

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Методические указания по выполнению курсовой работы

Омск - 2000

Составитель: Щерба В.Е., д-р техн.наук, профессор, каф. «Гидромеханика и теплоэнергетика».

Рассмотрен вопрос расчета течения капельной и сжимаемой жидкостей в межступенчатых коммуникациях насосов и компрессоров объемного действия. Расчет течения жидкости проводится в одномерной нестационарной постановке.

Методические указания предназначены студентам 3-5 курсов специальности 121100 «Гидравлические машины, гидроприводы и гидропневмоавтоматика» при выполнении курсовых работ и курсовых проектов, а также по ряду родственных специальностей. Кроме того, могут быть использованы инженерно-техническими работниками при моделировании рабочих процессов компрессоров и насосов объемного действия.

Подготовлены на кафедре «Гидромеханика и теплоэнергетика» Омского государственного технического университета.

Общие указания по выполнению и оформлению курсовой работы

1. Выполнение курсовой работы по механике жидкости и газа возможно на двух уровнях: первом и втором. Вследствие этого шифр задания состоит из двух чисел. Первое число указывает номер уровня, а второе число указывает номер варианта в табл. 1. Например 1.6., означает первый уровень шестой вариант.
2. Задачей выполнения курсовой работы является расчет течения рабочего тела в трубопроводе постоянного сечения и определение расхода рабочего тела за время τ распределения газодинамических параметров по длине трубопровода.
3. Курсовая работа должна содержать текстовую часть, в которой должно быть представлено распределение газодинамических параметров по длине трубопровода в момент времени τ , значение расхода рабочего тела по полостям и интегральное его значение; программу расчета на одном из алгоритмических языков.
4. Пояснительная записка должна быть оформлена на тонкой белой бумаге форматом А4, скреплена нитками или тесьмой в следующей последовательности: титульный лист, задание, программа расчета, результаты расчета.

Расчет течения жидкости в межступенчатых и концевых коммуникациях объемных машин

1. Постановка задачи

К объемным машинам относятся машины, предназначенные для сжатия и перемещения капельной и газообразной жидкости путем изменения их объема. Машины, предназначенные для сжатия и перемещения газа, носят название компрессоры, а машины для сжатия и перемещения капельной жидкости - насосы.

Обязательным элементом одно- и многоступенчатых объемных машин является наличие буферных емкостей, соединенных между собой трубопроводами постоянного сечения.

Для расчета рабочих процессов объемных машин и определения их интегральных характеристик необходимо провести расчет нестационарного течения жидкости в концевых и межступенчатых коммуникациях, что и является целью нашей работы.

На рис. 1 представлен типичный элемент многоступенчатой, либо концевой коммуникации объемной машины.

Давление и температура жидкости в полостях компрессорных машин и насосов в общем случае меняются по произвольному закону. Для расчета течения жидкости между двумя полостями примем, что в каждой из рассматриваемых полостей давление и температура жидкости меняются по косинусоидальному закону.

2. Целью выполнения курсовой работы является расчет течения жидкости между двумя полостями и определение количества жидкости, переместившейся из одной полости в другую.

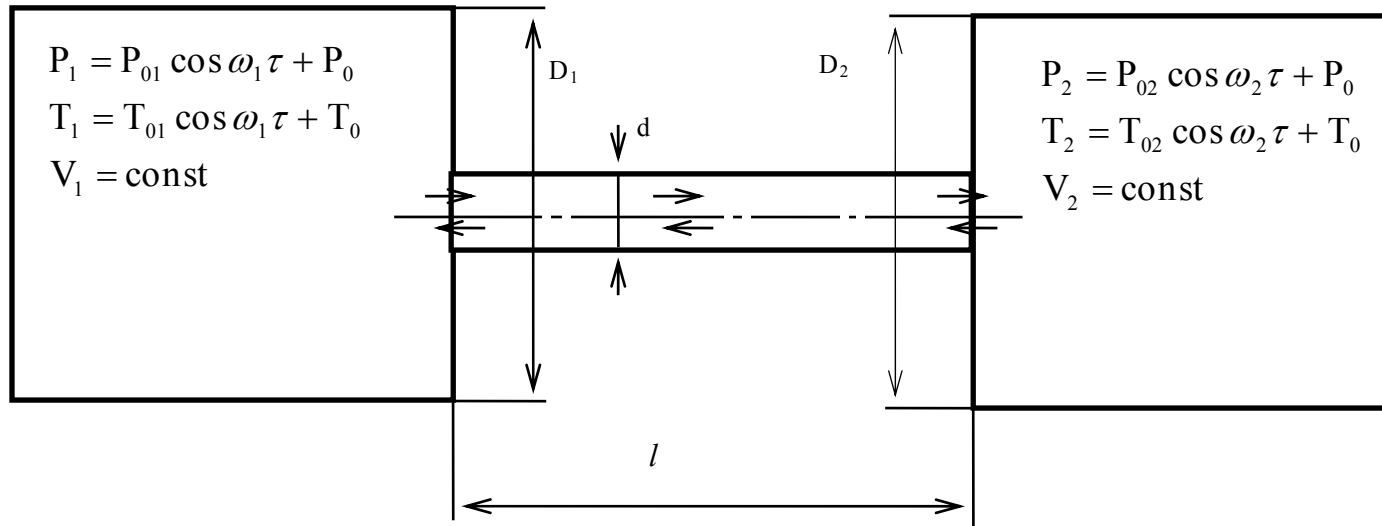


Рис. 1

В таблице 1 представлены значения основных конструктивных и термодинамических параметров расчетной схемы

Таблица 1

№ п/п	P_{01} , кПа	t_1 , °C	ω_1 , рад/с	P_{02} , кПа	t_2 , °C	ω_2 , рад/с	d , м	l , м	D_1 , м	D_2 , м	τ , с	$P_0=0,1$ МПа $T_0=273\text{ K}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	98	20	70	50	80	100	0,3	0,2	0,6	0,9	0,5	
2	96	22	71	52	78	99	0,32	0,22	0,7	0,8	0,51	
3	94	26	73	56	74	97	0,34	0,24	0,8	0,7	0,52	
4	92	26	73	56	74	97	0,36	0,26	0,6	0,6	0,54	
5	90	28	74	58	72	96	0,38	0,28	0,5	0,9	0,56	
6	88	30	75	60	70	95	0,4	0,30	0,7	0,8	0,58	
7	86	32	76	62	68	94	0,39	0,32	0,8	0,6	0,6	
8	84	34	77	64	66	93	0,37	0,34	0,9	0,8	0,7	
9	82	36	78	66	64	92	0,35	0,36	0,6	0,9	0,8	
10	80	38	79	68	62	91	0,33	0,38	0,55	0,6	1,0	
11	78	40	80	70	60	90	0,31	0,40	0,6	0,7	0,9	
12	76	42	81	72	58	89	0,29	0,42	0,75	0,8	0,85	
13	74	44	82	74	56	88	0,27	0,44	0,85	0,9	0,81	
14	72	46	83	76	54	87	0,25	0,46	0,9	0,8	0,75	
15	70	48	84	78	52	86	0,23	0,48	0,95	0,6	0,71	
16	68	50	85	80	50	85	0,21	0,50	0,7	0,7	0,65	
17	66	52	86	82	48	84	0,2	0,49	0,8	0,6	0,61	
18	64	54	87	84	46	83	0,22	0,51	0,6	0,7	0,56	
19	62	56	88	86	44	82	0,24	0,53	0,5	0,75	0,55	
20	60	58	89	88	42	81	0,26	0,55	0,6	0,8	0,52	
21	58	60	90	90	40	80	0,28	0,57	0,7	0,65	0,49	
22	56	59	91	92	38	79	0,3	0,59	0,8	0,75	0,47	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
23	54	57	92	94	36	78	0,32	0,61	0,9	0,85	0,45
24	52	55	93	96	34	77	0,34	0,6	0,85	0,9	0,40
25	50	53	94	98	32	76	0,36	0,58	0,75	0,65	0,4
26	48	51	95	100	30	75	0,38	0,56	0,65	0,55	0,38
27	46	49	96	102	28	74	0,40	0,54	0,55	0,6	0,36
28	44	47	97	104	26	73	0,42	0,52	0,6	0,7	0,35
29	42	45	98	106	24	72	0,40	0,50	0,7	0,8	0,3
30	40	43	99	108	22	71	0,38	0,48	0,8	0,9	0,25

3. Математическое описание задачи

В курсовой работе представлено два уровня сложности решения поставленной задачи. На первом уровне рассматривается квазистационарное одномерное течение несжимаемой и сжимаемой жидкостей. На втором уровне рассматривается нестационарное одномерное течение сжимаемой жидкости.

Выполнение курсовой работы осуществляется студентом на одном из уровней по указанию преподавателя.

I уровень моделирования

Уравнение Бернулли для сечений I-I и II-II запишется в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \zeta_i \frac{v^2}{2g}, \quad (1)$$

где z_1, z_2 - геометрические высоты центров тяжести рассматриваемых сечений;

p_1, p_2 - текущие давления в полостях;

v_1, v_2 - скорости жидкости в рассматриваемых сечениях;

α_1, α_2 - коэффициенты Кориолиса;

l, d - длина и диаметр соединенного трубопровода;

$\sum \zeta_i$ - сумма коэффициентов местных сопротивлений;

λ - коэффициент трения по длине;

g - ускорение свободного падения.

Необходимо отметить, что для капельной жидкости $\rho = \text{const}$, а также для газообразной жидкости при небольших различиях p_1 и p_2 можно принять, что $\rho = \text{const}$. Тогда, принимая, что $z_1 = z_2$ и $v_1 = v_2$, т.к. диаметр трубопровода постоянен, получаем

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \zeta_i \frac{v^2}{2g} \quad (2)$$

$$\text{или } \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v^2}{2g} \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_i \right). \quad (3)$$

Величина скорости жидкости v определится из уравнения (3) как

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_i \right)}}. \quad (4)$$

Принимая во внимание, что коэффициент трения по длине трубопровода λ является функцией числа Re и, следовательно, скорости течения жидкости v , получаем нелинейное алгебраическое уравнение (4) относительно v . Величина λ в функции от v определится следующим образом:

$$1. Re < 2320, \text{ тогда } \lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64 \cdot \mu}{v d \rho}, \quad (5)$$

где μ - коэффициент динамической вязкости.

При ламинарном движении величина μ является функцией температуры.

2. При турбулентном движении:

а) в области гидравлически гладких труб ($3000 \leq Re \leq 20 \frac{d}{k}$, где k - абсолютная шероховатость трубы) величина λ определяется по формуле Блазиуса

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}; \quad (6)$$

б) в переходной области от гидравлически гладких труб к шероховатым

($20 \frac{d}{k} \leq Re \leq 500 \frac{d}{k}$) величина λ определится как

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}; \quad (7)$$

в) в области вполне шероховатых труб ($Re \geq 500 \frac{d}{k}$) величина λ определится как

$$\lambda = 0,11 (k/d)^{0,25}; \quad (8)$$

Величина $\sum \zeta_i$ определится как сумма местного коэффициента, связанного с сужением и расширением потока, т.е.

$$\sum \zeta_i = \zeta_1 + \zeta_2. \quad (9)$$

Величина местного коэффициента сопротивления при внезапном расширении потока определится по формуле Борда следующим образом:

$$\zeta_2 = \left(-\frac{\omega_2}{\omega_1} + 1 \right)^2 = \left(\frac{d^2}{D_i^2} - 1 \right)^2, \quad (10)$$

где ω_2 - площадь поперечного сечения соединительного трубопровода,

ω_1 - площадь поперечного сечения полости.

При внезапном сужении потока величина местного коэффициента сопротивления определится

$$\zeta_1 = \left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right)^2. \quad (11)$$

Коэффициент сжатия струи зависит от степени сжатия потока n и определяется как [1]

$$\varepsilon = 0,57 + \frac{0,043}{1,1 - n}, \quad (12)$$

где $n = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{d^2}{D_i^2}$ - степень сжатия потока.

Величина D_i в формулах (10), (12) определяется следующим образом. При течении жидкости из левой полости в правую в формуле (12) в качестве D_i следует

брать величину D_1 , а в формуле (10) - D_2 . При течении жидкости из правой емкости в левую последовательность нахождения D_i изменяется (D_2, D_1).

Таким образом, уравнение (4) представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение относительно v с переменной правой частью. Получение решения возможно только численными методами. Одними из наиболее эффективных и просто реализуемых методов являются метод половинного деления и метод последовательного приближения. В основу метода половинного деления положено деление отрезка, содержащего решение, на каждом шаге пополам.

Определив v , находим массу жидкости, перемещающейся за время Δt из одной полости в другую как

$$\Delta M_i = v \frac{\pi d^2}{4} \Delta \tau. \quad (13)$$

За время t изменение массы определится как

$$M_t = \sum \Delta M_i. \quad (14)$$

II уровень моделирования

Рассмотрим движение идеального сжимаемого газа. В качестве исходных уравнений возьмем дифференциальное уравнение Эйлера (неразрывности, движения и энергии) в дивергентном виде. Оно запишется как

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho u) = 0. \quad (15)$$

Уравнение динамики движения запишется в виде

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (16)$$

Пренебрегая объемными силами и рассматривая одномерное движение газа, имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (17)$$

или
$$\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (18)$$

Уравнение неразрывности в одномерной нестационарной постановке запишется в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \quad (19)$$

Умножив левую и правую части этого уравнения на u , имеем

$$u \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \quad (20)$$

Сложив левые и правые части уравнений (18) и (20), получаем

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (21)$$

или
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho u \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (22)$$

или
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho u \cdot u) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (23)$$

Для вывода уравнения закона сохранения энергии рассмотрим изменение энергии единицы объема $\frac{\rho u^2}{2} + \rho \varepsilon$ в единицу времени [2].

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho \varepsilon), \quad (24)$$

где ε - удельная внутренняя энергия газа.

Продифференцировав первое слагаемое в правой части уравнения (24), имеем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = \frac{u^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho u \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (25)$$

Подставляя из уравнений неразрывности и движения значения $\frac{\partial \rho}{\partial \tau}$ и $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ в выражение (25), получаем

$$\frac{u^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho u \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) - \rho u \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} \right)}{\partial x} - u \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (26)$$

Для преобразования производной $\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho\varepsilon)$ воспользуемся первым законом термодинамики в виде

$$dQ = d\varepsilon + p d\nu, \quad (27)$$

где dQ - количество тепла, получаемое (отдаваемое) системой из вне;

$p d\nu$ - работа, затрачиваемая при изменении объема на величину $d\nu$: $\nu = \frac{1}{\rho}$.

Для адиабатического процесса ($dQ = 0$) имеем

$$d\varepsilon = -p d \frac{1}{\rho} = \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (28)$$

Воспользуясь данным равенством, получаем

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon d\rho + \rho d\varepsilon = \varepsilon d\rho + \frac{p}{\rho} d\rho = \omega d\rho. \quad (29)$$

$$\text{Тогда} \quad \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial \tau} = \omega \frac{\partial \rho}{\partial \tau}, \quad (30)$$

где $\omega = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = \varepsilon + p\nu$ - удельная энтальпия газа.

Определим значение выражения $\frac{\partial \omega}{\partial x}$.

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} \right)}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{p}{\rho} \right)}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (31)$$

$$\text{Тогда имеем} \quad \rho u \frac{\partial \omega}{\partial x} = u \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (32)$$

Принимая во внимание вышеизложенное, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho\varepsilon + \rho \frac{u^2}{2} \right) &= -\frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) - \rho u \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} \right)}{\partial x} - u \frac{\partial p}{\partial x} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) - \rho u \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} \right)}{\partial x} - \\ &- \rho u \frac{\partial \omega}{\partial x} - \omega \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u \cdot \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \cdot \omega) \right] = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(\frac{u^2}{2} + \omega \right) \right]. \quad (33) \end{aligned}$$

Преобразуем полученное уравнение к дивергентному виду, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varepsilon \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) + pu \right] =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u E) + \frac{\partial}{\partial x} (pu) = \text{div}(\rho u E) + \text{div}(pu),$$
(34)

где $E = \varepsilon + \frac{u^2}{2}$.

Тогда уравнение сохранения энергии запишется в виде

$$\frac{\partial \rho E}{\partial \tau} + \text{div}(\rho E u) + \text{div}(pu) = 0.$$
(35)

Таким образом, исходная система уравнений (15, 16, 24) запишется в следующем виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho u) = 0; \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial \tau} + \text{div}(\rho u \cdot u) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial \tau} + \text{div}(\rho u E) + \text{div}(pu) = 0; \\ \rho = \frac{p}{RT}. \end{array} \right.$$
(36)

Расчет движения газа методом «крупных частиц»

Основная идея метода «крупных частиц» [3] заключается в расщеплении по физическим процессам исходной нестационарной системы уравнений Эйлера, записанной в форме законов сохранения. Среда (газ) моделируется системой из жидких (крупных) частиц, совпадающих в данный момент времени с ячейкой Эйлеровой сетки. Стационарное решение задачи, если оно существует, получается в результате многократного повторения шагов по времени и установления постоянного распределения газодинамических параметров. Расчет каждого временного шага (вычислительного цикла) разбивается на три основных этапа:

I - Эйлера этап.

На данном этапе пренебрегаем всеми эффектами, связанными с перемещением элементарной ячейки (отсутствует поток массы через границы) и учитываем эффекты ускорения жидкости за счет сил давления. После проведения вычислительной процедуры для крупной частицы определяются промежуточные значения искомых параметров потока (\tilde{u}, \tilde{E}). По существу на I этапе проводится чисто Лагранжев расчет - рассматривается изменение за время Δt импульса и энергии Лагранжева элементарного объема жидкости (крупной частицы), заключенного внутри данной Эйлеровой ячейки (при этом граница объема смещается относительно начального расположения).

II - Лагранжев этап.

Вычисляются потоки массы через границы Эйлеровых ячеек. Вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю Эйлерову сетку (моделируется движение потока массы через границы Эйлеровых ячеек и находятся смещения расчетных точек).

III - заключительный этап.

В новый момент времени определяются окончательные значения газодинамических параметров потока (u, E, ρ) на основе законов сохранения массы, импульса и энергии для каждой ячейки и всей системы в целом на фиксированной расчетной сетке. Происходит соответствующее перераспределение массы, импульса и энергии по пространству, что позволяет определить новое распределение гидродинамических параметров на «старой» Эйлеровой сетке (определяются изменения за время Δt параметров потока в элементарной Эйлеровой ячейке, полученной возвращением Лагранжева объема в исходное положение). Счет фактически ведется в локальных Лагранжевых координатах с последующим пересчетом (интерполяцией) на Эйлерову расчетную сетку. Область интегрирования покрывается фиксированной в пространстве (Эйлеровой) расчетной сеткой с шагом по оси Ox Δx . Значения целых чисел i обозначают центр ячейки.

I - Эйлера этап.

На данном этапе жидкость предполагается заторможенной, изменяются величины, относящиеся к ячейке в целом. Конвективные члены вида $\text{div}(\varphi u)$, где $\varphi = (1, u, E)$, соответствующие эффектам перемещения, отбрасываются. Исходя из принятых допущений, система уравнений газодинамики запишется в виде

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad (37)$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial \tau} + \text{div}(pu) = 0. \quad (38)$$

Аппроксимируя уравнение (37) в момент времени t^n , получим следующие разностные уравнения

$$\rho_i^n \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_i^n \Delta x = -[p_{i+1/2}^n - p_{i-1/2}^n]; \quad (39)$$

$$\rho_i^n \left(\frac{\partial E}{\partial \tau} \right)_i^n \Delta x = -[p_{i+1/2}^n u_{i+1/2}^n - p_{i-1/2}^n u_{i-1/2}^n]. \quad (40)$$

Принимая во внимание, что производные по времени определяются как

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_i = \frac{\tilde{f}_i^n - f_i^n}{\Delta \tau}, \quad f(u, E), \quad (41)$$

определим из уравнений (39), (40) значения величин \tilde{u}_i^n и \tilde{E}_i^n :

$$\tilde{u}_i^n = u_i^n - \frac{p_{i+1/2}^n - p_{i-1/2}^n}{\Delta x} \frac{\Delta \tau}{\rho_i^n}; \quad (42)$$

$$\tilde{E}_i^n = E_i^n - \frac{p_{i+1/2}^n u_{i+1/2}^n - p_{i-1/2}^n u_{i-1/2}^n}{\Delta x} \frac{\Delta \tau}{\rho_i^n}, \quad (43)$$

где $u_{i+1/2}^n = \frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2}$, $p_{i+1/2}^n = \frac{p_i^n + p_{i+1}^n}{2}$.

В записанных уравнениях \tilde{u} , \tilde{E} - промежуточные значения параметров потока на слое $\tau^n + \Delta \tau$, полученные в предположении заторможенности поля плотности без учета эффектов перемещения среды.

II - Лагранжев этап.

На данном этапе вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю Эйлерову сетку. За время Δt определим потоки массы ΔM^n через границы Эйлеровых ячеек. Предположим, что масса переносится только за счет нормальной к границе составляющей скорости.

Поток массы ΔM^n можно определять по схемам первого и второго порядков точности.

Для схемы первого порядка точности потоки массы можно определить как

$$\Delta M_{i+1}^n = \begin{cases} \rho_i^n \frac{\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n}{2} \Delta \tau; & (44) \\ \rho_{i+1}^n \frac{\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n}{2} \Delta \tau. & (45) \end{cases}$$

Вычисление по формуле (44) производится в том случае, если $\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n > 0$, а по формуле (45), если $\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n < 0$. Проведенный анализ и расчеты позволили установить, что устойчивость вычислений можно обеспечить использованием схем первого порядка точности.

III - заключительный этап.

На заключительном этапе происходит перераспределение массы, импульса и энергии по пространству и определяются окончательные поля Эйлеровых параметров потока на фиксированной сетке в момент времени $\tau^{n+1} = \tau^n + \Delta \tau$. Законы сохранения массы M , импульса P и полной энергии E для ячейки в разностной форме запишутся в виде

$$M^{n+1} = M^n + \Sigma \Delta M_{gp}^n; \quad (46)$$

$$P^{n+1} = P^n + \Sigma \Delta P_{gp}^n; \quad (47)$$

$$E^{n+1} = E^n + \Sigma \Delta E_{gp}^n, \quad (48)$$

где ΔM_{gp}^n - масса газа, которая пересекла за время Δt одному из границ рассматриваемой ячейки; суммирование производится по всем сторонам ячейки.

Аналогичным образом понимаются ΔP_{gp}^n и ΔE_{gp}^n .

Принимая во внимание изложенное выше, окончательные значения параметров потока ρ , u , E на новом временном слое $\tau^{n+1} = \tau^n + \Delta\tau$ вычисляются по формулам

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{M_{i-1/2}^n - \Delta M_{i+1/2}^n}{\Delta x}; \end{array} \right. \quad (49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{n+1} = \frac{\rho_i^n}{\rho_i^{n+1}} \tilde{u}_i^n + \frac{\tilde{u}_{i-1}^n \Delta M_{i-1/2}^n - \tilde{u}_{i+1}^n \Delta M_{i+1/2}^n}{\rho_i^{n+1} \Delta x}; \end{array} \right. \quad (50)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_i^{n+1} = \frac{\rho_i^n}{\rho_i^{n+1}} \tilde{E}_i^n + \frac{\tilde{E}_{i-1}^n \Delta M_{i-1/2}^n - \tilde{E}_{i+1}^n \Delta M_{i+1/2}^n}{\rho_i^{n+1} \Delta x}. \end{array} \right. \quad (51)$$

Определение граничных и начальных условий

Постановка граничных условий производится на основании [4]. В соответствии с результатами [4] для левой границы

$$\underline{x = 0};$$

$$p(0, \tau) = p_{v1} = p_1^{n+1}; \quad (52)$$

$$u_1^{n+1} = u_1^n - (u_1^n - a_1^n)(u_2^n - u_1^n) \frac{\Delta\tau}{\Delta x} + \frac{p_1^{n+1} - p_1^n}{\rho_1^n a_1^n} + (u_1^n - a_1^n) \frac{p_2^n - p_1^n}{\rho_1^n a_1^n} \frac{\Delta\tau}{\Delta x}. \quad (53)$$

Если $u_1^{n+1} > 0$,

$$\rho(0, \tau) = \rho_{v1} = \rho_1^{n+1}. \quad (54)$$

Если $u_1^{n+1} < 0$,

$$\rho_1^{n+1} = \rho_1^n + u_1^n \left[\frac{p_1^{n+1} - p_1^n}{(a_1^n)^2} - \rho_2^n + \rho_1^n \right] \frac{\Delta\tau}{\Delta x} + \frac{p_1^{n+1} - p_1^n}{(a_1^n)^2}. \quad (55)$$

Для правой границы

$$\underline{x = l};$$

$$p(l, \tau) = p_{v2} = p_m^{n+1}; \quad (56)$$

$$u_m^{n+1} = u_m^n - (u_m^n + a_m^n)(u_m^n - u_{m-1}^n) \frac{\Delta\tau}{\Delta x} - \frac{p_m^{n+1} - p_m^n}{\rho_m^n a_m^n} - (u_m^n + a_m^n) \frac{p_m^n - p_{m-1}^n}{\rho_m^n a_m^n} \frac{\Delta\tau}{\Delta x}. \quad (57)$$

Если $u_m^{n+1} > 0$,

$$\rho(l, \tau) = \rho_{v2} = \rho_m^{n+1}. \quad (58)$$

Если $u_m^{n+1} < 0$,

$$\rho_m^{n+1} = \rho_m^n + \left[\frac{p_m^n - p_{m-1}^n}{(a_m^n)^2} - \rho_m^n + \rho_{m-1}^n \right] \frac{\Delta\tau}{\Delta x} + \frac{p_m^{n+1} - p_m^n}{(a_m^n)^2}, \quad (59)$$

где величина скорости звука определится как

$$a_i^j = \sqrt{k \frac{p_i^j}{\rho_i^j}}, \quad (60)$$

k - показатель адиабаты сжимаемого газа.

Начальные условия в общем случае задаются произвольным образом. Правильное задание начальных условий ускоряет получение конечных результатов. При выполнении расчетов следует принять, что газодинамические параметры по длине трубы имеют одинаковые значения, т.е.

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ p(x,0) &= \frac{p_{01} + p_{02}}{2} \\ T(x,0) &= \frac{T_{01} + T_{02}}{2} \\ \rho(x,0) &= \frac{\rho_{01} + \rho_{02}}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (61)$$

Список литературы

1. Альтшуль А.Д., Киселев П.Г. Гидравлика и аэродинамика. - М.: Стройиздат, 1975. - 327 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 735 с.
3. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. - М.: Наука, 1982. - 392 с.
4. Воронков С.С., Прилуцкий Л.К., Фотин Б.С. Математическая модель высокооборотного поршневого двухступенчатого компрессора // Тр. ВНИИхолодмаш. - 1982. - С.42-53.

Содержание

1. Общие указания по выполнению и оформлению курсовой работы	3
2. Расчет течения жидкости в межступенчатых и концевых коммуникациях объемных машин	4
3. Расчет движения газа методом «крупных частиц»	13
4. Определение граничных условий и начальных условий	17
5. Список литературы	19

Редактор В.А. Маркалева

ЛР № 020321 от 28.11.96.

Подписано в печать . Формат 60x84/16.

Оперативный способ печати. Бумага офсетная.

Усл.печ.л. 1,25. Уч.изд.л. 1,25. Тираж Заказ

Изд-во ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр. Мира, 11

Типография ОмГТУ