1-го шага $\sigma(1,1) = b_1 - x_{11} = 10 - 10 = 0$, выделяется; в 1-ой строке запас $a_1 = 34$ заменяется на невязку 1-го шага $\delta(1,1) = a_1 - x_{11} = 34 - 10 = 24$. В части таблицы, полученной исключением выделенного 1-го столбца, северо-западной будет клетка (1,2). На 2-ом шаге эта клетка заполняется числом $x_{12} = \min\{\delta(1,1), \sigma(2,1)\} = \min\{24, 10\} = 10$; 2-ой столбец, для которого $\sigma(2,2) = \sigma(2,1) - x_{12} = 10 - 10 = 0$, выделяется; невязка 1-ой строки $\delta(1,1) = 24$ заменяется на $\delta(1,2) = \delta(1,1) - x_{12} = 24 - 10 = 14$. Операции 3-го, 4-го и 5-го шагов выполняются аналогично. После 5-го шага остаётся невыделенным только один столбец (5-ый); метод СЗУ завершается записью невязок невыделенных строк $\delta(2,5) = 12$, $\delta(3,5) = 6$, $\delta(4,5) = 12$ в соответствующие клетки 5-го столбца и вычислением $F_{СЗ} = 17 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 4 + 9 \cdot 6 + 10 \cdot 12 + 28 \cdot 6 + 8 \cdot 12 = 798$.

Последовательность операций метода МС представлена в следующей таблице:

	(4)	(2)	(1)	(5)	
	4 ¹⁷	10 ¹⁰ ₍₄₎	10 ⁷ ₍₂₎	10 ⁵ ₍₁₎	13
	0 ¹²	28	25	9	18 ¹⁰ ₍₅₎
	6 ¹⁴	15	18	9	28
(3)	25	16	21	12	12 ⁸ ₍₃₎
	10	10	10	10	30,18

Метод МС отличается от метода СЗУ только правилом выбора очередной занятой клетки. На первом шаге заполняется клетка (1,4) с минимальной стоимостью $c_{14} = 5$, в неё записывается число $x_{14} = \min\{a_1, b_4\} = \min\{34, 10\} = \min\{34, 10\} = 10$. Далее находим $\delta(1,1) = a_1 - x_{14} = 34 - 10 = 24$, $\sigma(4,1) = b_4 - x_{14} = 10 - 10 = 0$; выделяем 4-ый столбец и заменяем $a_1 = \delta(1,0) = 34$ на $\delta(1,1) = 24$. В клетках части таблицы без выделенного 4-го столбца $c_{13} = 7$ - минимальная стоимость; на 2-ом шаге полагаем $x_{13} = \min\{\delta(1,1), \sigma(3,1)\} = \min\{24, 10\} = 10$. После 3-го шага выделены 4-ый столбец, 3-ий столбец и 4-ая строка; в оставшейся части таблицы на 4-ом шаге можно заполнять любую из клеток (1,2) или (2,5) с минимальными стоимостями $c_{12} = c_{25} = 10$ (выбрана клетка (1,2)). На 5-ом шаге $x_{25} = 18$, $\delta(2,5) = \sigma(5,5) = 18 - 18 = 0$ и возможны два продолжения: выделить 5-ый столбец и заменить во 2-ой строке $\delta(2,4) = 18$ на $\delta(2,5) = 0$ или выделить 2-ую строку и заменить в 5-ом столбце $\sigma(5,4) = 18$ на $\sigma(5,5) = 0$ (выбран первый вариант). После 5-го шага все столбцы, кроме 1-го, уже выделены; метод МС завершается записью невязок невыделенных строк $\delta(1,5) = 4$, $\delta(2,5) = 0$, $\delta(3,5) = 6$ в соответствующие клетки 1-го столбца и вычислением $F_{МС} = 17 \cdot 4 + 10 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot 18 + 14 \cdot 6 + 8 \cdot 12 = 648$.

В данной ТЗ имеем $F_{МС} = 648 < 798 = F_{СЗУ}$, т.е. план метода МС ближе к оптимальному, чем план метода СЗУ.

2. Примем за начальную таблицу ТЗ, построенную методом МС:

	17	10	7	5	15	
0	- 4	10	10	10	+ 13	34
-5	+ 0	23	23	9	- 18	18
-3	6	8	14	7	16	6
-7	15	13	21	14	12	12
	10	10	10	10,6	30	

$F_0 = F_{MC} = 648$
 $\theta_0 = 4 = x_{11}$
 $\Delta F_0 = (-2) \cdot 4 = -8$

Потенциалы строк и столбцов $u_1 = 0, \dots, u_4 = -7, v_1 = 17, \dots, v_5 = 15$, записанные слева от таблицы и над ней, вычисляются следующим образом. Значение одного из потенциалов выбирается произвольно (выбрано $u_1 = 0$), остальные находятся последовательно из равенств $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток: $v_1 = c_{11} - u_1 = 17 - 0 = 17, v_2 = 10 - 0 = 10, v_3 = 7 - 0 = 7, v_4 = 5 - 0 = 5; u_2 = c_{21} - v_1 = 12 - 17 = -5, u_3 = 14 - 17 = -3; v_5 = c_{25} - u_2 = 10 - (-5) = 15; u_4 = c_{45} - v_5 = 8 - 15 = -7.$

Псевдостоимости s_{ij} , записанные в левых нижних углах незанятых клеток, вычисляются по формуле $s_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$: $s_{15} = 13 - 0 - 15 = -2, s_{23} = 28 - (-5) - 10 = 23, \dots, s_{44} = 12 - (-7) - 5 = 14.$ Условие оптимальности не выполнено – в таблице есть (в данном случае единственная) клетка с отрицательной псевдостоимостью $s_{15} = -2 < 0.$ Чтобы перейти к следующей таблице ТЗ (улучшить план), надо построить цикл C_{15} , содержащий клетку (1,5), в котором все остальные клетки – занятые, и приписать клеткам цикла метки «+» и «-» (в клетке (1,5) ставится метка «+», в соседних клетках цикла - метки разных знаков). В рассматриваемой таблице такой цикл содержит занятые клетки (2,5) с меткой «-», (2,1) с меткой «+» и (1,1) с меткой «-». Далее находим $\theta = \min \{x_{25}, x_{11}\} = \min \{18, 4\} = 4$ (меньшее из чисел x_{ij} в клетках с меткой «-») и клетку (1,1), в которой $x_{11} = \theta = 4.$ Новая таблица получается перестройкой по циклу C_{15} : в (1,5) записывается $\tilde{x}_{15} = \theta = 4;$ (1,1) становится незанятой; $x_{21} = 0$ и $x_{25} = 18$ заменяются на $\tilde{x}_{21} = x_{21} + \theta = 0 + 4 = 4$ и $\tilde{x}_{25} = x_{25} - \theta = 18 - 4 = 14.$

	15	10	7	5	13		
0	2	10	10	10	4	34	
-3	4	21	21	7	14	18	$F_1 = F^* = 640$
-1	6	6	12	5	16	6	
-5	15	11	19	12	12	12	
	10	10	10	10	30		

Вычисляя новые потенциалы и псевдостоимости, убеждаемся, что в данном случае уже после первой перестройки получается опорная таблица ТЗ, которая удовлетворяет условию оптимальности (все псевдостоимости s_{ij} неотрицательны) и представляет оптимальный план $X^* = (x_{ij}^*)$: $x_{12}^* = x_{13}^* = x_{14}^* = 10$, $x_{15}^* = x_{21}^* = 4$, $x_{25}^* = 14$, $x_{31}^* = 6$, $x_{45}^* = 12$, $x_{ij}^* = 0$ для всех остальных перевозок. Этот оптимальный план - единственный, так как $s_{ij} > 0$ ($s_{ij} \neq 0$) во всех незанятых клетках таблицы. Новая, в данном случае уже минимальная, стоимость всех перевозок находится по формуле $F^* = F_1 = F_0 + \Delta F_0 = F_0 + s_{15}^{(0)} \cdot \theta_0 = 648 + (-2) \cdot 4 = 640$. Проверка полученного значения F^* непосредственно по заключительной таблице метода потенциалов даёт тот же результат, $F^* = 10 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + 13 \cdot 4 + 12 \cdot 4 + 10 \cdot 14 + 14 \cdot 6 + 8 \cdot 12 = 640$.

3. Отказ 5-го потребителя от получения продукта соответствует переходу к открытой модели ТЗ, в которой $m = n = 4$ и запасы превышают потребности на 30 единиц. Для сведения этой модели к закрытой надо ввести фиктивный 5-ый пункт потребления с потребностью $b_5 = 30$ и нулевыми стоимостями перевозок $c_{i5} = 0$, $1 \leq i \leq 4$. Таким образом для ответа на третий вопрос надо решить ТЗ, которая отличается от первоначальной только стоимостями перевозок в 5-ый пункт потребления.

При решении новой задачи методом потенциалов примем за начальную заключительную (представляющую оптимальный план) таблицу ТЗ из решения исходной задачи, заменив на нули стоимости в клетках 5-го столбца. Такой выбор начальной таблицы обычно «ускоряет» решение новой задачи, в данном случае оптимальный план получается уже после первой перестройки.

	12	10	7	5	0	
0	17	10	7	5	4	34
0	+ 4	12	28	25	9	18
2	- 6	14	15	18	9	6
0	25	16	21	12	12	12
	10	10	10	10	30	

$F_0 = 352$
 $\theta = 6 = x_{31}$
 $\Delta F_0 = (-2) \cdot 6 = -12$

	12	10	7	5	0	
0	5	10	7	5	4	34
0	10	12	28	25	9	18
0	2	14	15	18	9	6
0	13	25	16	21	12	12
	10	10	10	10	30	

$F_1 = F^* = 340$

Ответ: Новый оптимальный план перевозок задаётся матрицей $X^* = \{x_{ij}^*\}$ размера 4×4 , где $x_{12}^* = x_{13}^* = x_{14}^* = x_{21}^* = 10$, $x_{ij}^* = 0$ в остальных случаях. Стоимость перевозок $F^* = 340$. Из пунктов A_1 и A_2 вывозятся не все запасы, на складах остаётся $x_{15}^* = 4$ и $x_{25}^* = 8$ единиц соответственно, в пунктах A_3 и A_4 остаются на складах все запасы, $x_{35}^* = 6$, $x_{45}^* = 12$.

РГЗ «Матричные игры»

Найти решение в чистых или смешанных стратегиях и цену каждой из трёх игр, заданных своими платёжными матрицами:

Вариант 1

$$\begin{array}{ccc} 1. \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 2 & 9 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & 2. \begin{pmatrix} -7 & 0 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & 11 & 6 \\ 3 & 7 & -3 & -12 & 0 \end{pmatrix} & 3. \begin{pmatrix} -1 & 0 & -9 & -1 & 0 \\ 9 & -2 & 11 & -6 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & 3 \\ -6 & 1 & -4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Вариант 2

$$\begin{array}{ccc} 1. \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} & 2. \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 & -4 & -3 \\ -7 & -8 & 0 & 1 & -4 \\ -3 & -4 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} & 3. \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 4 & -5 \\ 7 & -3 & 6 & -6 & -3 \\ 10 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -6 & 17 & 12 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Вариант 3

$$\begin{array}{ccc} 1. \begin{pmatrix} 7 & -2 & 9 & 0 & -1 \\ 8 & -3 & 9 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ -4 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & 2. \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 & 2 & -6 \\ 11 & 6 & 12 & -6 & 5 \\ 5 & 0 & 10 & 12 & -1 \\ -1 & 9 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} & 3. \begin{pmatrix} 2 & -10 & -5 & 11 & 20 \\ 7 & -6 & 3 & 17 & -9 \\ 5 & -3 & 8 & 0 & -2 \\ -4 & -4 & -3 & 5 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Вариант 4

$$\begin{array}{ccc} 1. \begin{pmatrix} 5 & 9 & -7 & 8 & 6 \\ 13 & 2 & 17 & 0 & 15 \\ 0 & 14 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & 11 & 1 & 8 & -2 \end{pmatrix} & 2. \begin{pmatrix} 11 & 4 & -3 & -2 & 3 \\ -5 & 7 & 2 & -4 & -1 \\ 8 & 10 & 0 & -1 & 7 \\ 12 & 8 & 4 & 12 & 6 \end{pmatrix} & 3. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 10 & 2 & 12 \\ 5 & 4 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 11 & 1 & 13 \\ 6 & 4 & -7 & 3 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Вариант 5

$$\begin{array}{ccc} 1. \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 9 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 2. \begin{pmatrix} 10 & 0 & -3 & 2 & -5 \\ 8 & -3 & 2 & 7 & -10 \\ 5 & -2 & 4 & 6 & -5 \\ 6 & 3 & -1 & 10 & -6 \end{pmatrix} & 3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & -17 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 7 & 3 & -9 \\ 1 & -8 & -9 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & -10 \end{pmatrix} \end{array}$$

Вариант 6

$$1. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 8 & -6 \\ 2 & 10 & 2 & 5 & -8 \\ 9 & 8 & -11 & -6 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & -2 \\ 3 & 4 & 8 & 4 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 10 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

$$1. \begin{pmatrix} -1 & 11 & -2 & 12 & -3 \\ -1 & 9 & 0 & 12 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 6 & 15 & 0 & 18 & 9 \\ 14 & -1 & 8 & 1 & 16 \\ -2 & 7 & 8 & 10 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 6 & 6 & 10 & 8 & 7 \\ 8 & 5 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & -1 & 7 & 10 & -4 \\ 5 & 3 & -3 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

$$1. \begin{pmatrix} -7 & 5 & -1 & 7 & -3 \\ 2 & -2 & 7 & 0 & -4 \\ 8 & -5 & 0 & -3 & -3 \\ -7 & 0 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -1 & -2 \\ -7 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 12 & 7 & 5 & 8 & 5 \\ 11 & 13 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & -3 & -3 & -5 \\ 10 & 8 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

$$1. \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 & 8 & -3 \\ -4 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 8 & 2 & -3 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 6 & -6 & 1 & -4 & -5 \\ 9 & -11 & 2 & -6 & 8 \\ 5 & -3 & 0 & -4 & -1 \\ -2 & 7 & 5 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 9 & 11 & -2 & -4 & 12 \\ 9 & -5 & 6 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 8 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 10 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 10

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 2 & -8 \\ 3 & -1 & 1 & -9 & -2 \\ -2 & -5 & -4 & 6 & -7 \\ 1 & 0 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 & 9 & 1 \\ -2 & 8 & -3 & 9 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} -6 & 11 & -10 & -9 & -8 \\ -2 & 0 & 4 & -5 & -6 \\ 3 & -9 & 1 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

Вариант 11

$$1. \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -3 \\ -5 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 8 & -2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 & 10 \\ 8 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 & 2 & 1 \\ 7 & 11 & 3 & -5 & 8 \\ 9 & -3 & 7 & 0 & 10 \\ 3 & 8 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 12

$$1. \begin{pmatrix} 7 & 1 & 9 & -10 & -1 \\ -5 & -5 & -3 & 2 & -7 \\ -4 & 2 & 1 & -4 & -4 \\ -5 & 6 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 7 & -3 \\ -2 & -6 & 9 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 5 & 9 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & -2 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 & 14 \\ 5 & -3 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 13

$$1. \begin{pmatrix} 9 & 1 & 8 & -3 & -5 \\ 9 & -2 & 7 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 2 & -9 & 3 & 8 & 9 \\ -1 & -4 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 3 & 5 & -7 \\ 5 & -4 & -7 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 & -10 & 2 \\ -5 & -4 & -11 & -5 & 3 \\ -10 & 0 & -6 & -5 & -7 \\ -4 & 1 & -2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 14

$$1. \begin{pmatrix} 7 & -5 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 7 & -4 \\ -3 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 15 & 3 & 8 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} -8 & 1 & 9 & 0 & -3 \\ 10 & 3 & 7 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & -3 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 15

$$1. \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 7 & -5 & 9 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 & 5 & 1 \\ -2 & 14 & 16 & 20 & -5 \\ 4 & -4 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -3 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 & 6 & 8 \\ -5 & 7 & -2 & 0 & 3 \\ 8 & 11 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 16

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 6 & -2 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & -4 & 11 & 3 \\ 4 & -1 & 11 & 7 & -2 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} -6 & 2 & 7 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & -5 & 9 \\ -3 & 7 & -2 & -2 & 0 \\ -8 & 3 & -6 & 8 & -6 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 9 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 17

$$1. \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -3 & -4 \\ -4 & -4 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & -5 & -8 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 4 & -2 & -7 \\ 11 & 0 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 & 4 & -5 \\ -6 & 4 & 6 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Вариант 18

$$1. \begin{pmatrix} 9 & -4 & 11 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 7 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & -2 & 6 \\ -3 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 & -1 & 7 \\ 6 & 0 & 7 & -2 & 8 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & -5 & 8 \\ 5 & -1 & 5 & -10 & -3 \\ -3 & 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 19

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 10 & -3 & 9 & -5 \\ -2 & 10 & 0 & 8 & -3 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ -3 & 5 & -7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 & 3 & -2 \\ -7 & 9 & -5 & 3 & -5 \\ 1 & 6 & -3 & 4 & 4 \\ 8 & 3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 20

$$1. \begin{pmatrix} 9 & -2 & 5 & 14 & -3 \\ 7 & 7 & 5 & -4 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 & 8 & 3 \\ 8 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ 5 & -7 & 0 & -2 & -5 \\ -3 & 1 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & -6 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -7 & -8 & 4 \\ -5 & -3 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Вариант 21

$$1. \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 & -4 & -5 \\ -4 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 & 0 & 3 \\ 8 & 5 & 2 & 2 & 7 \\ -5 & 8 & -5 & 1 & -7 \\ 6 & -1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 11 & 0 & -1 & 13 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & -2 \\ -1 & 10 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 22

$$1. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 8 & 4 & 6 & -4 & 7 \\ -3 & 0 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 & -6 & 9 \\ -1 & 0 & 5 & -3 & 8 \\ 4 & 5 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 8 & -5 & 6 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 8 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 8 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 23

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & -7 \\ -5 & -5 & -8 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -5 & -6 \\ -3 & -4 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 11 & -10 & 7 & -8 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & 8 & -5 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 6 & 10 & 6 & 9 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 7 & -1 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 24

$$1. \begin{pmatrix} 5 & -3 & -15 & -2 & 3 \\ 8 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 13 & 17 & 17 & -5 \\ 4 & -11 & -7 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & -2 \\ 3 & -9 & -6 & 8 & 7 \\ -2 & -2 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 9 & -2 \\ 6 & 4 & 3 & 9 & 0 \\ -5 & 6 & 7 & -2 & 5 \\ -2 & 6 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 25

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & -3 & 9 \\ 1 & 5 & 2 & -2 & 9 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ 6 & -6 & 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 4 & -2 & -9 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -6 & 3 & 8 \\ -3 & 0 & -5 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 & 0 & 2 \\ 16 & 0 & 9 & -2 & 13 \\ 10 & 5 & -3 & 4 & -2 \\ -2 & 7 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 26

1.
$$\begin{pmatrix} 12 & -3 & 10 & -6 & 10 \\ 3 & 10 & 5 & 9 & 0 \\ 7 & 7 & 0 & 4 & 5 \\ 4 & 13 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & -3 & -6 & -5 \\ -3 & -4 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -4 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 7 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 27

1.
$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -7 & 7 & -4 \\ -5 & 6 & 3 & -3 & 8 \\ 4 & -3 & -5 & 7 & -4 \\ -2 & 5 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 14 & -8 & 16 & -4 & -5 \\ -4 & 4 & -2 & -4 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 7 & -4 & -5 \\ 6 & 2 & 1 & 8 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Вариант 28

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 9 & 7 \\ 7 & -3 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 & -6 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & -8 & 0 \\ -9 & -1 & 2 & -6 & 5 \\ 0 & -4 & 3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 & 6 & -3 \\ -5 & 5 & -6 & 8 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & -5 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 29

1.
$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 & -6 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & -4 & 7 \\ -7 & 2 & -3 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 4 & 9 \\ -5 & 6 & -1 & -5 & -1 \\ 8 & 0 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 3 & 14 & -2 & 1 & -5 \\ 3 & -4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 30

1.
$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 8 & -1 & 10 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 & -6 \\ 5 & -2 & 2 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & -5 & 5 & 1 \\ -4 & 5 & -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 11 & 7 & 5 \\ 1 & 8 & -6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 31

1.
$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & -5 & 0 \\ 18 & -4 & 20 & 10 & -7 \\ 2 & 3 & 3 & -6 & 1 \\ -6 & 6 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 & -5 & 7 \\ -3 & -4 & 3 & -5 & 6 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ -7 & 6 & -9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 32

$$1. \begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 & 4 \\ -5 & -2 & 5 & -8 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 6 & 1 \\ -4 & 5 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 33

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 \\ -2 & 7 & 0 & 8 & -4 \\ 7 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ -5 & 4 & 7 & -6 & 1 \\ -2 & -5 & 9 & 8 & 3 \\ -4 & 3 & -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} -2 & 0 & -8 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & -4 & 4 \\ 6 & -3 & 8 & -5 & 10 \\ -6 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вариант 34

$$1. \begin{pmatrix} 7 & -5 & 5 & -7 & 5 \\ 0 & 11 & 13 & 9 & -3 \\ 8 & 3 & -11 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & 4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} -6 & -6 & -3 & -4 & -2 \\ 5 & 0 & -4 & -6 & -7 \\ -5 & -4 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} -9 & 8 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & -4 & -2 & 5 & -5 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Образец выполнения РГЗ «Матричные игры» (вариант 34)

Исследование игры обычно начинается с сокращения платёжной матрицы (исключения доминируемых чистых стратегий). В сокращённой игре находятся гарантированные выигрыши и проигрыши (оставшихся) чистых стратегий, нижняя и верхние цены в чистых стратегиях α и β . При $\alpha = \beta$ в платёжной матрице есть седловые элементы a_{ij} , игра имеет решение (A_i, B_j) в чистых стратегиях, цена игры равна $u^* = a_{ij}$. При $\alpha < \beta$ ищется решение в смешанных стратегиях: если в сокращённой матрице $m = 2$ или $n = 2$, решение и цену игры можно найти графическим методом; если $m > 2, n > 2$ игра сводится к задаче ЛП.

1. По матрице игры находим $A_4 \prec A_1, B_1 \succ B_5, B_2 \succ B_4$, исключаем доминируемые стратегии A_4, B_1, B_2 , дальнейшее сокращение невозможно; по сокращённой матрице определяем гарантированные выигрыши и проигрыши, нижнюю цену α и верхнюю цену β в чистых стратегиях:

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c|ccc|c}
 7 & -5 & 5 & -7 & 5 \\
 0 & 11 & 13 & 9 & -3 \\
 8 & 3 & -11 & 1 & 5 \\
 \hline
 4 & -5 & 4 & -8 & 3
 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & B_3 & B_4 & B_5 \\
 A_1 & \left(\begin{array}{ccc|c}
 5 & -7 & 5 & -7 \\
 13 & 9 & -3 & -3 \\
 -11 & 1 & 5 & -11 \\
 \hline
 & 13 & 9 & 5
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Игра не имеет решений в чистых стратегиях, т.к. $\alpha = -3 < 5 = \beta$. В сокращённой матрице $m = n = 3 > 2$, графический метод не применим. При сведении игры к задаче ЛП к элементам сокращённой матрицы надо прибавить число $a > -\alpha = 3$. Выбираем $a = 4$, сокращённая матрица с учётом «сдвига» элементов запишется в виде

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 9 \\ 17 & 13 & 1 \\ -7 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

По матрице \tilde{M} записываем сразу начальную симплексную таблицу T_0 первой из соответствующих \tilde{M} задач ЛП, см. задачу (36-37) в [1]. Обратите внимание – индексы переменных x_j соответствуют номерам неисключённых стратегий B_3, B_4, B_5 , индексы S_i – номерам неисключённых стратегий A_1, A_2, A_3 . Далее применяется симплекс-метод.

T_0	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$		T_1	$-S_2$	$-x_4$	$-x_5$	
S_1	9	-3	9	1	S_1	-9/17	-168/17	144/17	8/17
S_2	17	13	1	1 \rightarrow	x_3	1/17	13/17	1/17	1/17 \rightarrow
S_3	-7	5	9	1	S_3	7/17	176/17	160/17	24/17
F	-1	-1	-1	0	F	1/17	-4/17	-16/17	1/17

T_2	$-S_2$	$-x_4$	$-S_1$		T_3	(y_2)	(y_3)	(y_1)	
						$-S_2$	$-S_3$	$-S_1$	
x_5	$-1/16$	$-7/6$	$7/144$	$1/18$	x_5				$5/48$
x_3	$1/16$	$5/6$	$-1/144$	$1/18$	x_3				$1/48$
S_3	1	$64/3$	$-10/9$	$8/9$	x_4				$1/24$
F	0	$-4/3$	$1/9$	$1/9$	F	$1/16$	$1/16$	$1/24$	$1/6$

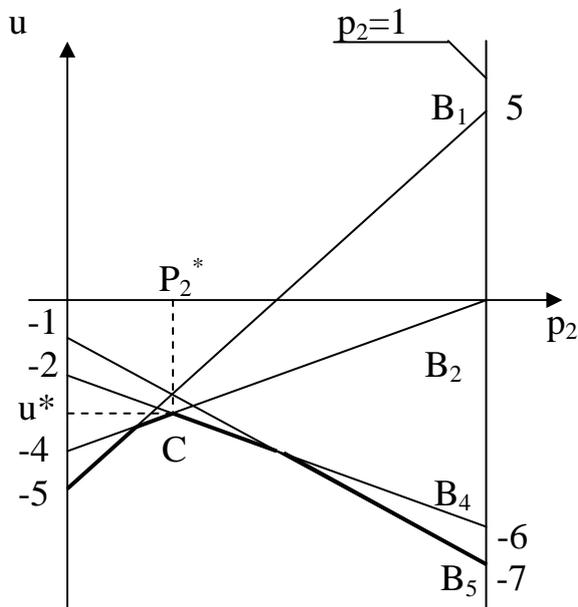
По заключительной таблице T_3 находим оптимальные планы и значения целевых функций пары двойственных задач, соответствующих игре с матрицей \tilde{M} : $x_3^* = 1/48$, $x_4^* = 1/24$, $x_5^* = 5/48$; $y_1^* = 1/24$, $y_2^* = 1/16$, $y_3^* = 1/16$; $F^* = G^* = d = 1/6$. Цена \tilde{u}^* и вероятности $\tilde{p}_i^*, \tilde{q}_j^*$ в решении $(\tilde{p}^*, \tilde{q}^*)$ этой игры вычисляются по формулам (40) из [1]: $\tilde{u}^* = 1/d = 6$; $\tilde{p}_1^* = y_1^*/d = 1/4$, $\tilde{p}_2^* = y_2^*/d = 3/8$, $\tilde{p}_3^* = y_3^*/d = 3/8$, $\tilde{q}_3^* = x_3^*/d = 1/8$; $\tilde{q}_4^* = x_4^*/d = 1/4$, $\tilde{q}_5^* = x_5^*/d = 5/8$. Для цены исходной игры имеем $u^* = \tilde{u}^* - a = 6 - 4 = 2$. В решении (p^*, q^*) исходной игры вероятности доминируемых стратегий равны нулю, $p_4^* = q_1^* = q_2^* = 0$, все остальные вероятности p_i^*, q_j^* равны вероятностям $\tilde{p}_i^*, \tilde{q}_j^*$ с теми же номерами.

Ответ: $p^* = (1/4, 3/8, 3/8, 0)$, $q^* = (0, 0, 1/8, 1/4, 5/8)$, $u^* = 2$.

2. По матрице игры находим $A_1 \prec A_3$, $A_4 \prec A_2$, $B_3 \succ B_4$ и исключаем доминируемые стратегии A_1, A_4, B_3 ,

$\begin{pmatrix} -6 & -6 & -3 & -4 & -2 \\ 5 & 0 & -4 & -6 & -7 \\ -5 & -4 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -8 & -8 \end{pmatrix}$	\rightarrow	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>B_1</td> <td>B_2</td> <td>B_4</td> <td>B_5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>A_2</td> <td>$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$</td> <td>$-7$</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>A_3</td> <td>$\begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$</td> <td>$-5$</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>5</td> <td>0</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td></td> </tr> </table>		B_1	B_2	B_4	B_5		A_2	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$	-7				A_3	$\begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	-5					5	0	-2	-1	
	B_1	B_2	B_4	B_5																						
A_2	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$	-7																								
A_3	$\begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	-5																								
	5	0	-2	-1																						

Игра не имеет решения в чистых стратегиях, т.к. $\alpha = -5 < -2 = \beta$. В сокращённой игре у игрока А всего две стратегии A_2 и A_3 , к ней применим графический метод. По сокращённой матрице находим выигрыши $u(p, B_j)$ стратегии $(p_2, p_3) = (p_2, 1 - p_2)$ и строим графики соответствующих прямых:



$$u(p, B_1) = 5p_2 - 5p_3 = 10p_2 - 5,$$

$$u(p, B_2) = 0 \cdot p_2 - 4p_3 = 4p_2 - 4,$$

$$u(p, B_4) = -6 \cdot p_2 - 2p_3 = -4p_2 - 2,$$

$$u(p, B_5) = -7p_2 - p_3 = -6p_2 - 1.$$

Прямые $u = u(p, B_j)$ легко строятся по точкам их пересечений с осью Ou и вертикальной прямой $p_2 = 1$: ординаты этих точек равны элементам соответствующего столбца сокращённой матрицы.

Например, прямая $u = u(p, B_4)$ проходит через точки $p_2 = 0, u = -2$ и $p_2 = 1, u = -6$. Графиком зависимости гарантированного выигрыша $\alpha(p)$ стратегии $p = (p_2, p_3)$ от вероятности p_2 будет нижняя огибающая четырёх прямых, которая в данном случае состоит из отрезков всех четырёх прямых. Наибольшую ординату на выпуклой ломаной $u = \alpha(p)$ имеет точка C пересечения прямых, соответствующих стратегиям B_2 и B_4 .

Вероятность p_2^* из решения игры (p^*, q^*) и цена u^* находятся как координаты точки C , т.е. из равенств $4p_2^* - 4 = -4p_2^* - 2 = u^*$. Решив систему, получим $p_2^* = 1/4, u^* = -3$, затем находим $p_3^* = 1 - p_2^* = 3/4$; вероятности p_1^* и p_4^* доминируемых стратегий равны 0. В смешанной стратегии q^* игрока В не равны нулю только q_2^* и q_4^* , соответствующие прямым $u = u(p, B_2)$ и $u = u(p, B_4)$ с угловыми коэффициентами $k_2 = 4, k_4 = -4$. Эти вероятности находятся из системы $4q_2^* + (-4)q_4^* = 0, q_2^* + q_4^* = 1$. Решив систему, получим $q_2^* = q_4^* = 1/2$.

Ответ: $p^* = (0, 1/4, 3/4, 0)$, $q^* = (0, 1/2, 0, 1/2, 0)$, $u^* = -3$.

3. По матрице игры находим $A_3 \prec A_4, B_2 \succ B_5, B_3 \succ B_5, B_4 \succ B_5$. После исключения доминируемых стратегий A_3, B_2, B_3, B_4 можно не продолжать сокращения, а сразу найти верхнюю и нижнюю цены α и β ,

$$\begin{pmatrix} -9 & 8 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ \cancel{0} & \cancel{-4} & \cancel{-2} & \cancel{5} & \cancel{-5} \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} & B_1 & B_5 \\ A_1 & \begin{pmatrix} -9 & -3 \end{pmatrix} & -9 \\ A_2 & \begin{pmatrix} 0 & -6 \end{pmatrix} & -6 \\ A_4 & \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} & \boxed{0} \\ & 4 & \boxed{0} \end{matrix}$$

В данной игре $\alpha = \beta = 0$, $a_{45} = 0$ - седловой элемент платёжной матрицы. Игра имеет решение (A_4, B_5) в чистых стратегиях и цену $u^* = a_{45} = 0$.

Библиографический список

1. Транспортная задача. Матричные игры: Методические указания для студентов экономических специальностей / Сост. М.Н. Соколовский. - Омск: Изд-во ОмГТУ, 2008. – 46с.