

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Омский государственный технический университет»

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

СПЕЦГЛАВЫ

Учебное пособие

Омск
Издательство ОмГТУ
2020

УДК 532(075)
ББК 2.253я73
М55

Авторы:

В. Е. Щерба, В. В. Шалай, Е. А. Павлюченко, Е. Ю. Носов

Рецензенты:

Н. С. Галдин, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой
«Подъемно-транспортные, тяговые машины и гидропривод» СибАДИ;

В. Р. Ведрученко, д.т.н., профессор,
профессор кафедры «Теплотехника» ОмГУПС

Механика жидкости и газа. Спецглавы : учеб. пособие /
М55 [В. Е. Щерба и др.] ; Минобрнауки России, ОмГТУ. – Омск : Изд-во
ОмГТУ, 2020. – 92 с. : ил.

ISBN 978-5-8149-2989-1

В пособии рассмотрены вопросы ламинарного и турбулентного течения в трубопроводах, каналах и щелях. Приведены основные модели турбулентности $k - \varepsilon$, $k - \omega$, SST, RSM. Проанализирована постановка начальных граничных условий. Изложены вопросы применимости моделей турбулентности для расчета течения вязкой жидкости в щелевых уплотнениях поршневых гибридных энергетических машин.

Издание предназначено для обучающихся по направлениям 13.04.03 «Энергетическое машиностроение», 13.03.01 и 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», 21.03.01 и 21.04.01 «Нефтегазовое дело», а также для аспирантов и специалистов в области компрессорной и насосной техники.

УДК 532(075)
ББК 2.253я73

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
Омского государственного технического университета*

ISBN 978-5-8149-2989-1

© ОмГТУ, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЛАМИНАРНОМ И ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ	7
2. ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ	10
2.1. Установившееся ламинарное фрикционное безнапорное течение жидкости между двумя пластинами	10
2.2. Установившееся ламинарное фрикционное безнапорное течение жидкости в подшипнике с малым относительным зазором	13
2.3. Установившееся ламинарное фрикционное безнапорное течение жидкости между соосными цилиндрами с зазором одного порядка с диаметрами	15
2.4. Установившееся ламинарное напорное течение жидкости в трубе круглого поперечного сечения.....	22
2.5. Установившееся ламинарное напорное осевое течение жидкости в кольцевом зазоре, образованном двумя соосно расположенными цилиндрическими поверхностями	26
2.6. Установившееся ламинарное напорное течение жидкости между двумя неподвижными параллельными пластинами	30
2.7. Установившееся ламинарное напорное и фрикционное течение жидкости между двумя параллельными пластинами при условии подвижности одной из них	33
2.8. Установившееся ламинарное напорное и фрикционное осевое течение жидкости между двумя неподвижными и подвижными соосно расположенными и не соосно расположенными цилиндрами	36

2.9. Установившееся движение вязкой жидкости в тонком слое переменной толщины. Уравнение Рейнольдса для смазочного слоя.....	40
2.10. Установившееся ламинарное фрикционное течение жидкости в клиновом зазоре	43
2.11. Установившееся ламинарное напорное течение жидкости в торцевом зазоре, образованном двумя плоскими дисками.....	49
3. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ.....	52
3.1. Основные уравнения, описывающие турбулентное течение вязкой жидкости	52
3.2. Анализ основных существующих моделей турбулентности	58
3.3. Постановка начальных и граничных условий, методы численного решения уравнений	66
3.4. Тестирование и применение моделей турбулентности	67
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	88
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	89

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании и эксплуатации практически любых механизмов и машин современному специалисту необходимы знания по расчету течения жидкости в трубопроводах, каналах и щелях.

В общем курсе механики жидкости и газа, читаемом обучающимся по направлению 13.03.03 «Энергетическое машиностроение», излагаются основные общие подходы к равновесию и течению жидкости.

В настоящем учебном пособии более углубленно освещаются вопросы ламинарного и турбулентного течения в трубопроводах, каналах и щелях.

При изучении ламинарного течения рассматриваются аналитические методы расчета фрикционного и напорного течения в плоских и круглых щелях при малых и значительных зазорах, наличии или отсутствии эксцентриситета. На основе уравнений Рейнольдса для смазочного слоя анализируется течение жидкости в клиновидном слое, что весьма важно для понимания работы и расчета подшипников скольжения, а также течение жидкости в подпятнике. Расчет течения жидкости в подпятнике может быть использован при расчете фрикционных насосов.

В связи с развитием вычислительной техники и широким распространением пакетов прикладных программ, в частности ANSYS CFX, появилась возможность рассчитывать турбулентное течение. Так, на основе общих уравнений сохранения движения, массы и энергии записываются дифференциальные уравнения течения вязкой жидкости. Используя постоянство температуры жидкости, исходная система преобразуется в систему уравнений, состоящую из уравнений неразрывности в стационарной постановке и уравнения Навье – Стокса.

В пособии рассматриваются основные модели турбулентности, основанные на добавлении к исходным уравнениям с осредненными параметрами, уравнений генерации энергии вихрей и ее диссипации. Это модели $k - \varepsilon$, $k - \omega$, SST, RSM. Анализируется постановка начальных граничных условий.

Излагаются вопросы применимости моделей турбулентности для расчета течения вязкой жидкости в щелевых уплотнениях поршневых гибридных энергетических машин, а также вопросы расчета коэффициента гидравлического трения по длине для различных режимов течения жидкости в трубе круглого сечения.

Пособие написано в соответствии с рабочей программой по курсу «Спецглавы механики жидкости» для подготовки магистрантов по направлению 13.04.03 «Энергетическое машиностроение».

Также оно будет полезно обучающимся по родственным направлениям 13.03.01 и 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», 21.03.01 и 21.04.01 «Нефтегазовое дело», аспирантам и специалистам в области компрессорной и насосной техники.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЛАМИНАРНОМ И ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Слоистое течение жидкости без перемешивания и пульсации скорости и давления получило название «ламинарное» от латинского *lamina* – пластина, слой [1, 3].

С увеличением скорости движения жидкости возникают вихри и пульсации скорости, давления и в общем случае температуры. Слоистое движение жидкости исчезает, а вместо него возникает вихреобразное, получившее название «турбулентное» от латинского слова *turbulentus*, т. е. вихревой [1, 2].

Образующиеся вихри начинают перемещаться в продольном и поперечном направлениях. С вихрями переносится энергия, в первую очередь в поперечном направлении, и выравнивается распределение скорости по сечению трубопровода.

Таким образом, в отличие от ламинарного течения, при турбулентном течении векторы скоростей имеют не только осевые, но и нормальные к оси движения компоненты, происходят поперечные перемещения и вращательное движение отдельных объемов жидкости. Гипотезу о двух режимах течения высказал еще Д. И. Менделеев, а английский физик О. Рейнольдс подтвердил предположения русского ученого экспериментальным путем. С этой целью он создал экспериментальную установку, состоящую из бака с постоянным уровнем жидкости, из которого вытекает жидкость через трубопровод со стеклянной вставкой с регулирующим краном (рис. 1.1). Жидкость подкрашивается с помощью красителя, например чернил, и подается в стеклянный трубопровод. Открытием регулирующего крана изменяется расход жидкости в трубопроводе и скорость движения жидкости.

При малых скоростях движения жидкости подкрашенная струйка сохраняет свое положение в трубопроводе и не перемешивается с остальной

жидкостью. С увеличением расхода жидкости струйка начинает деформироваться, растягиваться в поперечном направлении. По мере увеличения скорости все поперечное сечение трубопровода окрашивается, т. е. струйка исчезает и начинается полноценное турбулентное движение.

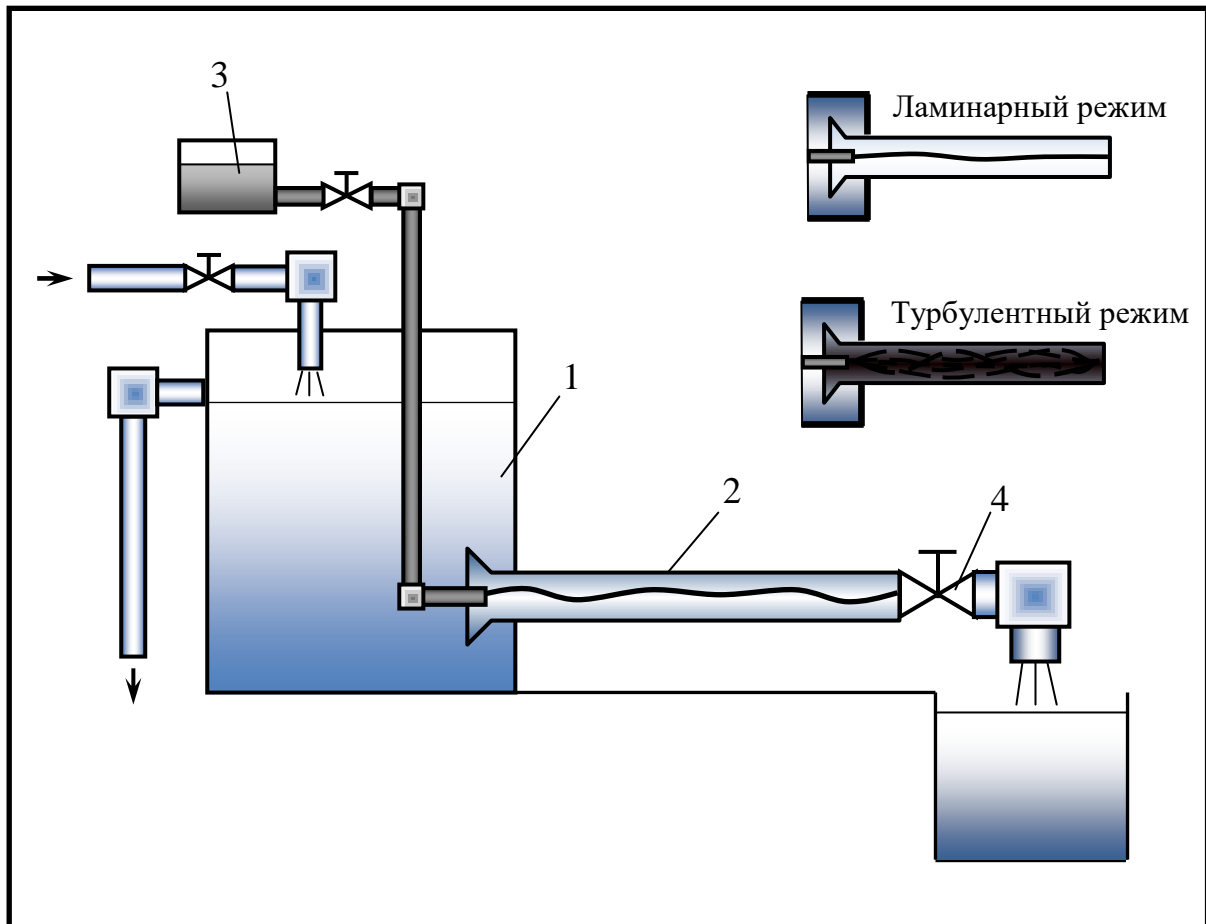


Рис. 1.1. Экспериментальная установка О. Рейнольдса

по изучению режимов течения жидкости:

1 – бак с жидкостью; 2 – трубопровод со стеклянной вставкой;

3 – емкость с подкрашивающей жидкостью; 4 – регулировочный кран

О. Рейнольдсом были проведены многочисленные опыты, результатом которых явился некий безразмерный критерий Re , который однозначно определяет условия перехода из ламинарного режима в турбулентный.

Этот критерий впоследствии был назван критерием Рейнольдса и выражается как

$$Re = \frac{vd}{\nu},$$

где v – средняя скорость потока; d – характерный линейный размер (для трубопровода круглого сечения – внутренний диаметр); $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость жидкости; μ – динамическая вязкость жидкости; ρ – плотность жидкости.

Гидравлическое сопротивление трубопровода зависит от режима течения. Поэтому важно знать приближенное число Рейнольдса, при котором течение переходит из ламинарного в турбулентное. Для трубопровода круглого сечения значение $Re_{кр} \leq 2320$ гарантированно обеспечивает ламинарный режим течения. При $Re \geq 10\,800$ – совершенно точно наступает турбулентный режим течения. В диапазоне $2320 < Re < 10\,800$ наблюдается переходный режим течения.

Необходимо отметить, что в трубопроводах не круглого сечения значения критического сечения будут другими. Например, для кольцевых щелей значение $Re_{кр} = 1000–1100$.

2. ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ

2.1. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ЛАМИНАРНОЕ ФРИКЦИОННОЕ БЕЗНАПОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛАСТИНАМИ

Пусть бесконечно широкая пластина перемещается по слою жидкости постоянной толщины, расположенному на неподвижной плоскости (рис. 2.1). Необходимо отметить, что пластина движется параллельно неподвижной плоскости с постоянной скоростью u_0 , толщина слоя жидкости b и динамическая вязкость μ постоянны, так как температура жидкости неизменна. Определим эпюру распределения скорости в зазоре, касательное напряжение, силу трения между пластиной и жидкостью и расход жидкости, обусловленный перемещением пластины по поверхности жидкости.

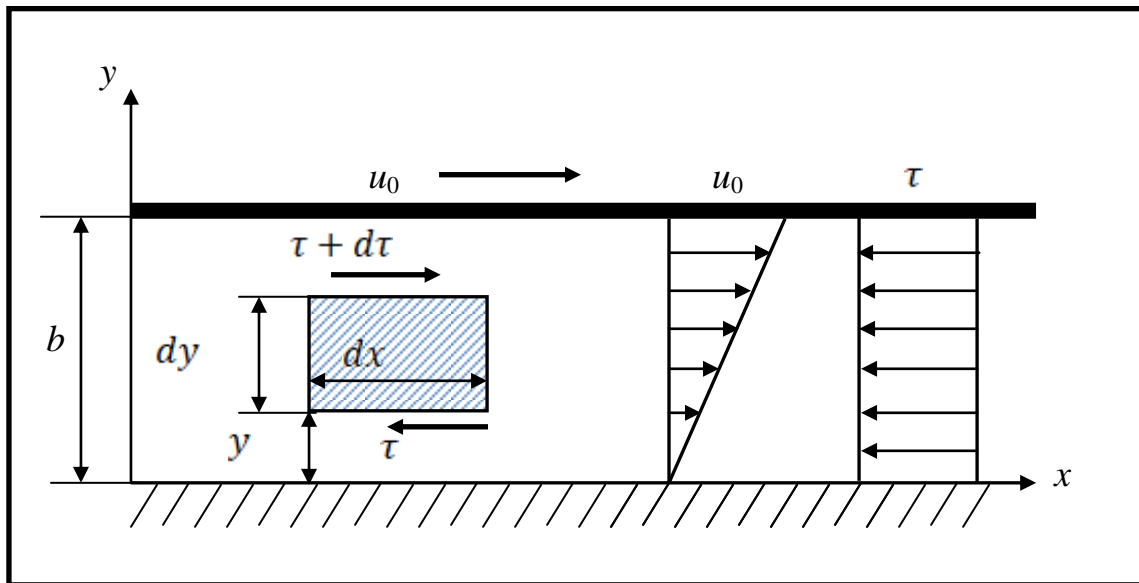


Рис. 2.1. Расчетная схема для фрикционного безнапорного течения, вызванного перемещением бесконечно широкой пластины по слою жидкости постоянной толщины

Выделим в жидкости, находящейся в зазоре, бесконечно малый элемент с гранями по осям $o-x$ и $o-y$, dx и dy соответственно. Длину пластины в направлении оси $o-z$, расположенной перпендикулярно плоскости чертежа, примем равной B . В соответствии с первым законом Ньютона, если

тело находится в состоянии равномерного движения с некоторой скоростью, то сумма сил, действующих на данное тело, равна нулю. Изучим силы, действующие на выделенный элемент. В общем случае на рассматриваемый элемент действуют объемные и поверхностные силы. Величина объемной силы для выделенного элемента на ось $o-x$ проектируется в ноль. Остаются только силы касательного трения F_1 и F_2 .

В соответствии с рис. 2.1 приложим силы трения F_1 и F_2 к выделенному элементу и запишем условие равновесия [4]:

$$F_2 - F_1 = 0. \quad (2.1)$$

Принимая во внимание, что сила трения определяется в общем случае через касательное напряжение как

$$F = \tau \cdot S,$$

где S – площадь трения,

уравнение (2.1) запишется как

$$-\tau B dx + (\tau + d\tau) B dx = 0. \quad (2.2)$$

Откуда

$$d\tau = 0 \text{ или } \tau = const. \quad (2.3)$$

Для жидкостного трения значение касательного напряжения, согласно закону Ньютона, определится как

$$\tau = \pm \mu \frac{du}{dy}. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) для нашего случая запишется в виде

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.5)$$

и

$$\mu \frac{du}{dy} = c. \quad (2.6)$$

Интегрируя уравнение (2.6), получаем

$$u = \frac{c}{\mu} y + c_1. \quad (2.7)$$

Значение постоянных c_2 и c_1 найдем из условия прилипания жидкости на границах потока:

$$y = 0 \quad u = 0 \text{ – неподвижная стенка}$$

$$y = b \quad u = u_0 \text{ – на подвижной пластинке.}$$

Из выражения (2.7) при их подстановке следует

$$c_1 = 0; \quad c_2 = \mu u_0 / b.$$

С учетом полученных значений c_1 и c , имеем

$$u = u_0 y / b. \quad (2.8)$$

Найденный закон распределения скорости по сечению зазора является линейным.

Величина касательного напряжения и сила трения на пластине площадью S определится как

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy} = \mu \frac{u_0}{b}. \quad (2.9)$$

$$T = \tau \cdot S = \mu \frac{u_0}{b} S. \quad (2.10)$$

$$Q = \int_0^b u B dy = B \int_0^b u dy = B \int_0^b \frac{u_0 y}{b} dy = \frac{B u_0}{b} \frac{y^2}{2} \Big|_0^b = \frac{B u_0 b}{2} = \frac{u_0}{2} B b. \quad (2.11)$$

Тогда величина средней скорости $v = \frac{Q}{B \cdot b} = \frac{u_0}{2}$.

2.2. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ЛАМИНАРНОЕ ФРИКЦИОННОЕ БЕЗНАПОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПОДШИПНИКЕ С МАЛЫМ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ЗАЗОРОМ

Определим момент трения на вращающемся с постоянной угловой скоростью валу, концентрично расположенном в подшипнике с малым относительным зазором (рис. 2.2).

Зазор считается малым [4], если

$$b/D \leq 1,$$

где b – радиальный зазор; D – диаметр вала.

При малом относительном зазоре кривизной слоя жидкости можно пренебречь. Тогда движение жидкости в зазоре можно рассматривать как плоскопараллельное. В этом случае эпюра скоростей в зазоре и величина касательных напряжений определяются по формулам (2.8) и (2.9) соответственно.

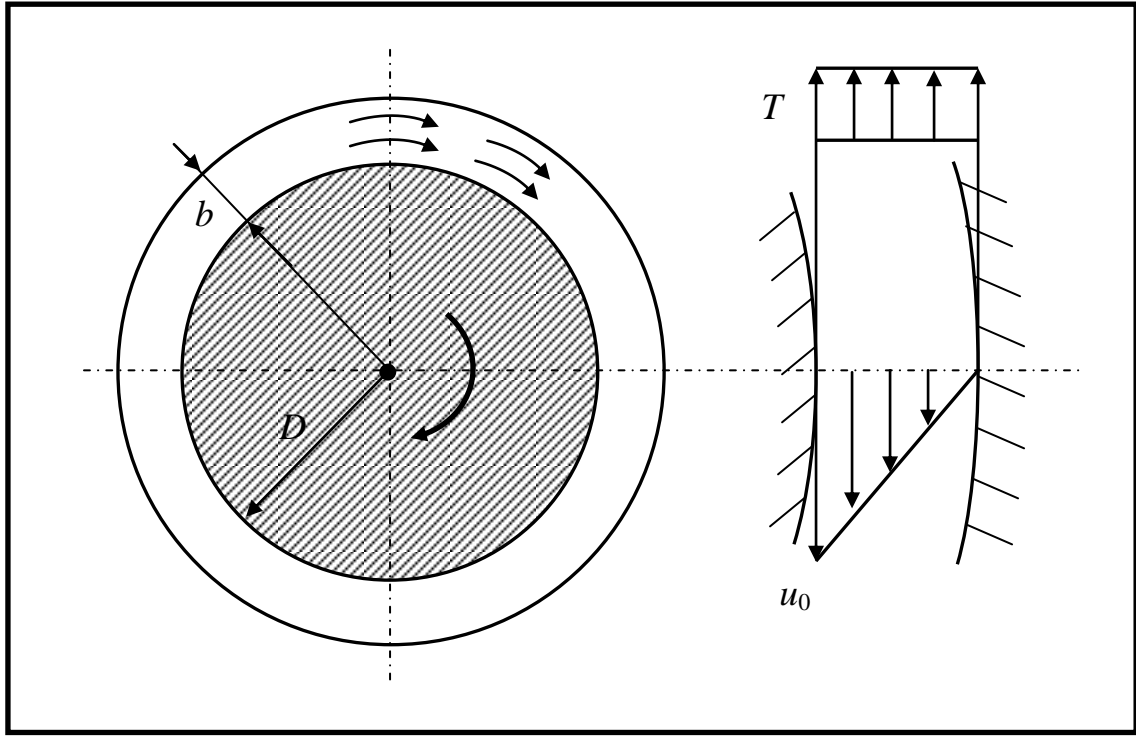


Рис. 2.2. Расчетная схема для фрикционного движения жидкости
в малом зазоре между валом и подшипником

Момент трения находится в общем случае как сила $F = \pi DL \cdot \tau$,
умноженная на плечо $\ell = \frac{D}{2}$.

$$M = \tau \pi DL \frac{D}{2} = \mu \frac{u_0}{2b} \pi D^2 L, \quad (2.12)$$

где $u_0 = \omega D/2$ – окружная скорость; ω – угловая скорость; L – длина подшипника.

Формула (2.12) представляет собой формулу Н. П. Петрова. Ламинарный режим течения будет наблюдаться при числах $Re \leq 30\sqrt{D/b}$, если вращается вал, а подшипник (внешний цилиндр) неподвижен. В том случае, если вращается наружный цилиндр при неподвижном внутреннем вале, число Рейнольдса для сохранения ламинарного режима должно составлять $Re \leq 2000$, при этом его значение должно определяться как $Re = u_0 2b/\nu$.

2.3. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ЛАМИНАРНОЕ ФРИКЦИОННОЕ БЕЗНАПОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ СООСНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ С ЗАЗОРОМ ОДНОГО ПОРЯДКА С ДИАМЕТРАМИ

При значительном зазоре между соосными цилиндрами, когда его значение становится соизмеримым с их диаметрами, решение, представленное в п. 2.2, становится неприемлемым.

Рассмотрим задачу о вращении внутреннего цилиндра с постоянной скоростью и расположенного концентрично. Определим зависимость распределения скорости в зазоре и момент трения на внутреннем цилиндре.

Для безнапорного движения условие равновесия поверхностных сил в кольцевом зазоре (рис. 2.3) запишется в виде

$$F_{mp1} - F_{mp2} = 0, \quad (2.13)$$

где $F_{mp1} = 2\pi r \ell \tau r$ – сила трения по внутренней поверхности кольца с радиусом r , толщиной ℓ ; τ – касательное напряжение;

$F_{mp2} = (\tau + d\tau) 2\pi(r + dr) \ell(r + dr)$ – сила трения на внешней поверхности кольца с радиусом $r + dr$.

С учетом сказанного выше запишем

$$\tau \cdot 2\pi r \ell r - (\tau + d\tau) 2\pi(r + dr) \ell(r + dr) = 0. \quad (2.14)$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\begin{aligned} \tau \cdot 2\pi r \ell \cdot r - (\tau + d\tau) 2\pi \left[r^2 + 2r \cdot dr + (dr)^2 \right] &= \tau \cdot 2\pi r \ell \cdot r - \tau \cdot 2\pi \ell \cdot r^2 - \\ - \tau \cdot 2\pi \ell \cdot 2r \cdot dr - \tau \cdot 2\pi \ell \cdot (dr)^2 - 2\pi \ell d\tau \cdot r^2 - d\tau \cdot 2\pi \ell \cdot 2r \cdot dr - \\ - d\tau \cdot 2\pi \ell (dr)^2 &= -2\pi \ell \tau \cdot 2r dr - 2\pi \ell r^2 d\tau = 0 \end{aligned}$$

$$d(\tau r^2) = 0$$

или

$$\tau \cdot r^2 = A, \quad (2.15)$$

где A – некоторая постоянная.

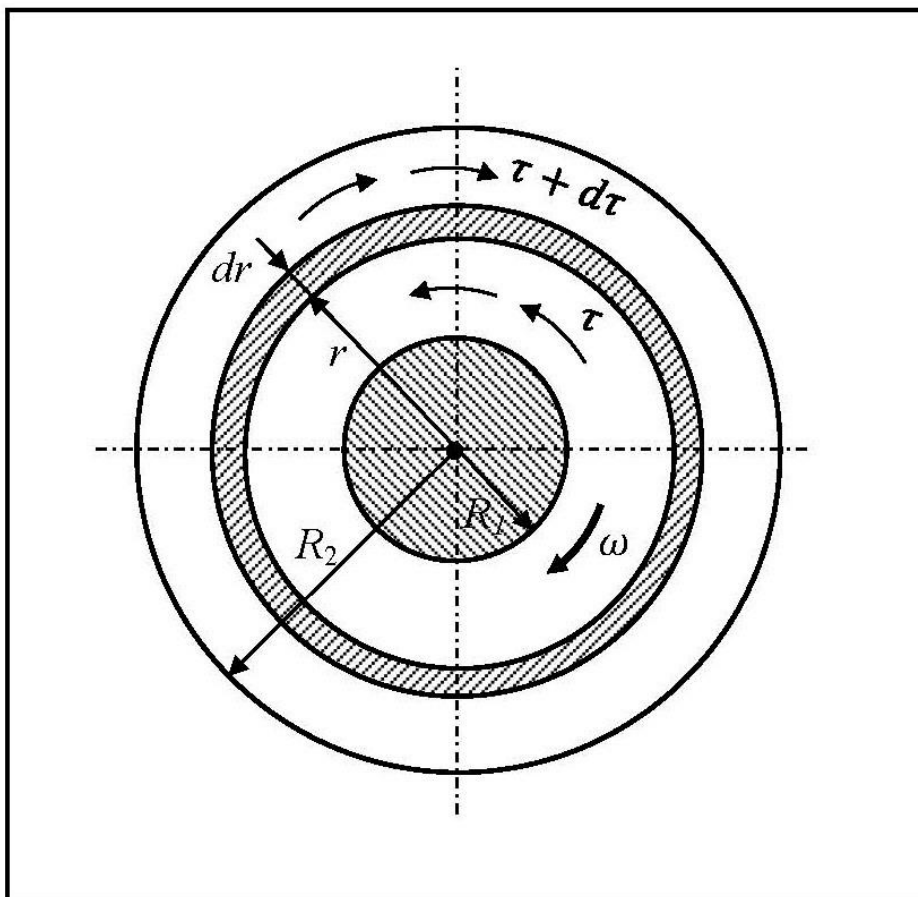


Рис. 2.3. Расчетная схема для фрикционного движения жидкости в зазоре между соосными цилиндрами, если зазор одного порядка с их диаметрами

Вследствие того, что движение жидкости в данном случае является криволинейным, уравнения Ньютона для жидкостного трения не применимы. Для определения величины касательного напряжения для криволинейного движения выделим во вращающейся жидкости два слоя на радиусах r и $r + dr$ и найдем скорость сдвига слоев относительно друг друга. За некоторый промежуток времени t точка A внутреннего слоя переместится

в точку A_1 , а точка B , находящаяся на продолжении радиуса точки A , в точку B_1 (рис. 2.4).

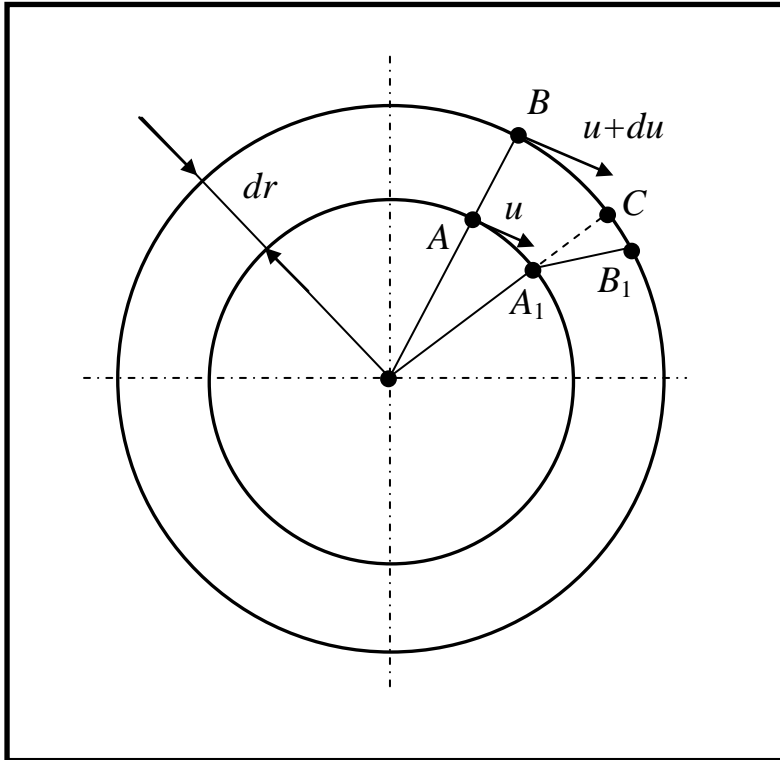


Рис. 2.4. Расчетная схема для вывода уравнений по определению касательных напряжений

Если скорость внутреннего слоя жидкости принять равной u , а скорость наружного слоя $(u + du)$, то длина дуги $AA_1 = ut$, а длина дуги $BB_1 = (u + du)t$. Величина сдвига CB_1 определится как

$$CB_1 - BB_1 - BC = (u + du)t - u \frac{r + dr}{r} t,$$

$$CB_1 = ut + du \cdot t - ut - u \frac{dr}{r} t = \left(du - u \frac{dr}{r} \right) t, \quad (2.16)$$

а скорость сдвига – как

$$\frac{CB_1}{t} = du - u \frac{dr}{r}. \quad (2.17)$$

Величина касательного напряжения пропорциональна угловой деформации сдвига

$$\tau = \frac{CB_1}{tdr} = \mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right). \quad (2.18)$$

Уравнение (2.18) представляет собой обобщенный закон Ньютона в полярных координатах. Подставляя полученное выражение (2.18) в уравнение (2.15), получаем

$$\mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) \cdot r^2 = A,$$

или

$$\frac{du}{dr} = \frac{u}{r} + \frac{A}{\mu r^2}, \quad (2.19)$$

или

$$u' - \frac{1}{r}u = \frac{A}{\mu r^2}. \quad (2.20)$$

Принимая, что $y = u$, $x = r$, уравнение (2.20) запишется в виде

$$y' + p(x)y = Q(x), \quad (2.21)$$

где $p(x) = -\frac{1}{x}$; $Q(x) = \frac{A}{\mu x^2}$.

Уравнение (2.21) представляет собой линейное дифференциальное уравнение с правой частью, решение которого найдем

$$y = \left[\int dx \cdot Q(x) e^{\int p(x) dx} + B \right] \cdot e^{-\int p(x) dx}. \quad (2.22)$$

Интегрируя, получаем

$$y = \left[\int dx \cdot \frac{A}{\mu x^2} \cdot \frac{1}{x} + B \right] \cdot x = \left[B + \frac{A}{\mu} \int x^{-3} dx \right] \cdot x = \left[B + \frac{A}{\mu} \cdot \frac{x^{-2}}{-2} \right] x = Bx - \frac{A}{\mu 2x}, \quad (2.23)$$

где B – некоторая константа.

Делая обратную подстановку, получаем

$$u = -\frac{A}{2\mu r} + Br. \quad (2.24)$$

Используя граничные условия $r = R_1$ и $u = u_0$; $r = R_2$ и $u = 0$ (рис. 2.3), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{A}{2\mu R_1} + BR_1 \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{A}{2\mu R_2} + BR_2 \end{cases} \quad (2.26)$$

Из уравнения (2.26) находим

$$B = -\frac{A}{2\mu R_2^2}$$

и, подставляя полученное выражение в (2.26), имеем

$$A = \frac{2\mu u_0 R_1 R_2}{(R_2^2 - R_1^2)}$$

и B , соответственно,

$$B = -\frac{R_1 u_0}{(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Тогда значение u запишется в виде

$$u = \frac{R_1 R_2^2 - R_1 \cdot r^2}{(R_2^2 - R_1^2) r} u_0. \quad (2.27)$$

Величину касательного напряжения на внутреннем цилиндре $r = R_1$ найдем как

$$\tau_{R_1} = \mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right),$$

где

$$\frac{du}{dr} = u_0 \left\{ \frac{-2R_1 r^2 (R_2^2 - R_1^2) - (R_2^2 - R_1^2) \cdot (R_1 \cdot R_2^2 - R_1 r^2)}{(R_2^2 - R_1^2)^2 r^2} \right\}, \quad (2.28)$$

$$\frac{u}{r} = \frac{R_1 \cdot R_2^2 - R_1 r}{(R_2^2 - R_1^2) r^2}. \quad (2.29)$$

Подставляя в записанные выражения $r = R_1$ и преобразовывая их, получаем следующее выражение:

$$\tau_{R_1} = \frac{2\mu R_2^2 u_0}{(R_2^2 - R_1^2) R_1}. \quad (2.30)$$

Момент трения определится как

$$M = 2\pi R_1 L \cdot \tau_{R_1} \cdot R_1, \quad (2.31)$$

учитывая, что $u_0 = \omega \cdot R_1$ (ω – угловая скорость вращения), величина момента запишется в виде

$$M = 4\pi\mu L \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \omega. \quad (2.32)$$

В случае линейного распределения скорости в зазоре

$$u = u_0 \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \quad (2.33)$$

по формуле Петрова мы бы получили следующее выражение для момента трения:

$$M_{mp(n)} = 2\pi\mu L \frac{R_1^2 \omega}{R_2 - R_1}. \quad (2.34)$$

Отношение приближенного и точного значений моментов трения записывается выражением

$$\frac{M_{mp(n)}}{M} = \frac{1}{2} \left[\frac{R_1}{R_2} + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right].$$

С увеличением R_2 это отношение уменьшается и, соответственно, момент трения, найденный по формуле Петрова, становится существенно меньше момента трения, определенного по формуле (2.32).

2.4. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ЛАМИНАРНОЕ НАПОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Выделим в движущейся жидкости элементарный объем жидкости в виде горизонтального цилиндра, соосного с трубой (рис. 2.5), и составим уравнение равновесия приложенных к нему сил в проекции на ось движения жидкости [5, 6, 7]

$$F_1 - F_2 - F_{mp} = 0, \quad (2.35)$$

где $F_1 = \pi r^2 \cdot p_1$ – поверхностная сила давления жидкости на левое основание цилиндра; $F_2 = \pi r^2 \cdot p_2$ – поверхностная сила давления жидкости на правое основание цилиндра; p_1, p_2 – давления жидкости, действующие на основание цилиндра; $F_{mp} = \tau \cdot 2\pi r \ell$ – сила вязкостного трения; ℓ – длина цилиндра; $\tau = -\mu \frac{du}{dr}$ – величина касательного напряжения.

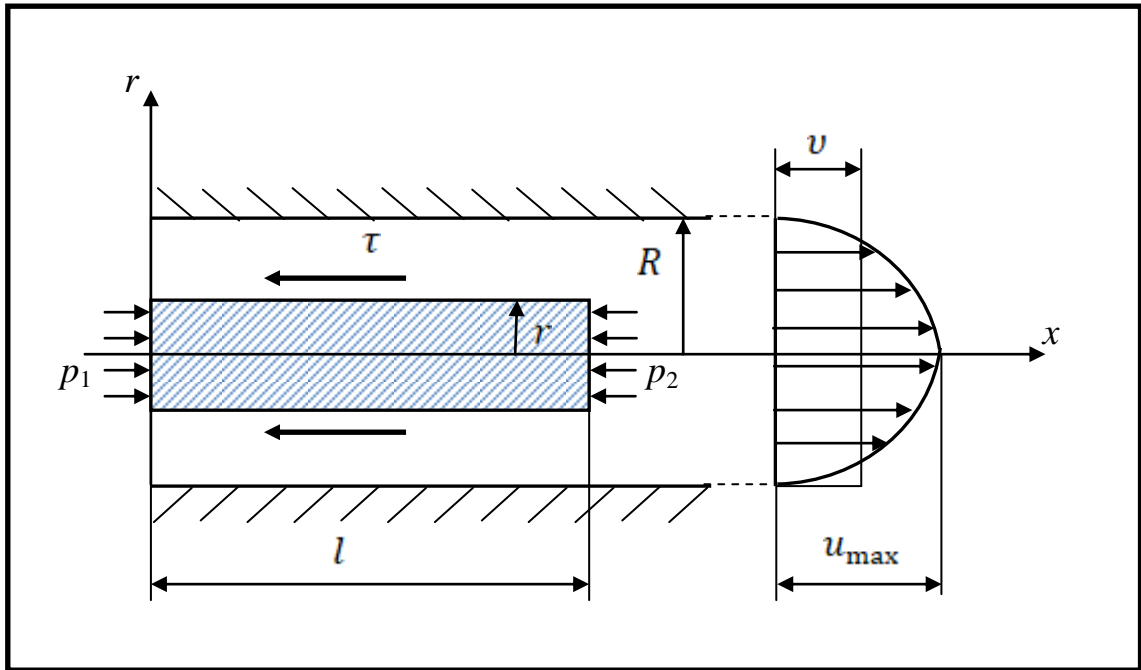


Рис. 2.5. Расчетная схема для напорного течения жидкости
в трубе круглого поперечного сечения

Подставляя значения $F_1, F_2, F_{\text{тр}}$ в выражение (2.35), получаем

$$\pi r^2 p_1 - \pi r^2 p_2 + 2\pi r \ell \mu \frac{du}{dr} = 0$$

$$\frac{p r}{\ell 2} = -\mu \frac{du}{dr}, \quad (2.36)$$

где $p = p_1 - p_2$; u – скорость жидкости на радиусе r .

Разделяя переменные в уравнении (2.36), получаем

$$du = -\frac{p r}{\ell 2\mu} \cdot dr. \quad (2.37)$$

Интегрируя выражение (2.37), получаем

$$u = -\frac{p}{\ell 4\mu} r^2 + c. \quad (2.38)$$

Из граничного условия $r = R = 0$, найдем c

$$c = \frac{P}{4\mu\ell} R^2. \quad (2.39)$$

Тогда значение текущей скорости жидкости можно записать как

$$u = \frac{P}{4\mu\ell} (R^2 - r^2). \quad (2.40)$$

Анализируя полученное выражение для скорости, видим, что скорость изменяется по квадратичной параболе с максимумом на оси трубы ($r = 0$)

$$u_{\max} = \frac{P}{4\mu\ell} R^2.$$

Тогда расход жидкости в поперечном сечении трубы

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R 2\pi r \cdot u \cdot dr = \int_0^R \frac{P}{4\mu\ell} (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr = \frac{P \cdot 2\pi}{4\mu\ell} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \\ &= \frac{p \cdot 2\pi}{4\mu\ell} \left[\left(\frac{R^2 \cdot r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R \right] = \frac{p \cdot 2\pi}{4\mu\ell} \frac{R^4}{4} = \frac{\pi \cdot p R^4}{8\mu\ell}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Среднюю скорость жидкости определим как

$$v = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{p R^2}{8\mu\ell} = \frac{u_{\max}}{2}. \quad (2.42)$$

Заменяя в этом выражении R через $D/2$ и $p = \rho g \Delta h$, где ρ – плотность, а Δh – потери напора, получаем

$$v = \frac{g \rho D^2}{32\mu\ell} \Delta h. \quad (2.43)$$

Решая уравнение относительно Δh , получаем

$$\Delta h = \frac{32\mu\ell}{\rho g D^2} \nu.$$

Учитывая, что $\mu = \nu\rho$, получаем

$$\Delta h = \frac{32\nu\ell}{gD^2} \nu. \quad (2.44)$$

Сопоставляя выражение (2.44) с уравнением Дарси $\Delta h = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{\nu^2}{2g}$ [8],

получаем следующее выражение:

$$\lambda = \frac{64}{Re},$$

где $Re = \frac{D\nu}{\nu}$ – число Рейнольдса.

Расход жидкости Q можно определить также как

$$Q = \nu \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi g D^4 \Delta h}{128\nu\ell}. \quad (2.45)$$

Следует отметить, что полученные зависимости стабилизированного ламинарного течения неприемлемы для входного участка трубы, где происходит формирование ламинарного потока.

Длину входного начального участка можно определить как

$$\ell_{нач} \approx 0,03Re \cdot D. \quad (2.46)$$

Тогда величину коэффициента трения на начальном участке по длине как

$$\lambda = 70/Re. \quad (2.47)$$

Таким образом, выражение (2.47) можно использовать для расчета величины коэффициента трения на начальном участке трубы.

2.5. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ЛАМИНАРНОЕ НАПОРНОЕ ОСЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ, ОБРАЗОВАННОМ ДВУМЯ СООСНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Выделим в зазоре бесконечно малый кольцевой элемент длиной ℓ и шириной в поперечном направлении dr и составим уравнение равновесия в проекции на ось цилиндров (рис. 2.6)

$$F_1 - F_2 - F_3 + F_4 = 0, \quad (2.48)$$

где $F_1 = \pi \cdot 2 \cdot rdr \cdot p_1$ – сила давления жидкости на левое основание полого цилиндра; $F_2 = 2\pi r dr \cdot p_2$ – сила давления жидкости на правое основание полого цилиндра; $F_3 = 2\pi r \ell \cdot \tau$ – сила трения внутреннего слоя; $F_4 = (\tau + d\tau) 2\pi(r + dr)\ell$ – сила трения внешнего слоя.

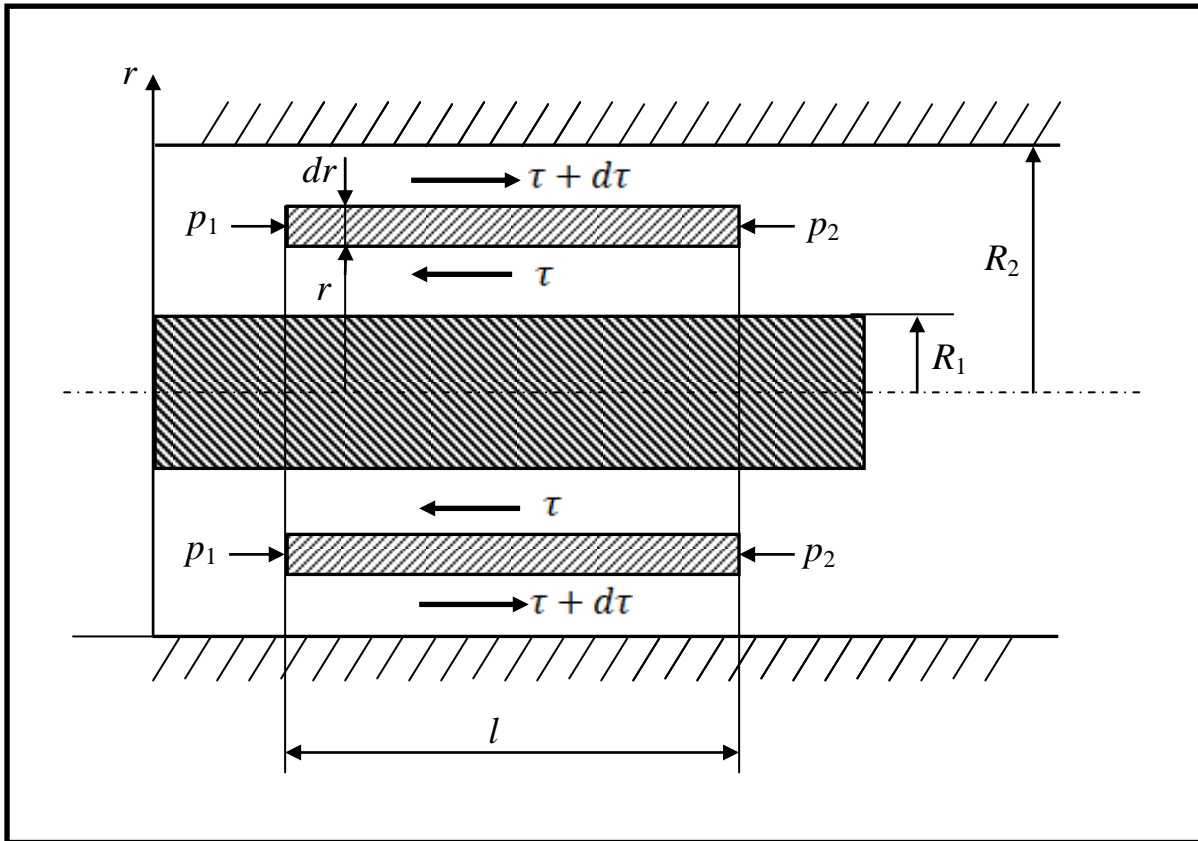


Рис. 2.6. Расчетная схема для напорного осевого течения жидкости в кольцевом зазоре, образованном двумя соосно расположенными цилиндрическими поверхностями

Подставляя записанные выражения в уравнение (2.48), получаем

$$prdr + ld(\tau r) = 0. \quad (2.49)$$

Интегрируем их:

$$p \frac{r^2}{2} + l\tau \cdot r + c_1 = 0, \quad (2.50)$$

где $p = p_1 - p_2$;

$$\tau = \mu \frac{du}{dr}.$$

Подставляем значение касательного напряжения τ в уравнение (2.50):

$$p \frac{r^2}{2} + \ell r \cdot \mu \frac{du}{dr} + c_1 = 0,$$

$$du = -p \frac{r^2}{2\ell \cdot r\mu} dr - \frac{c_1}{\ell r\mu} dr. \quad (2.51)$$

Интегрируя выражение (2.51), получаем

$$u = -\frac{p}{2\ell\mu} \frac{r^2}{2} - \frac{c_1}{\ell\mu} \ln r + c_2. \quad (2.52)$$

Значения c_1 и c_2 определяем из граничных условий

$$r = R_2; \quad u = 0$$

$$r = R_1; \quad u = 0$$

$$\begin{cases} \frac{-p}{4\mu\ell} R_2^2 - \frac{c_1}{\ell\mu} \ln R_2 + c_2 = 0 & (2.53) \\ \frac{-p}{4\mu\ell} R_1^2 - \frac{c_1}{\ell\mu} \ln R_1 + c_2 = 0 & (2.54) \end{cases}$$

Решив систему уравнений (2.53)–(2.54), найдем значения постоянных c_1 и c_2 :

$$c_1 = -\frac{\frac{p}{4}(R_2^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}}; \quad (2.55)$$

$$c_2 = \frac{p}{4\mu\ell} R_2^2 + \frac{c_1}{\ell\mu} \ln R_2. \quad (2.56)$$

$$c_2 = \frac{P}{4\mu\ell} R_2^2 + \frac{c_1}{\ell\mu} \ln R_2;$$

$$-\frac{P}{4\mu\ell} R_1^2 - \frac{c_1}{\ell\mu} \ln R_1 + \frac{P}{4\mu\ell} R_2^2 + \frac{c_1}{\ell\mu} \ln R_2 = 0;$$

$$\frac{c_1}{\ell\mu} (\ln R_2 - \ln R_1) + \frac{P}{4\mu\ell} (R_2^2 - R_1^2) = 0;$$

$$c_1 = -\frac{\frac{P}{4} (R_2^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}};$$

Подставляя значения c_1 и c_2 в уравнение (2.52), получаем выражение для u :

$$u = \frac{P}{4\mu\ell} \left[R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_2} \right]. \quad (2.57)$$

Произведя интегрирование скорости по сечению зазора, получим выражение для расхода жидкости

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} u \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi P}{8\mu\ell} \left[R_2^4 - R_1^4 + \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \right]. \quad (2.58)$$

При $R_1 = 0$ уравнение (2.58) переходит в формулу Пуазейля для трубы круглого сечения:

$$Q = \frac{\pi R_2^4 P}{8\mu\ell}, \quad (2.59)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости.

2.6. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ЛАМИНАРНОЕ НАПОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ НЕПОДВИЖНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ

В зазоре между пластинами выделим элемент жидкости и составим уравнение равновесия приложенных к нему сил (рис. 2.7)

$$p \cdot y \cdot B = -\mu \frac{du}{dy} \cdot \ell \cdot B, \quad (2.60)$$

где $p = p_1 - p_2$ – перепад давления на длине зазора ℓ ; B – ширина пластины.

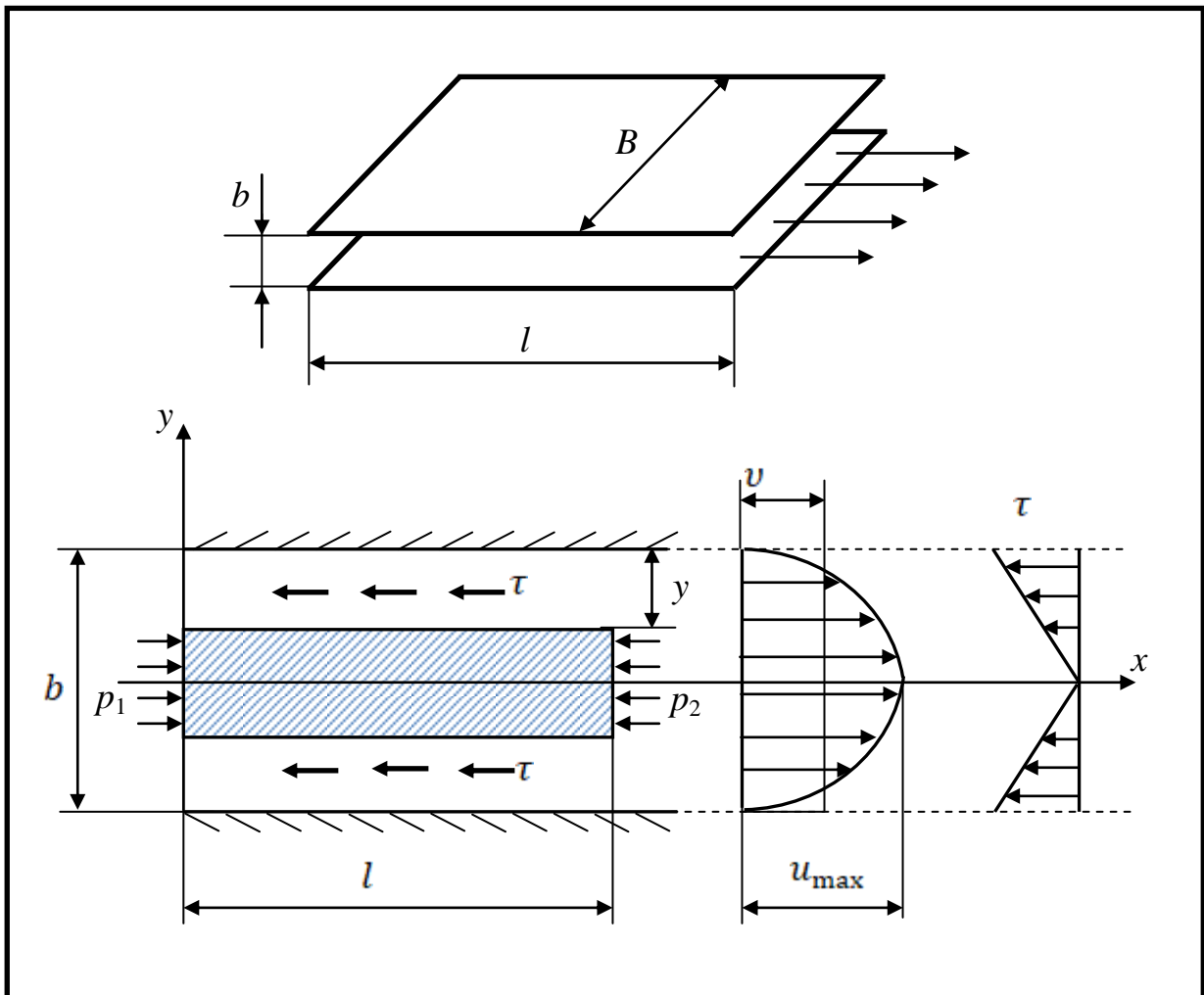


Рис. 2.7. Расчетная схема для напорного течения
в зазоре между неподвижными параллельными пластинами

Преобразовывая уравнение (2.60), получаем

$$-\frac{p y dy}{\ell \mu} = du.$$

После интегрирования имеем

$$u = -\frac{p}{\ell \mu} \frac{y^2}{2} + c. \quad (2.61)$$

Постоянную интегрирования c определим из условия равенства нулю скорости u на пластине $y = \frac{b}{2}$:

$$u = -\frac{p}{\ell \mu} \frac{b^2}{8} + c;$$

$$c = \frac{p}{\ell \mu} \frac{b^2}{8}.$$

Подставляя полученное для c выражение в уравнение (2.61), получаем

$$u = -\frac{p}{\ell \mu} \frac{y^2}{2} + \frac{p}{\ell \mu} \frac{b^2}{8} = \frac{p}{\ell \mu} \left(\frac{b^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right) = \frac{p b^2}{8 \mu \ell} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right), \quad (2.62)$$

где b – зазор между пластинами.

Величину расхода Q в пространстве между пластинами определим как

$$\begin{aligned} Q &= 2 \int_0^{b/2} u dS = 2 \int_0^{b/2} u \cdot B dy = \frac{2 p b^2 B}{8 \mu \ell} \int_0^{b/2} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right) dy = \\ &= \frac{2 B p b^2}{8 \mu \ell} \left(y - \frac{4}{b^2} \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^{b/2} = \frac{2 B p b^2}{8 \mu \ell} \cdot \frac{1}{3} b = \frac{1}{12} \frac{B p b^3}{\mu \ell}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

где B – ширина пластины.

Величину средней скорости v можно записать как

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{B \cdot b} = \frac{1}{12} \frac{Bpb^3}{\mu l \cdot B \cdot b} = \frac{1}{12} \frac{pb^2}{\mu l}. \quad (2.64)$$

Анализируя формулу, полученную для мгновенной скорости жидкости в зазоре, можно сделать вывод, что

$$u_{\max} = \frac{pb^2}{8\mu l}. \quad (2.65)$$

Тогда величина средней скорости жидкости v равна $\frac{2}{3}u_{\max}$.

Из уравнения (2.63) выразим величину p и получим

$$p = h_n \rho g = \frac{12\mu l Q}{B \cdot b^3}. \quad (2.66)$$

Откуда величина потерь напора

$$h_n = \frac{12\mu l Q}{b^3 \cdot B \cdot \rho g} = 12 \frac{\nu l}{gb^3} \frac{Q}{B}. \quad (2.67)$$

Сопоставляя выражение (2.67) с известной формулой для потерь напора по длине (формулой Дарси) [3, 6, 7, 8]

$$h_n = \lambda \frac{l}{D_z} \frac{v^2}{2g},$$

получаем следующее выражение для определения коэффициента трения по длине:

$$\lambda = 96/Re, \quad (2.68)$$

где $Re = \frac{vD_z}{\nu}$; $D_z = 2b$ – гидравлический диаметр.

2.7. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ЛАМИНАРНОЕ НАПОРНОЕ

И ФРИКЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ ПРИ УСЛОВИИ ПОДВИЖНОСТИ ОДНОЙ ИЗ НИХ

В зазоре между двумя пластинами под действием перепада давления движется жидкость, при этом одна пластина перемещается параллельно относительно другой со скоростью u_0 (рис. 2.8).

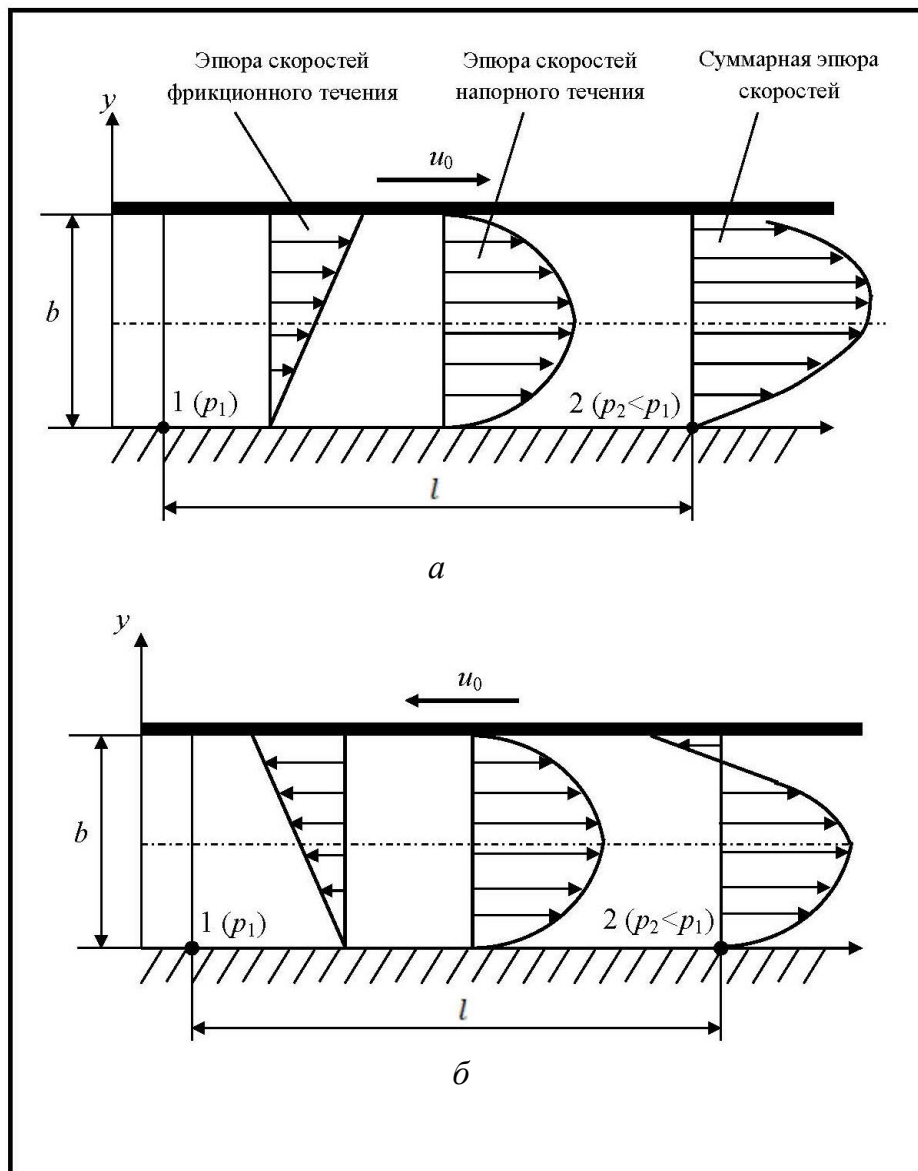


Рис. 2.8. Расчетная схема для напорного и фрикционного течения жидкости между двумя параллельными пластинами при условии подвижности одной из них: a – напорное и фрикционное течения совпадают; b – напорное и фрикционное течения направлены в разные стороны

В этом случае течение жидкости в зазоре будет сложным, представляя собой сумму двух течений: напорного, вызванного перепадом давления $p = p_1 - p_2$, и фрикционного, наведенного перемещением одной пластины относительно другой. Применяя принцип аддитивности, общая скорость жидкости будет равна сумме скоростей напорного и фрикционного движений. Скорость фрикционного движения, если начало координат перенести в середину зазора, запишется в виде

$$u_1 = \frac{u_0}{b} y + \frac{u_0}{2}. \quad (2.69)$$

Скорость напорного движения u_2 найдем по формуле (2.62). Тогда общая скорость u выразится как сумма u_1 и u_2

$$u = u_1 + u_2 = \frac{u_0}{b} y + \frac{u_0}{2} + u_{\max} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right). \quad (2.70)$$

Определим:

– расход жидкости Q :

$$\begin{aligned} Q &= 2B \int_0^{b/2} \left[\frac{u_0}{b} y + \frac{u_0}{2} + u_{\max} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right) \right] dy = \\ &= 2B \left[\frac{u_0}{b} \frac{y^2}{2} + \frac{u_0 y}{2} + u_{\max} \left(y - \frac{4y^3}{3b^2} \right) \right]_0^{b/2} = \quad ; \quad (2.71) \\ &= 2B \left[\frac{u_0 b}{8} + \frac{u_0 b}{4} + u_{\max} \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{6} \right) \right] = Bb \left[\frac{3}{4} u_0 + \frac{2}{3} u_{\max} \right] \end{aligned}$$

– величину средней скорости v :

$$v = \frac{Q}{B \cdot b} = \left[\frac{3}{4} u_0 + \frac{2}{3} u_{\max} \right]; \quad (2.72)$$

– силу трения на пластине:

$$T = \mu \frac{du}{dy} S = \mu S \left(\frac{u_0}{b} - u_{\max} \frac{8y}{b^2} \right), \quad (2.73)$$

и при $y = \frac{b}{2}$

$$T = \mu S \left(\frac{u_0}{b} - u_{\max} \frac{4}{b} \right). \quad (2.74)$$

При перемещении пластины со скоростью u_0 в противоположном направлении закон изменения скорости запишется в виде

$$u = -u_0 \frac{y}{b} - \frac{u_0}{2} + u_{\max} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right), \quad (2.75)$$

а расход жидкости – в виде

$$Q = Bb \left[-\frac{3}{4}u_0 + \frac{2}{3}u_{\max} \right]. \quad (2.76)$$

Нулевой расход жидкости и нулевая скорость в зазоре будут наблюдаться при следующей скорости u_0 :

$$u_0 = \frac{8}{9}u_{\max}. \quad (2.77)$$

Величина силы трения на пластине определится как

$$T = \mu S \left(-\frac{u_0}{b} - u_{\max} \frac{4}{b} \right), \quad (2.78)$$

где b – величина зазора.

2.8. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ЛАМИНАРНОЕ НАПОРНОЕ И ФРИКЦИОННОЕ ОСЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ НЕПОДВИЖНЫМИ И ПОДВИЖНЫМИ СООСНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ И НЕ СООСНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Разворачивая кольцевой зазор в линию, получаем, что величина $B = \pi D$. Тогда в соответствии с формулой для плоской пластины [4, 6] расход жидкости определится как

$$Q = \frac{1}{12} \frac{\pi b^3 D}{\mu \ell} p. \quad (2.79)$$

С учетом движения поршня со скоростью $\pm u_0$ расход жидкости определяется по формулам (2.70) и (2.75):

$$Q = \frac{1}{12} \frac{\pi D b^3}{\mu \ell} p \pm \frac{1}{2} u_0 \pi D b. \quad (2.80)$$

В том случае, если напорное и фрикционное движения совпадают, ставится знак «+», если они направлены в противоположные стороны, то знак «-».

Рассмотрим расход жидкости при эксцентричном расположении поршня (рис. 2.9).

Расстояние Q_1C можно определить как

$$Q_1C = R \cos \beta + a \cos \varphi. \quad (2.81)$$

Но с другой стороны отрезок Q_1C равен

$$Q_1C = r + b. \quad (2.82)$$

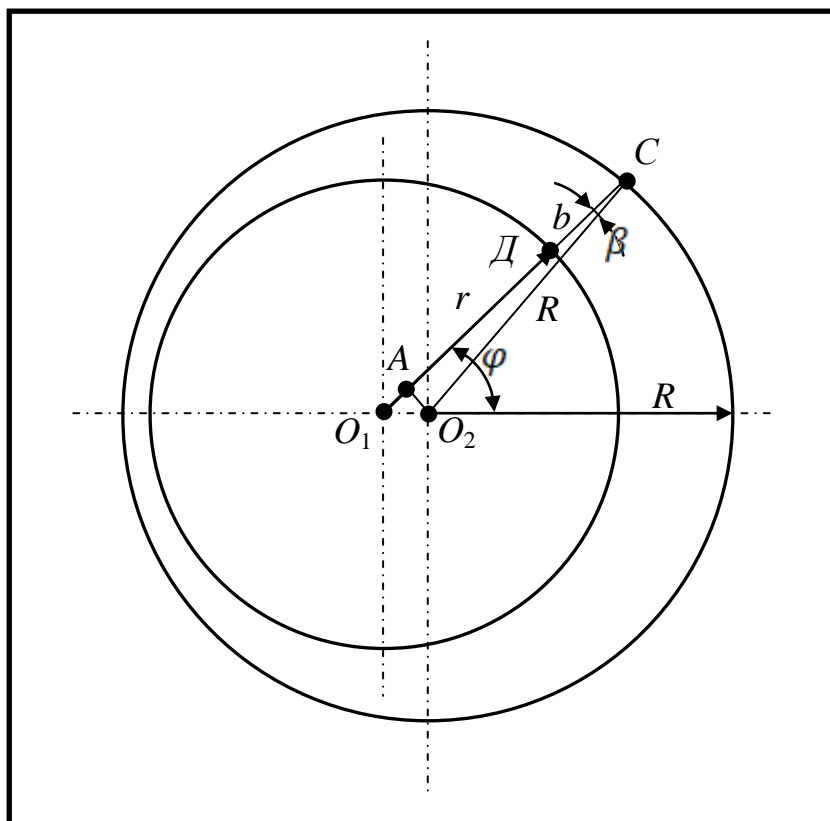


Рис. 2.9. Расчетная схема по определению текущего зазора между поршнем и цилиндром

Следовательно, величину переменного зазора b можно определить как

$$b = R \cos \beta + a \cos \varphi - r, \quad (2.83)$$

а величину угла β как

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a \sin \varphi}{R} \text{ или } \beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{a \sin \varphi}{R} \right).$$

Тогда величина зазора между поршнем и цилиндром

$$b = R \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{a \sin \varphi}{R} \right) \right] + a \cos \varphi - R. \quad (2.84)$$

Величина угла β при малых отношениях $\frac{u}{R}$ стремится к нулю, а величина косинуса – к 1. Тогда уравнение (2.83) запишется в виде

$$b = R + a \cos - r. \quad (2.85)$$

Принимая во внимание, что $b_0 = R - r$ и $\varepsilon = a/b_0$, уравнение (2.85) преобразуется к следующему виду:

$$b = b_0 (1 - \varepsilon \cos \varphi). \quad (2.86)$$

Рассматривая бесконечно малый элемент зазора на угле $d\varphi$ как плоский зазор с величиной b , элементарный расход через него найдем как

$$dQ = \frac{b^3 p}{12\mu\ell} dB = \frac{b^3 p}{12\mu\ell} r d\varphi = \frac{b_0^3 p r}{12\mu\ell} (1 + \varepsilon \cos \varphi)^3 d\varphi. \quad (2.87)$$

Величину полного расхода можно получить, интегрируя выражение (2.87) по всей длине окружности:

$$Q = \frac{b_0^3 r p}{12\mu\ell} \int_0^{2\pi} (1 + \varepsilon \cos \varphi)^3 d\varphi. \quad (2.88)$$

Возьмем интеграл в выражении (2.88)

$$\int_0^{2\pi} (1 + \varepsilon \cos \varphi)^3 d\varphi = \int_0^{2\pi} (1 + 3\varepsilon \cos \varphi + 3\varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \varepsilon^3 \cos^3 \varphi) d\varphi. \quad (2.89)$$

При интегрировании в выражение (2.89) необходимо помнить, что

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x)$$

и

$$\int \cos^n(x) dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1}(x) \cdot \sin(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) dx.$$

Тогда выражение (2.89) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (1 + \varepsilon \cos \varphi)^3 d\varphi = \\ & = \left[\varphi + 3\varepsilon \sin \varphi + 3\varepsilon^2 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) + \frac{1}{3} \cos^2(\varphi) \sin \varphi + \frac{2}{3} \sin \varphi \right]_0^{2\pi} = \quad (2.90) \\ & = 2\pi + 3\pi\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Расход жидкости определится как

$$Q = \frac{2\pi r \cdot b_0^3 p}{2\mu \ell} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \right) = Q_0 \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \right), \quad (2.91)$$

где Q_0 – расход жидкости в зазоре при соосном расположении поршня в цилиндре.

Из полученной формулы следует, что при максимальном эксцентриситете ($\varepsilon = 1$) расход жидкости в 2,5 раза больше, чем при концентричном. При турбулентном режиме эта величина уменьшается до 1,2 раза.

2.9. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТОНКОМ СЛОЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ. УРАВНЕНИЕ РЕЙНОЛЬДСА ДЛЯ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ

Закономерности движения жидкости в тонком слое переменной толщины, что характерно для подшипников скольжения, были заложены трудами О. Рейнольдса, Н. П. Петрова, Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина [9]. Основной особенностью рассматриваемого движения является малая толщина слоя жидкости по сравнению с размерами граничных поверхностей. К ним можно также отнести криволинейные поверхности с большим отношением радиуса кривизны к толщине смазочного слоя. В этом случае появляется возможность использования декартовых координат вместо криволинейных.

Рассмотрим течение жидкости между двумя слабо искривленными и приблизительно параллельными поверхностями под действием градиента давления и вследствие их взаимного перемещения. Действие массовых сил пренебрежимо мало. Ось $o-x$ расположим на нижней поверхности и направим ее вдоль скорости перемещения этой поверхности u_{1x} (рис. 2.10).

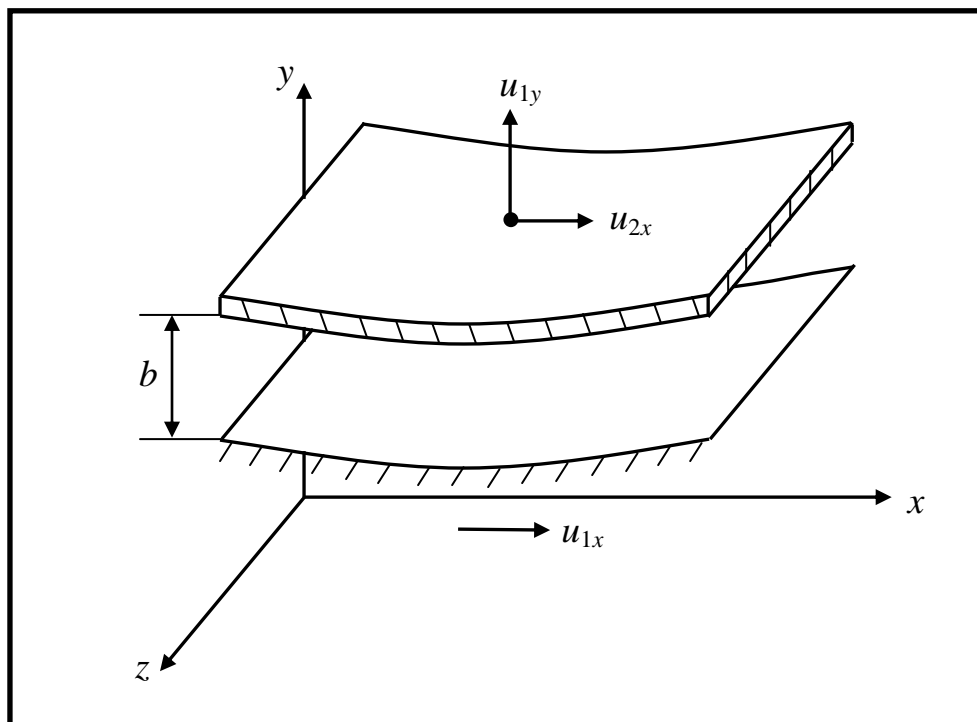


Рис. 2.10. Расчетная схема течения между двумя слабо искривленными параллельными поверхностями

Вторая поверхность может быть неподвижной или перемещаться вдоль оси $o-y$ со скоростью u_{2y} . Принимая, что толщина слоя жидкости по оси $o-y$ мала и, соответственно, отношение скоростей u_{2y}/u_{1x} – тоже мало. Так как величина b весьма мала, то градиент скорости

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} \gg \frac{\partial u_i}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z} \right)$$

и

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \right).$$

Принимая во внимание вышеизложенное, в уравнении движения отбросим не только инерционные, но и вязкостные члены, содержащие производные по x и z . Вследствие пространственности течения уравнение неразрывности должно быть сохранено. Тогда система уравнений запишется в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (2.92)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (2.93)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{array} \right. \quad (2.94)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (2.95)$$

Записанная система уравнений (2.92)–(2.95) является системой уравнений Рейнольдса для смазочного слоя. Она может быть использована для решения разнообразных задач, связанных с движением смазочного слоя.

Интегрируя первое и третье уравнения по координате y , с учетом того, что давление p постоянно по данной координате, получаем

$$\begin{cases} u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2 \\ u_z = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + c_3 y + c_4 \end{cases}, \quad (2.96)$$

где константы c_1 , c_2 , c_3 и c_4 в общем случае зависят от x и y . Они могут быть определены из граничных условий на твердых поверхностях. При напорном течении и неподвижных поверхностях имеем

$$c_2 = c_4 = 0; \quad (2.97)$$

$$c_1 = -\frac{b}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (2.98)$$

$$c_3 = -\frac{b}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.99)$$

С учетом полученных значений постоянных имеем следующий закон распределения скоростей:

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-b), \quad (2.100)$$

$$u_z = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-b). \quad (2.101)$$

Используя уравнение неразрывности и выполняя интегрирование, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(b^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(b^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.102)$$

При постоянном значении b уравнение (2.102) преобразуется в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 p = 0. \quad (2.103)$$

Для получения частного решения уравнения (2.103) должны быть заданы значения давления на границах области течения в полости xoz .

2.10. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ЛАМИНАРНОЕ ФРИКЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КЛИНОВОМ ЗАЗОРЕ

Исследуем течение жидкости в клиновом зазоре, который образован горизонтальной подвижной плоскостью с неподвижным башмаком, расположенным по отношению к подвижной плоскости под небольшим углом. Такой случай имеет место в подшипниках и подпятниках скольжения. Рассмотрение данной задачи позволит уяснить основные физические процессы течения жидкости в них, что весьма важно при проектировании и эксплуатации данных устройств.

Пусть нижняя плоскость движется вправо (рис. 2.11), а верхняя плоскость образует угол α , в зазоре между плоскостями находится жидкость. Нижняя пластина движется с постоянной скоростью u_0 .

Делая допущение о плоскопараллельности потока жидкости в зазоре, определим расход жидкости в зазоре и закон распределения давления вдоль клина. Система координат связана с неподвижным башмаком, ось $0-x$ направлена по нижней пластине вправо, а ось $0-y$ помещена в начало башмака и направлена вверх [4, 9].

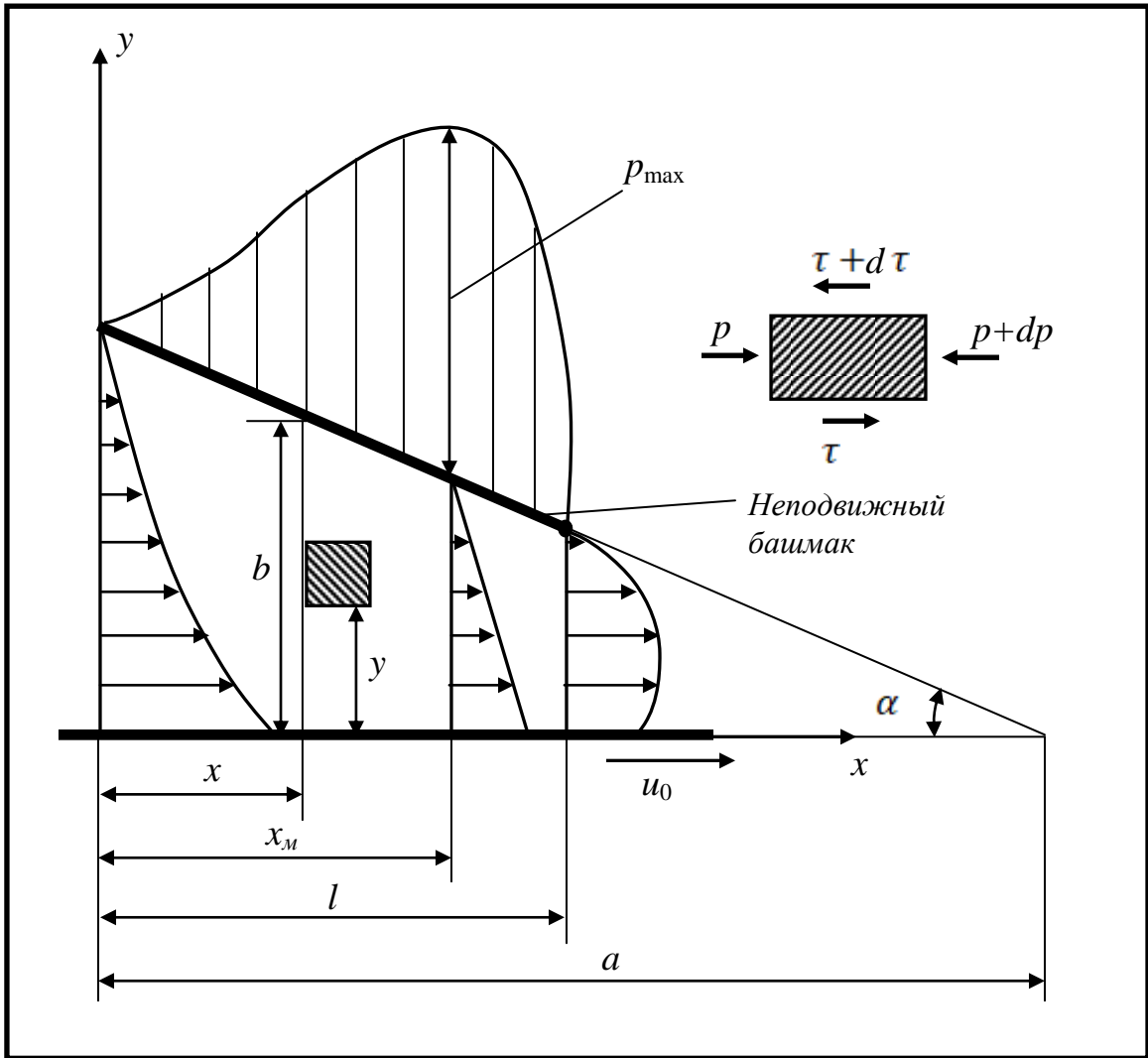


Рис. 2.11. Расчетная схема течения жидкости в клиновом зазоре

В движущейся жидкости выделим бесконечно малый элемент и составим уравнение равновесия:

$$pdy - (p + dp)dy + \tau \cdot dx - (\tau + d\tau) = 0,$$

ИЛИ

$$-d\tau \cdot dx - dpdy = 0,$$

ИЛИ

$$\frac{d\tau}{dy} = -\frac{dp}{dx}. \quad (2.104)$$

Необходимо отметить, что с увеличением координаты y , скорость u падает, т. е. $du < 0$ при $dy > 0$.

Тогда

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy}$$

и, подставляя выражение для τ в уравнение (2.104), получаем

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2}.$$

Принимая во внимание, что $\frac{dp}{dx}$ не зависит от y и рассматривая ее как постоянную A , получаем

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{A}{\mu}. \quad (2.105)$$

Интегрируя, имеем

$$\frac{du}{dy} = \frac{A}{\mu} y + c_1, \quad (2.106)$$

еще раз интегрируя, получаем

$$u = \frac{A}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2. \quad (2.107)$$

Значения c_1 и c_2 определим из граничных условий

$u = u_0$ при $y = 0$ – на подвижной пластине

$u = 0$ при $y = b$ – на неподвижном башмаке

Подставляя, получаем

$$\begin{cases} u_0 = c_2 \\ 0 = \frac{A}{2\mu}b^2 + c_1b + c_2 \end{cases} \quad (2.108)$$

Решая систему уравнений, имеем

$$c_2 = u_0,$$

$$c_1 = -\frac{u_0}{b} - \frac{A}{2\mu}b.$$

Подставляя значения полученных констант, имеем

$$u = \frac{A}{2\mu}y^2 + \left(-\frac{u_0}{b} - \frac{A}{2\mu}b\right)y + u_0$$

или

$$u = u_0 \left(1 - \frac{y}{b}\right) + \frac{A}{2\mu}(y^2 - by) = u_0 \left(1 - \frac{y}{b}\right) + \frac{dp}{dx} \frac{y^2 - by}{2\mu}. \quad (2.109)$$

Тогда расход жидкости в зазоре для единичной его ширины

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^b u dy = \int_0^b u_0 \left(1 - \frac{y}{b}\right) dy + \int_0^b \frac{dp}{dx} \cdot \frac{y^2 - by}{2\mu} dy = \\ &= u_0 \left(y - \frac{y^2}{2b}\right) \Big|_0^b + \frac{dp}{dx} \frac{1}{2\mu} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{by^2}{2}\right) \Big|_0^b = \\ &= u_0 \left(b - \frac{b}{2}\right) + \frac{dp}{dx} \frac{1}{2\mu} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2}\right) = \frac{u_0 b}{2} - \frac{b^3}{12\mu} \frac{dp}{dx}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Выражения, полученные для скорости и расхода, указывают на то, что расход жидкости через поперечное сечение клина представляет собой

сумму фрикционного расхода и расхода напорного течения под действием градиента давления $\frac{dp}{dx}$.

Если предположить, что давление $p = f(x)$ имеет экстремум, то $\frac{dp}{dx} = 0$.

В данной точке при $x = x_M$ эпюра скоростей будет линейной. Исходя из физических соображений, до этой точки давление в клине будет увеличиваться,

т. е. при $x < x_M$ $\frac{dp}{dx} > 0$, а после этой точки уменьшаться ($x > x_M$ $\frac{dp}{dx} < 0$).

При $x < x_M$, так как $\frac{dp}{dx} > 0$, отсюда общий расход жидкости равен разности

расходов фрикционного и напорного течения (левая эпюра, рис. 2.11), а при

$x > x_M$ $\frac{dp}{dx} < 0$ и суммарный расход равен сумме расходов фрикционного

и напорного течения (правая эпюра).

Из условия постоянства расхода для установившегося течения имеем

$$Q = \frac{u_0 b}{2} - \frac{1}{12\mu} \cdot b^3 \frac{dp}{dx} = \frac{u_0}{2} b^*, \quad (2.111)$$

где b^* – зазор в клине при $x = x_M$.

Тогда

$$\frac{dp}{dx} = \frac{12\mu}{b^3} \frac{u_0}{2} (b - b^*) = \frac{6\mu u_0}{b^3} (b - b^*).$$

В соответствии с рис. 2.11 величину текущего зазора можно определить как

$$b = (a - x) \operatorname{tg} \alpha = \frac{(a - x) b_0}{a}. \quad (2.112)$$

Тогда выражение (2.109) преобразуется к виду

$$dp = \frac{6\mu u_0}{b^2} dx - \frac{6\mu u_0}{b^3} b^* dx = \frac{6\mu u_0 a^2}{b_0^2} \frac{dx}{(a-x)^2} - \frac{6\mu u_0 a^2 (a-x_M)}{b_0^2 (a-x)^3} dx. \quad (2.113)$$

Интегрируя выражение (2.113), получаем

$$p = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_1(a-x_M)}{2(a-x)^2} + c, \quad (2.114)$$

где $A_1 = \frac{6\mu u_0 a^2}{b_0^2}$.

В уравнении (2.114) неизвестными величинами являются x_M и c . Для получения их значений воспользуемся граничными условиями на краях подвижной пластины

$$p = 0 \text{ при } x = 0$$

$$p = 0 \text{ при } x = \ell$$

или

$$\begin{cases} 0 = -\frac{A_1}{a} + \frac{A_1(a-x_M)}{2a^2} + c \\ 0 = \frac{A_1}{\ell-a} + \frac{A_1(a-x_M)}{2(a-\ell)^2} + c \end{cases}$$

Решая систему уравнений относительно c и x_M , получаем

$$c = \frac{A_1}{u} - \frac{A_1(a-x_M)}{2a^2} = \frac{a \cdot 2A_1 - A_1 a + A_1 x_M}{2a^2} = \frac{aA_1 + A_1 x_M}{2a^2} = \frac{A_1(a+x_M)}{2a^2} \quad (2.115)$$

$$\frac{-A_1}{a-\ell} + \frac{A_1(a-x_M)}{2(a-\ell)^2} + \frac{A_1(a+x_M)}{2a^2} = 0$$

$$\frac{-2(a-\ell)a^2 + a^2(a-x_M) + (a+x_M)(a-\ell)^2}{2(a-\ell)^2 a^2} = 0$$

$$-2a^3 + 2a^2\ell + a^3 - a^2x_M + (a+x_M)(a^2 - 2a\ell + \ell^2) = 0$$

$$-2a^3 + 2a^2\ell + a^3 - a^2x_M + a^3 - 2a^2\ell + a\ell^2 + x_Ma^2 - 2alx_M + x_M\ell^2 = 0$$

$$x_M = \frac{a\ell^2}{(2a\ell - \ell^2)} = \frac{a}{2a - \ell} \cdot \ell. \quad (2.116)$$

Для нахождения максимального давления в уравнение (2.114) необходимо вместо x подставить значение x_M .

Зная закон распределения давления, можно вычислить подъемную силу на башмаке и координату центра давления.

2.11. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ЛАМИНАРНОЕ НАПОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТОРЦЕВОМ ЗАЗОРЕ, ОБРАЗОВАННОМ ДВУМЯ ПЛОСКИМИ ДИСКАМИ

Течение в торцевом зазоре, образованном двумя плоскими дисками (рис. 2.12), аналогично течению жидкости между двумя плоскими пластинами. Рассмотрим радиальное течение жидкости в торцевом зазоре величиной b и определим расход жидкости и распределение давления, принимая избыточное давление жидкости на внутреннем радиусе r_0 , равным p_0 .

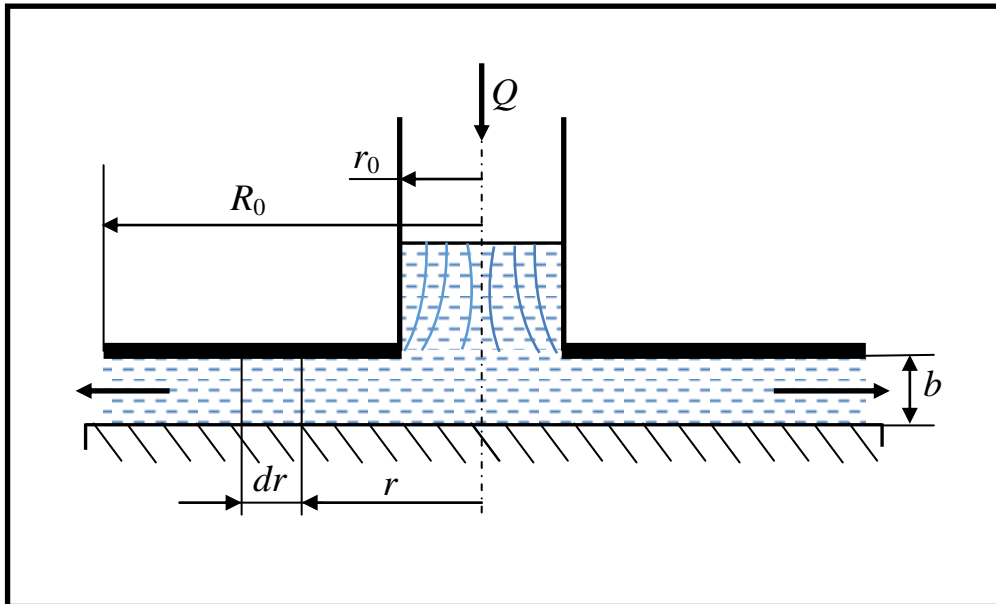


Рис. 2.12. Расчетная схема для радиального течения жидкости в торцевом зазоре, образованном двумя плоскими дисками

Выделим в зазоре кольцевой элемент жидкости бесконечно малой радиальной длины dr и составим уравнение равновесия к нему.

Учитывая осевую симметрию течения, а также полученные ранее соотношения, запишем градиент давления по радиусу в виде

$$\frac{dp}{dr} = -6 \frac{\mu Q}{\pi r b^3}. \quad (2.117)$$

Интегрируя, получаем

$$p = c - \frac{6\mu Q}{\pi b^3} \ln r. \quad (2.118)$$

Используя граничные условия

при $r = R_0$ $p = 0$,

получаем

$$p = \frac{6\mu Q}{\pi b^3} \ln \frac{R_0}{r}. \quad (2.119)$$

Уравнение (2.119) представляет собой закон распределения давления по радиусу эпюры. Для определения расхода жидкости Q воспользуемся еще одним граничным условием

$$p = p_0 \text{ при } r = r_0.$$

Тогда

$$p_0 = \frac{6\mu Q}{\pi b^3} \ln \frac{R_0}{r_0},$$

откуда искомый расход равен

$$Q = \frac{\pi b^3 p_0}{6\mu} \frac{1}{\ln R_0/r_0}. \quad (2.120)$$

Данная задача актуальна при расчете как торцевых уплотнений машин, так и дисковых фрикционных насосов.

3. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ

3.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Течение вязкой жидкости в трубопроводах, каналах и щелях в общем случае описывается системой уравнений, включающей уравнение неразрывности, уравнение движения и уравнение сохранения энергии [2, 9, 12]. Данная система уравнений может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0; \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho(V \cdot \nabla)V = -\operatorname{grad}(p) + \operatorname{Div}(\tau); \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho H) + \nabla \cdot (\rho V H) - \nabla \cdot \left(\frac{\lambda}{c_p} \nabla(h) \right) = \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Уравнение неразрывности (3.1) связывает изменение плотности жидкости по времени t в бесконечно малом объеме с расходом втекающей или вытекающей жидкости из данного объема. Уравнение движения записано в форме уравнения Навье – Стокса, которое представляет собой второй закон Ньютона для бесконечно малого объема жидкости. В данном уравнении учтены силы давления и вязкостного трения, но не учтена сила тяжести. Уравнение сохранения энергии записано для энтальпии торможения H , которое связано со статической энтальпией следующей зависимостью $H = h + |V|^2/2$, где $|V|$ – модуль упругости вектора скорости. Левая часть уравнения (3.2) состоит из производной вектора скорости по времени, т. е. ускорения жидкости и члена $\rho(V \cdot \nabla)V$, описывающего конвек-

тивное перемещение жидкости, т. е. конвективное ускорение. В правой части уравнения находятся силы поверхностного давления $grad(p)$, а также силы вязкостного трения $Div(\tau)$. Необходимо отметить, что величина p представляет собой термодинамическое давление, определяемое как $p = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$, где $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ – нормальные напряжения, возникающие в жидкости. Через τ обозначен тензор напряжений, которые вызваны действием вязкостного трения. Значение τ определяется из обобщенного закона трения Ньютона следующим образом:

$$\tau = 2\mu\dot{S} - \left(\frac{2}{3}\mu divV\right)E, \quad (3.4)$$

$$\text{где } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix};$$

V_x, V_y, V_z – проекции вектора скорости на координатные оси; E – модуль упругости жидкости.

Для несжимаемой жидкости с постоянной плотностью ($\rho = const$) производная плотности по времени будет равна 0 ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) и, учитывая, что плотность жидкости не равна 0, уравнение (3.1) сводится к следующему виду:

$$div(V) = 0.$$

Подстановка данных зависимостей в обобщенный закон трения Ньютона (3.4), с учетом постоянства динамической вязкости ($\mu = const$), сводит уравнение к следующему виду:

$$Div(\tau) = \mu \nabla^2 V.$$

После подстановки данного выражения и преобразований уравнение Навье – Стокса (3.2) преобразуется к более простому виду. При постоянстве температуры жидкости уравнение сохранения энергии (3.3) можно исключить из системы уравнений. В этом случае также оставшаяся система уравнений упростится, так как в ней теплофизические свойства жидкости не будут зависеть от температуры.

С учетом вышеизложенного система уравнений (3.1)–(3.3) преобразуется к следующему виду:

– уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot V = 0; \quad (3.5)$$

– уравнение Навье – Стокса

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 V. \quad (3.6)$$

Система уравнений (3.5) и (3.6), записанная для бесконечно малого объема жидкости и являющаяся теоретически строгой, не имеет аналитического решения и может быть решена только численным методом с допущениями, характерными для данного метода.

В настоящее время существует значительное количество численных методов, разработанных для решения дифференциальных уравнений частных производных (гидрогазодинамических уравнений). Мы наблюдаем

значительный прогресс в разработке данных методов с увеличением точности решения. В современных пакетах прикладных программ широко используются три метода: метод конечных разностей, метод конечных объемов и метод конечных элементов. Метод конечных элементов, обладая высокой устойчивостью получаемых разностных схем, нашел наиболее широкое применение для решения рассматриваемых задач.

Основная идея метода конечных объемов применительно к решению уравнений (3.5)–(3.6) заключается в замене бесконечно малых объемов жидкости объемами конечных размеров, которые получили название «ячейки». Система уравнений (3.5)–(3.6) записывается для каждой ячейки, и совокупность всех ячеек носит название «расчетная сетка».

Из теории турбулентных движений известно, что они состоят из множества вихревых образований, которые имеют различные линейные размеры [13–16]. Кинетическая энергия всей совокупности данных образований позволяет судить о спектре турбулентной энергии в потоке жидкости. Таким образом, в турбулентном потоке жидкости присутствуют вихревые образования различного размера и, вследствие этого, размеры ячеек, из которых состоит расчетная сетка, должны быть существенно меньше самого маленького турбулентного образования, что накладывает ограничение на количество ячеек, из которых состоит расчетная сетка исследуемой области течения. В большинстве случаев расчетная сетка составляет десятки и сотни миллионов ячеек. Количество ячеек напрямую связано с временем расчета задачи, и в большинстве случаев это время расчета составляет десятки и сотни часов вследствие невысокой производительности вычислительных машин, имеющихся у пользователя [17].

С целью сокращения времени расчета используют крупные ячейки, размеры которых намного превышают размеры мелкомасштабных турбулентных образований. В этом случае существенно сокращается количество расчетных ячеек и, соответственно, ускоряется время расчета задачи.

Однако следует понимать, что определенное количество турбулентных образований будет находиться внутри каждой из ячеек сетки и, соответственно, характеристики турбулентного течения невозможно будет определить с помощью систем уравнений (3.5)–(3.6). Для решения данной задачи необходимо использовать дополнительное уравнение.

В настоящее время разработано несколько эмпирических подходов к расчету характеристик турбулентности. Наиболее широко распространенный метод был предложен Рейнольдсом. Метод заключается в осреднении пульсационных значений давления и скорости в каждой точке турбулентного течения. В соответствии с подходом Рейнольдса мгновенное значение скорости и давления может быть записано в следующем виде:

$$V = \bar{V} + V'; \quad p = \bar{p} + p', \quad (3.7)$$

где \bar{V} и \bar{p} – вектор скорости и давление, осредненные по времени; V' и p' – пульсационные компоненты скорости и давления, возникающие при турбулентном режиме движения.

Необходимо отметить, что промежуток времени, за который осуществляется осреднение, принято называть периодом осреднения. С учетом записанных выше осреднений и подстановки их в систему уравнений (3.5)–(3.6), образуется новая система уравнений, получившая в зарубежной литературе название Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS):

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{V} + Div(\Pi). \quad (3.9)$$

Система уравнений (3.8)–(3.9) отличается от системы уравнений (3.5)–(3.6) наличием тензора рейнольдсовых напряжений Π , которые определяются следующим образом:

$$\Pi = \pi_{ij} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho V_x'^2} - \overline{\rho V_x' V_y'} - \overline{\rho V_x' V_z'} \\ -\overline{\rho V_x' V_y'} - \overline{\rho V_y'^2} - \overline{\rho V_y' V_z'} \\ -\overline{\rho V_x' V_z'} - \overline{\rho V_y' V_z'} - \overline{\rho V_z'^2} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Использование осреднения Рейнольдса вносит в систему уравнений шесть дополнительных неизвестных, так называемых рейнольдсовых напряжений π_{ij} .

Один из способов уменьшения количества дополнительных неизвестных заключается в применении гипотезы Буссинеска. Данная гипотеза была получена из аналогии между вязким ламинарным движением жидкости, которая описывается уравнением Ньютона, и осредненным турбулентным движением. Гипотеза Буссинеска связывает рейнольдсовое напряжение со скоростями деформации жидкости и определяется по аналогии с законом Ньютона

$$\pi = A \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j}. \quad (3.11)$$

Переменная A в данном случае является аналогом динамической вязкости. Во многих случаях, учитывая аналогию, ее называют турбулентной вязкостью и обозначают μ_t .

Выполняя ряд преобразований, с учетом гипотезы Буссинеска можно получить следующее выражение для тензора рейнольдсовых напряжений:

$$\text{Div}(\Pi) = \frac{\mu_t}{\rho} \nabla^2 \bar{V} = \nu_t \nabla^2 \bar{V}. \quad (3.12)$$

Подставляя уравнение (3.12) в уравнение Навье – Стокса мы существенно упрощаем уравнение и сокращаем количество неизвестных, характеризующих турбулентность, а именно сокращаем количество неизвестных с 6 до 1 – турбулентной вязкости ν_t .

Турбулентная вязкость, в отличие от молекулярной вязкости, не является свойством жидкости, а характеризует режим движения жидкости. Она меняется как во времени, так и по координате и не является постоянной величиной. При проведении расчетов она вычисляется для каждой ячейки расчетной сетки на каждом шаге интегрирования по времени. Принимая во внимание, что гипотеза Буссинеска не является законом, уравнение (3.12) является неким приближением, позволяющим существенно упростить уравнение течения жидкости. Так как это некое приближение, то и получаемое решение также не будет точным и может иметь значительные погрешности.

Расчет турбулентной вязкости проводится на основании полуэмпирической модели турбулентности. В настоящее время существует большое количество полуэмпирических моделей турбулентности, однако наибольшее распространение среди них получили двухпараметрические полуэмпирические модели турбулентности семейства $k - \epsilon$. Это обусловлено тем, что данные модели являются наиболее устойчивыми, хотя и менее точными, чем ряд других моделей.

3.2. АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ СУЩЕСТВУЮЩИХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Модель турбулентности $k - \epsilon$

Двухпараметрические модели турбулентности в первую очередь предназначены для расчета величины турбулентной вязкости ν_t , который осуществляется при помощи дополнительных уравнений, имеющих как алгебраический, так и дифференциальный вид.

Одной из наиболее распространенных моделей турбулентности является $k - \varepsilon$ модель. Данная модель состоит из двух уравнений: уравнение для кинетической энергии и турбулентности k и уравнение для ее диссипации ε .

Основная идея, заложенная в данную модель, заключается в математическом описании процессов зарождения переноса и рассеивания (диссипации) турбулентных вихрей. Дифференциальное уравнение зарождения и диссипации записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \operatorname{div}(\rho V k) = \operatorname{div}\left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right) \operatorname{grad}(k)\right) + P_k - \rho \varepsilon + P_{kb}; \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \operatorname{div}(\rho V \varepsilon) = \operatorname{div}\left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \operatorname{grad}(\varepsilon)\right) + \\ + \frac{\varepsilon}{k}(C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon + C_{\varepsilon 1} P_{\varepsilon b}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где k – кинетическая энергия турбулентности с размерностью $[m^2/c^2]$; ε – диссипация энергии турбулентности; P_k – генерация энергии турбулентности; P_{kb} и $P_{\varepsilon b}$ – слагаемые, учитывающие эффекты гравитации.

В случае несжимаемой жидкости генерация энергии турбулентности определяется следующим образом:

$$P_k = \mu_t \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j}. \quad (3.15)$$

Для каждого момента времени совместное решение уравнений (3.13) и (3.14) позволяет рассчитать распределение k и ε по расчетной области

и затем определить значение турбулентной вязкости для каждой расчетной ячейки сетки по формуле (3.16):

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (3.16)$$

Уравнения (3.13) и (3.14) включают в свой состав ряд эмпирических констант:

$$C_{\varepsilon 1} = 1,44; C_{\varepsilon 2} = 1,92; C_\mu = 0,09; \sigma_k = 1,0; \sigma_\varepsilon = 1,3.$$

Их значения получаются путем калибровки модели по серии натуральных экспериментов. Необходимо отметить, что метод калибровки используется во всех полуэмпирических моделях турбулентности и значение констант определяется как средневзвешенная величина при описании течения жидкости. Вместе с тем, наиболее точные результаты получаются именно при моделировании тех течений, для которых эти модели были откалиброваны. Это является главным недостатком модели, который ограничивает область ее применения.

В настоящее время, несмотря на широкое использование моделей турбулентности в научных и инженерных расчетах, не разработана полуэмпирическая модель турбулентности, которая бы обладала значительной общностью. Более того, сама возможность создания такой модели стоит под вопросом.

Из представленных в литературе сведений известно, что модель турбулентности $k-\varepsilon$ откалибрована для развитых турбулентных потоков жидкости и, соответственно, может быть использована для описания свободного течения жидкости на достаточном удалении от твердых стенок.

В этом случае применение модели турбулентности $k - \varepsilon$ для описания течения жидкости вдоль твердых стенок является проблематичным.

Модель турбулентности $k - \omega$

Для описания течения жидкости при наличии твердых стенок разработана модель турбулентности $k - \omega$. Модель турбулентности $k - \omega$ является также двухпараметрической полуэмпирической моделью.

Существует несколько разновидностей данных моделей. Система уравнений, предназначенная для определения k и ω в модели, предложенной Вилкоксом, записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \operatorname{div}(\rho V k) = \operatorname{div}\left(\left(\mu + \sigma^* \mu_t\right) \operatorname{grad}(k)\right) + \\ + P_k - \beta^* \rho k \omega - \frac{2}{3} \rho k \operatorname{div}(V), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \operatorname{div}(\rho V \omega) = \operatorname{div}\left(\left(\mu + \sigma \mu_t\right) \operatorname{grad}(\omega)\right) + \\ + \alpha P_k \frac{\omega}{k} - \beta \rho \omega^2 - \frac{2}{3} \alpha \rho \omega \operatorname{div}(V). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Значение турбулентной вязкости для данной модели определится как

$$v_t = \frac{k}{\omega}. \quad (3.19)$$

Значение констант в модели Вилкокса определяется следующим образом:

$$\alpha = 5/9; \beta = 3/40; \beta^* = 9/100; \sigma = 1/2; \sigma^* = 1/2.$$

Физический смысл и структура записанных уравнений (3.17) и (3.18) аналогичны физическому смыслу и структуре уравнений (3.13) и (3.14) моделей $k - \omega$. Основное отличие заключается в замыкающих константах и слагаемых, описывающих порождение и диссипацию энергии турбулентности k , ω и ε .

Модель $k - \omega$ имеет много положительных свойств, однако в ряде случаев ее применение затруднено. Например, когда течение жидкости обладает развитой турбулентностью вдали от твердых стенок и одновременно имеет непосредственный контакт с ними. Вблизи от твердых стенок образуется ламинарный или турбулентный пограничный слой, в котором может происходить отрыв. Вдали от твердых стенок наблюдается развитая турбулентность. Такие течения плохо описываются как моделями турбулентности $k - \varepsilon$, так и моделями $k - \omega$.

Модель турбулентности SST (Shear Stress Transport)

Для увеличения точности описания турбулентных течений, в которых существует вероятность отрыва пограничного слоя, была разработана модель турбулентности SST (Shear Stress Transport – транспорт напряжений сдвига). Данная модель турбулентности включает в себя обе модели турбулентности $k - \varepsilon$ и $k - \omega$. Их объединение стало возможным вследствие высокой схожести уравнений в данных моделях. Модель турбулентности SST при определенном наборе эмпирических постоянных может быть сведена как к модели $k - \varepsilon$ так и к модели $k - \omega$. Модель турбулентности SST базируется на двух основных дифференциальных уравнениях, описывающих перенос энергии турбулентности и интенсивность ее диссипации.

Эти уравнения записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V k) = \tilde{P}_k - \beta^* \rho k \omega + \nabla \cdot [(\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k]; \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V \omega) = \alpha \frac{\rho}{\mu_t} \tilde{P}_k - \beta \rho \omega^2 + \nabla \times \\ \times [(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \nabla \omega] + 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \nabla k \nabla \omega \end{aligned}, \quad (3.21)$$

где

$$\mu_t = \rho \frac{\alpha_1 k}{\max(\alpha_1 \omega; S F_2)}; \quad S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}};$$

$$P_k = \mu_t \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right); \quad \tilde{P}_k = \min(P_k; 10 \beta^* \rho k \omega);$$

$$F_1 = th \left\{ \left\{ \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}; \frac{500 \mu}{\rho y^2 \omega} \right); \frac{4 \rho \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right\}^4 \right\};$$

$$F_2 = th \left\{ \left\{ \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}; \frac{500 \mu}{\rho y^2 \omega} \right) \right\}^2 \right\}; \quad CD_{k\omega} = \max \left(2 \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \nabla k \nabla \omega; 10^{-10} \right).$$

В записанных уравнениях приняты следующие обозначения:

y – расстояние до ближайшей твердой стенки;

S_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации;

F_1 и F_2 – функции перехода между $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ моделями турбулентности.

На значительном расстоянии от твердой стенки функции F_1 и F_2 обращаются в ноль, и, соответственно, модель турбулентности сводится к стандартной модели $k - \varepsilon$.

Внутри пограничного слоя функции F_1 и F_2 стремятся к единице, что соответствует $k - \omega$ модели. В области перехода от пограничного слоя к ядру потока осуществляется плавный переход от одной модели к другой.

Все эмпирические константы SST модели турбулентности вычисляются путем пересчета соответствующих констант $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ моделей при помощи функции F_1 по следующей зависимости:

$$a = a_1 F_1 + a_2 (1 - F_1), \quad (3.22)$$

где a – константа SST модели турбулентности; a_1 и a_2 – константы $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ моделей соответственно.

Для стандартной модели турбулентности значения констант равны следующим величинам:

$$\begin{aligned} \beta^* &= 0,09; \alpha_1 = 5/9; \beta_1 = 3/40; \sigma_{k1} = 0,85; \sigma_{\omega1} = 0,5; \\ \alpha_2 &= 0,44; \beta_2 = 0,0828; \sigma_{k2} = 1; \sigma_{\omega2} = 0,856. \end{aligned}$$

Для успешного применения модели турбулентности SST необходимо помнить, что на размеры ячеек вблизи твердой стенки накладываются следующие ограничения: $0 < y^+ < 2$.

$$y^+ = \frac{\rho u u_\tau}{\mu} ; \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_\omega}{\rho}}, \quad (3.23)$$

В уравнении (3.23) приняты следующие обозначения:

y^+ – безразмерное расстояние от расчетного узла ячейки до ближайшей твердой стенки;

y – геометрическое расстояние от расчетного узла ячейки до ближайшей твердой стенки;

τ_ω – касательное напряжение на твердой стенке, вызванное действием сил вязкого трения.

При использовании данного условия повышается точность расчета характеристик турбулентности как внутри пограничного слоя, так и в непосредственной близости к нему.

Для области пограничного слоя ω -уравнение (3.21) SST модели турбулентности обращается в уравнение (3.24)

$$\mu \nabla^2 \omega = \beta \rho \omega^2 \quad (3.24)$$

с целью увеличения точности описания пристеночного слоя.

Модель турбулентности RSM (рейнольдсовых напряжений)

Модели рейнольдсовых напряжений не используют гипотезу турбулентной вязкости. Вместо этого они ищут решения отдельного уравнения переноса для каждого компонента тензора рейнольдсовых напряжений и в уравнении переноса скорости диссипации кинетической энергии ϵ . В этом случае открывается возможность учета анизотропности турбулентной пульсации в потоке. Это существенно расширяет область применимости моделей данного класса и в первую очередь для течений с большой кривизной линии тока, большой деформацией поля скорости и закруткой потока. Принимая во внимание симметрию тензора рейнольдсовых напряжений, система существующих уравнений должна быть дополнена шестью уравнениями переноса компонентов тензора рейнольдсовых напряжений в трехмерном пространстве.

Основная проблема, возникающая при использовании модели RSM, заключается в достоверности приближенного моделирования многочисленных незамкнутых корреляций, появляющихся при выводе уравнения переноса. Кроме того, наблюдаются также определенные трудности при постановке граничных условий вблизи твердых поверхностей.

3.3. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНЫХ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Для решения уравнения Рейнольдса (3.8) и (3.9) совместно с одной из моделей турбулентности ($k - \varepsilon$, $k - \omega$, SST и т. д.) необходимо дополнить систему уравнений начальными и граничными условиями.

Начальные условия определяют значения всех неизвестных в нулевой момент времени: давление p_0 , $V_0 = \{V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}\}$, k_0 , ε_0 , ω_0 .

Граничные условия используются для вычисления неизвестных на всех границах расчетной области в определенный или любой момент времени и условно могут быть разделены на *три группы*.

1. Граничные условия на твердой стенке.

На твердой стенке используется условие прилипания, которое заключается в том, что скорость частиц жидкости на твердой стенке равна нулю, и тогда это условие можно записать в виде $V|_{\Gamma} = 0$, где Γ – твердая стенка.

Остальные переменные определяются по условию нулевого градиента на твердой стенке:

$$\left. \frac{\partial e}{\partial x_i} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (3.25)$$

где e – неизвестная величина (p , k , ε , ω или др.).

2. Граничные условия входа в расчетную область.

Данные граничные условия определяют границу, через которую жидкость втекает в расчетную область. На границе расчетной области задается величина скорости, массового расхода или давления, а также задаются значения k , ε или ω . Незаданные переменные находятся по условию нулевого градиента (3.25).

3. Граничные условия выхода из расчетной области.

Данное граничное условие определяет границу, через которую жидкость покидает расчетную область. В этом случае, как правило, задается

величина давления, в редких случаях – величина скорости или массовый расход. Остальные переменные, используемые в расчетах, задаются исходя из уравнения (3.25).

3.4. ТЕСТИРОВАНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В настоящее время широкое применение пакета прикладных программ ANSYS позволяет использовать реализованные в нем модели турбулентности для расчета различных гидравлических течений, а также сравнивать существующие коэффициенты трения по длине и местные коэффициенты, полученные экспериментальным и теоретическим путем через модели турбулентности.

В данном параграфе рассмотрим применение моделей турбулентности для расчета течений жидкости в поршневых уплотнениях гибридных энергетических машин, а также проведем сравнение результатов по определению коэффициента трения по длине для разных режимов движения, полученных экспериментальным и теоретическим путем с применением рассмотренных выше моделей турбулентности.

Тестирование моделей турбулентности при течении вязкой жидкости в круглой трубе с целью определения коэффициента гидравлического трения по длине

В работе [18] рассмотрено моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе с гидравлически гладкими стенками длиной 13 м и диаметром 150 мм при различных скоростях потока и, соответственно, чисел Рейнольдса (Re). Моделирование проводилось с использованием модели турбулентности $k - \omega$ (SST), ламинарной модели и модели турбулентности $k - \varepsilon$.

В результате математического моделирования течения жидкости определялись потери давления и затем через потери давления – коэффициент трения по длине λ :

$$\lambda = \Delta p_{mp} \frac{d_э}{L} \frac{2}{v^2 \rho}, \quad (3.26)$$

где Δp_{mp} – перепад давления в трубе; ρ – плотность жидкости; v – скорость потока; $L, d_э$ – длина и эквивалентный диаметр трубы.

Полученные теоретическим путем коэффициенты трения по длине сравнивались с коэффициентами трения по длине, полученными экспериментальным путем и рассчитываемыми по известным формулам Пуазейля [9], Блазиуса [1], Никурадзе [4]. В данных формулах коэффициент трения по длине λ является функцией числа Рейнольдса.

Для ламинарного режима течения при числах Рейнольдса до 2320 λ определялась по формуле Пуазейля:

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (3.27)$$

В диапазоне чисел от 2320 до 4000 сравнение не проводилось вследствие того, что в данном диапазоне чисел Рейнольдса возможно существование как ламинарного, так и турбулентного режима. Экспериментальные точки имеют значительный разброс, и общепризнанных формул для аналитического расчета в литературе нет.

При турбулентном режиме течения при значениях Рейнольдса от 4×10^3 до 10^5 расчет проводили по формуле Блазиуса:

$$\lambda = 0,3164/Re^{0,25}. \quad (3.28)$$

Для турбулентного режима течения при $Re > 10^5$ коэффициент гидравлического трения трубы λ определялся на основании эмпирической формулы, полученной Никурадзе:

$$\lambda = 0,0032 + 0,221/Re^{0,237}. \quad (3.29)$$

На рис. 3.1 [18] графически отражены результаты, полученные с помощью различных моделей течения газа, результаты экспериментальных исследований и обработанных различными авторами по представленным выше формулам. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. В ламинарной области течения жидкости коэффициент трения по длине, рассчитанный по различным моделям турбулентности, значительно превышает коэффициент трения по длине, полученный на основании использования формулы Пуазейля. Наиболее близкие к формуле Пуазейля результаты показывает модель турбулентности $k - \varepsilon$. Худшие результаты демонстрирует модель $k - \omega$ (SST).

2. В турбулентной области течения при числах Рейнольдса от 7×10^3 до 2×10^6 наиболее близкие результаты по определению λ по сравнению с формулой Блазиуса показывает модель турбулентности $k - \omega$ (SST).

3. Для турбулентного течения с числом Рейнольдса больше, чем 2×10^6 результаты численного расчета по модели турбулентности $k - \varepsilon$ резко отличаются от результатов аналитического расчета по формуле Никурадзе. Хорошее согласование результатов по данной модели с формулой Никурадзе наблюдается до чисел Рейнольдса 7×10^5 .

4. Наиболее хорошо с расчетами по формуле Никурадзе при числе Рейнольдса больше, чем 2×10^6 согласуется модель $k - \omega$ (SST). Однако до чисел Рейнольдса 7×10^5 лучше согласуется модель $k - \varepsilon$.

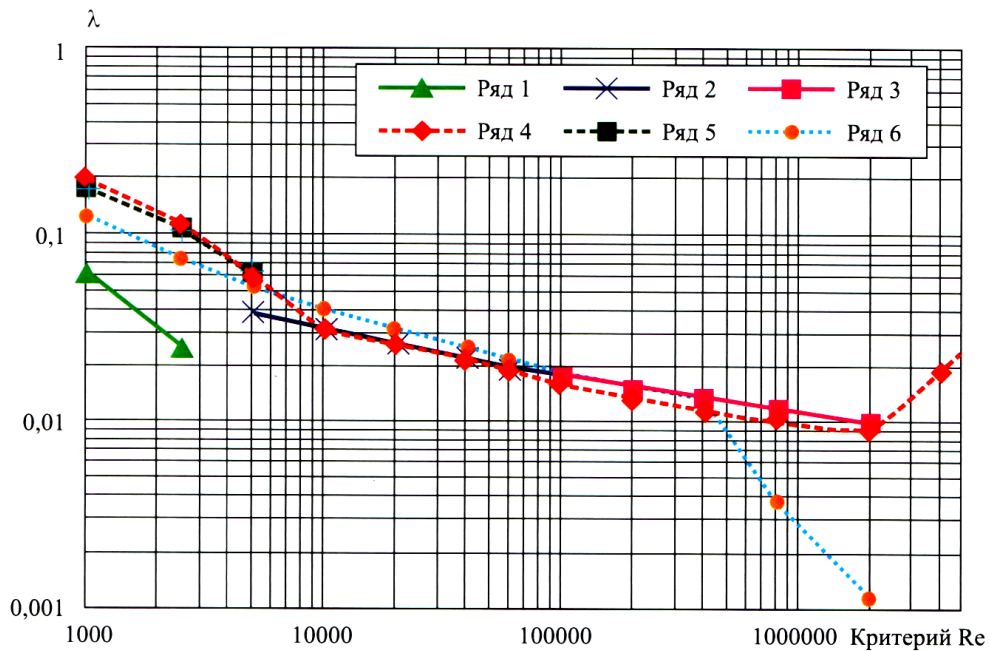


Рис. 3.1. Зависимость коэффициента гидравлического трения трубы λ от числа Рейнольдса Re

Обозначения, принятые на на рис. 3.1:

– результаты аналитического расчета:

для ламинарного течения по формуле Пуазейля (ряд 1);

для турбулентного течения по формуле Блазиуса (ряд 2);

для турбулентного течения по формуле Никурадзе (ряд 3);

– результаты численного расчета:

по турбулентной $k - \omega$ SST модели (ряд 4);

по ламинарной модели (ряд 5);

по турбулентной $k - \varepsilon$ модели (ряд 6).

Ниже в таблице представлены результаты скорости перепада давления и коэффициенты трения по длине, определенные для разных чисел Рейнольдса по разным моделям турбулентности и по зависимостям Пуазейля (значения в 1–3 строках), Блазиуса (значения в 4–7 строках) и Никурадзе (значения в 8–16 строках). Представленные результаты частично дублируют представленную выше графическую зависимость и позволяют сделать выводы о расхождении исследуемых моделей турбулентности с существующими зависимостями.

**Результаты численного расчета и аналитического расчета
по исследованным моделям**

Номер строки	Re	ν	$\Delta p_{расч}$	$\lambda_{расч}$	$\Delta p_{k-\omega}$ модель	$\Delta \lambda_{k-\omega}$ модель	$\Delta p_{лам-модель}$	$\lambda_{лам-модель}$	$\Delta p_{k-\epsilon}$ модель	$\lambda_{k-\epsilon}$ модель
1	1000	0,0067	0,1242	0,064	0,39	0,20049	0,35	0,1799	0,2475	0,127234
2	2500	0,0167	0,3106	0,0256	1,34	0,110879	1,296	0,1072	0,897	0,074223
3	5000	0,0335	1,8262	0,0376	2,98	0,061278	3,04	0,0625	2,6	0,053464
4	10 000	0,0669	6,1425	0,0316	6,2	0,031968			7,8	0,040218
5	20 000	0,1339	20,6607	0,0266	21	0,027029			24,7	0,031792
6	40 000	0,2677	69,4942	0,0224	68,5	0,022058			79	0,025439
7	60 000	0,4016	136,22	0,0195	138	0,019746			154,5	0,022106
8	100 000	0,669	345,4	0,0178	313	0,016139			362	0,018665
9	200 000	1,339	1199	0,0154	1065	0,013708			1223	0,015741
10	400 000	2,677	4221	0,0136	3550	0,011432			4100	0,013203
11	800 000	5,3547	14 931	0,012	13 000	0,010463			4700	0,003783
12	2 000 000	13,3867	79 957	0,0103	72 500	0,009336			9000	0,001159
13	4 000 000	26,7733	286 440	0,0092	600 000	0,019316				
14	6 000 000	40,16	605 920	0,0087	2 130 000	0,030477				
15	8 000 000	53,5467	1 032 400	0,0083	4 500 000	0,036218				
16	10 000 000	66,9333	1 562 000	0,008	7 900 000	0,040693				

Применение моделей турбулентности для расчета течения жидкости в зазорах между поршнем и цилиндром насосов объемного действия и поршневых гибридных энергетических машин

В настоящее время значительное количество экспериментальных и теоретических исследований в области компрессоров и насосов объемного действия посвящено изучению рабочих процессов в поршневой гибридной энергетической машине объемного действия (ПГЭМОД). Такая машина объединяет в себе функции поршневого компрессора и поршневого насоса, что в значительной степени улучшает работу компрессора и насоса [10, 11, 19].

Это обусловлено тем, что охлаждение цилиндропоршневой группы и, соответственно, компримируемого газа, осуществляется более интенсивно, ликвидируются утечки и перетечки сжатого газа в цилиндропоршневом уплотнении, уменьшается работа сил трения, что положительно сказывается на эксплуатации компрессора. Все вышеперечисленные факторы приводят к увеличению индикаторного и полного к.п.д., а также коэффициента подачи воздуха в компрессоре в первую очередь за счет уменьшения и сокращения до нуля величины мертвого пространства.

Кроме того, уменьшается работа, затрачиваемая на привод, за счет утилизации теплоты сжатия от компрессорной секции, и увеличивается кавитационный запас за счет притечек жидкости из компрессорной секции в насосную в процессе всасывания насоса.

При работе ПГЭМОД осуществляется движение жидкости из насосной секции в компрессорную и из компрессорной секции в насосную, т. е. в прямом и обратном направлениях. За счет движения жидкости происходит интенсивное охлаждение поршня и цилиндра, а также натекаемая на поршень жидкость обеспечивает интенсивное охлаждение газа. Для эффективной работы ПГЭМОД необходимо, чтобы количество жидкости, поступающей из насосной секции в компрессорную, было равно (или чуть больше) количеству жидкости, поступающей из компрессорной секции в насосную.

В настоящее время в поршневых гибридных энергетических машинах используются разные типы бесконтактных поршневых уплотнений: гладкая щель (рис. 3.2), ступенчатое поршневое уплотнение (рис. 3.3), профилированное щелевое уплотнение (рис. 3.4).

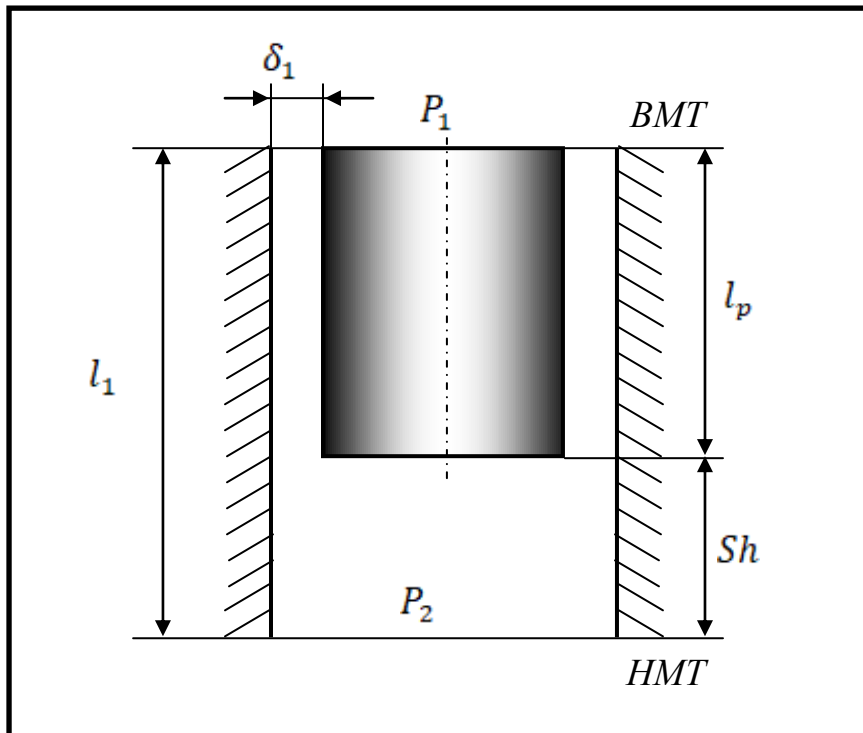


Рис. 3.2. Расчетная схема бесконтактного поршневого уплотнения, выполненного в виде гладкой концентричной щели

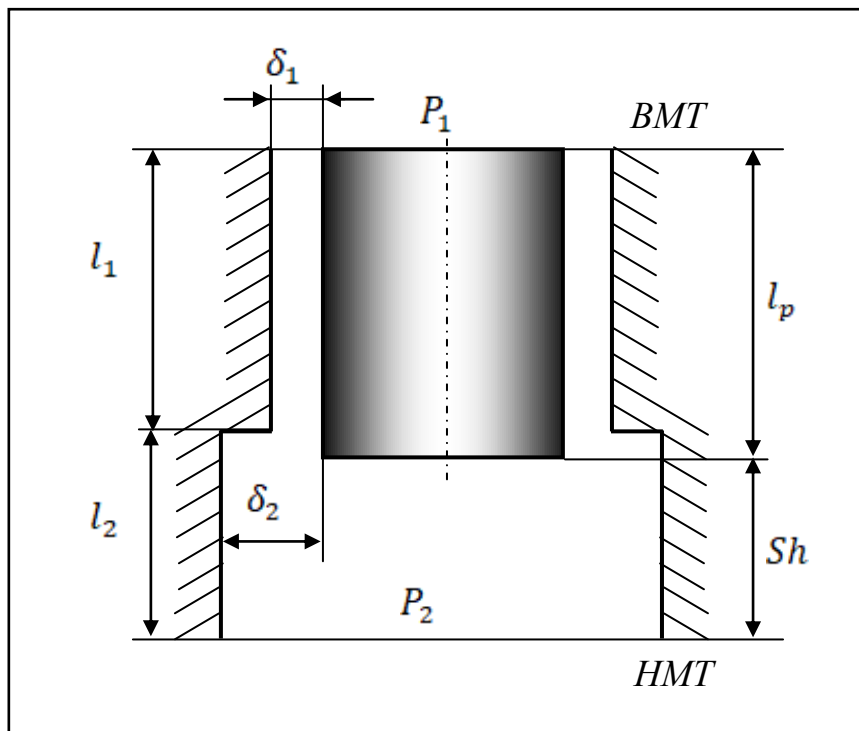


Рис. 3.3. Расчетная схема бесконтактного поршневого уплотнения, выполненного в виде ступенчатой концентричной щели

Основная цель применения щелевого уплотнения заключается в обеспечении различных расходов жидкости в прямом и обратном направлениях, что позволяет уменьшить давление нагнетания в насосной секции по сравнению с давлением нагнетания в компрессорной секции.

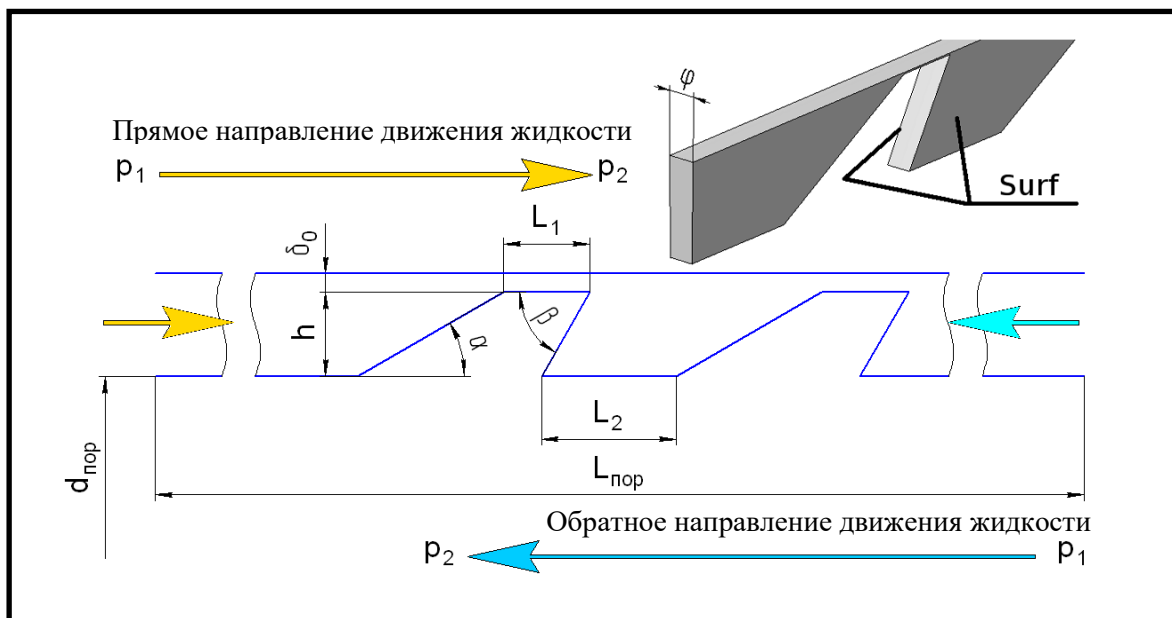


Рис. 3.4. Расчетная схема профилированного щелевого уплотнения поршня и трехмерный вид фрагмента расчетной геометрической модели

Рассмотрим физические процессы, протекающие в профилированном поршневом уплотнении, и проведем расчет течения несжимаемой вязкой жидкости в нем с помощью модели турбулентности SST [20].

Из теории гидравлических сопротивлений известно, что основные потери давления при организации местных сопротивлений наблюдаются в процессах расширения потока за счет появления в застойных зонах турбулентного течения. Соответственно, профилированное щелевое уплотнение должно представлять собой набор местных сопротивлений типа «сжатие – расширение». При этом процесс расширения потока должен быть организован в прямом и обратном направлениях по-разному, что обеспечит общее разное гидравлическое сопротивление в прямом и обратном направлениях и, следовательно, разный расход жидкости при одинаковом перепаде давления.

Система местных сопротивлений в общем случае может быть организована на цилиндре либо на поршне. На поршне выполнение более технологично и требует меньше материальных затрат.

Различные условия расширения потока достигаются применением различных значений углов α и β (рис. 3.5). Длины полок L_1 и L_2 обеспечивают турбулизацию потока и его стабилизацию. Рассматриваемая щель является концентричной, что позволяет, учитывая осесимметричность течения жидкости, выбрать сегмент для проведения расчетов с угловой шириной $0,1^\circ$.

Рассматриваемое профилированное щелевое уплотнение имеет следующие основные геометрические параметры: $d_{nop} = 90$ мм; $L_{nop} = 129$ мм; $L_1 = 0,002$ м; $L_2 = 0,004$ м; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $h = 0,003$ м; $\delta_0 = 0,000050$ м. Значение давления $p_1 = 300$ кПа, а значение давления $p_2 = 80$ кПа.

С помощью сеточного генератора строилась тетраэдрическая неструктурированная сетка (рис. 3.5).

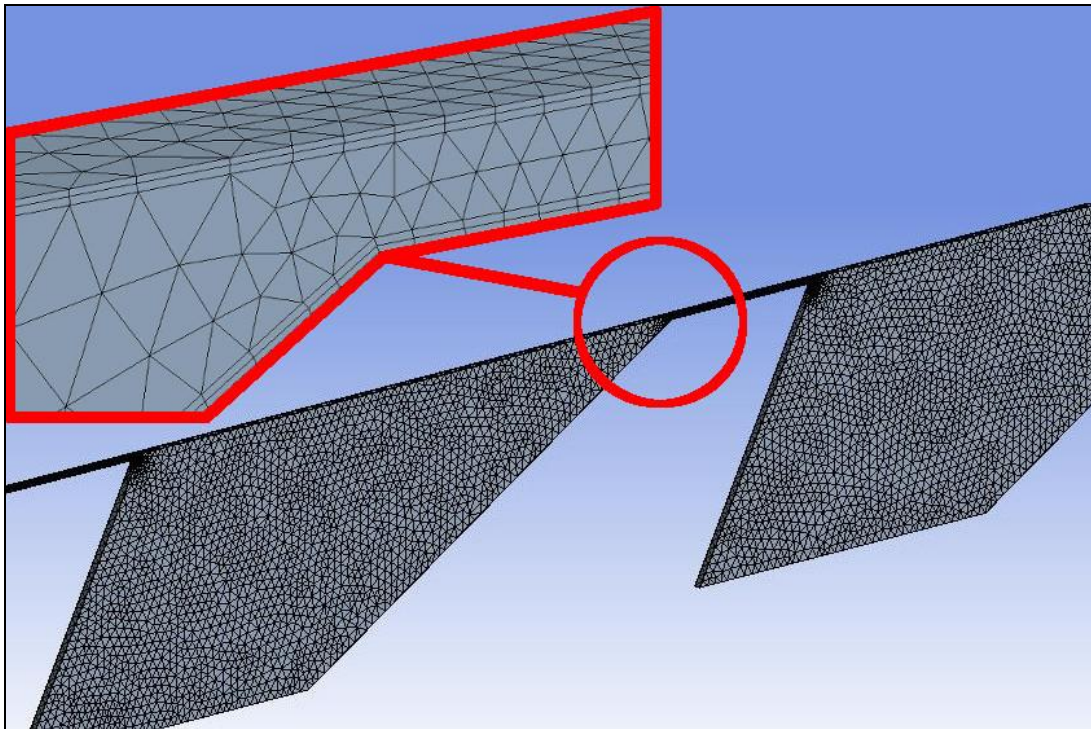


Рис. 3.5. Общий вид расчетной сетки

Данная сетка использовалась во всех расчетах. С целью увеличения точности расчета пристеночного течения было введено два слоя плоских ячеек вдоль каждой из твердых стенок. Толщина слоев ячеек выбиралась таким образом, чтобы обеспечить требования, предъявляемые к SST модели турбулентности:

$$0 < y^+ < 2, \quad (3.30)$$

где $y^+ = \frac{\rho y u_\tau}{\mu}$ – y^+ – безразмерное расстояние от расчетного узла до ближайшей твердой стенки; y – геометрическое расстояние от расчетного узла до ближайшей твердой стенки;

$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_\omega}{\rho}}$; τ_ω – касательное напряжение на твердой стенке, вызванное действием сил вязкого трения.

С целью определения требуемого размера ячеек и соответственно их количества проводился анализ сеточной устойчивости. В качестве критерия были выбраны расходы жидкости в прямом и обратном направлениях движения: G_1 и G_2 соответственно. На рис. 3.6 отражены результаты анализа сеточной устойчивости.

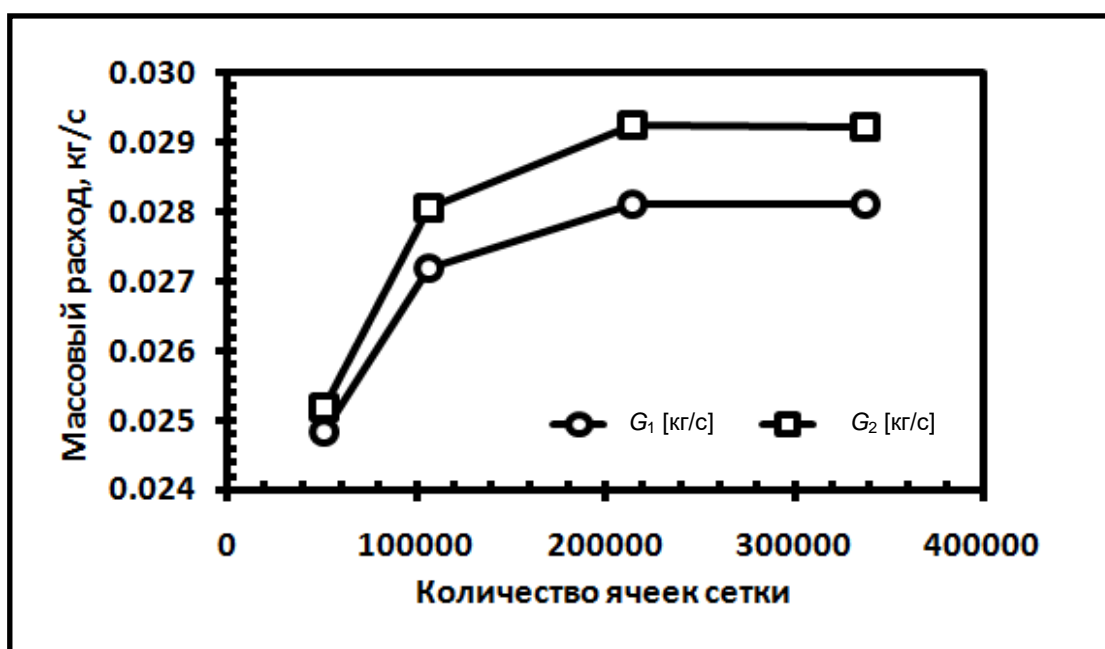


Рис. 3.6. Результаты анализа расчетной сетки

Из представленных результатов можно сделать вывод, что стабилизация сеточной устойчивости (отсутствие изменений расходов при увеличении количества сеток) наблюдается в диапазоне от 215 000 до 338 000 ячеек.

Учитывая полученные результаты, расчеты проводились с количеством ячеек 338 000 [11].

Величина скорости жидкости в щелевом уплотнении, принимая плотность жидкости постоянной, однозначно определяет расход жидкости и потери давления на преодоление местных сопротивлений. На рис. 3.7 отражено распределение модулей вектора скорости во фрагменте проточной части рассматриваемого щелевого уплотнения в прямом и обратном направлениях. Фрагмент состоит из одной впадины и двух прилегающих к ней выступов.

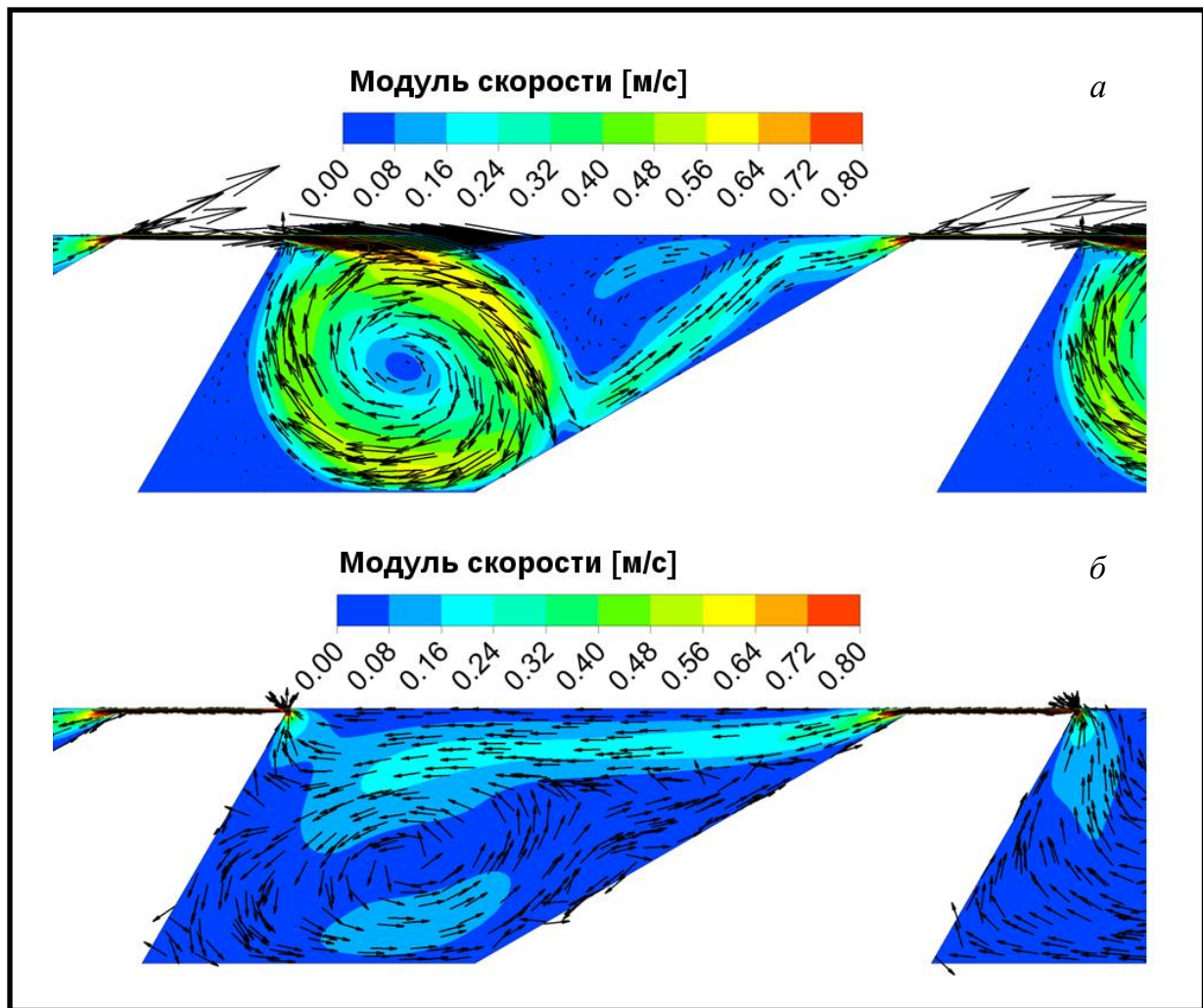


Рис. 3.7. Распределение модулей скорости в проточной части щелевого уплотнения при прямом (а) и обратном (б) направлениях движения жидкости

Представленные на рисунке данные позволяют сделать вывод, что при движении жидкости в прямом направлении во впадине возникает крупномасштабная зона возвратных течений, вызванная отрывом потока жидкости от стенок поршня. Максимальное значение скорости в этой зоне – 0,5–0,8 м/с. Необходимо отметить, что максимальное значение скорости в узком зазоре между внешней поверхностью выступа на поршне и стенкой цилиндра составляет около 2 м/с.

Возникающий вихрь при движении жидкости в прямом направлении препятствует перемещению жидкости через поршневое уплотнение под действием перепада давления и является, соответственно, паразитным вихрем. За счет вязкостного трения и турбулентного перемешивания возникает потеря энергии потока. При обратном направлении движения жидкости паразитные циркуляции весьма малы, и отрыв потока от стенки поршня отсутствует. При обратном течении во впадине образуется одна зона возвратных движений жидкости, в которой скорости невелики и составляют величину 0,05–0,2 м/с.

Для проведения анализа физических процессов предлагается использовать среднеинтегральные по площади поперечного сечения в зазоре между поршнем и цилиндром модули векторов скорости жидкости в виде

$$|\overline{V}| = \frac{1}{A} \int_A |V| dA, \quad (3.31)$$

где $|\overline{V}|$ – среднеинтегральный модуль вектора скорости жидкости; A – площадь поперечного сечения проточной части, которая меняется в зависимости от осевой координаты; $|V|$ – локальный модуль вектора скорости жидкости.

Величина среднеинтегрального модуля вектора скорости не зависит от направления движения жидкости, что весьма удобно для анализа течения жидкости в зазоре.

На рис. 3.8 представлено распределение среднеинтегральной скорости по длине щелевого уплотнения, а также геометрия щелевого уплотнения, что позволяет наглядно видеть изменения среднеинтегрального модуля вектора скорости жидкости в прямом и обратном направлениях.

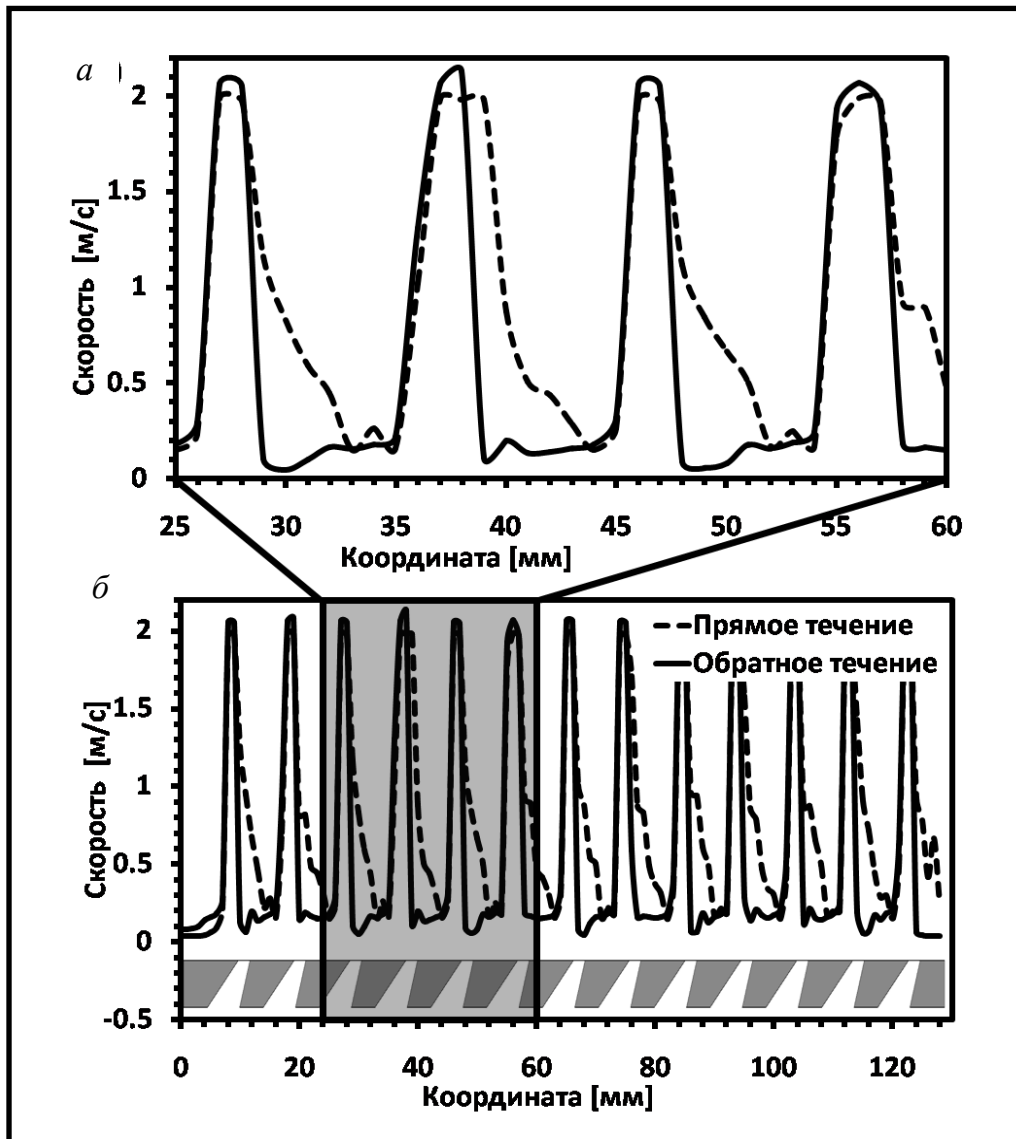


Рис. 3.8. Распределение среднеинтегральных модулей скорости жидкости по длине щелевого уплотнения при прямом и обратном направлениях движения

Анализ представленных кривых изменения модуля скорости жидкости позволяет сделать вывод, что его величина меняется скачкообразно. Он увеличивается до максимального значения при прохождении жидкости в зазоре между выступом на поршне и стенкой цилиндра, а затем падает до минимального значения при прохождении впадины.

Модули скорости жидкости при движении ее в прямом и обратном направлениях имеют разный профиль, а также разное значение максимума и минимума, т. е. отличаются как количественно, так и качественно.

Максимум модуля скорости при движении жидкости в обратном направлении превосходит величина максимума скорости жидкости при движении ее в прямом направлении. Это приводит к тому, что расход жидкости в обратном направлении имеет большую величину, чем расход жидкости в прямом направлении.

Расход жидкости в обратном направлении составляет $G_2 = 0,0292$ кг/с, а в прямом направлении – $G_1 = 0,0281$ кг/с. Полученная разница в расходах жидкости обусловлена различным гидравлическим сопротивлением в прямом и обратном направлениях течения жидкости в щелевом уплотнении.

При движении жидкости в прямом направлении модуль скорости жидкости падает более плавно, чем в случае движения жидкости в обратном направлении. Такое падение модуля скорости обусловлено возникновением крупномасштабной вихревой зоны (рис. 3.7). Высокие значения модуля скорости в вихревой зоне не приводят к полезному движению жидкости через поршневое уплотнение, а только способствуют торможению жидкости и, соответственно, увеличению потерь энергии.

Анализируя движение жидкости во впадине при обратном направлении, можно сделать вывод, что модуль скорости жидкости имеет меньшую величину. Это обусловлено в данном случае снижением потерь энергии и повышением расхода жидкости.

Подводя итог, можно сделать следующие основные выводы:

1. Расхождение в расходах жидкости в прямом и обратном направлениях наблюдается за счет образования вихревых зон разного масштаба. Вихревые зоны большего масштаба уменьшают расходы жидкости и, соответственно, модули скоростей.

2. Для увеличения разницы расходов жидкости необходимо увеличить вихревую зону в прямом направлении и уменьшать вихревую зону в обратном направлении.

3. В случае ламинарного течения жидкости расходы жидкости в прямом и обратном направлениях будут одинаковы.

4. Увеличение разницы в расходах жидкости может достигаться более интенсивной турбулизацией потока и, соответственно, увеличением числа Рейнольдса за счет уменьшения вязкости, увеличением перепада давления на щелевом уплотнении и увеличением зазора δ_0 .

Проведем анализ влияния основных геометрических и эксплуатационных параметров на функции отклика G_1 и G_2 и их отношение G_1/G_2 [21]. При проведении параметрического анализа будем изменять только один фактор, а остальные независимые переменные будем принимать как постоянные и равные их оптимальным значениям. С увеличением зазора δ_0 от 20 до 100 мкм происходит нелинейное увеличение расходов G_1 и G_2 (рис. 3.9).

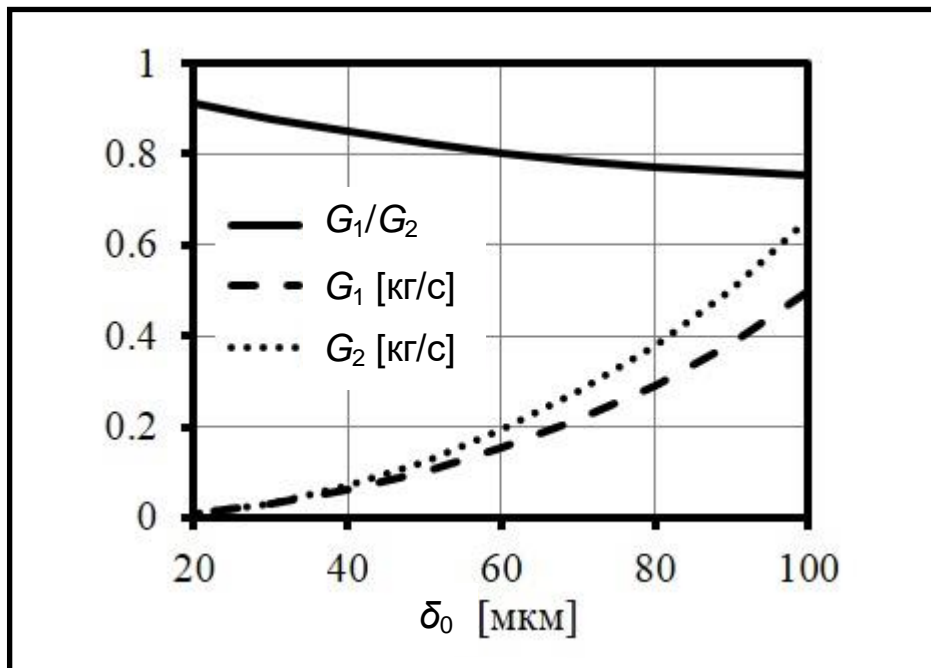


Рис. 3.9. Зависимость расходов жидкости в прямом G_1 и обратном G_2 направлениях, а также их отношения G_1/G_2 от величины радиального зазора δ_0

Так как разница между значением расходов G_1 и G_2 увеличивается, то отношение G_1/G_2 уменьшается, и при значении $\delta_0 = 100$ мкм это отношение составляет 0,754.

Необходимо отметить, что наиболее резкое уменьшение отношения G_1/G_2 наблюдается при зазоре δ_0 от 20 до 60 мкм.

С увеличением высоты выступов h обнаруживается практически линейное увеличение G_1 и G_2 . При этом разница между расходами в прямом и обратном направлении увеличивается, а отношение G_1/G_2 уменьшается (рис. 3.10).

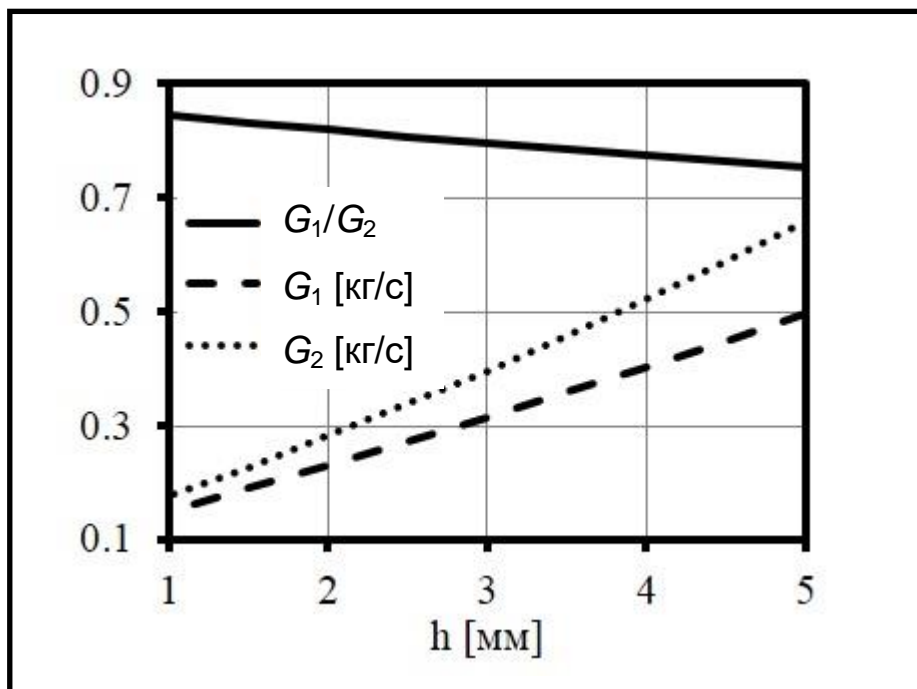


Рис. 3.10. Зависимость расходов жидкости в прямом G_1 и обратном G_2 направлениях, а также их отношения G_1/G_2 от высоты выступов h

Увеличение высоты выступов приводит к увеличению среднеинтегрального зазора в уплотнении, а это в свою очередь способствует увеличению расходов G_1 и G_2 .

С увеличением длины L_1 наблюдается нелинейное уменьшение расходов G_1 и G_2 , при этом разница между ними уменьшается, что приводит к увеличению отношения G_1/G_2 . Уменьшение расходов G_1 и G_2 обуслов-

лено увеличением длины узкой щели между внешней поверхностью выступов поршня и внутренней поверхностью цилиндра, что ведет к уменьшению среднеинтегрального зазора в щелевом уплотнении (рис. 3.11).

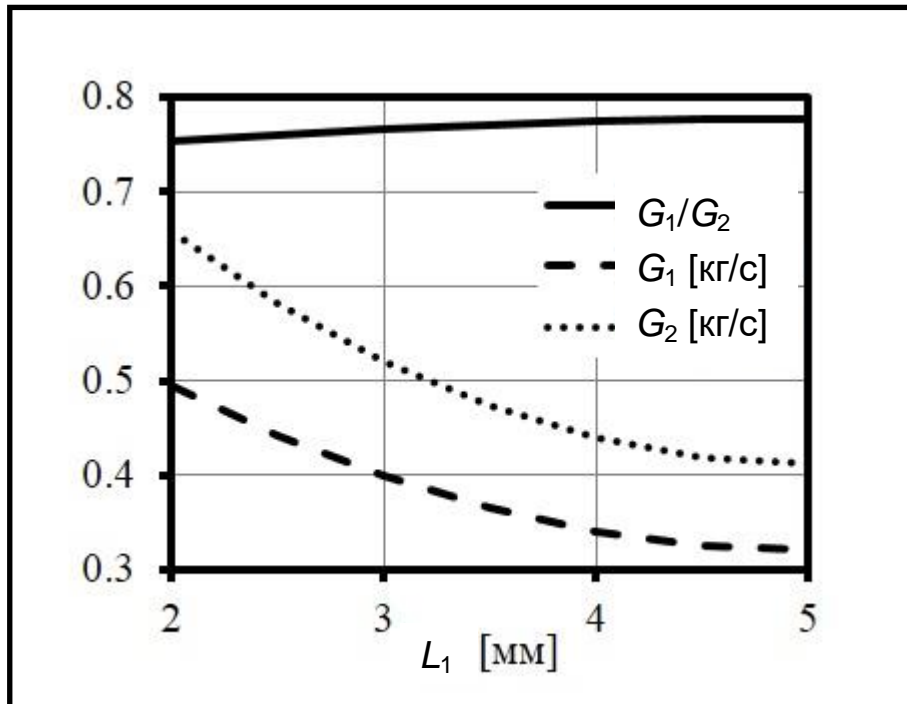


Рис. 3.11. Зависимость расходов жидкости в прямом G_1 и обратном G_2 направлениях, а также их отношения G_1/G_2 от длины L_1

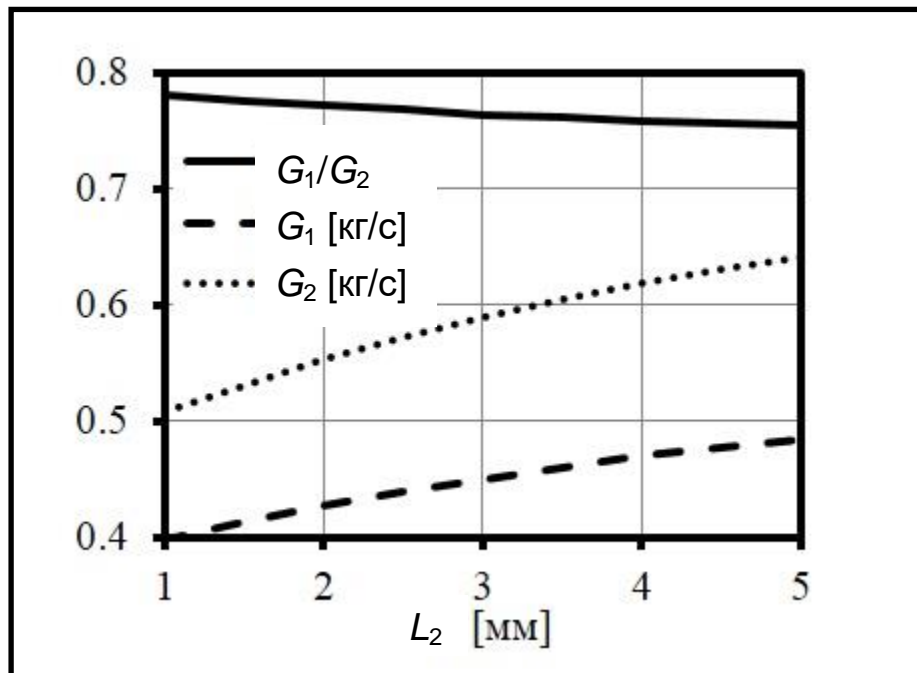


Рис. 3.12. Зависимость расходов жидкости в прямом G_1 и обратном G_2 направлениях, а также их отношения G_1/G_2 от длины L_2

Увеличение величины L_2 приводит к увеличению расходов G_1 и G_2 (рис. 3.12) и уменьшению отношения G_1/G_2 . Отношение G_1/G_2 в данном случае имеет зависимость, близкую к линейной, и это уменьшение незначительно.

Величина угла α оказывает значительное влияние на величину отношения G_1/G_2 и на разницу в расходах G_1 и G_2 . С увеличением угла α отношение G_1/G_2 увеличивается линейно от 0,8 при $\alpha = 20^\circ$ до величины 1,08 при $\alpha = 60^\circ$ (рис. 3.13).

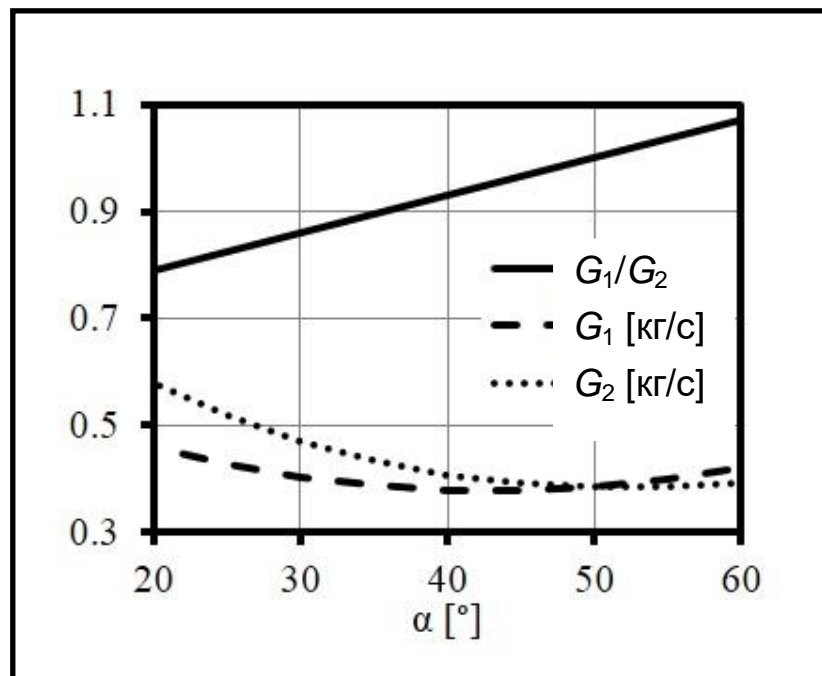


Рис. 3.13. Зависимость расходов жидкости в прямом G_1 и обратном G_2 направлениях, а также их отношения G_1/G_2 от угла α

С увеличением угла β расходы G_1 и G_2 увеличиваются, разница между ними так же увеличивается, а отношение G_1/G_2 уменьшается. Угол β оказывает, так же как и угол α , значительное влияние на соотношение расходов G_1/G_2 (рис. 3.14).

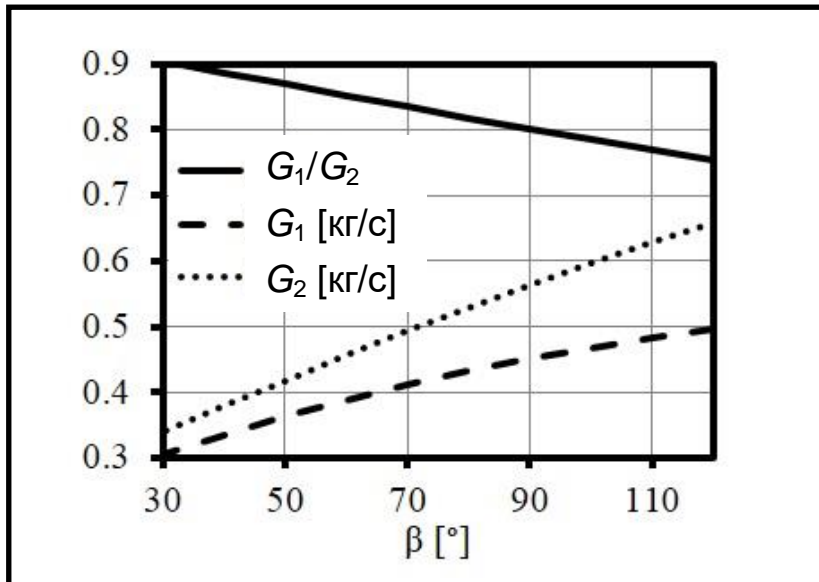


Рис. 3.14. Зависимость расходов жидкости в прямом G_1 и обратном G_2 направлениях, а также их отношения G_1/G_2 от угла β

С увеличением давления p_1 увеличиваются расходы G_1 и G_2 , а их отношение остается практически постоянным (рис. 3.15).

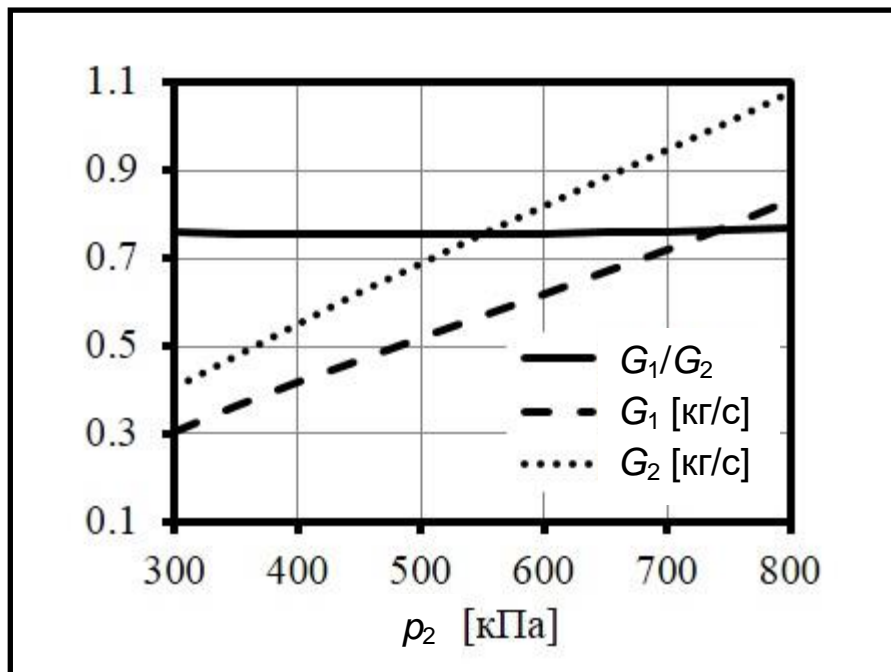


Рис. 3.15. Зависимость расходов жидкости в прямом G_1 и обратном G_2 направлениях, а также их отношения G_1/G_2 от давления p_1

Для оценки степени влияния каждого из независимых факторов на отклик функции G_1/G_2 были вычислены коэффициенты чувствительности. Коэффициент чувствительности по определению является первой производной от функции отклика по независимой переменной в заданной точке [21].

Для понимания того, как определялись коэффициенты чувствительности, рассмотрим определение коэффициента чувствительности для независимой переменной δ_0 . Значение коэффициента чувствительности в данном случае определится как

$$k_{s,\delta_0} = \frac{(\psi_{12})_{\max} - (\psi_{12})_{\min}}{\Delta \delta_0^*}, \quad (3.32)$$

где $(\psi_{12})_{\max}$ и $(\psi_{12})_{\min}$ – максимальное и минимальное отношение расходов G_1/G_2 на всем допустимом диапазоне изменения фактора δ_0 ; $\Delta \delta_0^*$ – безразмерный диапазон изменения фактора, который можно принять равным 1 для всех факторов.

С целью проведения эффективного анализа по оценке степени влияния независимых переменных чувствительные коэффициенты можно привести к безразмерному виду

$$k_{s,\delta_0}^* = \frac{k_{s,\delta_0}}{k_{s,\max}}, \quad (3.33)$$

где k_{s,δ_0}^* – безразмерный коэффициент чувствительности фактора δ_0 ; $k_{s,\max}$ – максимальный из всех рассчитанных коэффициентов чувствительности.

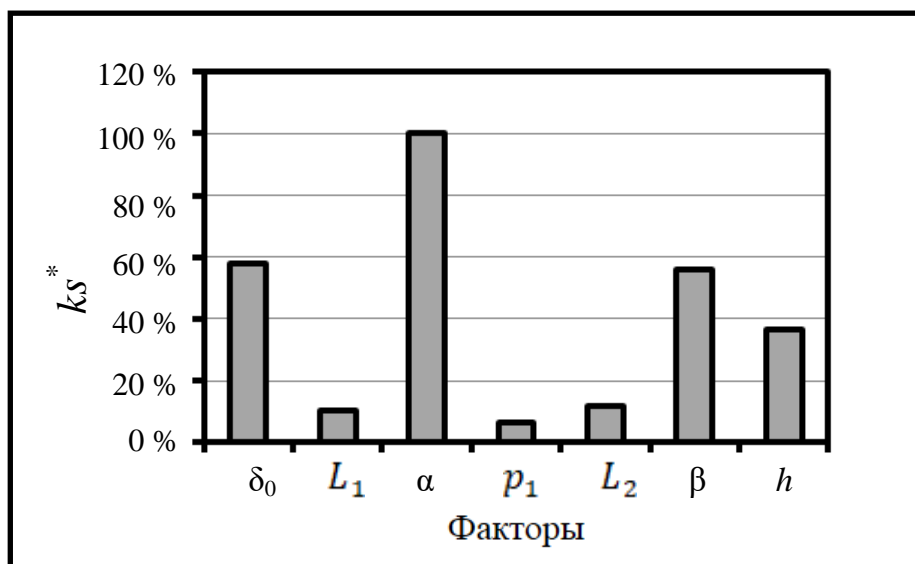


Рис. 3.16. Безразмерные коэффициенты чувствительности факторов

Представленные на рис. 3.16 безразмерные коэффициенты чувствительности позволяют сделать выводы:

1. Наибольшее значение на отношение расходов жидкости оказывает угол α .

2. Величина зазора δ_0 и угол β оказывают примерно одинаковое влияние на отношение расходов G_1/G_2 , и это влияние составляет $\approx 60\%$ от влияния угла α .

3. Четвертым по степени влияния на отношение расходов жидкости параметром является высота выступов, значение безразмерного коэффициента чувствительности в данном случае составляет 40% .

4. Величины L_1 , L_2 оказывают примерно одинаковое значение на отношение расходов G_1/G_2 , и это влияние находится в пределах $10\text{--}15\%$ от влияния угла α .

5. Наименьшее влияние на отношение расходов жидкости из рассмотренных выше факторов оказывает величина давления p_1 (менее 10% от влияния угла α).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение вопросов механики жидкости и газа занимает большое место в подготовке студентов технических вузов по направлению «Энергетическое машиностроение».

В пособии рассмотрено установившееся ламинарное течение жидкости: в щелях между двумя прямоугольными пластинами; безнапорное фрикционное течение между двумя соосными цилиндрами с зазором одного порядка с диаметрами; установившееся ламинарное напорное движение в трубе круглого поперечного сечения; напорное и фрикционное осевое течение жидкости между двумя неподвижными и подвижными соосно расположенными и не соосно расположенными цилиндрами. Проанализировано уравнение Рейнольдса для смазочного слоя и фрикционное течение жидкости в клиновом зазоре, что весьма важно для понимания и расчета работы подшипников скольжения.

Изложены вопросы турбулентного течения жидкости с использованием основных фундаментальных уравнений для турбулентного течения вязкой жидкости. Особое внимание уделено основным современным моделям турбулентности, а также постановке начальных и граничных условий и методам численного решения.

Приведен пример практического использования моделей турбулентности для расчета коэффициента трения по длине в трубе круглого сечения, а также для расчета профилированного щелевого уплотнения в поршневой гибридной энергетической машине объемного действия.

Настоящее учебное пособие «Механика жидкости и газа. Спецглавы» полностью соответствует требованиям ФГОС по направлению подготовки 13.04.03 «Энергетическое машиностроение», а также будет полезно студентам – будущим специалистам в области энергетического машиностроения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Альтшуль, А. Д. Гидравлика и аэродинамика / А. Д. Альтшуль, П. Г. Киселев. – М. : Стройиздат, 1975. – 327 с.
2. Штерендлихт, Д. В. Гидравлика : учеб. для вузов / Д. В. Штерендлихт. – СПб. : Лань, 2015. – 656 с.
3. Щерба, В. Е. Механика жидкости и газа : учеб. пособие / В. Е. Щерба. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 1999. – 110 с.
4. Куколевский, И. И. Сборник задач по машиностроительной гидравлике / И. И. Куколевский, Л. Г. Подвиз. – М. : Изд-во МГГУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 448 с.
5. Вайсман, Н. М. Механика жидкости и газа. Гидравлика : учеб. пособие / Н. М. Вайсман, В. А. Голиков, А. А. Жарковский. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 222 с.
6. Башта, Т. М. Гидравлика, гидравлические машины и гидравлические приводы / Т. М. Башта. – М. : Машиностроение, 1970. – 504 с.
7. Орлов, Ю. М. Механика жидкости, гидравлические машины и основы гидропривода агрегатов ракетных комплексов : учеб. пособие / Ю. М. Орлов. – М. : Пресс-мастер, 2001. – 379 с.
8. Идельчик, И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И. Е. Идельчик. – М. : Книга по треб., 2012. – 466 с.
9. Емцев, Б. Т. Техническая гидродинамика / Б. Т. Емцев. – М. : Машиностроение, 1987. – 440 с.
10. Баженов, А. М. Разработка и исследование поршневой гибридной энергетической машины с щелевым уплотнением ступенчатого вида : дис. ... канд. техн. наук : 05.04.13 : защищена 28.09.17 : утв. 16.02.18 / Баженов Алексей Михайлович. – Омск, 2017. – 250 с.
11. Кондюрин, А. Ю. Разработка и исследование щелевого уплотнения поршневой гибридной энергетической машины, выполненного в виде гидродиода : дис. ... канд. техн. наук : 05.04.13 : защищена 19.05.16 : утв. 12.12.16 / Кондюрин Алексей Юрьевич. – Омск, 2016. – 138 с.

12. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М. : Дрофа, 2003. – 846 с.
13. Хинце, И. О. Турбулентность, ее механизм и теория / И. О. Хинце. – М. : Изд-во иностр. лит., 1963. – 680 с.
14. Белов, И. А. Моделирование турбулентных течений / И. А. Белов, С. А. Исаев. – СПб. : Балт. гос. техн. ун-т, 2001. – 108 с.
15. David C. Wilcox. Turbulence modeling for CFD. DCW Industries, California, 1994. – 460 p.
16. Фрик, П. Г. Турбулентность: модели и подходы. Ч. 1, 2 / П. Г. Фрик. – Пермь : Перм. гос. техн. ун-т, 1998. – 108 с.
17. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1, 2 / К. Флетчер ; пер. с англ. – М. : Мир, 1991. – 504 с.
18. Таранцев, К. В. Анализ возможности использования современных компьютерных технологий для исследования гидродинамики несжимаемой жидкости в рабочем пространстве аппаратов / К. В. Таранцев, С. И. Поникаров, К. Р. Таранцева // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2019. – № 5. – С. 40–43.
19. Щерба, В. Е. Анализ основных преимуществ объединения компрессоров и насосов объемного действия в единый агрегат / В. Е. Щерба, А. П. Болштянский, С. Ю. Кайгородов, Д. А. Кузеева // Вестник машиностроения. – 2015. – № 12. – С. 15–19.
20. Расчет течения жидкости в щелевом уплотнении насос-компрессора, выполненном в виде гидродиода / [А. Ю. Кондюрин и др.] // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2016. – № 4. – С. 30–34.
21. Анализ и оптимизация основных геометрических параметров кольцевого щелевого уплотнения, выполненного в виде гидродиода / [А. Ю. Кондюрин и др.] // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2016. – № 4. – С. 39–44.

Учебное издание

Щерба Виктор Евгеньевич

Шалай Виктор Владимирович

Павлюченко Евгений Александрович

Носов Евгений Юрьевич

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

СПЕЦГЛАВЫ

Учебное пособие

Редактор *О. В. Маер*

Компьютерная верстка *Ю. П. Шелехиной*

Для дизайна обложки использованы материалы
из открытых интернет-источников

Сводный темплан 2020 г.

Подписано в печать 03.03.20. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная.

Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 5,75. Уч.-изд. л. 5,75.

Тираж 50 экз. Заказ 129.