Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

Г.А.Троценко, О.Г.Жукова, М.В.Мендзив

ПРАКТИКУМ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

Стационарное уравнение. Интегральные уравнения

Омск –2007

УДК 51:53 (075)
ББК 22.311я 73
Т 76

Рецензенты:

Николаев В.Б., кандидат физ.-мат. наук, доцент Омского государственного университета;

Пичугина А.Н., кандидат физ.-мат. наук, преподаватель кафедры «Математическое моделирование» Омского государственного университета.

Г. А. Троценко, О. Г. Жукова, М. В. Мендзив
Т 76 Практикум по уравнениям математической физики. Стационарное уравнение. Интегральные уравнения. – Омск: изд-во ОмГТУ, 2007. – 72с.

Практикум предназначен для методического обеспечения практических занятий по новому годовому курсу «Уравнения математической физики» для студентов специальности 071100 «Динамика и прочность машин». Содержит решения типовых задач, набор задач для самостоятельного решения с ответами.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

УДК 51:53 (075)
ББК 22.311я 73

Тема 1. СТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение

$$\Delta u = -f, \tag{1.0}$$

где Δu – лапласиан, f – заданная функция, называется *уравнением Пуассона*.

При $f \equiv 0$ уравнение Пуассона называется *уравнением Лапласа*

$$\Delta u = 0.$$

В декартовых, цилиндрических и сферических координатах соответственно лапласиан имеет следующий вид:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\Theta}\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\Theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Для уравнения (1.0) в области $\mathcal{D}$, ограниченной замкнутой поверхностью **S**, ставятся следующие краевые задачи:

1. *Задача Дирихле*

В области $\mathcal{D}$ найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию, удовлетворяющую уравнению (1.0) и принимающую на границе **S** заданные значения

$$u\big|_S = u_0.$$

2. *Задача Неймана*

В области $\mathcal{D}$ найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию, удовлетворяющую уравнению (1.0) и на поверхности **S** условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = u_1,$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению единичного вектора внешней нормали n к S.

3. *Смешанная задача*

Найти решение уравнения (1.0), удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha\, u\Big|_S = u_2.$$

1.1. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге формулируется так: найти функцию $u = u(\rho,\ \Theta)$, удовлетворяющую внутри круга уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1.1}$$

и принимающую заданные значения на границе круга, т.е.

$$u(\rho,\ \Theta)\Big|_{\rho=R} = f(\Theta). \tag{1.2}$$

В полярных координатах $(\rho,\ \Theta)$ уравнение (1.1) имеет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\Theta^2} = 0. \tag{1.3}$$

Частные решения уравнения (1.3) будем искать в виде

$$u(\rho,\ \Theta) = U(\rho)\cdot\Phi(\Theta). \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.3), получаем

$$\frac{\rho\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dU}{d\rho}\right)}{U} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda = \text{const}.$$

Отсюда следует, что функция $U(\rho)$ является решением уравнения

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dU}{d\rho}\right) - \lambda U = 0, \tag{1.5}$$

а для функции $\Phi(\Theta)$ получаем задачу на собственные значения

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\Theta) = \Phi(\Theta + 2\pi). \end{cases} \tag{1.6}$$

Здесь условие периодичности функции $\Phi(\Theta)$ является следствием периодичности искомого решения $u(\rho,\ \Theta)$ по переменной Θ с периодом 2π.

Ненулевые периодические решения задачи (1.6) существуют только при $\lambda = \lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ и имеют вид

$$\Phi_n(\Theta) = A_n \cos n\Theta + B_n \sin n\Theta, \tag{1.7}$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

Из (1.5) для функции $U(\rho)$ при $\lambda = n^2$ получаем уравнение

$$\rho^2\frac{d^2U}{d\rho^2} + \rho\frac{dU}{d\rho} - n^2 U = 0. \tag{1.8}$$

Частные решения этого уравнения будем искать в виде $U(\rho) = \rho^\alpha, \quad \alpha = \text{const}$. Подставляя эту функцию в (1.8), получаем $\alpha = \pm n$. Следовательно, $U(\rho) = \rho^n$ или $U(\rho) = \rho^{-n}$. Второе из этих решений следует отбросить, т.к. при $\rho = 0$ функция $U(\rho) = \rho^{-n}$ не является гармонической в круге $\rho < R$.

Таким образом, согласно (1.4), частные решения уравнения (1.3) можно записать так:

$$u_n(\rho, \Theta) = \rho^n (A_n \cos n\Theta + B_n \sin n\Theta), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Решение внутренней задачи Дирихле находим в виде ряда

$$u(\rho, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\rho, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\Theta + B_n \sin n\Theta).$$

Выполняя граничные условия (1.2), получаем

$$u(R, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos n\Theta + B_n \sin n\Theta) = f(\Theta). \tag{1.9}$$

Разложим функцию $f(\Theta)$ в ряд Фурье

$$f(\Theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Theta + b_n \sin n\Theta, \tag{1.10}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1.11}$$

– коэффициенты Фурье $f(\Theta)$.

Сравнивая ряд (1.9) с рядом (1.10), получаем

$$A_0 = \frac{a_2}{2}, \qquad A_n = \frac{a_n}{R^n}, \qquad B_n = \frac{b_n}{R^n}.$$

Таким образом, решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге $\rho < R$ имеет вид

$$u(\rho,\,\Theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\left(a_n\cos n\Theta+b_n\sin n\Theta\right). \qquad (1.12)$$

Пример 1. Найти гармоническую внутри единичного круга функцию $u(\rho,\,\Theta)$, принимающую на его границе значения $\cos^2\Theta$.

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$\Delta u=0$$

при условии

$$u\big|_{\rho=1}=\cos^2\Theta .$$

Согласно (1.12), решение примет вид

$$u(\rho,\,\Theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(a_n\cos n\Theta+b_n\sin n\Theta\right). \qquad (1.13)$$

Коэффициенты a_0, a_n, b_n вычислим по формулам (1.11). При вычислении интегралов будут использованы следующие свойства:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, \quad \text{если } f(x) \text{ – четная функция;}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0, \qquad \text{если } f(x) \text{ – нечетная функция.}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{\pi}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi}=1.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \ \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} \cos nt \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\cos nt + \cos 2t \ \cos nt) \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nt \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos t(n-2) + \cos t(n+2)) dt \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{1}{n-2}\sin t(n-2) + \frac{1}{n+2}\sin t(n+2) \right)\Big|_0^{\pi} \right] = 0, \quad n \neq 2.$$

При $n = 2$

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \ \cos 2t \, dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (1+\cos 2t) \cos 2t \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin 2t \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos 4t) dt \right] = \frac{1}{2\pi}\left(t + \frac{1}{4}\sin 4t \right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \ \sin nt \, dt = 0.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (1.13), получаем решение задачи

$$u(\rho, \ \Theta) = \frac{1}{2} + \frac{\rho^2}{2}\cos 2\Theta.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат и удовлетворяющую на границе круга условию $u\big|_{\rho=R} = f(\Theta)$.

1. $f(\Theta) = \sin^2\Theta$, $R = 2$.
2. $f(\Theta) = \cos^3\Theta$, $R = 3$.
3. $f(\Theta) = 17\sin^3\Theta$, $R = 4$.
4. $f(\Theta) = \cos^4\Theta$, $R = 1$.
5. $f(\Theta) = 3\sin^4\Theta$, $R = 2$.
6. $f(\Theta) = \Theta^2 - 4\Theta + 2$, $R = 4$.
7. $f(\Theta) = 6\Theta^2 + 3\Theta + 1$, $R = 2$.
8. $f(\Theta) = -6\Theta^2 + \Theta - 2$, $R = 1$.
9. $f(\Theta) = 5\Theta^2 - \Theta + \pi$, $R = 2$.
10. $f(\Theta) = -\Theta^2 + 2\pi\Theta$, $R = 3$.

Ответы

1. $u(\rho, \Theta) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\rho^2}{8}\cos 2\Theta$.

2. $u(\rho, \Theta) = \dfrac{\rho}{4}\left(\cos\Theta + \dfrac{\rho^2}{27}\cos 3\Theta\right)$.

3. $u(\rho, \Theta) = \dfrac{\rho}{16}\left(51\sin\Theta - \dfrac{17}{16}\rho^2\sin 3\Theta\right)$.

4. $u(\rho, \Theta) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{\rho^2}{2}\left(\cos 2\Theta + \dfrac{\rho^2}{4}\cos 4\Theta\right)$.

5. $u(\rho, \Theta) = \dfrac{9}{8} - \dfrac{3}{8}\rho^2\left(\cos 2\Theta - \dfrac{\rho^2}{16}\cos 4\Theta\right)$.

6. $u(\rho, \Theta) = \dfrac{\pi^2}{3} + 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \rho^n}{4^{n-1} n} \left[\dfrac{\cos n\Theta}{n} + 2\sin n\Theta \right].$

7. $u(\rho, \Theta) = 2\pi^2 + 1 + 3\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \rho^n}{2^{n-1} n} \left[\dfrac{4\cos n\Theta}{n} - \sin n\Theta \right].$

8. $u(\rho, \Theta) = -2\pi^2 - 2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \rho^n}{n} \left[\dfrac{12\cos n\Theta}{n} + \sin n\Theta \right].$

9. $u(\rho, \Theta) = \dfrac{5}{3}\pi^2 + \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \rho^n}{2^{n-1} n} \left[\dfrac{10\cos n\Theta}{n} + \sin n\Theta \right].$

10. $u(\rho, \Theta) = -\dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \rho^n}{3^n n} \left[\dfrac{\cos n\Theta}{n} + \pi \sin n\Theta \right].$

1.2. Решение краевых задач в шаре с использованием сферических функций

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаре формулируется так: найти функцию $u = u(\rho, \Theta, \varphi)$, гармоническую внутри шара $\rho < R$ и принимающую на поверхности S шара заданные значения, т.е.

$$\Delta u = 0, \tag{1.14}$$

$$u(\rho, \Theta, \varphi)\Big|_{\rho=R} = f(\Theta, \varphi). \tag{1.15}$$

Уравнение (1.14) в сферических координатах (ρ, Θ, φ) имеет вид

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin\Theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\ \frac{\partial u}{\partial\Theta}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin^2\Theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \quad (1.16)$$

Частные решения уравнения (1.16) будем искать в виде однородного многочлена степени n

$$u_n(\rho,\Theta,\varphi)=\rho^n\ Y(\Theta,\varphi). \quad (1.17)$$

Подставляя (1.17) в (1.16), получим, что функция $Y(\Theta,\ \varphi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\sin\Theta}\ \frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\ \frac{\partial Y}{\partial\Theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+n(n+1)\ Y=0. \quad (1.18)$$

Дважды непрерывно дифференцируемые ограниченные решения уравнения (1.18) называются *сферическими функциями порядка* n.

Для нахождения решений уравнения (1.18) применим метод разделения переменных. Будем искать решение $Y_n(\Theta,\ \varphi)$ уравнения (1.18) в виде произведения двух функций

$$Y_n(\Theta,\ \varphi)=P(\cos\Theta)\ \Phi(\varphi).$$

Учитывая, что $Y(\Theta,\ \varphi+2\pi)=Y(\Theta,\ \varphi)$, получим

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0,\\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi),\end{cases} \quad (1.19)$$

откуда $\lambda=m^2,\quad m=0,1,2,\ldots$ и

$\Phi_m(\varphi)=A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi$ – решения задачи (1.19).

Функция $P(\cos\Theta)$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sin\Theta}\ \frac{d}{d\Theta}\left[\sin\Theta\frac{dP(\cos\Theta)}{d\Theta}\right]+\left[n(n+1)-\frac{\lambda}{\sin^2\Theta}\right]P(\cos\Theta)=0, \quad (1.20)$$

и, следовательно, задача нахождения сферических функций на единичной сфере сводится к отысканию решений уравнения (1.20) при $\lambda = m^2, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$. Полагая в (1.20) $t = \cos\Theta$, для функции $P(\cos\Theta)$, $0 \le \Theta \le \pi$, получаем уравнение

$$-\left[\left(1-t^2\right)P'(t)\right]' + \frac{m^2}{1-t^2}P(t) = n(n+1)P(t). \tag{1.21}$$

Ограниченными решениями уравнения (1.21) являются присоединенные многочлены Лежандра

$$P_{n,m}(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m},$$

где $P_n(t) = \dfrac{1}{2^n \cdot n!}\dfrac{d^n}{dt^n}\left[\left(t^2-1\right)^n\right]$ $\quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ – многочлены Лежандра.

Возвращаясь к переменной Θ, находим частные решения уравнения (1.20):

$$P_{n,m}(\cos\Theta) = \sin^m\Theta \frac{d^m}{d\cos\Theta^m}\left[P_n(\cos\Theta)\right],$$

причем $P_{n,0}(\cos\Theta) = P_n(\cos\Theta), \quad P_{n,m}(\cos\Theta) = 0$ при $m > n$.

Таким образом, частные решения уравнения (1.18), ограниченные на единичной сфере, имеют вид: $P_{n,m}(\cos\Theta)\cos m\varphi$, $P_{n,m}(\cos\Theta)\sin m\varphi$. Их линейные комбинации с произвольными коэффициентами

$$Y_n(\Theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n}\left(a_{n,m}\cos m\varphi + b_{n,m}\sin m\varphi\right)P_{n,m}(\cos\Theta), \tag{1.22}$$

также являются частными решениями уравнения (1.18), а частные решения уравнения (1.16) даются формулами

$$u_n(\rho, \Theta, \varphi) = \rho^n \, Y_n(\Theta, \varphi).$$

Решение внутренней задачи Дирихле в шаре (и других внутренних задач) находится в виде ряда по сферическим функциям $X_n(\Theta, \varphi)$

$$u(\rho, \Theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n X_n(\Theta, \varphi). \tag{1.23}$$

Разлагая функцию $f(\Theta, \varphi)$ в ряд по сферическим функциям $Y_n(\Theta, \varphi)$

$$f(\Theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\Theta, \varphi)$$

и используя граничное условие, находим $X_n(\Theta, \varphi) = Y_n(\Theta, \varphi)$.

Задача Неймана для уравнения Лапласа в шаре формулируется так: найти функцию $u = u(\rho, \Theta, \varphi)$, гармоническую внутри шара $\rho < R$, нормальная производная которой на поверхности S шара принимает заданные значения, т.е.

$$\Delta u = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\rho=R} = f(\Theta, \varphi). \tag{1.24}$$

Разложение $f(\Theta, \varphi)$ в ряд по сферическим функциям имеет вид

$$f(\Theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\Theta, \varphi).$$

В [1], п. 1.7 показано, что решение задачи (1.24) определяется с точностью до произвольной постоянной и дается формулой

$$u(\rho, \Theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{n} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n Y_n(\Theta, \varphi) + C. \tag{1.25}$$

Приведем формулы для многочленов Лежандра $P_n(t)$, $P_{n,m}(\cos\Theta)$ при $n = 0, 1, 2, 3$:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}\left(3t^2 - 1\right), \quad P_3(t) = \frac{1}{2}\left(5t^3 - 3t\right);$$

$$P_{0,0}(\cos\Theta) = P_0(\cos\Theta) = 1, \qquad P_{1,0}(\cos\Theta) = P_1(\cos\Theta) = \cos\Theta,$$

$P_{1,1}(\cos\Theta) = \sin\Theta$, т.к.

$$P_{1,1}(t) = \left(1 - t^2\right)^{\frac{1}{2}} \left[P_1(t)\right]' = \left(1 - t^2\right)^{\frac{1}{2}} t' = \left(1 - t^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично получим:

$$P_{2,0}(\cos\Theta) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\Theta - 1\right), \qquad P_{2,1}(\cos\Theta) = 3\sin\Theta\,\cos\Theta,$$

$$P_{2,2}(\cos\Theta) = 3\sin^2\Theta,$$

$$P_{3,0}(\cos\Theta) = \frac{1}{2}\left(5\cos^3\Theta - 3\cos\Theta\right), \; P_{3,1}(\cos\Theta) = \sin\Theta\,\frac{15\cos^2\Theta - 3}{2},$$

$$P_{3,2}(\cos\Theta) = 15\sin^2\Theta\,\cos\Theta, \qquad P_{3,3}(\cos\Theta) = 15\sin^3\Theta,$$

$$P_{n,n} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}\sin^n\Theta.$$

Пользуясь формулой (1.22), выпишем сферические функции $Y_n(\Theta, \varphi)$ в явном виде для $n = 0, 1, 2, 3$:

$$Y_0(\Theta, \varphi) = a_{0,0},$$

$$Y_1(\Theta, \varphi) = a_{1,0}\cos\Theta + \left(a_{1,1}\cos\varphi + b_{1,1}\sin\varphi\right)\sin\Theta,$$

$$\mathrm{Y}_2(\Theta, \varphi) = a_{2,0}\left(3\cos^2\Theta - 1\right) + \left(a_{2,1}\cos\varphi + b_{2,1}\sin\varphi\right)\sin\Theta\cos\Theta +$$
$$+\left(a_{2,2}\cos 2\varphi + b_{2,2}\sin 2\varphi\right)\sin^2\Theta,$$

$$\mathrm{Y}_3(\Theta, \varphi) = a_{3,0}\left(5\cos^3\Theta - 3\cos\Theta\right) + \left(a_{3,1}\cos\varphi + b_{3,1}\sin\varphi\right)\cdot$$
$$\cdot\sin\Theta\left(15\cos^2\Theta - 3\right) + \left(a_{3,2}\cos 2\varphi + b_{3,2}\sin 2\varphi\right)\sin^2\Theta\cos\Theta +$$
$$+\left(a_{3,3}\cos 3\varphi + b_{3,3}\sin 3\varphi\right)\sin^3\Theta.$$

Пример 2. Найти функцию $\mathrm{u}(\rho, \Theta, \varphi)$, гармоническую внутри единичного шара и удовлетворяющую на границе шара условию $\mathrm{u}\big|_{\rho=1} = \sin\Theta\left(\sin\varphi + \sin\Theta\right)$.

Решение. Представим функцию
$$\mathrm{f}(\Theta, \varphi) = \sin\Theta\left(\sin\varphi + \sin\Theta\right)$$
в виде
$$\sin\Theta\left(\sin\varphi + \sin\Theta\right) = \sin\varphi\sin\Theta + \sin^2\Theta =$$
$$= \sin\varphi\sin\Theta + 1 - \cos^2\Theta = \sin\varphi\sin\Theta - \frac{1}{3}\left(3\cos^2\Theta - 1\right) + \frac{2}{3}.$$

Из формул для Y_1, Y_2, Y_0 следует, что

при $a_{1,0} = a_{1,1} = 0$, $b_{1,1} = 1$ $\quad \sin\varphi\sin\Theta = \mathrm{Y}_1(\Theta, \varphi)$;

при $a_{2,0} = -\dfrac{1}{3}$, $a_{2,1} = b_{2,1} = a_{2,2} = b_{2,2} = 0$

$$-\frac{1}{3}\left(3\cos^2\Theta - 1\right) = \mathrm{Y}_2(\Theta, \varphi);$$

при $a_{0,0} = \dfrac{2}{3}$, $\quad \dfrac{2}{3} = \mathrm{Y}_0(\Theta, \varphi)$.

Следовательно,

$$f(\Theta, \varphi) = \sin\Theta(\sin\varphi + \sin\Theta) = Y_0(\Theta, \varphi) + Y_1(\Theta, \varphi) + Y_2(\Theta, \varphi).$$

Тогда, согласно формуле (1.23), решение внутренней задачи Дирихле имеет вид

$$u(\rho, \Theta, \varphi) = Y_0(\Theta, \varphi) + \rho\ Y_1(\Theta, \varphi) + \rho^2\ Y_2(\Theta, \varphi),$$

$$u(\rho, \Theta, \varphi) = \frac{2}{3} + \rho\sin\varphi\ \sin\Theta - \frac{\rho^2}{3}\left(3\cos^2\Theta - 1\right).$$

Пример 3. Пусть теперь на границе шара выполнено условие

$$u_\rho'\big|_{\rho=R} = 6\sin\Theta\ \cos^2\frac{\Theta}{2}\ \cos\varphi.$$

Решение. Представим функцию $f(\Theta, \varphi) = 6\sin\Theta\ \cos^2\frac{\Theta}{2}\ \cos\varphi$ в виде

$$6\sin\Theta\ \cos^2\frac{\Theta}{2}\ \cos\varphi = 6\sin\Theta\frac{1+\cos\Theta}{2}\cos\varphi =$$

$$= 3\cos\varphi\ \sin\Theta + 3\cos\varphi\ \sin\Theta\ \cos\Theta = Y_1(\Theta, \varphi) + Y_2(\Theta, \varphi),$$

где $Y_1(\Theta, \varphi) = 3\cos\varphi\ \sin\Theta$, $Y_2(\Theta, \varphi) = 3\cos\varphi\ \sin\Theta\ \cos\Theta$.

Функцию $u(\rho, \Theta, \varphi)$ будем искать, согласно формуле (1.23), в виде

$$u(\rho, \Theta, \varphi) = \frac{\rho}{R}Y_1(\Theta, \varphi) + \frac{\rho^2}{R^2}Y_2(\Theta, \varphi) + C,$$

где $Y_1(\Theta, \varphi) = A\ \cos\varphi\ \sin\Theta$, $Y_2(\Theta, \varphi) = B\ \cos\varphi\ \sin\Theta\ \cos\Theta$ – те же функции, что и в разложении $f(\Theta, \varphi)$, с неопределенными коэффициентами. Найдем эти коэффициенты, используя граничное условие $u_\rho'\big|_{\rho=R} = f(\Theta, \varphi)$. Имеем

$$u(\rho, \Theta, \varphi) = \frac{A\rho}{R}\cos\varphi\ \sin\Theta + \frac{B\rho^2}{R^2}\cos\varphi\ \sin\Theta\ \cos\Theta + C,$$

$$u_\rho'(\rho, \Theta, \varphi) = \frac{A}{R}\cos\varphi\ \sin\Theta + \frac{2B\rho}{R^2}\cos\varphi\ \sin\Theta\ \cos\Theta,$$

$$u_\rho'\big|_{\rho=R} = \frac{A}{R}\cos\varphi\ \sin\Theta + \frac{2B}{R}\cos\varphi\ \sin\Theta\ \cos\Theta.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{R}\cos\varphi\ \sin\Theta + \frac{2B}{R}\cos\varphi\ \sin\Theta\ \cos\Theta =$$
$$= 3\cos\varphi\ \sin\Theta + 3\cos\varphi\ \sin\Theta\ \cos\Theta.$$

Приравнивая коэффициенты левой части к коэффициентам правой, получим

$$\begin{aligned} &\frac{A}{R} = 3, & & A = 3R, \\ & & \Rightarrow & \\ &\frac{2B}{R} = 3, & & B = \frac{3}{2}R. \end{aligned}$$

Таким образом, решение внутренней задачи Неймана имеет вид

$$u(\rho, \Theta, \varphi) = 3\rho\ \cos\varphi\ \sin\Theta + \frac{3}{2R}\rho^2\ \cos\varphi\ \sin\Theta\ \cos\Theta + C,$$

что подтверждает формула (1.25).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти функцию, гармоническую внутри единичного шара и удовлетворяющую на границе шара условию:

а) $u\big|_{\rho=1} = \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\ \sin^2\Theta.$

б) $u\big|_{\rho=1} = (\sin\Theta + \sin 2\Theta)\ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right).$

в) $u\big|_{\rho=1} = \cos^2\Theta\ \sin\Theta\ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right).$

г) $u_\rho'\big|_{\rho=1} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\ \sin\Theta.$

д) $u_\rho'\big|_{\rho=1} = \sin^{10}\Theta\ \sin 10\varphi, \quad u\big|_{\rho=0} = 1.$

2. Найти функцию, гармоническую внутри шара радиуса R с центром в начале координат и удовлетворяющую на границе шара условию:

а) $u\big|_{\rho=R} = \sin\left(2\varphi + \frac{\pi}{6}\right)\ \sin^2\Theta\ \cos\Theta.$

б) $u\big|_{\rho=R} = \sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\ \sin^3\Theta.$

в) $u\big|_{\rho=R} = \sin^2\Theta\ \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\Theta\ \sin\varphi.$

г) $u\big|_{\rho=R} = \sin 100\varphi\ \sin^{100}\Theta.$

д) $\left(u + u_\rho'\right)\big|_{\rho=R} = \sin^2\Theta\left[\sqrt{2}\cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos^2\varphi\right].$

е) $\left(u + u_\rho'\right)\big|_{\rho=R} = \sin\Theta(\sin\varphi + \cos\varphi\ \cos\Theta + \sin\Theta).$

ж) $\left(u - u_\rho'\right)\big|_{\rho=R} = \sin\Theta\ \cos^2\frac{\Theta}{2}\ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right).$

Ответы

1.а. $u(\rho,\,\Theta,\,\varphi)=\rho^2\,\cos\left(2\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)\,\sin^2\Theta.$

1.б. $u(\rho,\,\Theta,\,\varphi)=\left(\rho\,\sin\,\Theta+\rho^2\,\sin\,2\Theta\right)\,\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right).$

1.в. $u(\rho,\,\Theta,\,\varphi)=\left[\dfrac{\rho}{5}+\dfrac{\rho^3}{15}\left(15\cos^2\Theta-3\right)\right]\,\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right).$

1.г. $u(\rho,\,\Theta,\,\varphi)=\rho\,\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right)\,\sin\,\Theta+C.$

1.д. $u(\rho,\,\Theta,\,\varphi)=1+\dfrac{\rho^{10}}{10}\sin^{10}\Theta\,\sin\,10\varphi.$

2.а. $u(\rho,\,\Theta,\,\varphi)=\left(\dfrac{\rho}{R}\right)^3\sin\left(2\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin^2\Theta\cos\,\Theta.$

2.б. $u(\rho,\,\Theta,\,\varphi)=\left(\dfrac{\rho}{R}\right)^3\sin\left(3\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin^3\Theta.$

2.в. $u(\rho,\,\Theta,\,\varphi)=\dfrac{\rho}{R}\sin\,\Theta\,\sin\,\varphi+\left(\dfrac{\rho}{R}\right)^2\sin^2\Theta\,\cos\left(2\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right).$

2.г. $u(\rho,\,\Theta,\,\varphi)=\left(\dfrac{\rho}{R}\right)^{100}\sin\,100\varphi\,\sin^{100}\Theta.$

2.д. $$u(\rho,\,\Theta,\,\varphi)=\frac{2}{3}+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\left[-\frac{R}{3(2+R)}\left(3\cos^2\Theta-1\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{R}{2+R}\left(2\cos\,2\varphi-\sin\,2\varphi\right)\sin^2\Theta\right].$$

Указание:

$$\left(u+u_\rho'\right)\Big|_{\rho=R}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}P_{2,0}(\cos\Theta)+\frac{1}{3}(2\cos 2\varphi-\sin 2\varphi)P_{2,2}(\cos\Theta).$$

Решение следует искать в виде

$$u=A+B\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 P_{2,0}(\cos\Theta)+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\left(C\cos 2\varphi+\mathcal{D}\sin 2\varphi\right)P_{2,2}(\cos\Theta).$$

2.е. $u(\rho,\Theta,\varphi)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\rho}{R+1}\sin\varphi\,\sin\Theta+\dfrac{\rho^2\cos\varphi\,\sin\Theta\,\cos\Theta}{R(R+2)}-$

$$-\frac{\rho^2}{3}\cdot\frac{3\cos^2\Theta-1}{R(R+2)}.$$

Указание:

$$\left(u+u_\rho'\right)\Big|_{\rho=R}=\frac{2}{3}+\sin\varphi\,P_{1,1}(\cos\Theta)-\frac{2}{3}P_{2,0}(\cos\Theta)+$$

$$+\frac{1}{3}\cos\varphi\,P_{2,1}(\cos\Theta).$$

Решение следует искать в виде

$$u=A+B\frac{\rho}{R}\sin\varphi\,P_{1,1}(\cos\Theta)+C\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 P_{2,0}(\cos\Theta)+$$

$$+D\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\cos\varphi\cdot P_{2,1}(\cos\Theta).$$

2.ж. $u(\rho,\Theta,\varphi)=\left[\dfrac{\rho}{2(R-1)}\sin\Theta+\dfrac{\rho^2}{2R(R-2)}\sin\Theta\,\cos\Theta\right]\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right).$

Указание:

$$\left(u - u_\rho{}'\right)\Big|_{\rho=R} \left[\frac{1}{2}P_{1,1}(\cos\Theta) + \frac{1}{6}P_{2,1}(\cos\Theta)\right]\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right).$$

Решение следует искать в виде

$$u = \left[A\frac{\rho}{R}P_{1,1}(\cos\Theta) + B\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 P_{2,1}(\cos\Theta)\right]\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right).$$

1.3. Метод функции Грина

Пусть дана область $\mathcal{D}$ в пространстве, ограниченная поверхностью S. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = -f \text{ внутри } \mathcal{D}, \\ u\big|_S = u_0. \end{cases} \tag{1.26}$$

$$u(x, y, z) - ? \quad \text{внутри } \mathcal{D}.$$

Решение поставленной задачи в некоторых случаях может быть получено с помощью функции Грина.

Зафиксируем произвольно точку (x_0, y_0, z_0) внутри области и пусть (x, y, z) – любая точка внутри или на границе области $\mathcal{D}$.

Построим три функции от пары точек (x, y, z), (x_0, y_0, z_0):

1) $$E(x, y, z;\ x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Функция E удовлетворяет по первой точке при фиксированной второй уравнению Лапласа

$$\Delta E = 0 \qquad \text{при } (x,\,y,\,z) \neq (x_0,\,y_0,\,z_0)$$

и называется *фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве*.

2) $\upsilon(x,\,y,\,z;\;x_0,\,y_0,\,z_0)$ – решение задачи Дирихле специального вида

$$\begin{cases} \Delta\upsilon = 0 & \text{внутри } \mathcal{D}, \\ \upsilon\big|_S = -E\big|_S. \end{cases}$$

3) $G(x,\,y,\,z;\;x_0,\,y_0,\,z_0) = E + \upsilon.$

Функция G называется *функцией Грина задачи Дирихле* (1.26).

Из определения следует

1. $\Delta G = 0$ внутри $\mathcal{D}$, кроме $(x_0,\,y_0,\,z_0)$.

2. $G\big|_S = E\big|_S + \upsilon\big|_S = E\big|_S - E\big|_S = 0.$

Если функция G известна, то решение задачи Дирихле (1.26) в точке $(x_0,\,y_0,\,z_0) \in \mathcal{D}$ дается формулой

$$u(x_0,\,y_0,\,z_0) = -\iint\limits_S u_0 \frac{\partial G}{\partial n}\,dS + \iiint\limits_{\mathcal{D}} G f\;dx\,dy\,dz, \tag{1.27}$$

где $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ – производная функции G на границе S, взятая по направлению внешней нормали к S.

Для двумерной области $\mathcal{D}$ с границей S функция Грина определяется аналогично

$$G(x,\, y;\; x_0,\, y_0) = E + \upsilon,$$

где

1) $E(x,\, y;\; x_0,\, y_0) = \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$,

$$\Delta E = 0 \quad \text{при} \ (x,\, y) \neq (x_0,\, y_0).$$

Функция E называется фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости.

2) $\upsilon(x,\, y;\; x_0,\, y_0)$ такая, что

$$\begin{cases} \Delta\upsilon = 0 & \text{внутри } \mathcal{D}, \\ \upsilon\big|_S = -E\big|_S. \end{cases}$$

Решение первой краевой задачи для уравнения $\Delta u = -f$ при этом дается формулой

$$u(x_0,\, y_0) = -\int\limits_S u_0\frac{\partial G}{\partial n}\,dS + \iint\limits_{\mathcal{D}} G\,f\;dx\;dy. \qquad (1.28)$$

Пример 4. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $(z>0)$, т.е.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{при } z>0, \\ u\big|_{z=0} = u_0(x,\, y). \end{cases}$$

$$u(x,\, y,\, z) - ? \quad \text{при } z>0.$$

Решение. Выберем любую точку $(x_0,\, y_0,\, z_0)$, $z_0>0$. Пусть $(x,\, y,\, z)$ – текущая точка. Построим точку $(x_0,\, y_0,\, -z_0)$, симметричную с точкой (x_0, y_0, z_0) относительно плоскости $z = 0$ (рис. 1). Соединим (x, y, z) с (x_0, y_0, z_0), расстояние обозначим через r. Соединим (x, y, z) с $(x_0, y_0, -z_0)$, расстояние обозначим через ρ.

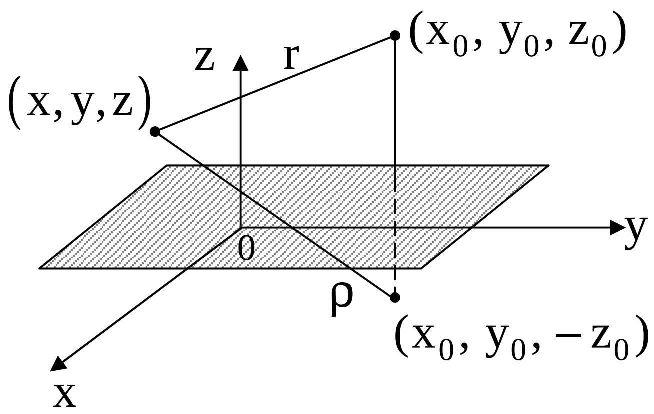


Рис. 1

$$G(x, y, z;\ x_0, y_0, z_0) = E + \upsilon,$$

где

$$E(x, y, z;\ x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}},$$

$\upsilon(x, y, z;\ x_0, y_0, z_0)$ – решение задачи

$$\begin{cases} \Delta\upsilon = 0 \quad \text{при } z > 0, \\ \upsilon\big|_{z=0} = -E\big|_{z=0}. \end{cases}$$

Положим $\upsilon = -\dfrac{1}{4\pi\rho} = -\dfrac{1}{4\pi\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}}$.

Очевидно, $\Delta\upsilon = 0$ при $z > 0$,

$$\upsilon\big|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(0+z_0)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}} = -E\big|_{z=0}.$$

Имеем

$$G = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}\right).$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_{z=0} = -\frac{\partial G}{\partial z}\bigg|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{r'_z}{r^2}+\frac{\rho'_z}{\rho^2}\right)_{z=0} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{z-z_0}{r^3}-\frac{z+z_0}{\rho^3}\right)_{z=0} =$$

$$= -\frac{z_0}{2\pi\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Подставляя полученное выражение в (1.27) и учитывая, что $f = 0$, получим

$$u(x_0,\, y_0,\, z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u_0(x,\, y)\,dx\;dy}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Пример 5. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $(y > 0)$, т.е.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{при} \;\; y > 0, \\ u\big|_{y=0} = u_0(x). \end{cases}$$

$$u(x,\, y) - ? \quad \text{при} \;\; y > 0.$$

Решение. Выполним построения, аналогичные построениям в примере 4. Функция Грина может быть получена таким же способом.

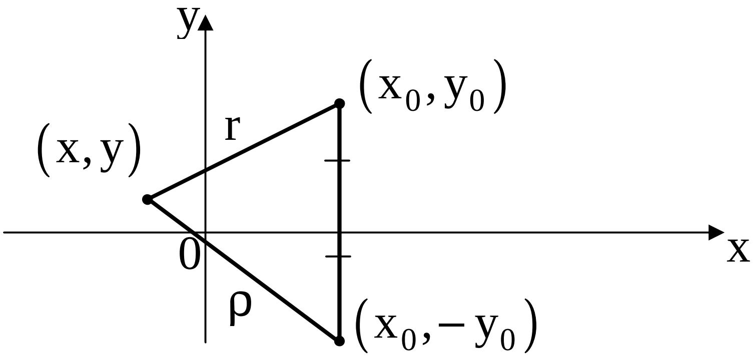


Рис. 2

$$G(x, y;\ x_0, y_0) = E + \upsilon,$$

где

$$E(x, y;\ x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}},$$

$$\upsilon(x, y;\ x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}.$$

Имеем

$$G = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r} - \ln\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho}{r}.$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{y=0} = -\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{1}{2\pi}\frac{r}{\rho}\cdot\left.\frac{\rho'_y\, r - r'_y\,\rho}{r^2}\right|_{y=0} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{y+y_0}{\rho^2} - \frac{y-y_0}{r^2}\right)_{y=0} = -\frac{y_0}{\pi\left[(x-x_0)^2+y_0^2\right]}.$$

Решение краевой задачи, согласно (1.28), примет вид

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(x)\, dx}{(x - x_0)^2 + y_0^2}.$$

Пример 6. Построить функцию Грина для полукруга $x^2 + y^2 < a^2, \quad y > 0$.

Решение. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – любая точка, лежащая в данном полукруге, $M(x, y)$ – текущая точка. Отложим на радиусе, проходящем через точку M_0, такой отрезок OM_1, чтобы

$$d \cdot d_1 = a^2, \tag{1.29}$$

где d, d_1 – расстояния от точки O до точек M_0 и M_1 соответственно (точка $M_1(x_1, y_1)$ называется *сопряженной с точкой* M_0). Построим симметричные с M_0 и M_1 точки M_0' и M_1' относительно оси $y = 0$ (рис. 3).

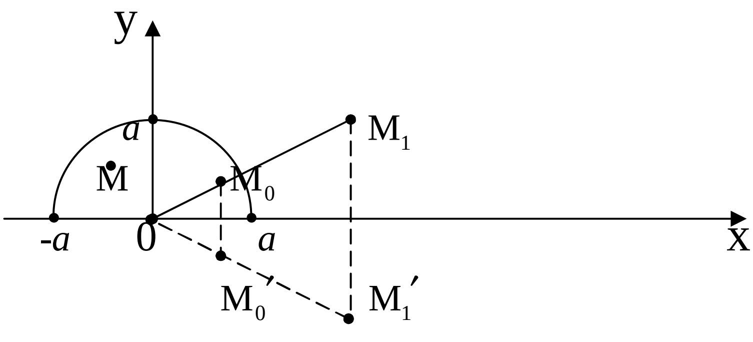


Рис. 3

Функцию Грина будем искать в виде

$$G = G(x, y;\ x_0, y_0) - G(x, y;\ x_0, -y_0).$$

Найдем функцию $G(x, y;\ x_0, y_0)$. Обозначим через r и ρ расстояния между точками M и M_0, M и M_1.

$$G(x, y;\ x_0, y_0) = E + \upsilon,$$

где $$E(x, y;\ x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}},$$

$\upsilon(x, y;\ x_0, y_0)$ – решение задачи

$$\begin{cases} \Delta\upsilon = 0 & \text{внутри полукруга,} \\ \upsilon = -E & \text{на границе полукруга.} \end{cases}$$

Положим

$$\upsilon = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{d}\cdot\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}.$$

Нетрудно убедиться, что определенная таким образом функция υ является гармонической в полукруге. Для всех точек M, расположенных на границе полукруга, расстояния до точек M_0 и M_1 пропорциональны.

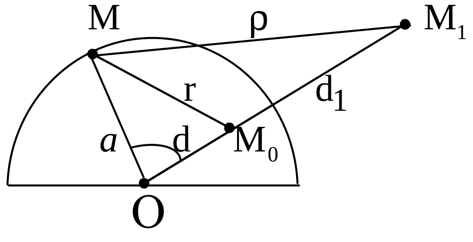


Рис. 4

Действительно, треугольники OMM_0 и OMM_1 подобны: угол при вершине O у них общий, а прилежащие к нему стороны в силу (1.29) пропорциональны

$$\frac{a}{d} = \frac{d_1}{a}.$$

Из подобия треугольников следует $\frac{r}{\rho}=\frac{d}{a}=\frac{a}{d_1}$.

Отсюда $$r=\frac{d}{a}\cdot\rho.$$

Тогда функция $\upsilon=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{d}\cdot\frac{1}{\rho}$ на границе полукруга принимает то же значение, что и функция $-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$. Следовательно, $\upsilon=-E$ на границе и

$$G(x,y;\ x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r}-\ln\frac{a}{d}\cdot\frac{1}{\rho}\right)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{d\rho}{a\,r}.$$

Проводя аналогичные рассуждения для точки M_0', найдем

$$G(x,y;\ x_0,-y_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r'}-\ln\frac{a}{d'}\cdot\frac{1}{\rho'}\right)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{d'\rho'}{a\,r'},$$

где d', r', ρ' – расстояния между точками O и M_0', M и M_0', M и M_1'.

Таким образом, получаем

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{d\rho}{a\,r}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{d'\rho'}{a\,r'}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r'\,\rho}{r\,\rho'}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\cdot\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\cdot\sqrt{(x-x_1)^2+(y+y_1)^2}},$$

где $x_1=\frac{a^2}{d^2}x_0,\quad y_1=\frac{a^2}{d^2}y_0.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathbb{R}^3$:

а) двугранный угол $y > 0, \quad z > 0$.

б) октант $x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$.

в) полушар $x^2 + y^2 + z^2 < a^2, \quad z > 0$.

г) четверть шара $x^2 + y^2 + z^2 < a^2, \quad y > 0, \quad z > 0$.

2. Найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad z > 0; \quad u\big|_{z=0} = u_0(x, y)$$

для следующих $u_0(x, y)$:

а) $u_0(x, y) = \begin{cases} 0, & |x| > \ell, \quad -\infty < y < \infty, \\ 1, & |x| \le \ell, \quad -\infty < y < \infty. \end{cases}$

б) $u_0(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0, \quad -\infty < y < \infty, \\ 1, & x \ge 0, \quad -\infty < y < \infty. \end{cases}$

3. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа для полушара $x^2 + y^2 + z^2 < a^2, \quad z > 0$.

4. Построить функцию Грина для следующих областей в $\mathbb{R}^2$:

а) четверть плоскости $x > 0, \quad y > 0$;

б) четверть круга $x^2 + y^2 < a^2, \quad x > 0, \quad y > 0$.

5. Найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad y > 0; \quad u\big|_{y=0} = u_0(x)$$

для следующих $u_0(x)$:

а) $u_0(x)=\begin{cases}0, & |x|>\ell,\\ 1, & |x|\le \ell.\end{cases}$

а) $u_0(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ C, & x\ge 0.\end{cases}$

6. Найти решение уравнения $\Delta u=0$ в первом квадранте $x>0,\ y>0$ со следующими граничными условиями:

а) $u|_S=u_0(x,y)$ – кусочно-непрерывная, ограниченная функция, где S состоит из полупрямых $\{x=0,\ y\ge 0\}$ и $\{y=0,\ x\ge 0\}$.

б) $u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{y=0}=1.$

в) $u\big|_{x=0}=a,\quad u\big|_{y=0}=b.$

7. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в полукруге $x^2+y^2<1,\ \ y>0$, при условии $u|_S=u_0(x,y)$, где S – граница полукруга, $u_0(x,\ y)$ – кусочно-непрерывная функция.

Ответы

В ответах к задаче 1 введены обозначения:

$$M_{npk}=\left((-1)^n x_0,\ (-1)^p y_0,\ (-1)^k z_0\right).$$

1.а. $G=\dfrac{1}{4\pi}\sum\limits_{p,k=0}^{1}\dfrac{(-1)^{p+k}}{r_{MM_{0pk}}}.$ 1.б. $G=\dfrac{1}{4\pi}\sum\limits_{n,p,k=0}^{1}\dfrac{(-1)^{n+p+k}}{r_{MM_{npk}}}.$

1.в. $G=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{1}(-1)^{k}\left(\frac{1}{r_{MM_{00k}}}-\frac{a}{r}\cdot\frac{1}{r_{MM'_{00k}}}\right),$

где $r=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$, $M'_{npk}=\frac{a^2}{r^2}M_{npk}$, $\left|OM_{npk}\right|\cdot\left|OM'_{npk}\right|=a^2$.

1.г. $G=\frac{1}{4\pi}\sum_{p,k=0}^{1}(-1)^{p+k}\left(\frac{1}{r_{MM_{0pk}}}-\frac{a}{r}\cdot\frac{1}{r_{MM'_{0pk}}}\right).$

2.а. $u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\ell-x_0}{z_0}+\operatorname{arctg}\frac{\ell+x_0}{z_0}\right).$

2.б. $u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_0}{z_0}.$

3. $$u(M_0)=\frac{1-r^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}u_0(\alpha,\beta)\left(\frac{1}{\left(r^2+1-2r\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\left(r^2+1-2r\cos\gamma_1\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta+$$

$$+\frac{z_0}{2\pi}\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}u_0(x,y)\left(\frac{1}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0{}^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\right.$$

$$-\frac{1}{r^3}\frac{1}{\left(\left(x-\frac{1}{r^2}x_0\right)^2+\left(y-\frac{1}{r^2}y_0\right)^2+\left(\frac{1}{r^2}z_0\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\Bigg)dy.$$

В ответах к задаче 4 введены обозначения:

$$M_{np}=\left((-1)^n x_0,\ (-1)^p y_0\right).$$

4.а. $G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_{MM_{10}}\cdot r_{MM_{01}}}{r_{MM_{00}}\cdot r_{MM_{11}}}.$

4.б. $G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_{MM'_{00}}\cdot r_{MM_{01}}\cdot r_{MM_{10}}\cdot r_{MM'_{11}}}{r_{MM_{00}}\cdot r_{MM'_{01}}\cdot r_{MM'_{10}}\cdot r_{MM_{11}}},$

$$M'_{np}=\frac{a^2}{r^2}M_{np},\quad \left|OM_{np}\right|\cdot\left|OM'_{np}\right|=a^2.$$

5.а. $u\left(x_0,\ y_0\right)=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\ell-x_0}{y_0}+\operatorname{arctg}\frac{\ell+x_0}{y_0}\right).$

5.б. $u\left(x_0,\ y_0\right)=C\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0}\right).$

6.а. $u\left(x_0,\ y_0\right)=\frac{y_0}{\pi}\int\limits_0^\infty u_0(x)\left(\frac{1}{\left(x-x_0\right)^2+y_0^2}-\frac{1}{\left(x+x_0\right)^2+y_0^2}\right)dx+$

$$+\frac{x_0}{\pi}\int\limits_0^\infty u_0(y)\left(\frac{1}{x_0^2+\left(y-y_0\right)^2}-\frac{1}{x_0^2+\left(y+y_0\right)^2}\right)dy.$$

6.б. $u\left(x_0,\, y_0\right) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x_0}{y_0}.$

6.в. $u(x_0, y_0) = \dfrac{2}{\pi}\left(a\ \operatorname{arctg}\dfrac{y_0}{x_0} + b\ \operatorname{arctg}\dfrac{x_0}{y_0} \right).$

7. $$u(M_0) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{\pi} u_0(\theta)\left(\frac{1}{r^2+1-2r\cos(\theta-\varphi)} - \frac{1}{r^2+1-2r\cos(\theta+\varphi)} \right) d\theta +$$

$$+\frac{y_0}{\pi}\int_{-1}^{1} u_0(x)\left(\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{1}{r^2}x_0\right)^2+\left(\frac{1}{r^2}y_0\right)^2} \right) dx.$$

Тема 2. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2.1. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом Ритца

Рассмотрим краевую задачу

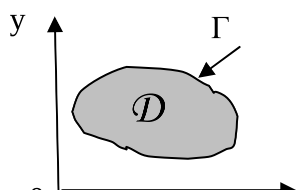


Рис. 5

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y), \quad (x,y) \in \mathcal{D}, \\ u\big|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $\mathcal{D}$ – ограниченная односвязная область на плоскости с гладкой или кусочно-гладкой границей Γ (рис. 5), $f(x,y)$ – заданная непрерывная в $\mathcal{D}+\Gamma$ функция, Δu – двумерный лапласиан.

Приведем основные этапы энергетического метода Ритца (см. подробнее [1], п. 2.2).

1. *Замена задачи (2.1) задачей на экстремум*

Пусть H – множество всех дважды непрерывно дифференцируемых в $\mathcal{D}+\Gamma$ функций $u(x,y)$, равных нулю на границе Γ.

Введем в H:

1) скалярное произведение функций по формуле

$$\langle u,v\rangle = \iint_{\mathcal{D}} u\ v\ dx\ \ dy, \quad (u,v)\in H; \tag{2.2}$$

2) оператор A

$$Au = -\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Оператор A обладает свойством равномерной положительности, т.е. $\langle Au,u\rangle \geq c\langle u,u\rangle$, $c>0$.

Тогда задача (2.1) эквивалентна задаче

$$Au = f,\ \ u(x,y)\in H - ? \tag{2.3}$$

Рассмотрим величину (функционал энергии задачи (2.1))

$$F(u) = \langle Au,u\rangle - 2\langle u,f\rangle, \tag{2.4}$$

где $\langle Au,u\rangle = \iint_{\mathcal{D}}\left(u_x'^{\,2}+u_y'^{\,2}\right) dx\ \ dy$, $f(x,y)$ – правая часть уравнения (2.3).

Операторное уравнение (2.3) с равномерно положительным оператором A имеет единственное решение $u \in H$. Задача отыскания этого решения равносильна задаче на экстремум

$$F(u) = \min; \;\; u(x, y) \in H - ? \tag{2.5}$$

2. *Выбор координатной системы функций*

Бесконечная последовательность функций

$$v_1(x, y), v_2(x, y), ..., v_n(x, y), ... \tag{2.6}$$

называется *координатной системой*, если

1) функции (2.6) линейно независимы;
2) множество линейных комбинаций

$u_n = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n$, где $c_1, c_2, ..., c_n$ – константы, плотно расположено в множестве H.

Пусть функция $\varpi(x, y)$ удовлетворяет условиям Канторовича:

1) $\varpi(x, y)$ – дважды непрерывно дифференцируема в $\mathcal{D} + \Gamma$;

2) $\varpi(x, y) > 0$ в $\mathcal{D}$;

3) $\varpi(x, y)\big|_{\Gamma} = 0$.

Тогда последовательность функций

$$\varpi, x\varpi, y\varpi, x^2\varpi, xy\varpi, y^2\varpi, ..., x^k y^l \varpi, ...$$

является координатной системой в H.

3. *Система уравнений Ритца*

Будем искать приближенное решение задачи (2.5) в виде линейной комбинации первых n координатных функций:

$$u_n = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n. \tag{2.7}$$

Подставляя $u = u_n$ в (2.4), получим $F(u_n) = \Phi(c_1, c_2, ..., c_n)$. Выполняя необходимое условие экстремума для функции Φ, получим систему линейных уравнений (систему Ритца)

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \ldots + a_{nn}c_n = b_n \end{cases}, \tag{2.8}$$

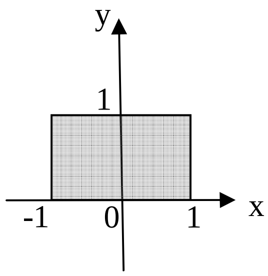
где

$$a_{ij} = \langle Av_i, v_j \rangle = \iint_{\mathcal{D}} \left(v'_{ix} v'_{jx} + v'_{iy} v'_{jy} \right) dx\ dy, \tag{2.9}$$

$$b_i = \langle v_i, f \rangle = \iint_{\mathcal{D}} v_i\ f\ dx\ dy. \tag{2.10}$$

Система Ритца имеет единственное решение $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Решая ее методами линейной алгебры и подставляя значения c_i в (2.7), получим приближенный ответ.

Пример 7. Пусть в (2.1) область $\mathcal{D}$ – прямоугольник $|x| < 1,\ 0 < y < 1$ (рис. 6), $f(x, y) = y$:



$$\begin{cases} -\Delta u = y, \quad (x, y) \in \mathcal{D}, \\ \quad u\big|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$u(x, y) - ? \qquad \text{в} \quad \mathcal{D}$$

Рис. 6

Решение. Задача (2.11) эквивалентна задаче на экстремум (2.5), причем в данном случае

$$F(u) = \iint_{\mathcal{D}} \left(u'^{\,2}_x + u'^{\,2}_y - 2u\,y \right) dx\ dy.$$

Функция $\varpi(x,y)=y\left(1-x^2\right)(1-y)$ удовлетворяет условиям 1)-3) п. 2, поэтому последовательность функций $x^k y^l \varpi(x,y)$ $(k,\ell=0,1,2,...)$ является координатной системой в H. Возьмем в (2.7) $n=5$:

$$u=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+c_4v_4+c_5v_5, \qquad (2.12)$$

где $v_1=\varpi$, $v_2=x\varpi$, $v_3=y\varpi$, $v_4=x^2\varpi$, $v_5=xy\varpi$.

Так как область $\mathcal{D}$ симметрична относительно оси Oy и правая часть уравнения (2.11) – четная по x функция, то решение задачи (2.11) должно быть четной по x функцией, поэтому в (2.12) коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю: $c_2=c_5=0$. Подставляя их в (2.12) и меняя нумерацию коэффициентов, получим

$$u(x,y)=c_1\varpi+c_2y\varpi+c_3x^2\varpi. \qquad (2.13)$$

Итак, мы получим три координатных функции

$$v_1=y\left(1-x^2\right)(1-y),\ v_2=y^2\left(1-x^2\right)(1-y),\ v_3=x^2y\left(1-x^2\right)(1-y).$$

По формулам (2.9) вычисляем коэффициенты

$$a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,3):$$

$$a_{11}=\iint\limits_{\mathcal{D}}\left[\left(v'_{1x}\right)^2+\left(v'_{1y}\right)^2\right]dx\,dy=\iint\limits_{\mathcal{D}}\left[\left(-2xy(1-y)\right)^2+\left(\left(1-x^2\right)(1-2y)\right)^2\right]dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{\mathcal{D}}\left[4x^2y^2(1-y)^2+\left(1-x^2\right)^2(1-2y)^2\right]dx\,dy=4\int\limits_{-1}^{1}x^2dx\int\limits_{0}^{1}y^2(1-y)^2dy+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2dx\int\limits_{0}^{1}(1-2y)^2dy=8\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1\cdot\left.\left(\frac{y^3}{3}-\frac{2y^4}{4}+\frac{y^5}{5}\right)\right|_0^1+$$

$$+2\left.\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1\left.\left(y-\frac{4y^2}{2}+\frac{4y^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{4}{9};$$

аналогично получим

$$a_{22} = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[\left(v'_{2x} \right)^2 + \left(v'_{2y} \right)^2 \right] dx\ dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[4x^2 y^4 (1-y)^2 + \left(1-x^2\right)^2 \left(2y-3y^2\right)^2 \right] dx\ dy = \frac{88}{525};$$

$$a_{33} = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[\left(v'_{3x} \right)^2 + \left(v'_{3y} \right)^2 \right] dx\ dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[\left(2x-4x^3\right)^2 y^2 (1-y)^2 + x^4 \left(1-x^2\right)^2 (1-2y)^2 \right] dx\ dy = \frac{212}{4725};$$

$$a_{12} = a_{21} = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[v'_{1x} v'_{2x} + v'_{1y} v'_{2y} \right] dx\ dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[4x^2 y^3 (1-y)^2 + \left(1-x^2\right)^2 (1-2y)\left(2y-3y^2\right) \right] dx\ dy = \frac{2}{9};$$

$$a_{13} = a_{31} = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[v'_{1x} v'_{3x} + v'_{1y} v'_{3y} \right] dx\ dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[-2x\left(2x-4x^3\right) y^2 (1-y)^2 + x^2 \left(1-x^2\right)^2 (1-2y)^2 \right] dx\ dy = \frac{12}{175};$$

$$a_{23} = a_{32} = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[v'_{2x} v'_{3x} + v'_{2y} v'_{3y} \right] dx\ dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[-2x\left(2x-4x^3\right) y^3 (1-y)^2 + x^2 \left(1-x^2\right)^2 \left(2y-3y^2\right)(1-2y) \right] dx\ dy = \frac{6}{175}.$$

По формуле (2.10) находим правые части $b_i \ (i=1,2,3)$:

$$b_1 = \iint_{\mathcal{D}} v_1 f \ dx\ dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(1-x^2\right) y^2 \left(1-y\right) dx\ dy =$$

$$= 2\int_0^1 \left(1-x^2\right) dx \int_0^1 \left(y^2 - y^3\right) dy = \frac{1}{9};$$

$$b_2 = \iint_{\mathcal{D}} v_2 f \ dx\ dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(1-x^2\right) y^3 \left(1-y\right) dx\ dy = \frac{1}{15};$$

$$b_3 = \iint_{\mathcal{D}} v_3 \ f \ dx\ dy = \iint_{\mathcal{D}} x^2 \left(1-x^2\right) y^2 \left(1-y\right) dx\ dy = \frac{1}{45}.$$

Строим систему Ритца для коэффициентов c_1, c_2, c_3

$$\begin{cases} \dfrac{4}{9}c_1 + \dfrac{2}{9}c_2 + \dfrac{12}{175}c_3 = \dfrac{1}{9} \\ \dfrac{2}{9}c_1 + \dfrac{88}{525}c_2 + \dfrac{6}{175}c_3 = \dfrac{1}{15} \\ \dfrac{12}{175}c_1 + \dfrac{6}{175}c_2 + \dfrac{212}{4725}c_3 = \dfrac{1}{45} \end{cases}.$$

Решая эту систему методом Гаусса, получим

$$c_1 \approx 0{,}12883, \ c_2 \approx 0{,}19663, \ c_1 \approx 0{,}14814.$$

Подставляя это решение в (2.13), получим приближенное решение краевой задачи (2.11)

$$u(x,y) \approx y\left(1-x^2\right)\left(1-y\right)\left(0{,}12883 + 0{,}19663y + 0{,}14814x^2\right).$$

2.2. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом Галеркина

Для решения краевой задачи (2.1) здесь применяется проекционный метод Галеркина (см. подробнее [1], п. 2.3.)

Построим множество H дважды непрерывно дифференцируемых в $\mathcal{D}+\Gamma$ функций $u(x,y)$, равных нулю на границе Γ, и введем в H скалярное произведение $\langle u,v \rangle$ по формуле (2.2). Будем называть функции $u,v \in H$ ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Заменим краевую задачу (2.1) эквивалентным уравнением (2.3). Выберем в H какую-либо координатную систему (2.6) и будем искать приближенное решение задачи в виде линейной комбинации первых n координатных функций

$$u_n = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n . \tag{2.14}$$

Рассмотрим невязку уравнения (2.3) относительно приближенного решения (2.14)

$$\delta_n = Au_n - f .$$

Будем искать, в соответствии с рекомендацией метода Галеркина, коэффициенты c_k $(k=1,2,\ldots,n)$ из условий ортогональности

$$\begin{cases} \delta_n \perp v_1, \\ \delta_n \perp v_2, \\ \quad \ldots\ldots \\ \delta_n \perp v_n. \end{cases} \tag{2.15}$$

Условия (2.15) означают, что проекция невязки на плоскость, натянутую на координатные векторы $v_1,\ldots,v_n$, равна нулю.

Из определения ортогональности и свойств скалярного произведения легко получить, что условия (2.15) эквивалентны системе уравнений (2.8) с коэффициентами a_{ij} и правыми частями b_i, вычисляемыми по формулам (2.9) и (2.10).Система (2.8), полученная из условий (2.15), называется *галеркинским при-*

ближением краевой задачи (2.1). Решая эту систему и подставляя результат вычислений в (2.14), получим приближенное решение краевой задачи.

Пример 8. Пусть в (2.1) область $\mathcal{D}$ ограничена эллипсом $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ и осями координат (рис. 7), $f(x,y)=x^2$.

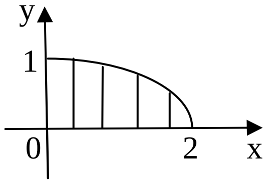


Рис. 7

$$\begin{cases} -\Delta u = x^2, \quad (x,y)\in \mathcal{D}, \\ u\big|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

$$u(x,y)-?\ \text{в}\ \mathcal{D}.$$

Решение. В качестве координатной системы возьмем последовательность функций $x^k y^l \varpi(x,y)$ $(k,l=0,1,2,....)$, где

$$\varpi(x,y)=xy\left(1-\frac{x^2}{4}-y^2\right).$$

Заметим, что ϖ удовлетворяет условиям 1) – 3) пункта 2 предыдущего параграфа.

В выражении (2.14) ограничимся тремя членами; обозначая

$$v_1=xy\left(1-\frac{x^2}{4}-y^2\right),\ \ v_2=x^2y\left(1-\frac{x^2}{4}-y^2\right),\ \ v_3=xy^2\left(1-\frac{x^2}{4}-y^2\right),$$

будем иметь $\qquad u(x,y)\approx u_3(x,y)=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3.$

Составим невязку

$$\delta_3=Au_3-f=Au_3-x^2;$$

наложим на нее требование ортогональности

$$\delta_3\perp v_1,\ \delta_3\perp v_2,\ \delta_3\perp v_3;$$

вычислим коэффициенты и правые части полученной из этих условий системы по формулам (2.9) и (2.10). Например,

$$a_{11} = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[\left(v'_{1x} \right)^2 + \left(v'_{1y} \right)^2 \right] dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[\begin{array}{l} y^2 \left(1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2 \right)^2 - x^2 y^2 \left(1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2 \right) + \dfrac{1}{4} x^4 y^2 + \\ + x^2 \left(1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2 \right)^2 - 4x^2 y^2 \left(1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2 \right) + 4x^2 y^4 \end{array} \right] dx\, dy =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} x = 2r\cos\varphi & 1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1 - r^2 & 0 \le r \le 1 \\ y = r\sin\varphi & dxdy = 2rdrd\varphi & 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \left[\begin{array}{l} \sin^2\varphi\, r^3 \left(1 - r^2 \right)^2 + 4\cos^2\varphi\, r^3 \left(1 - r^2 \right)^2 - \\ -20\cos^2\varphi \sin^2\varphi\, r^5 \left(1 - r^2 \right) + \\ +4\cos^4\varphi \sin^2\varphi\, r^7 + 16\cos^2\varphi \sin^4\varphi\, r^7 \end{array} \right] dr =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{24}\sin^2\varphi + \dfrac{1}{6}\cos^2\varphi - \dfrac{5}{6}\cos^2\varphi \sin^2\varphi + \\ + \dfrac{1}{2}\cos^4\varphi \sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi \sin^4\varphi \end{array} \right] d\varphi =$$

$$= 2\left(\frac{1}{24}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}\frac{\pi}{4} - \frac{5}{6}\frac{\pi}{16} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{32} + 2\frac{\pi}{32} \right) =$$

$$= \pi \frac{2 + 8 - 10 + 3 + 12}{96} = \frac{5\pi}{32}.$$

Аналогично можно получить

$$a_{22}=\frac{5\pi}{24};\ a_{33}=\frac{53\pi}{960};\ a_{12}=a_{21}=\frac{32}{63};\ \mathrm{a}_{13}=\mathrm{a}_{31}=\frac{16}{63};\ a_{23}=a_{32}=\frac{1}{4};$$

$$b_1=\iint\limits_{\mathcal{D}} v_1 x^2\,dx\,dy=\iint\limits_{\mathcal{D}} x^3 y\left(1-\frac{x^2}{4}-y^2\right)dx\,dy=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\ \ \sin\varphi\,d\varphi\int_0^1 8r^5\left(1-r^2\right)dr=-16\frac{\cos^4\varphi}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^6}{6}-\frac{r^8}{8}\right)\bigg|_0^1=$$

$$=4\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{6};\qquad b_2=\frac{64}{315};\qquad b_3=\frac{64}{945}.$$

Построим систему уравнений для c_1, c_2, c_3, т.е. галеркинское приближение краевой задачи (2.16),

$$\begin{cases}\dfrac{5\pi}{32}c_1+\dfrac{32}{63}c_2+\dfrac{16}{63}c_3=\dfrac{1}{6}\\[2mm] \dfrac{32}{63}c_1+\dfrac{5\pi}{24}c_2+\dfrac{1}{4}c_3=\dfrac{64}{315}\\[2mm] \dfrac{16}{63}c_1+\dfrac{1}{4}c_2+\dfrac{53\pi}{960}c_3=\dfrac{64}{945}\end{cases},$$

решая которую, получим

$$c_1\approx 0{,}32804,\ c_2\approx 0{,}20064,\ c_3\approx -0{,}37907,$$

поэтому искомая функция

$$u(x,y)=xy\left(1-\frac{x^2}{4}-y^2\right)\left(0{,}32804+0{,}20064x-0{,}37907y\right).$$

Типовой расчет

Найти решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y), \quad (x,y) \in \mathcal{D}, \\ \quad u\big|_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Метод решения задачи указывается преподавателем.

1. $f(x,y) = x$; $\mathcal{D}$: треугольник со сторонами $y + x = 1$, $y - x = 1$, $y = 0$; $\varpi(x,y) = y(1 - x - y)(1 + x + y)$.
2. $f(x,y) = y$; $\mathcal{D}$: треугольник со сторонами $y + x = 1$, $y = 0$, $x = 0$; $\varpi(x,y) = x\,y(1 - x - y)$.
3. $f(x,y) = x^2$; $\mathcal{D}$: прямоугольник $|x| < 2$, $|y| < 1$; $\varpi(x,y) = \left(4 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)$.
4. $f(x,y) = y^2$; $\mathcal{D}$: прямоугольник $|x| < 1$, $|y| < 3$; $\varpi(x,y) = \left(1 - x^2\right)\left(9 - y^2\right)$.
5. $f(x,y) = x\,y$; $\mathcal{D}$: прямоугольник $0 < x < 1$, $|y| < 1$; $\varpi(x,y) = x(1 - x)\left(1 - y^2\right)$.
6. $f(x,y) = 1$; $\mathcal{D}$: прямоугольник $0 < x < 2$, $0 < y < 1$; $\varpi(x,y) = x\,y(2 - x)(1 - y)$.
7. $f(x,y) = 2$; $\mathcal{D}$: квадрат $|x| < 2$, $|y| < 2$; $\varpi(x,y) = \left(4 - x^2\right)\left(4 - y^2\right)$.
8. $f(x,y) = x$; $\mathcal{D}$: область, ограниченная параболой $y = 1 - x^2$ и осью Ox; $\varpi(x,y) = y\left(1 - x^2 - y\right)$.
9. $f(x,y) = y$; $\mathcal{D}$: область, ограниченная параболой $y = 1 - x^2$ и осями координат $(x > 0)$; $\varpi(x,y) = y\left(1 - x^2 - y\right)$.

10. $f(x,y)=xy$; $\mathcal{D}$: внутренность эллипса $x^2+\frac{y^2}{4}=1$;

$\varpi(x,y)=1-x^2-\frac{y^2}{4}$.

11. $f(x,y)=x^2$; $\mathcal{D}$: область, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ и осью Ox $(y>0)$; $\varpi(x,y)=y\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\right)$.

12. $f(x,y)=y^2$; $\mathcal{D}$: круг $x^2+y^2=4$;
$\varpi(x,y)=4-x^2-y^2$.

13. $f(x,y)=\frac{1}{2}$; $\mathcal{D}$: полукруг $x^2+y^2=9$, $x=0$ $(x>0)$;
$\varpi(x,y)=x\left(9-x^2-y^2\right)$.

Тема 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода. Решение интегральных уравнений с помощью резольвенты

Уравнение

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{3.1}$$

где $K(x,t)$ – заданная непрерывная функция в треугольнике $0\le x\le a$, $0\le t\le x$, $f(x)$ – заданная непрерывная функция на отрезке $0\le x\le a$, $\varphi(x)$ – искомая функция, λ – числовой параметр, называется *линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода*. Функции $K(x,t)$ и $f(x)$ называются соответственно *ядром* и *свободным членом* уравнения Вольтерра. *Решением* интегрального уравнения (3.1) называют функцию $\varphi(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество относительно $x \in [0, a]$.

В теории интегральных уравнений доказывается, что всякое интегральное уравнение Вольтерра (3.1) с непрерывным ядром $K(x,t)$ при любом λ имеет единственное решение $\varphi(x)$ в классе непрерывных функций на отрезке $[0, a]$ для любого свободного члена $f(x)$ из того же класса.

Будем искать решение интегрального уравнения (3.1) в виде бесконечного степенного ряда по степеням λ:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x) + ... \qquad (3.2)$$

Подставляя этот ряд в (3.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, найдем

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = f(x),\\
&\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)\ \varphi_0(t)\ dt = \int_0^x K(x,t)\ f(t)\ dt,\\
&\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\ \varphi_1(t)\ dt = \int_0^x K(x,t)\int_0^t K(t,t_1)\ f(t_1)\ dt_1\ dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \qquad (3.3)$$

Из соотношений (3.3), дающих способ последовательного определения функций $\varphi_n(x)$, получим

$$\varphi_n(x) = \int_0^x K_n(x,t)\ f(t)\ dt, \quad n = 1, 2, ... \qquad (3.4)$$

Функции $K_n(x,t)$ называются *повторными ядрами* и вычисляются при помощи рекуррентных формул

$$\begin{aligned}
&K_1(x,t) = K(x,t),\\
&K_n(x,t) = \int_t^x K(x,z)\ K_{n-1}(z,t)\ dz, \quad n = 2, 3, ...
\end{aligned} \qquad (3.5)$$

Используя (3.4) и (3.5), равенство (3.2) можно записать так:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_0^x K_n(x,t)\, f(t)\, dt.$$

Функция $R(x,t;\lambda)$, определяемая при помощи ряда

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t), \tag{3.6}$$

называется *резольвентой* интегрального уравнения (3.1).

В теории интегральных уравнений доказывается, что ряд (3.6) сходится и решение интегрального уравнения (3.1) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t;\lambda)\, f(t)\, dt. \tag{3.7}$$

Пример 9. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2 - t^2} \varphi(t)\, dt.$$

Решение. Имеем $K_1(x,t) = K(x,t) = e^{x^2 - t^2}$, $f(x) = e^{x^2}$, $\lambda = 1$. Согласно формулам (3.5),

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_1(z,t)\, dz = \int_t^x e^{x^2 - z^2} \cdot e^{z^2 - t^2} dz = e^{x^2 - t^2} \int_t^x dz = e^{x^2 - t^2} (x - t),$$

$$K_3(x,t) = \int_t^x e^{x^2 - z^2} \cdot K_2(z,t)\, dz = \int_t^x e^{x^2 - z^2} \cdot e^{z^2 - t^2} (z - t)\, dz = e^{x^2 - t^2} \frac{(x-t)^2}{2},$$

....

$$K_n(x,t) = \int_t^x e^{x^2 - z^2} \cdot K_{n-1}(z,t)\, dz = \int_t^x e^{x^2 - z^2} \cdot e^{z^2 - t^2} \frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!} dz = e^{x^2 - t^2} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Подстановка в формулу (3.6) для резольвенты дает

$$R(x,t;\lambda)=e^{x^2-t^2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}=e^{x^2-t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(x-t)]^n}{n!}=e^{x^2-t^2}\cdot e^{\lambda(x-t)},$$

при $\lambda=1$ получим $R(x,t;1)=e^{x-t}\cdot e^{x^2-t^2}$.

Согласно формуле (3.7), решением данного интегрального уравнения является функция

$$\varphi(x)=e^{x^2}+\int_0^x e^{x-t}\cdot e^{x^2-t^2}\cdot e^{t^2}dt=e^{x+x^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти резольвенты для интегральных уравнений Вольтерра со следующими ядрами:

а) $K(x,t)=1$.

б) $K(x,t)=\dfrac{2+\cos x}{2+\cos t}$.

в) $K(x,t)=a^{x-t}\quad(a>0)$.

г) $K(x,t)=x-t$.

д) $K(x,t)=\dfrac{1+x^2}{1+t^2}$.

е) $K(x,t)=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}$.

2. Найти с помощью резольвенты решения следующих интегральных уравнений:

а) $\varphi(x)=1-2x-\int_0^x e^{x^2-t^2}\varphi(t)\,dt$.

б) $\varphi(x)=\sin x+2\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

в) $\varphi(x)=x\cdot 3^x-\int\limits_0^x 3^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

г) $\varphi(x)=e^x\sin x+\int\limits_0^x \frac{2+\cos x}{2+\cos t}\varphi(t)\,dt.$

д) $\varphi(x)=1+x+\int\limits_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

е) $\varphi(x)=\frac{x^2}{2}+x-\int\limits_0^x \varphi(t)\,dt.$

ж) $\varphi(x)=1+x^2+\int\limits_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2}\varphi(t)\,dt.$

з) $\varphi(x)=e^{x^2+2x}+2\int\limits_0^x e^{x^2-t^2}\varphi(t)\,dt.$

Ответы

1. а) $e^{\lambda(x-t)}$. б) $\frac{2+\cos x}{2+\cos t}e^{\lambda(x-t)}$. в) $a^{x-t}\cdot e^{\lambda(x-t)}$.

г) $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}(x-t),\ \lambda>0.$ д) $\frac{1+x^2}{1+t^2}\cdot e^{\lambda(x-t)}$. е) $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t}e^{\lambda(x-t)}$.

2. а) $\varphi(x)=e^{x^2-x}-2x$. б) $\varphi(x)=\frac{1}{5}e^{3x}-\frac{1}{5}\cos x+\frac{2}{5}\sin x.$

в) $\varphi(x)=3^x(1-e^{-x})$.

г) $\varphi(x) = e^x \sin x + (2+\cos x)\ e^x\ \ln\dfrac{2}{2+\cos x}$.

д) $\varphi(x) = e^x$.   е) $\varphi(x) = x$.   ж) $\varphi(x) = e^x(1+x^2)$.

з) $\varphi(x) = e^{x^2+2x}\cdot(1+2x)$.

3.2. Метод последовательных приближений

Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\ \varphi(t)\ dt. \tag{3.8}$$

Будем предполагать, что $f(x)$ непрерывна на $[0,a]$, а ядро $K(x,t)$ непрерывно при $0 \le x \le a$, $0 \le t \le x$.

Возьмем какую-либо непрерывную на $[0,a]$ функцию $\varphi_0(x)$. Подставляя в правую часть уравнения (3.8) вместо $\varphi(x)$ функцию $\varphi_0(x)$, получаем

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\ \varphi_0(t)\ dt.$$

Определенная таким образом функция $\varphi_1(x)$ также непрерывна на отрезке $[0,\, a]$. Продолжая этот процесс, получим последовательность функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots,$$

где
$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\ \varphi_{n-1}(t)\ dt.$$

При сделанных предположениях относительно $K(x,t)$ и $f(x)$ последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится при $n \to \infty$ к решению $\varphi(x)$ интегрального уравнения (3.8). Удачный выбор «нулевого» приближения $\varphi_0(x)$ может привести к быстрой сходимости последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ к решению интегрального уравнения.

Пример 10. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)\,dt, \text{ взяв } \varphi_0(x) \equiv 0.$$

Решение. Так как $\varphi_0(x) \equiv 0$, то $\varphi_1(x) = 1$. Далее –

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x 1\,dt = 1 + x,$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (1+t)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_4(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Очевидно, что $\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

Таким образом, $\varphi_n(x)$ есть n-я частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. Отсюда следует, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится при $n \to \infty$ к функции e^x. Значит, функция $\varphi(x) = e^x$ есть решение данного интегрального уравнения.

Задачи для самостоятельного решения

Методом последовательных приближений решить следующие интегральные уравнения:

1. $\varphi(x) = x - \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt,\ \ \varphi_0(x) \equiv 0.$

2. $\varphi(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt,\ \ \varphi_0(x) \equiv 0.$

3. $\varphi(x) = 1 + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt,\ \ \varphi_0(x) = 1.$

4. $\varphi(x) = x + 1 - \int_0^x \varphi(t)\,dt,\quad$ а) $\varphi_0(x) = 1,\quad$ б) $\varphi_0(x) = x + 1.$

5. $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \int_0^x \varphi(t)\,dt,$

а) $\varphi_0(x) = 1,\quad$ б) $\varphi_0(x) = x,\quad$ в) $\varphi_0(x) = \dfrac{x^2}{2} + x.$

6. $\varphi(x) = 2x + 2 - \int_0^x \varphi(t)\,dt,\quad$ а) $\varphi_0(x) = 1,\quad$ б) $\varphi_0(x) = 2.$

7. $\varphi(x) = 2x^2 + 2 - \int_0^x x\,\varphi(t)\,dt,\quad$ а) $\varphi_0(x) = 2,\quad$ б) $\varphi_0(x) = 2x.$

8. $\varphi(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x - \int_0^x \varphi(t)\,dt,\quad \varphi_0(x) = x^2.$

Ответы

1. $\varphi(x)=\sin x$. 2. $\varphi(x)=\cos x$. 3. $\varphi(x)=\operatorname{ch} x$. 4. $\varphi(x)=1$.

5. $\varphi(x)=x$. 6. $\varphi(x)=2$. 7. $\varphi(x)=2$. 8. $\varphi(x)=x^2-2x$.

3.3. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Альтернатива Фредгольма

Линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода называется уравнение вида

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{3.9}$$

где $\varphi(x)$ – неизвестная функция, $K(x,t)$ – заданная непрерывная функция в квадрате $a\le x\le b$, $a\le t\le b$, $f(x)$ – заданная непрерывная функция на отрезке $[a,b]$, λ – числовой множитель. *Решением* интегрального уравнения (1) называется непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая ему.

Для интегральных уравнений Фредгольма имеет место следующая теорема о разрешимости уравнения (3.9).

Теорема (альтернатива Фредгольма). Либо уравнение

$$\phi(x)-\int_a^b K(t,x)\,\phi(t)\,dt=0 \tag{3.10}$$

имеет только нулевое решение, и тогда уравнение

$$\varphi(x)-\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{3.11}$$

имеет единственное решение при любой непрерывной функции $f(x)$; либо уравнение (3.10) имеет конечное число линейно независимых решений

$$\phi_1(x),\ldots,\phi_m(x), \tag{3.12}$$

и тогда уравнение (3.11) разрешимо только при условии, что свободный член $f(x)$ ортогонален всем решениям (3.12):

$$f \perp \phi_k, \quad k = 1,\ldots,m.$$

Здесь ортогональность $f \perp g$ означает выполнение равенства

$$\int_a^b f\ g\ dx = 0.$$

Пример 11. Показать, что функция $\varphi(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ является решением интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\ \varphi(t)\ dt = \frac{x}{2},$$

где ядро имеет вид

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x(2-t)}{2}, \ 0 \le x \le t, \\ \dfrac{t(2-x)}{2}, \ t \le x \le 1. \end{cases}$$

Решение. Левую часть уравнения запишем в виде

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt + \int_x^1 K(x,t)\varphi(t)dt\right\} =$$

$$= \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x \frac{t(2-x)}{2}\varphi(t)dt + \int_x^1 \frac{x(2-t)}{2}\varphi(t)dt\right\}.$$

Подставляя в полученное выражение вместо $\varphi(x)$ функцию $\sin\frac{\pi x}{2}$, будем иметь

$$\frac{\sin\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\int_0^x t\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}dt+x\int_x^1(2-t)\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}dt\right\}=$$

$$=\frac{\sin\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\left(-\frac{t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}+\right.$$

$$\left.+x\left(-\frac{2-t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}-\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right)\Bigg|_{t=x}^{t=1}\right\}=\frac{x}{2}.$$

Итак, получаем $\frac{x}{2}\equiv\frac{x}{2}$, а это означает, что $\varphi(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ есть решение данного интегрального уравнения.

Пример 12. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \sin\ \ln x\ \ \varphi(t)\ dt=2x.$$

Решение. Имеем $\varphi(x)=C\,\lambda\sin\ \ln\ x+2x$, где $C=\int_0^1\varphi(t)\ dt$.

Подставляя выражение $\varphi(t)$ в интеграл, найдем

$$C=C\lambda\int_0^1 \sin\ \ln t\ \ dt+1,$$

откуда $$C\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)=1.$$

Если $\lambda\neq-2$, то данное уравнение имеет единственное решение

$$\varphi(x)=\frac{2\lambda}{2+\lambda}\sin\,\ln x+2x,$$

а соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1\sin\,\ln x\;\;\varphi(t)\;dt=0$$

только нулевое решение: $\varphi(x)\equiv 0$.

Если же $\lambda=-2$, то данное уравнение не имеет решений, т.к. правая часть $f(x)=2x$ не ортогональна к функции $\sin\,\ln x$; однородное уравнение имеет бесконечное множество решений, т.к. из уравнения для определения C: $0\cdot C=0$ следует, что C – произвольная постоянная; все эти решения даются формулой

$$\varphi(x)=\tilde{C}\;\lambda\;\sin\;\ln\,x\quad(\tilde{C}=-2C).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить, какие из данных функций являются решениями указанных интегральных уравнений:

а) $\varphi(x)=2e^x\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$, $\;\varphi(x)+2\displaystyle\int_0^1 e^{x-t}\;\varphi(t)\;dt=2xe^x$.

б) $\varphi(x)=\cos x$, $\;\varphi(x)-\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x^2+t\right)\cos t\;\;\varphi(t)\;dt=\sin x$.

в) $\varphi(x) = xe^{-x}$, $\quad \varphi(x) - 4\int_0^{\infty} e^{-(x+t)}\varphi(t)\,dt = (x-1)e^{-x}.$

г) $\varphi(x) = \cos 2x$, $\quad \varphi(x) - 3\int_0^{\pi} K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = \cos x,$

$$K(x,t) = \begin{cases} \sin x \ \cos t, & 0 \le x \le t, \\ \sin t \ \cos x, & t \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ следующие интегральные уравнения:

а) $\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi} \cos^2 x \ \varphi(t)\,dt = 1.$

б) $\varphi(x) - \lambda\int_{-1}^{1} x\ e^t\ \varphi(t)\,dt = x.$

в) $\varphi(x) - \lambda\int_0^{2\pi} |x - \pi|\ \varphi(t)\,dt = x.$

г) $\varphi(x) - \lambda\int_{-1}^{1} \left(x^2 - 2xt\right)\ \varphi(t)\,dt = x^3 - x.$

д) $\varphi(x) - \lambda\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi}\cos x\ \cos t + \frac{1}{\pi}\sin 2x\ \sin 2t\right)\ \varphi(t)\,dt = \sin\ x.$

Ответы

1. а) да; б) нет; в) да; г) да.

2. а) $\varphi(x) = 1 + \dfrac{2\lambda\pi}{2-\lambda\pi}\cos^2 x$, $\quad \lambda \ne \dfrac{2}{\pi}$. При $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$ решений нет.

б) $\varphi(x)=\dfrac{e}{e-2\lambda}\cdot x,\quad \lambda\neq\dfrac{e}{2}.$ При $\lambda=\dfrac{e}{2}$ решений нет.

в) $\varphi(x)=x+\dfrac{2\pi^2\lambda}{1-\pi^2\lambda}|x-\pi|,\quad \lambda\neq\dfrac{1}{\pi^2}.$ При $\lambda=\dfrac{1}{\pi^2}$ решений нет.

г) $$\varphi(x)=\begin{cases} x^3-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4\lambda+5}{4\lambda+3}\cdot x, & \text{если } \lambda\neq\dfrac{3}{2},\ \lambda\neq-\dfrac{3}{4},\\ x^3-\dfrac{11}{5}\cdot x+cx^2, & \text{если } \lambda=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

При $\lambda=-\dfrac{3}{4}$ решений нет.

д) $$\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, \text{ если } \lambda\neq 1,\\ c_1\cos x+c_2\sin 2x+\sin x, \text{ если } \lambda=1.\end{cases}$$

3.4. Метод определителей Фредгольма

Решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\ \varphi(t)\ dt=f(x) \tag{3.13}$$

дается формулой

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t;\lambda)\ f(t)\ dt, \tag{3.14}$$

где функция $R(x,t;\lambda)$ называется *резольвентой Фредгольма* уравнения (3.13) и определяется равенством

$$R(x,t;\lambda)=\frac{\mathcal{D}(x,t;\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)} \tag{3.15}$$

при условии $\mathcal{D}(\lambda)\neq 0$. Здесь $\mathcal{D}(\lambda)$ и $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$ – степенные ряды по λ:

$$\mathcal{D}(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\lambda^n\underbrace{\int_a^b\ldots\int_a^b}_{n} A\left(t_1,\ldots,t_n\right)dt_1\ldots dt_n,$$

$$\mathcal{D}(x,\ t;\ \lambda)=K(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\lambda^n\underbrace{\int_a^b\ldots\int_a^b}_{n} B\left(x,t,t_1,\ldots,t_n\right)dt_1\ldots dt_n,$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$A(t_1,\ldots,t_n)=\begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \ldots & K(t_1,t_n)\\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \ldots & K(t_2,t_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \ldots & K(t_n,t_n)\end{vmatrix},$$

$$B(x,t,t_1,\ldots,t_n)=\begin{vmatrix} K(x,t_1) & K(x,t_2) & \ldots & K(x,t_n)\\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \ldots & K(t_1,t_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & \ldots & K(t_n,t_n)\end{vmatrix}.$$

Функция $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$ называется *минором Фредгольма*, а $\mathcal{D}(\lambda)$ – *определителем Фредгольма*.

Теорема. Уравнение (3.1) разрешимо при любой непрерывной функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}(\lambda)\neq 0$.

Замечание. Вычисление $A(t_1,\ldots,t_n)$ и $B(x,t,t_1,\ldots,t_n)$ по приведенным выше формулам возможно лишь в очень редких случаях, но из этих формул получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$B_n(x,t) = A_n K(x,t) - n\int_a^b K(x,s)\ B_{n-1}(s,t)\ ds,$$

$$A_n = \int_a^b B_{n-1}(s,s)\ ds,$$

где обозначено

$$A_n = \underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{n} A\left(t_1,\ldots,t_n\right) dt_1\ldots dt_n,$$

$$B_n(x,t) = \underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{n} B\left(x,t,t_1,\ldots,t_n\right) dt_1\ldots dt_n.$$

Зная, что $A_0 = 1$, $B_0(x,t) = K(x,t)$, последовательно находят A_1, $B_1(x,t)$, A_2, $B_2(x,t)$ и т.д.

Пример 13. Решить уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 x\ e^t\ \varphi(t)\ dt = e^{-x},\ (\lambda \neq 1).$$

Решение. Здесь $K(x,t) = xe^t$, $f(x) = e^{-x}$, $a = 0$, $b = 1$. Имеем

$$A(t_1) = K(t_1,t_1) = t_1 e^{t_1},$$

$$A(t_1,t_2) = \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} = 0;$$

аналогично найдем: $A(t_1,\ldots,t_n) = 0$ при $n \geq 2$.

Поэтому

$$D(\lambda) = 1 - \lambda\int_0^1 A(t_1)\ dt_1 = 1 - \lambda\int_0^1 t_1\ e^{t_1}\ dt_1 = 1 - \lambda.$$

В силу теоремы данное уравнение разрешимо при $\lambda \neq 1$. Аналогично найдем:

$$B(x,t) = x\ e^t,$$

$$B(x,t,t_1) = \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x\ e^t & x\ e^{t_1} \\ t_1\ e^t & t_1\ e^{t_1} \end{vmatrix} = 0,$$

$B(x,t,t_1,...,t_n) = 0$ при $n \geq 1$.

Поэтому

$$D(x,t;\lambda) = K(x,t) = xe^t.$$

Таким образом, по формуле (3.15) получаем

$$R(x,t;\lambda) = \frac{x\,e^t}{1-\lambda}.$$

Согласно формуле (3.14), решение данного уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = e^{-x} + \lambda\int_0^1 \frac{x\ e^t}{1-\lambda}\cdot e^{-t}\ dt = e^{-x} + \frac{\lambda}{1-\lambda}x.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь определителями Фредгольма, найти резольвенты следующих ядер:

а) $K(x,t) = 2x - t;\quad 0 \leq x \leq 1,\quad 0 \leq t \leq 1.$

б) $K(x,t) = \sin x\ \cos t;\quad 0 \leq x \leq 2\pi,\quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

в) $K(x,t) = x^2 t - x\,t^2;\quad 0 \leq x \leq 1,\quad 0 \leq t \leq 1.$

г) $K(x,t) = \sin x - \sin t;\quad 0 \leq x \leq 2\pi,\quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

2. Используя рекуррентные соотношения, найти резольвенты следующих ядер:

а) $K(x,t) = x + t + 1; \quad -1 \le x \le 1, \quad -1 \le t \le 1.$

б) $K(x,t) = e^{x-t}; \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le 1.$

в) $K(x,t) = 1 + 3xt; \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le 1.$

г) $K(x,t) = x - \operatorname{sh} t; \quad -1 \le x \le 1, \quad -1 \le t \le 1.$

3. Методом определителей Фредгольма решить следующие интегральные уравнения:

а) $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2x - t)\, \varphi(t)\, dt = \frac{x}{6}.$

б) $\varphi(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \, \cos t \, \varphi(t) dt = \cos 2x.$

в) $\varphi(x) + \int_0^1 e^{x-t}\, \varphi(t)\, dt = e^x.$

г) $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+t)\, \varphi(t)\, dt = 1.$

д) $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \left(4xt - x^2\right) \varphi(t)\, dt = x.$

Ответы

1. а) $R(x,t;\lambda) = \dfrac{2x - t + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\right)\lambda}{1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}}.$

б) $R(x,t;\lambda) = \sin x \, \cos t.$

в) $R(x,t;\lambda)=\dfrac{x^2t-xt^2+xt\left(\dfrac{x+t}{4}-\dfrac{xt}{3}-\dfrac{1}{5}\right)\lambda}{1+\dfrac{\lambda^2}{240}}.$

г) $R(x,t;\lambda)=\dfrac{\sin x-\sin t-\pi(1+2\sin x\,\sin t)\lambda}{1+2\pi^2\lambda^2}.$

2. а) $R(x,t;\lambda)=\dfrac{x+t+1+2\left(xt+\dfrac{1}{3}\right)\lambda}{1-2\lambda-\dfrac{4}{3}\lambda^2}.$

б) $R(x,t;\lambda)=\dfrac{e^{x-t}}{1-\lambda}.$

в) $R(x,t;\lambda)=\dfrac{1+3xt+\left(3\dfrac{x+t}{2}-3xt-1\right)\lambda}{1-2\lambda+\dfrac{1}{4}\lambda^2}.$

г) $R(x,t;\lambda)=\dfrac{x-\operatorname{sh}t-2\left(e^{-1}+x\,\operatorname{sh}t\right)\lambda}{1+4e^{-1}\lambda^2}.$

3. а) $\varphi(x)=\dfrac{1}{6}\left[x+\dfrac{(6x-2)\lambda-\lambda^2x}{\lambda^2-3\lambda+6}\right].$

б) $\varphi(x)=\cos 2x.$

в) $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}e^x.$

г) $\varphi(x)=1.$

д) $\varphi(x)=\dfrac{3x(2\lambda-3\lambda x+6)}{\lambda^2-18\lambda+18}.$

3.5. Решение интегральных уравнений методом Галеркина

Приближенное решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \qquad (3.16)$$

по методу Галеркина находится следующим образом. Выбираем координатную систему на $[a,b]$, т.е. систему функций $\{v_n(x)\}$, такую, что при любом n функции $v_1(x),...,v_n(x)$ линейно независимы и множество линейных комбинаций этих функций плотно расположено в множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций на $[a,b]$, равных нулю на концах отрезка. Будем искать приближенное решение $\varphi_n(x)$ уравнения (3.16) в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k(x). \qquad (3.17)$$

Коэффициенты c_k $(k = 1, 2, ..., n)$ определяются из системы Галеркина:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1n}c_n = b_1, \\ .... \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + ... + a_{nn}c_n = b_n, \end{cases} \qquad (3.18)$$

где a_{ij}, b_i вычисляются по формулам

$$a_{ij} = \int_a^b v_i(v_j - w_j)\,dx, \qquad w_j(x) = \int_a^b K(x,t)\,v_j(t)\,dt,$$

$$b_i = \int_a^b f\,v_i\,dx, \qquad i, j = 1, ..., n.$$

Решая систему Галеркина (3.18), получим приближенное решение $\varphi \approx \varphi_n$ уравнения (3.16) по формуле (3.17). Теоретический анализ показывает, что при большом n оно близко к точному решению.

Пример 14. Методом Галеркина построить приближенное решение уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \int_{-1}^{1} (x\,t + x^2)\,\varphi(t)\,dt = 1.$$

Решение. Имеем $K(x,t) = xt + x^2,\ f(x) = 1.$ В качестве координатной системы на $[-1,\ 1]$ примем систему многочленов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right],\ n = 0,1,2,\dots .$$

Приближенное решение $\varphi_n(x)$ уравнения будем искать в виде

$$\varphi_3(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + c_3 v_3(x),$$

где $v_1(x) = P_0(x) = 1,\ v_2(x) = P_1(x) = x,\ v_1(x) = P_2(x) = \dfrac{3x^2-1}{2}.$

Составим систему Галеркина для определения коэффициентов $c_k\ (k = 1,2,3)$.

$$a_{11} = \int_{-1}^{1} v_1(v_1 - w_1)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\left(1 - \int_{-1}^{1}\left(x\,t + x^2\right)1\,dt\right)dx = \frac{2}{3},$$

$$a_{12} = \int_{-1}^{1} v_1(v_2 - w_2)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\left(x - \int_{-1}^{1}\left(x\,t + x^2\right)t\,dt\right)dx = 0,$$

$$a_{13} = \int_{-1}^{1} v_1(v_3 - w_3)\,dx = \int_{-1}^{1} 1 \left(\frac{3x^2 - 1}{2} - \int_{-1}^{1} \left(x\,t + x^2 \right) \left(\frac{3t^2 - 1}{2} \right) dt \right) dx = 0.$$

Аналогично получаем $a_{21} = 0$, $a_{22} = \frac{2}{9}$, $a_{23} = 0$, $a_{31} = -\frac{8}{15}$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = \frac{2}{5}$, $b_1 = 2$, $b_2 = b_3 = 0$.

Система Галеркина принимает вид

$$\begin{cases} \frac{2}{3} c_1 = 2, \\ \frac{2}{9} c_2 = 0, \\ -\frac{8}{15} c_1 + \frac{2}{5} c_3 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $(c_1, c_2, c_3) = (3, 0, 4)$.

Таким образом, решение данного интегрального уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi_3(x) = 3 \cdot 1 + 0 \cdot x + 4 \cdot \frac{3x^2 - 1}{2} = 6x^2 + 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Методом Галеркина решить следующие интегральные уравнения:

1. $\varphi(x) - \int_{-1}^{1} (x\,t^2 - x)\,\varphi(t)\,dt = 1 + \frac{4}{3} x.$

2. $\varphi(x) - \int_{-1}^{1} (x - 1)\,\varphi(t)\,dt = x.$

3. $\varphi(x) - \int\limits_{-1}^{1} (x + t - 2xt)\ \varphi(t)\ dt = 1 - x.$

4. $\varphi(x) - \int\limits_{-1}^{1} t^3\, x\ \varphi(t)\ dt = 4 + 3x.$

Ответы

1. $\varphi_3(x) = 1$. 2. $\varphi_3(x) = x$. 3. $\varphi_3(x) = \frac{5}{3} + x$. 4. $\varphi_3(x) = 4 + 5x$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Романовский Р. К., Степанов В.Н. Лекции по уравнениям математической физики. Стационарное уравнение: учеб. пособие. Омск: изд-во ОмГТУ, 2005. 108 с.

2. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики: учебник для студентов вузов. М.: изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996.

3. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.

4. Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985.

5. Владимиров В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1974.

6. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976.

СОДЕРЖАНИЕ

Для заметок

Редактор Е.Е.Дорошенко
Сводный темплан 2007 г.
ИД 06039 от 12.10.01
Подписано в печать Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л.- 4,5 Уч.-изд. л.- 4,5
Тираж 100 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ