На правах рукописи

Болдырева Мария Николаевна

СИММЕТРИЯ И НЕКОММУТАТИВНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

1.3.3. Теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2022

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Омский государственный технический университет».

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук **Магазев Алексей Анатольевич**

Официальные оппоненты:

Защита состоится ... . 2022 г. в $14^{\underline{30}}$ часов на заседании диссертационного совета «НИ ТГУ.1.3.01», созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина 36 (главный корпус СФТИ ТГУ, аудитория ....).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ:
http://www.tsu.ru...

Автореферат разослан « » .... 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Панченко Елена Юрьевна

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы.

Важным и, по сути, единственным инструментом получения точных решений уравнений теоретической и математической физики является симметрийный подход, то есть подход, основанный на исследовании симметрии уравнений. К сожалению, на настоящий момент известно лишь ограниченное количество точно решаемых моделей, хотя существует ряд проблем, решение которых вне этих моделей невозможно. Например, применение теории возмущений предполагает наличие нулевого приближения соответствующей возмущенной задачи, которое должно быть точным. Точные решения также важны в квантовой электродинамике: построение так называемой картины Фарри предполагает наличие точных решений уравнений Клейна-Гордона и Дирака во внешнем поле. Наконец, практически любая задача расчета квантовых эффектов в сильных внешних полях является непертурбативной и требует наличия общего решения, записанного в аналитическом виде.

Потребность в построении новых точно решаемых физических моделей приводит к необходимости обобщения старых и разработки новых методов симметрийного анализа. Глобально, возникли две общие проблемы, актуальные и по сей день: задача построения физических теорий с симметриями и задача построения точных решений заданного дифференциального уравнения. Следующая по актуальности проблема связывает воедино две предыдущие: как применять симметрии к построению точных решений? Понятно, что получить универсальный ответ на этот вопрос невозможно без конкретизации типа уравнения, которое требуется решить. В настоящем исследовании мы главным образом рассматриваем уравнения Шредингера и Паули, представляющие интерес в нерелятивистской квантовой механике, а также уравнение Клейна-Гордона, которое является их простейшим релятивистским обобщением.

Отметим, что уравнение Шредингера естественным образом привлекает к себе внимание с точки зрения симметрийного подхода. Помимо использования симметрий для построения точных решений этого уравнения, среди которых наиболее известными примерами являются гармонический осциллятор[1] и атом водорода[2], симметрии также являются полезным инструментом и в различных приближенных методах. Кроме того, наличие у уравнения Шредингера симметрии довольно элегантно объясняет такие его особенности, как вырождение состояний и существование правил отбора.

Одним из наиболее популярных методов построения точных решений уравнений математической физики является *метод разделения переменных*, применение которого требует наличия дифференциальных операторов симметрии второго порядка. По видимому, симметрия стационарного уравнения Шредингера с точки зрения возможности разделения переменных к настоящему моменту исследована исчерпывающим образом. В частности, классификация скалярных потенциалов, допускающих разделение переменных в данном уравнении, была получена Я. А. Смородинским и И. И. Туговым[3]. Несколько поз-

[1]Jauch J. M. On the problem of degeneracy in quantum mechanics / J. M. Jauch, E. L. Hill // Physical Review. — 1940. — Vol. 57, no. 7. — P. 641.

[2]Bargmann V. Theory of the hydrogen atom / V. Bargmann // Zeitschrift für Physik. — 1936. — Vol. 99. – P. 578–582.

[3]Smorodinskii Ya. A. On complete sets of observables / Ya. A. Smorodinskii, I. I. Tugov // Soviet Physics

же была получена классификация полных коммутативных наборов операторов симметрии стационарного уравнения Шредингера, на основе которой были перечислены все классы электромагнитных полей, допускающих полное разделение переменных[4]. Отметим, что по сравнению со стационарным уравнением Шредингера исследование алгебр симметрии стационарного уравнения Паули представляет собой несколько более сложную задачу. Несмотря на то, что в рамках данной проблемы уже получен ряд важных результатов, исследования в этом направлении не прекращаются до сих пор[5].

Одним из первых систематических исследований симметрийных свойств нестационарного уравнения Шредингера является, по-видимому, работа У. Нидерера[6], в которой впервые была найдена максимальная кинематическая группа инвариантности соответствующего свободного уравнения. Далее последовали работы этого же автора и других исследователей, посвященные нахождению максимальных кинематических групп инвариантности данного уравнения с различными скалярными потенциалами[7].

Дальнейшие исследования симметрии нестационарного уравнения Шредингера инициировались проблемой построения его новых точных решений. Классификация электромагнитных потенциалов, допускающих разделение переменных в рассматриваемом уравнении, была начата В. Н. Шаповаловым и Н. Б. Сухомлиным[8], и продолжена Р. Ждановым и А. Жалием[9].

В начале 90-х годов XX века А. В. Шаповаловым и И. В. Широковым был предложен *метод некоммутативного интегрирования* линейных дифференциальных уравнений. Являясь нетривиальным обобщением метода некоммутативного интегрирования конечномерных гамильтоновых систем, указанный метод продемонстрировал весьма широкие возможности применения к проблеме точного интегрирования уравнений квантовой механики. В отличие от метода разделения переменных, данный метод максимально эффективно использует операторы симметрии первого порядка и позволяет строить более удобные базисы решений уравнения Шредингера. Как следствие, возможность применения метода некоммутативного интегрирования требует знания *максимальной* алгебры операторов симметрии первого порядка и ее алгебраической структуры. Таким образом, актуальной становится задача классификации потенциалов, в которых уравнение Шредингера допускает алгебры симметрии первого порядка.

Многое из сказанного относится также и к релятивистским уравнениям квантовой ме-

JETP. — 1966. — Vol. 23, no. 3. — P. 434–437.

[4]Шаповалов В. Н. Разделение переменных в стационарном уравнении Шредингера / В. Н. Шаповалов, В. Г. Багров, А. Г. Мешков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 1972. — №. 8. — С. 45–50.

[5]Nikitin A. Symmetries of the Schrödinger-Pauli equations for charged particles and quasirelativistic Schrödinger equations / A. Nikitin // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2022. — Vol. 55, no. 11. — P. 115202.

[6]Niederer U. The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation / U. Niederer // Helvetica Physica Acta. — 1972. — Vol. 45, no. 5. — P. 802–810.

[7]Boyer C. P. The maximal kinematical invariance group for an arbitrary potential / C. P. Boyer // Helvetica Physica Acta. — 1974. — Vol. 47. — P. 450–605.

[8]Шаповалов В. Н. Разделение переменных в нестационарном уравнении Шредингера / В. Н. Шаповалов, Н. Б. Сухомлин // Известия высших учебных заведений. Физика. — 1974. — № 12. — С. 100–105.

[9]Zhdanov R. On separable Schrödinger equations / R. Zhdanov, A. Zhalij // Journal of Mathematical Physics. — 1999. — Vol. 40. — P. 6319–6338.

ханики — уравнениям Клейна–Гордона и Дирака. Практически все известные до 1981 года точные решения этих уравнений для частицы во внешнем электромагнитном поле, полученные в рамках парадигмы разделения переменных, можно найти в книге В. Г. Багрова с соавторами[10]. В свою очередь, метод некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений также позволил расширить классы внешних полей, допускающих точные решения уравнений Клейна-Гордона. Однако в случае плоского пространства классы внешних полей, приводящие к разделению переменных и допускающие решение методом некоммутативного интегрирования, фактически совпадают. В искривленном же пространстве-времени, наоборот, могут существовать ситуации, когда скалярное волновое уравнение, не допускающее разделения переменных, разрешимо некоммутативными методами[11].

Задача нахождения аналитических решений уравнения Клейна-Гордона в искривленном пространстве-времени представляет интерес в квантовой теории поля и космологии. С точки зрения физических приложений наиболее популярными пространствами являются пространства де Ситтера dS и анти де Ситтера AdS. Известные факты: в четыремерном случае пространство dS довольно точно моделирует ранние стадии расширения нашей Вселенной, а пространство AdS играет ключевую роль в AdS/CFT соответствии, связывающем теории квантовой гравитации с конформными теориями поля. Кроме того, высокая степень симметрии этих пространств положительно влияет на возможность точного интегрирования уравнения Клейна-Гордона на их фоне. Отметим, что точные решения свободных волновых уравнений на пространствах dS и AdS давно были построены[12], но, к сожалению, систематического исследования симметрии и возможности их точного интегрирования во внешних электромагнитных полях до сих пор проведено не было. С другой стороны, такая классификация необходима, в первую очередь, для расчета всевозможных квантовых эффектов.

При использовании квазиклассических методов или интерпретации интегралов движения могут представлять определенную ценность еще и точные решения классических уравнений движения. Именно поэтому задача построения таких решений не теряет актуальности до сих пор. Более того, можно проследить явные аналогии между классическими и квантовыми системами, что значительно облегчает анализ последних. Ярким примером здесь выступает уравнение Вонга, являющееся классическим пределом уравнения Дирака для частицы с изоспином, движущейся во внешнем калибровочном поле. В контексте возможности точного интегрирования эти уравнения изучены довольно поверхностно; как следствие, в настоящее время известно очень мало примеров их точных решений.

Целью данной работы является развитие методов построения и изучения алгебр операторов симметрии основных уравнений (Шредингера, Паули и Клейна-Гордона) нерелятивистской и релятивистской квантовой механики, а также разработка и применение

[10] Точные решения релятивистских волновых уравнений / В. Г. Багров [и др.]. — Новосибирск : Наука, 1982.

[11] Квадратичные алгебры и некоммутативное интегрирование уравнения Клейна–Гордона в римановых пространствах нештеккелева типа / О. Л. Вараксин [и др.] // Известия вузов. Физика. — 1995. — Т. 38, № 5. — С. 83–87.

[12] Birrell N. Quantum fields in curved space / N. Birrell, P. Davies. — Cambridge : Cambridge University Press, 1984.

методов точного интегрирования этих уравнений.

Основные решаемые при этом **задачи** формулируются следующим образом.

1) На основе классификации связных подгрупп группы движений трехмерного евклидова пространства получить классификацию постоянных электромагнитных полей, в которых стационарные уравнения Шредингера и Паули допускают алгебры симметрии первого порядка.

2) Используя классификацию трех- и четырехмерных связных подгрупп группы $E(3)$, получить классификацию постоянных электромагнитных полей, в которых нестационарное уравнение Шредингера допускает алгебры симметрии первого порядка.

3) Основываясь на полученной классификации алгебр симметрии стационарных уравнений Шредингера и Паули, выделить интегрируемые случаи и построить соответствующие точные решения методом некоммутативного интегрирования.

4) Опираясь на классификацию неэквивалентных подгрупп группы $SO(1,3)$, получить классификацию электромагнитных полей на пространстве де Ситтера dS_3, в которых уравнение Клейна-Гордона допускает алгебры симметрии первого порядка; на основе полученной классификации выделить интегрируемые случаи и построить соответствующие точные решения методом некоммутативного интегрирования.

5) На базе классификации неэквивалентных подгрупп группы $SO(2,2)$ получить классификацию электромагнитных полей на пространстве анти де Ситтера AdS_3, в которых уравнение Клейна-Гордона допускает алгебры симметрии первого порядка

6) Исследовать динамику классической нерелятивистской заряженной частицы, движущейся в суперпозиции бессилового и постоянного магнитных полей.

7) Применяя классификацию связных подгрупп группы $E(3)$, получить классификацию калибровочно неэквивалентных полей Янга-Миллса, в которых уравнения Вонга допускают линейный по импульсным и изоспиновым координатам интеграл движения.

Научная новизна. В диссертационной работе впервые решен ряд важных научных задач и получен ряд новых результатов.

1) Впервые построены аналитические решения стационарных уравнений Шредингера и Паули в суперпозиции бессилового и постоянного электромагнитных полей.

2) Впервые получена классификация алгебр симметрии нестационарного уравнения Шредингера в электромагнитных полях, инвариантных относительно трех- и четырехмерных $E(3)$-подгрупп.

3) Предложен новый алгебраический метод построения специальных «выпрямляющих» локальных координат на пространствах де Ситтера dS_3 и анти де Ситтера AdS_3, в которых базисные векторные поля соответствующих подалгебр имеют наиболее простой вид.

4) Впервые получены классификации электромагнитных полей на пространствах де Ситтера dS_3 и анти де Ситтера AdS_3, в которых соответствующее уравнение Клейна-Гордона допускает алгебры симметрии первого порядка.

5) На фоне метрики dS_3 впервые построены аналитические решения уравнения Клейна-Гордона для найденных электромагнитных полей.

6) Впервые произведена симплектическая редукция уравнений Ньютона-Лоренца для частицы, движущейся в суперпозиции бессилового и постоянного магнитных полей, а также получена классификация типов особых точек редуцированной гамильтоновой системы;

качественно исследованы исходные траектории задачи.

7) Получена классификация полей Янга-Миллса на трехмерном евклидовом пространстве, в которых уравнения Вонга допускают линейный интеграл движения.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес с точки зрения дальнейшего прогресса в квантовой теории поля, а также систематизации точных решений уравнений математической физики. Развитые подходы могут применяться при исследовании различных квантовых эффектов там, где не применимы пертурбативные методы. Полученные в настоящем исследовании классификации внешних полей полезны при поиске математических моделей, в рамках которых соответствующие уравнения допускают аналитические решения. Кроме того, разработанный метод построения «выпрямляющих» локальных координат на пространствах де Ситтера и анти де Ситтера не только сам по себе имеет методологическую ценность, но и может быть обобщен на широкий класс псевдоримановых пространств. Подобные координаты значительно облегчат построение внешних полей, допускающих предписанные симметрии. Все результаты настоящей работы демонстрируют возможность использования единого теоретико-группового подхода к исследованию квантовых и классических уравнений движения. Часть результатов диссертации также может быть использована в учебном процессе, например, при обучении студентов современным методам математической физики.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач применялись стандартные методы математической физики, включающие методы дифференциальной геометрии, теорию дифференциальных уравнений, теорию групп и алгебр Ли, специальные функции и т. д.

В настоящем диссертационном исследовании при анализе возможности построения точных решений квантовых уравнений (Шредингера, Паули и Клейна-Гордона) использовался метод некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Этот метод был разработан в работах А. В. Шаповалова и И. В. Широкова[13] и хорошо зарекомендовал себя при изучении различных уравнений математической физики[14]. Основные преимущества метода некоммутативного интегрирования: он более эффективно использует алгебры симметрии уравнения, поскольку оперирует некоммутативными наборами операторов симметрии, а также позволяет строить более простые базисы решений. В свою очередь, при исследовании классических уравнений движения (Ньютона-Лоренца) использовался модифицированный метод симплектической редукции Марсдена-Вейнстейна[15]. Заметим, что симметрии как классических, так и квантовых уравнений движения в данной работе интерпретировались так же и с точки зрения теории когомологий групп и алгебр Ли. Кроме того, построение локальных координат для уравнения Клейна-Гордона на пространствах де Ситтера dS_3 и анти де Ситтера AdS_3

[13] Шаповалов А. В. Некоммутативное интегрирование линейных дифференциальных уравнений / А. В. Шаповалов, И. В. Широков // Теоретическая и математическая физика. — 1995. — Т. 104, №. 2. — С. 195–213.

[14] Магазев А. А. Алгебра операторов симметрии и интегрирование уравнения Клейна-Гордона во внешнем электромагнитном поле / А. А. Магазев // Известия вузов. Физика. — 2014. — Т. 57, № 6. — С. 93–101.

[15] Marsden J. Reduction of symplectic manifolds with symmetry / J. Marsden, A. Weinstein // Reports on Mathematical Physics. — 1974. — Vol. 5, no. 1. — P. 121–130.

осуществлялось с помощью оригинального метода, предложенного нами в главе 3.

Основные положения, выносимые на защиту:

1) Разработан метод классификации электромагнитных полей, для которых стационарные уравнения Шредингера и Паули допускают алгебры операторов симметрии первого порядка. Частично метод применим к аналогичной задаче в случае нестационарного уравнения Шредингера.

2) Методом некоммутативного интегрирования построены новые точные решения стационарных уравнений Шредингера и Паули в электромагнитных полях, инвариантных относительно связных подгрупп группы движений евклидового пространства. Впервые исследована проблема интегрируемости этих уравнений в суперпозиции бессилового и постоянного магнитных полей.

3) Разработан новый алгебраический метод построения криволинейных координат, адаптированных к структуре орбит связных подгрупп группы изометрий псевдориманова многообразия. Построены новые точные решения уравнений Клейна-Гордона в электромагнитных полях, инвариантных относительно подгрупп групп изометрии пространств де Ситтера и анти де Ситтера.

4) Разработан метод исследования особых интегральных траекторий уравнений Ньютона- Лоренца, основанный на каноническом преобразовании к координатам Дарбу на орбитах коприсоединенного представления группы инвариантности электромагнитного поля.

5) Разработан метод классификации полей Янга-Миллса, допускающих интегралы движения уравнений Вонга, линейные по импульсным и изоспиновым координатам. Получены необходимые и достаточные условия существования чисто изоспиновых интегралов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием строго математического аппарата. Все представленные в диссертационной работе результаты снабжены строгими математическими формулировками и доказательствами. Достоверность результатов подтверждается рядом нетривиальных примеров, а также сравнением с частными результатами других авторов. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на: IX Международная молодежная научно-практическая конференция с элементами научной школы «Прикладная математика и фундаментальная информатика», Омск, ОмГТУ, 23–30 апреля 2019 г.; XIII Международная IEEE научно-техническая конференция «Динамика систем, механизмов и машин», Омск, ОмГТУ, 5-7 ноября 2019 г.; X Международная молодежная научно-практическая конференция с элементами научной школы «Прикладная математика и фундаментальная информатика», Омск, ОмГТУ, 23–30 апреля 2020 г.; XIV Международная IEEE научно-техническая конференция «Динамика систем, механизмов и машин», Омск, ОмГТУ, 10-12 ноября 2020 г.; Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии 2021, Казань, КФУ, 22-28 августа 2021 г.; а также на семинарах Омского государственного университета им. Ф. М. Достоевского и Омского государственного технического университета.

Исследования по теме диссертационной работы проводились при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № 19-32-90200.

Личный вклад. Все приведенные в диссертационной работе результаты являются оригинальными и получены лично автором. При выполнении всех работ автор принимал активное участие на этапе постановки задач.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 научных работ [1–13], в том числе 7 статей в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (из них 4 статьи в зарубежных научных журналах, входящих в Web of Science и/или Scopus, 2 статьи в российском научном журнале, переводная версия которого входит в Web of Science), 2 статьи в научных журналах, 4 публикаци в сборниках материалов международных научных конференций.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются основные цели и задачи работы, излагается научная новизна полученных результатов и их теоретическая значимость, выделяются основные положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** рассматривается задача классификации алгебр симметрии первого порядка стационарных и нестационарных уравнений нерелятивистской квантовой механики (Шредингера и Паули) во внешних электромагнитных полях. Данная задача решалась в статьях [1, 2, 8], отдельные частные случаи опубликованы в [5, 12]. В **первом параграфе** исследуется симметрия *стационарного уравнения Шредингера*:

$$\hat{H}\psi = \left(\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}\hat{p}_i^2 + e\varphi\right)\psi = E\psi, \tag{1}$$

где ψ — волновая функция бесспиновой частицы с массой m и электрическим зарядом e, находящейся в постоянном электромагнитном поле со скалярным потенциалом $\varphi(x)$ и векторным потенциалом $\mathbf{A}(x) = (A_1(x), A_2(x), A_3(x))$; E — собственные значения гамильтониана $\hat{H}$. Здесь $\hat{p}_k = -i\partial_k - eA_k$, $k = 1,2,3$ — операторы кинематического импульса частицы. Для уравнения (1) описывается структура алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ его операторов симметрии первого порядка и фактически дается рецепт построения этой алгебры в случае, если внешнее электромагнитное поле является заданным. Соответствующий алгоритм включает в себя два этапа: вычисление так называемой *допустимой подалгебры* $\mathfrak{g} = \{\xi_a\} \subset \mathfrak{e}(3)$ и нахождение для каждого генератора ξ_a из этой подалгебры скалярной функции χ_a, являющейся решением системы уравнений

$$\frac{\partial\chi_a}{\partial x^i} = F_{ij}\xi_a^j.$$

Здесь $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ — тензор магнитного поля. Основной результат параграфа сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{e}(3)$ — допустимая подалгебра, в которой зафиксирован некоторый базис $\xi_a = \xi_a^i(x)\partial_i$, $a = 1,\ldots,\dim\mathfrak{g}$. Алгебра симметрии $\hat{\mathfrak{g}}$ уравнения Шре-*

дингера (1) *образована операторами*

$$\hat{X}_0 = e, \quad \hat{X}_a = \xi_a^i(x)\hat{p}_i + e\int F_{ij}(x)\xi^j(x)dx^i, \quad a = 1,\ldots,\dim\mathfrak{g},$$

и изоморфна одномерному центральному расширению алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Во **второт параграфе** рассматривается задача классификации стационарных уравнений Шредингера вида (1), допускающих нетривиальные алгебры симметрии $\hat{\mathfrak{g}}$. Этапы этой классификации состоят из перечисления всех собственных подалгебр алгебры $\mathfrak{e}(3)$ и вычисления для каждой найденной подалгебры $\mathfrak{g} = \{\xi_a\}$ электромагнитного поля наиболее общего вида, для которого данная подалгебра является допустимой. Основываясь на известной классификации неэквивалентных подалгебр алгебры $\mathfrak{e}(3)$ (см. диаграмму Хассе на рисунке 1), можно найти замкнутую 2-форму F магнитного поля, такую, что

$$\mathcal{L}_{\xi_a}F = 0, \quad a = 1,\ldots,\dim\mathfrak{g},$$

где $\mathcal{L}_\xi$ — производная Ли в направлении векторного поля ξ. Результаты соответствующих вычислений представлены в таблице 1, в которой для каждой неэквивалентной подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{e}(3)$ указывается явный вид её базисных векторных полей ξ_a и наиболее общий вид замкнутой 2-формы F и скалярного потенциала φ, инвариантных относительно соответствующей связной подгруппы. В таблице символами f, f_1, f_2, f_3 обозначены произвольные гладкие функции своих аргументов, а символами μ, μ_1, μ_2, μ_3 — произвольные постоянные.

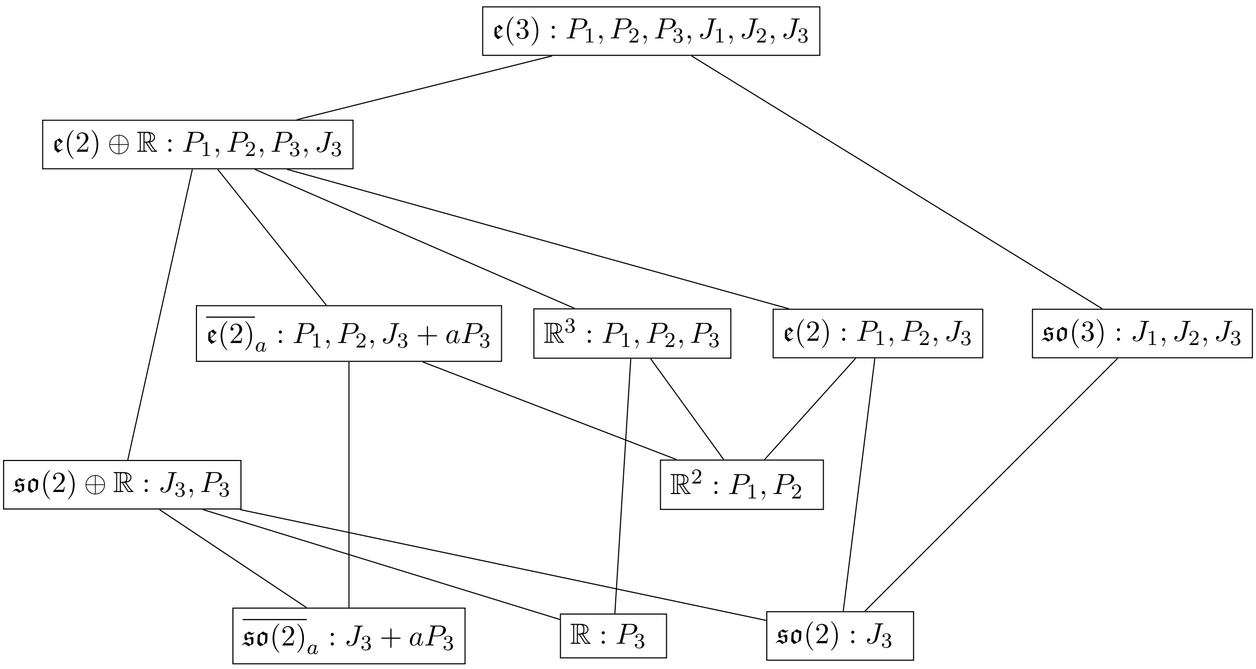

Рисунок 1 — Диаграмма Хассе неэквивалентных подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{e}(3)$

В заключение этого параграфа в явной калибровочно-инвариантной форме выписываются операторы симметрии $\hat{X}_a$ стационарного уравнения Шредингера, отвечающие каждой неэквивалентной подалгебре $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{e}(3)$.

Третий параграф посвящен обобщению полученных результатов на случай спиновой частицы во внешнем электромагнитном поле. Аналогичные первому параграфу вычисле-

Таблица 1 — Подалгебры алгебры $\mathfrak{e}(3)$ и соответствующие им замкнутые инвариантные 2-формы F

Подалг.	Инфинитезимальные генераторы ξ_a	Замкнутая инвариантная 2-форма F	Скаляр. пот. φ
$\mathbb{R}$	$\xi_1=\frac{\partial}{\partial x_3}$	$f_1(x_1,x_2)dx_1\wedge dx_2+df_2(x_1,x_2)\wedge dx_3$	$f_3(x_1,x_2)$
$\mathfrak{so}(2)$	$\xi_1=-\frac{\partial}{\partial\phi}$	$f_1(\rho,z)d\rho\wedge dz+df_2(\rho,z)\wedge d\phi$	$f_3(\rho,z)$
$\overline{\mathfrak{so}(2)}_a$	$\xi_1=-\frac{\partial}{\partial\phi}$	$f_1(\rho,\zeta)d\rho\wedge d\zeta+df_2(\rho,\zeta)\wedge d\phi$	$f_3(\rho,\zeta)$
$\mathbb{R}^2$	$\xi_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\ \xi_2=\frac{\partial}{\partial x_2}$	$f_1(x_3)dx_1\wedge dx_3+f_2(x_3)dx_2\wedge dx_3+$ $+\mu\, dx_1\wedge dx_2$	$f_3(x_3)$
$\mathfrak{so}(2)\oplus\mathbb{R}$	$\xi_1=-\frac{\partial}{\partial\phi},\ \xi_2=\frac{\partial}{\partial z}$	$f_1(\rho)d\rho\wedge d\phi+f_2(\rho)d\rho\wedge dz+$ $+\mu\, d\phi\wedge dz$	$f_3(\rho)$
$\mathbb{R}^3$	$\xi_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\ \xi_2=\frac{\partial}{\partial x_2},\ \xi_3=\frac{\partial}{\partial x_3}$	$\mu_1\, dx_1\wedge dx_2+\mu_2\, dx_1\wedge dx_3+$ $+\mu_3\, dx_2\wedge dx_3$	0
$\mathfrak{e}(2)$	$\xi_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\ \xi_2=\frac{\partial}{\partial x_2},$ $\xi_3=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$	$\mu\, dx_1\wedge dx_2$	$f(x_3)$
$\overline{\mathfrak{e}(2)}_a$	$\xi_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\ \xi_2=\frac{\partial}{\partial x_2},$ $\xi_3=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+a\frac{\partial}{\partial x_3}$	$\left[\mu_2\cos\left(\frac{x_3}{a}\right)+\mu_3\sin\left(\frac{x_3}{a}\right)\right]dx_1\wedge dx_3-$ $-\left[\mu_2\sin\left(\frac{x_3}{a}\right)-\mu_3\cos\left(\frac{x_3}{a}\right)\right]dx_2\wedge dx_3+$ $+\mu_1\, dx_1\wedge dx_2$	0
$\mathfrak{so}(3)$	$\xi_1=\cos(\phi)\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi}+\sin(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta},$ $\xi_2=\sin(\phi)\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi}-\cos(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta},$ $\xi_3=-\frac{\partial}{\partial\phi}$	$\mu\sin(\theta)d\phi\wedge d\theta$	$f(r)$
$\mathfrak{e}(2)\oplus\mathbb{R}$	$\xi_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\ \xi_2=\frac{\partial}{\partial x_2},\ \xi_3=\frac{\partial}{\partial x_3},$ $\xi_4=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$	$\mu\, dx_1\wedge dx_2$	0

ния производятся для *стационарного уравнения Паули*:

$$\hat{H}\psi=\frac{1}{2m}\left[\left(\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\hat{p}_i\right)^2+e\varphi\right]\psi=E\psi, \tag{2}$$

где $\psi=(\psi_1,\psi_2)^T$ — двухкомпонентный спинор, компоненты которого отвечают волновым функциям частиц с противоположными значениями спина, σ_i — матрицы Паули. Для рассматриваемого уравнения доказывается

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{g}=\langle\xi_a\rangle\subset\mathfrak{e}(3)$ — допустимая подалгебра, $\hat{\mathfrak{g}}=\langle\hat{X}_0,\hat{X}_1,\cdots\hat{X}_{\dim\mathfrak{g}}\rangle$ — алгебра операторов симметрии стационарного уравнения Шредингера, определяемая теоремой 1. Тогда операторы*

$$\hat{Y}_a=\hat{X}_a-\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\sigma_i\frac{\partial\xi_a^j}{\partial x^k},\quad a=1,\ldots,\dim\hat{\mathfrak{g}},$$

вместе с тривиальным оператором симметрии $\hat{Y}_0=e$ образуют алгебру Ли симметрии соответствующего стационарного уравнения Паули, изоморфную алгебре $\hat{\mathfrak{g}}$. Кроме того, если напряжённость магнитного поля имеет вид $B_i(x)=b(x)\lambda_i$, существует также ещё один матричный оператор симметрии $\hat{Z}=\sigma_i\lambda_i$, тривиально расширяющий алгебру $\hat{\mathfrak{g}}$.

В **четвертом параграфе** исследуются симметрийные свойства *нестационарного уравнения Шредингера*:

$$\hat{L}\Psi \equiv \left(\hat{p}_0 - \frac{\hat{p}^2}{2m}\right)\Psi = 0, \tag{3}$$

где $\hat{p}_0 = i\partial_t - e\varphi$ — оператор энергии, $\hat{p} = -i\nabla - e\mathbf{A}$ — оператор импульса, Ψ — волновая функция частицы. В частности, нами выводятся определяющие уравнения для оператора симметрии первого порядка данного уравнения

$$\hat{X} = \eta(x)\hat{p}_0 + \xi^i(x)\hat{p}_i + \chi(x), \quad [\hat{L}, \hat{X}] = \alpha\hat{L},$$

а также рассматриваются некоторые примеры вычисления алгебр этих операторов.

Поскольку физически наиболее значимые классификационные результаты получаются для нестационарных электромагнитных полей, инвариантных относительно трех- и четырехмерных $\mathfrak{e}(3)$-подалгебр (см. рисунок 1), в **пятом параграфе** исследуются классы именно таких полей. Их список приведен в таблице 2, где для каждой из трех- и четырехмерных подалгебр указан явный вид инвариантного нестационарного электромагнитного поля. В таблице символами B_1, B_2, B_3 и μ обозначены произвольные постоянные, а символами E_1, E_2, E_3, b_1, b_2 и f – произвольные функции своих аргументов, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. В заключение параграфа для найденных классов полей построены в явном виде алгебры симметрии первого порядка уравнения (3) и приведены коммутационные соотношения между генераторами этих алгебр.

Таблица 2 — Классы нестационарных электромагнитных полей, инвариантные относительно трех- и четырехмерных $\mathfrak{e}(3)$-подалгебр

Подалг.	Магнитное поле $\mathbf{B}$	Электрическое поле $\mathbf{E}$	Комментарий
$\mathbb{R}^3$	(B_1, B_2, B_3)	$(E_1(t), E_2(t), E_3(t))$	$\mathbf{B}\times\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{E} \neq 0$
$\mathfrak{e}(2)$	$(0, 0, B_3)$	$(0, 0, E_3(x_3, t))$	$\frac{\partial E_3(x_3,t)}{\partial x_3} \neq 0$
$\overline{\mathfrak{e}(2)}_a$	$(b_1(t)\cos(ax_3) - b_2(t)\sin(ax_3)$, $b_1(t)\sin(ax_3) + b_2(t)\cos(ax_3)$, $B_3)$	$\left(\frac{\partial b_1(t)}{\partial t}\cos(ax_3) - \frac{\partial b_2(t)}{\partial t}\sin(ax_3),\right.$ $\frac{\partial b_1(t)}{\partial t}\sin(ax_3) + \frac{\partial b_2(t)}{\partial t}\cos(ax_3)$, $aE_3(t))\, a^{-1}$	$b_1^2(t) + b_2^2(t) \neq 0$
$\mathfrak{so}(3)$	$\frac{\mu x}{r^3}$	$\frac{f(t,r)x}{r}$	$\mu \cdot f(t,r) \neq 0$
$\mathfrak{e}(2) \oplus \mathbb{R}$	$(0, 0, B_3)$	$(0, 0, E_3(t))$	$B_3^2 + E_3^2(t) \neq 0$

Вторая глава посвящена изучению проблемы интегрируемости стационарных уравнений Шредингера и Паули, рассматриваемых в первой главе, а также построению их точных решений. Данная глава основывается на работе [7]. В **первом параграфе** подробно описывается общий алгоритм метода некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений, разработанного А. В. Шаповаловым и И. В. Широковым, и приводится алгебраическое условие такой интегрируемости. Ключевую роль в этом методе играет специальное операторно неприводимое представление алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ — λ-*представление*, параметризованное набором вещественных параметров $J = (J_1, \ldots, J_s)$ и реализованное дифференциальными операторами первого порядка $\hat{\ell}_a(q, \partial_q; J)$, действующими в некотором пространстве функций от, вообще говоря, комплексных переменных $q = (q^1, \ldots, q^m)$:

$$\hat{\ell}_0 = -e, \quad \hat{\ell}_a(q, \partial_q; J) = \zeta_a^\gamma(q) \frac{\partial}{\partial q^\gamma} + \vartheta_a(q; J), \quad a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g},$$

$$[\hat{\ell}_a, \hat{\ell}_b] = -i \left(C_{ab}^c \hat{\ell}_c - e \mathbb{F}_{ab} \right).$$

Здесь C_{ab}^c — структурные постоянные допустимой подалгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\mathbb{F}_{ab}$ — компоненты 2-коцикла, ассоциированного с магнитным полем.

Дальнейший этап метода некоммутативного интегрирования — решение системы уравнений первого порядка в частных производных:

$$\hat{X}_a(x, \partial_x) \psi_J(x, q) = -\hat{\ell}_a(q, \partial_q; J) \psi_J(x, q), \quad a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}. \tag{4}$$

Как правило, эта система легко решается и ее решение $\psi_J(x, q)$, зависящее от величин q и J как от параметров, имеет вид

$$\psi_J(x, q) = \Phi_J(u(x, q))\, e^{iR_J(x,q)}. \tag{5}$$

Здесь $R_J(x, q)$ – некоторая функция, определяемая системой уравнений (4), $\Phi_J(u)$ — произвольная функция, $u(x, q) = (u^1(x, q), \ldots, u^k(x, q))$ – характеристики соответствующей системы однородных уравнений. Последний шаг метода сводится к подстановке (5) в исходное уравнение (1) и получению *приведенного уравнения* на неизвестную функцию $\Phi_J(u)$.

Результаты проверки условия интегрируемости:

$$\dim \mathfrak{g} + \mathrm{ind}_{\mathbb{F}}\, \mathfrak{g} \geq 4, \tag{6}$$

приведены во **втором параграфе** в таблице 3, где указаны размерность соответствующей допустимой подалгебры $\dim \mathfrak{g}$, когомологический индекс $\mathrm{ind}_{\mathbb{F}}\, \mathfrak{g}$, число независимых переменных u в приведённом уравнении, равное $k = 3 - (\dim \mathfrak{g} + \mathrm{ind}_{\mathbb{F}}\, \mathfrak{g})/2$ и явно указано интегрируемо или нет уравнение Шредингера с соответствующей алгеброй симметрии $\hat{\mathfrak{g}}$.

Там же для соответствующих интегрируемых случаев осуществлена процедура некоммутативной редукции и явно построены точные решения стационарного уравнения Шредингера, а в **третьем параграфе** — стационарного уравнения Паули для этих же алгебр симметрии. Специально отметим электромагнитное поле, для которого допустимыми являются подалгебры из непрерывного семейства $\overline{\mathfrak{e}(2)}_a$, $a > 0$. Это поле представляет собой суперпозицию бессилового магнитного поля, перпендикулярного оси Oz, и постоянного однородного магнитного поля, параллельного этой оси. В спиральных координатах ($x_1 = \rho \cos \phi$, $x_2 = \rho \sin \phi$, $x_3 = \zeta - a\phi$) это поле имеет вид:

$$F = \mu \rho d\rho \wedge d\phi + B_0 \left[\cos\left(\frac{\zeta}{a}\right) d\rho \wedge (d\zeta - a d\phi) - \rho \sin\left(\frac{\zeta}{a}\right) d\phi \wedge d\zeta \right], \tag{7}$$

где $B_0 > 0$, μ — постоянные. Согласно нашим результатам, уравнения Шредингера и Паули интегрируемы в этом поле; нами осуществлена редукция этих уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка. Интегрируемость уравнений Шредингера и Паули в поле (7), по видимому, исследуется впервые.

Таблица 3 — Интегрируемые случаи уравнения Шредингера

<table>
<tr><th>Подалгебра</th><th>$\dim \mathfrak{g}$</th><th>$\mathrm{ind}_{\mathbb{F}}\, \mathfrak{g}$</th><th>$k$</th><th>Интегрируемость</th></tr>
<tr><td>$\mathbb{R}$</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>Нет</td></tr>
<tr><td>$\mathfrak{so}(2)$</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>Нет</td></tr>
<tr><td>$\overline{\mathfrak{so}(2)}_a$, $a > 0$</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>Нет</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\mathbb{R}^2$</td><td rowspan="2">2</td><td>0, если $\mu \neq 0$</td><td>2</td><td>Нет</td></tr>
<tr><td>2, если $\mu = 0$</td><td>1</td><td>Да</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{R}$</td><td rowspan="2">2</td><td>0, если $\mu \neq 0$</td><td>2</td><td>Нет</td></tr>
<tr><td>2, если $\mu = 0$</td><td>1</td><td>Да</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\mathbb{R}^3$</td><td rowspan="2">3</td><td>1, если $\sum \mu_i^2 \neq 0$</td><td>1</td><td rowspan="2">Да</td></tr>
<tr><td>3, если $\sum \mu_i^2 = 0$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\mathfrak{e}(2)$</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>Да</td></tr>
<tr><td>$\overline{\mathfrak{e}(2)}_a$</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>Да</td></tr>
<tr><td>$\mathfrak{so}(3)$</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>Да</td></tr>
<tr><td>$\mathfrak{e}(2) \oplus \mathbb{R}$</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>Да</td></tr>
</table>

Третья глава посвящена исследованию симметрийных свойств и возможности некоммутативной интегрируемости уравнения Клейна-Гордона во внешних электромагнитных полях на пространствах де Ситтера и анти де Ситтера. Кроме того, там же построены точные решения для случая пространства де Ситтера. Результаты этих исследований опубликованы в [6, 13].

В **первом параграфе** описываются общий алгоритм построения операторов симметрии первого порядка уравнения Клейна-Гордона в электромагнитном поле на произвольном псевдоримановом многообразии с группой движений и структура алгебры симметрии, образованной этими операторам. Пусть (M, g) — гладкое n-мерное псевдориманово многообразие, $(x^1, \ldots, x^m)$ — локальные координаты на M. Ковариантное *уравнение Клейна–Гордона* для заряженного массивного скалярного поля в присутствии электромагнитного поля имеет вид:

$$\hat{H}\varphi \equiv \left(g^{ij} D_i D_j + \zeta R + m^2\right)\varphi = 0, \tag{8}$$

Здесь φ — скалярное поле, g^{ij} — контравариантные компоненты метрики, R — скалярная кривизна, m и e — масса и заряд квантов скалярного поля соответственно. Обобщенные ковариантные производные D_i определяются как $D_i \equiv \nabla_i - ieA_i$, где ∇_i — ковариантная производная, отвечающая базисному векторному полю $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$; A_i — компоненты 1-формы A, задающей потенциал электромагнитного поля. Безразмерный параметр ζ может принимать два значения: $\zeta = 0$ (случай минимальной связи) и $\zeta = (n-1)/(4n)$ (случай конформной связи).

Для уравнения (8) доказывается следующая

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{iso}(M, g)$ — допустимая подалгебра, в которой зафиксирован некоторый базис $X_a = X_a^i(x)\partial_i$, $a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}$. Алгебра симметрии $\hat{\mathfrak{g}}$ уравнения*

Клейна-Гордона (8) *образована операторами*

$$\hat{X}_0 = ie, \quad \hat{X}_a = X_a^i(x)D_i + ie\int F_{ij}(x)X^j(x)dx^i, \quad a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g},$$

и представляет собой одномерное центральное расширение алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

При решении задачи классификации электромагнитных полей, для которых соответствующее уравнение Клейна-Гордона допускает операторы симметрии первого порядка, необходимо выбрать те системы координат, в которых базисные генераторы X_a подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{iso}(M, g)$ будут иметь наиболее простой вид. В качестве таких координат могут быть выбраны локальные координаты, «выпрямляющие» интегральные подмногообразия системы векторных полей X_a. Во **втором параграфе** предлагается оригинальный полностью алгебраический метод построения таких «выпрямляющих» координат и приводится пример их вычисления.

Третий параграф посвящен рассмотрению задачи классификации электромагнитных полей, а также алгебр симметрии уравнения Клейна-Гордона на трёхмерном пространстве де Ситтера dS_3. Базисные генераторы X_a каждой из подалгебр $\mathfrak{g}_{n,k} \subset \mathfrak{so}(1,3)$ переписываются в «выпрямляющих» координатах, а затем ищется замкнутая 2-форма F такая, что $\mathcal{L}_{X_a}F = 0$ для всех $X_a \in \mathfrak{g}_{n,k}$. Результаты вычислений приводятся в таблице 4, в которой через f, f_1, f_2 обозначены произвольные гладкие функции своих аргументов, а через μ, μ_1, μ_2 — произвольные постоянные. В тех случаях, когда координатный индекс принимает только одно значение, он опускается. В заключение параграфа представлена классификация алгебр симметрии уравнения Клейна-Гордона в найденных электромагнитных полях на фоне метрики dS_3.

Аналогичная классификация электромагнитных полей и алгебр симметрии первого порядка производится также в **четвертом параграфе** для трёхмерного пространства анти де Ситтера AdS_3.

Пятый параграф посвящен краткому обзору схемы обобщения метода некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных на случай построения решений релятивистских волновых уравнений.

В **шестом параграфе** выделяются все интегрируемые случаи для уравнения Клейна–Гордона (8) на пространствах де Ситтера dS_3 и анти де Ситтера AdS_3. Соответствующее условие интегрируемости теперь имеет вид:

$$\dim \hat{\mathfrak{g}} + \operatorname{ind} \hat{\mathfrak{g}} \geq 6.$$

В таблице 5 приведены результаты проверки этого условия для всех возможных алгебр симметрии $\hat{\mathfrak{g}}_{n,k}$ уравнения (8). Помимо основных чисел $\dim \hat{\mathfrak{g}}$ и $\operatorname{ind} \hat{\mathfrak{g}}$, которые фактически и определяют интегрируемость, в этой таблице также указываются вспомогательные числа s, l и $\tilde{m}$.

Подобная таблица составляется и для метрики AdS_3. В заключение параграфа для подалгебр $\mathfrak{g}_{3,1}$, $\mathfrak{g}_{3,2}$, $\mathfrak{g}_{3,3}^{\mathrm{a}}$, $\mathfrak{g}_{3,4}$ и $\mathfrak{g}_{3,5}$ соответствующие уравнения Клейна-Гордона во внешнем электромагнитном поле на фоне метрики де Ситтера методом некоммутативной редукции сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям и, где это возможно, точные решения выписываются в терминах известных специальных функций.

Таблица 4 — Инфинитезимальные генераторы $X_a \in \mathfrak{g}_{n,k}$ и соответствующие им замкнутые инвариантные 2-формы F в выпрямляющих локальных координатах (q, u)

Подалг.	r	Инфинитезимальные генераторы X_a	Замкнутая 2-форма F, т. ч. $\mathcal{L}_{X_a} F = 0$
$\mathfrak{g}_{1,1}$	1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial q}$	$dq \wedge df_1(u^1, u^2) + f_2(u^1, u^2) du^1 \wedge du^2$
$\mathfrak{g}_{1,2}$			
$\mathfrak{g}^{\mathrm{a}}_{1,3}$			
$\mathfrak{g}_{1,4}$			
$\mathfrak{g}_{2,1}$	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial q^1},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial q^2}$	$\mu\, dq^1 \wedge dq^2 + f_1(u) dq^1 \wedge du + {}$ $+ f_2(u) dq^2 \wedge du$
$\mathfrak{g}_{2,2}$			
$\mathfrak{g}_{2,3}$		$X_1 = \frac{\partial}{\partial q^1}, \quad X_2 = -q^1 \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2}$	$e^{q^2} dq^1 \wedge \big(f_1(u) dq^2 + df_1(u)\big) + {}$ $+ f_2(u) dq^2 \wedge du$
$\mathfrak{g}_{3,1}$	3	$X_1 = \frac{\partial}{\partial q^1},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial q^2},$ $X_3 = -q^1 \frac{\partial}{\partial q^1} - q^2 \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial q^3}$	$e^{q^3} (\mu_1 dq^1 + \mu_2 dq^2) \wedge dq^3$
$\mathfrak{g}_{3,2}$	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial q^1},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial q^2},\ X_3 = -q^2 \frac{\partial}{\partial q^1} + q^1 \frac{\partial}{\partial q^2}$	$\mu\, dq^1 \wedge dq^2$
$\mathfrak{g}^{\mathrm{a}}_{3,3}$	3	$X_1 = \frac{\partial}{\partial q^1},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial q^2},$ $X_3 = -(\mathrm{a}q^1 + q^2) \frac{\partial}{\partial q^1} + (q^1 - \mathrm{a}q^2) \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial q^3}$	$e^{\mathrm{a}q^3} \left(\mu_1 \cos q^3 + \mu_2 \sin q^3\right) dq^1 \wedge dq^3 + {}$ $+ e^{\mathrm{a}q^3} \left(\mu_1 \sin q^3 - \mu_2 \cos q^3\right) dq^2 \wedge dq^3$
$\mathfrak{g}_{3,4}$	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial q^1},$ $X_2 = \sin q^1 \tan q^2 \frac{\partial}{\partial q^1} + \cos q^1 \frac{\partial}{\partial q^2},$ $X_3 = \cos q^1 \tan q^2 \frac{\partial}{\partial q^1} - \sin q^1 \frac{\partial}{\partial q^2}$	$\mu \cos q^2 dq^1 \wedge dq^2$
$\mathfrak{g}_{3,5}$	2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial q^1},$ $X_2 = \sinh q^1 \tan q^2 \frac{\partial}{\partial q^1} + \cosh q^1 \frac{\partial}{\partial q^2},$ $X_3 = \cosh q^1 \tan q^2 \frac{\partial}{\partial q^1} + \sinh q^1 \frac{\partial}{\partial q^2}$	
$\mathfrak{g}_{4,1}$	3	$X_1 = \frac{\partial}{\partial q^1},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial q^2},\ X_3 = -q^2 \frac{\partial}{\partial q^1} + q^1 \frac{\partial}{\partial q^2},$ $X_4 = -q^1 \frac{\partial}{\partial q^1} - q^2 \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial q^3}$	0

Таблица 5 — Проверка условия интегрируемости для алгебр симметрии на dS_3

Алгебра $\hat{\mathfrak{g}}$	$\dim \hat{\mathfrak{g}}$	$\operatorname{ind} \hat{\mathfrak{g}}$	Интегрируемость
$\hat{\mathfrak{g}}_{1,1}$, $\hat{\mathfrak{g}}_{1,2}$, $\hat{\mathfrak{g}}^{\mathrm{a}}_{1,3}$, $\hat{\mathfrak{g}}_{1,4}$	2	2	Нет
$\hat{\mathfrak{g}}_{2,1}$, $\hat{\mathfrak{g}}_{2,2}$, $\hat{\mathfrak{g}}_{2,3}$	3	1	Нет
$\hat{\mathfrak{g}}_{3,1}$, $\hat{\mathfrak{g}}_{3,2}$, $\hat{\mathfrak{g}}^{\mathrm{a}}_{3,3}$, $\hat{\mathfrak{g}}_{3,4}$, $\hat{\mathfrak{g}}_{3,5}$	4	2	Да
$\hat{\mathfrak{g}}_{4,1}$	5	3	Да

В **четвертой главе** диссертационной работы исследуются две классические системы: классическая нерелятивистская заряженная частица в электромагнитном поле, описываемая уравнением Ньютона-Лоренца, и классическая релятивистская частица с изоспином в калибровочном поле Янга – Миллса, описываемая уравнениями Вонга. Результаты этих исследований представлены в статьях [3, 4, 9–11].

Первый параграф посвящен уравнению Ньютона-Лоренца, которое является классическим аналогом уравнения Шредингера в электромагнитном поле. Рассматривается классическая частица с массой и зарядом $m = e = 1$, движущаяся во внешнем стационарном магнитном поле на $\mathbb{R}^3$. Такое движение описывается уравнением Ньютона-Лоренца:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{9}$$

где $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ — вектор скорости частицы, $\mathbf{B}(x) = (B_1(x), B_2(x), B_3(x))$ — вектор магнитной индукции. Уравнение Ньютона-Лоренца, как известно, может быть переписано в гамильтоновой форме

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \tag{10}$$

где $H = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{3}(P_i - A_i)^2$, P_i — канонические импульсы частицы, A_i — потенциал магнитного поля.

Для уравнения (9) доказывается классический аналог теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{e}(3)$ — допустимая подалгебра, в которой зафиксирован некоторый базис $\xi_a = \xi_a^i(x)\partial_i$, $a = 1, \ldots, \dim\mathfrak{g}$. Алгебра симметрии $\hat{\mathfrak{g}}$ уравнения Ньютона-Лоренца* (9) *образована интегралами движения*

$$X_0 = 1, \quad X_a = \xi_a^i(x)P_i - \int \mathcal{L}_\xi A_i dx^i, \quad a = 1, \ldots, \dim\mathfrak{g},$$

и представляет собой одномерное центральное расширение алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Другими словами, также как и в квантовом случае алгебра симметрии $\hat{\mathfrak{g}}$ уравнения Ньютона-Лоренца изоморфна одномерному центральному расширению подалгебры $\mathfrak{g}$ допустимых векторов Киллинга ξ_a трехмерного евклидова пространства. Эти результаты позволяют применить к гамильтоновой системе Ньютона-Лоренца метод симплектической редукции, также описанный в данном параграфе, и тем самым свести ее к редуцированной гамильтоновой системе с меньшим числом переменных.

Во **втором параграфе**, следуя методу симплектической редукции Марсдена-Вейнстейна, осуществляется редукция соответствующих уравнений Ньютона-Лоренца (9) в магнитном поле вида:

$$\mathbf{B} = (B_0 \cos x_3, B_0 \sin x_3, B_3), \tag{11}$$

где B_0 и B_3 — некоторые постоянные. Это поле является суперпозицией бессилового магнитного поля $\mathbf{B}_\perp = (B_0 \cos x_3, B_0 \sin x_3, 0)$ и постоянного однородного поля $\mathbf{B}_\parallel = (0, 0, B_3)$. Выше мы уже исследовали интегрируемость стационарных уравнений Шредингера и Паули в этом поле. Здесь мы показываем, что после применения соответствующего канонического преобразования, каноническая гамильтонова система (10) редуцируется к двумерной гамильтоновой системе с гамильтонианом

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{8} + \frac{p^2q^2}{4} + \frac{q^4}{8} + \frac{J + B_3}{2}\left(p^2 + q^2\right) + B_0\sqrt{B_3}p + \frac{J^2 + B_0^2}{2}, \tag{12}$$

где

$$q = \frac{P_1}{\sqrt{B_3}} - \frac{\sqrt{B_3}x_2}{2}, \quad p = \frac{P_2}{\sqrt{B_3}} + \frac{\sqrt{B_3}x_1}{2}, \quad J = P_3 - \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right).$$

Здесь p и q — новые фазовые переменные, J — параметр.

В **третьем параграфе** редуцированная гамильтона система с гамильтонианом (12) подвергается анализу; в частности, производится классификация особых точек этой системы при помощи методов линеаризации. Тем самым, на качественном уровне описывается поведение ее фазовых траекторий. Последнее, в свою очередь, может быть использовано для исследования исходных траекторий классической частицы, движущейся в магнитном поле (11), близких к особым, что осуществляется в **четвертом параграфе**. На рисунках 2 и 3 приведены два типа особых траекторий, отвечающих особым точкам редуцированной системы тип «центр» и «седло» (все они имеют вид винтовых линий). Показаны также траектории, получаемые «шевелением» особых точек редуцированной системы.

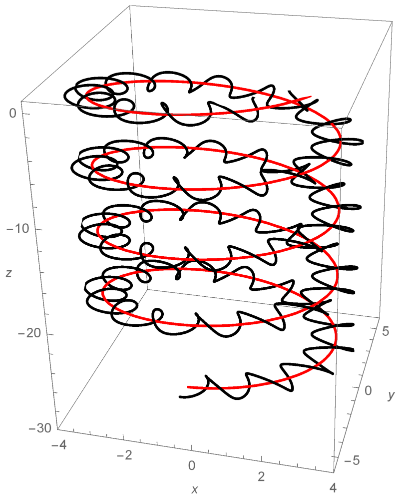

Рисунок 2 — Траектории частицы в магнитном поле с $B_0 = 1.5$ и $B_3 = 0.5$. Красным цветом выделена особая траектория, соответствующая особой точке типа центр, черным цветом — близкая к ней траектория

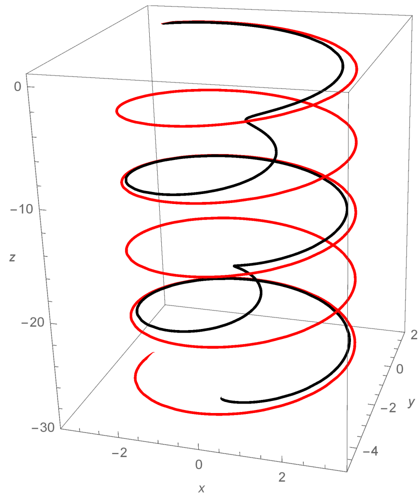

Рисунок 3 — Траектории частицы в магнитном поле с $B_0 = 1.5$ и $B_3 = 0.5$. Красным цветом выделена особая траектория, соответствующая особой точке типа седло, черным цветом — траектория, полученная малым «шевелением» начальных условий

В **пятом параграфе** исследуется классическая динамика изоспиновой частицы, движущейся во внешнем калибровочном поле A_i^α на псевдоримановом многообразии (M, g_{ij}), описываемая *уравнениями Вонга*:

$$\frac{dx^i}{dt} = g^{ij} p_j, \quad \frac{dp_i}{dt} = F_{ij}^\alpha g^{jk} p_k \tau_\alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i} p_j p_k, \quad \frac{d\tau_\alpha}{dt} = -C_{\alpha\beta}^\gamma \tau_\gamma A_i^\beta g^{ij} p_j. \tag{13}$$

Здесь d/dt — производная по собственному времени частицы, g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора, (x^i, p_i) и τ_α — фазовые и изоспиновые координаты частицы соответственно, $C_{\alpha\beta}^\gamma$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{k}$ калибровочной группы K, F_{ij}^α — компоненты тензора напряженности калибровочного поля, Описывается структура алгебры интегралов движения первого порядка уравнений Вонга (13) во внешнем поле на произвольном псевдоримановом многообразии и фактически дается рецепт ее построения.

Можно рассмотреть и обратную задачу. Для фиксированного многообразия и соответствующей ему группы движений можно дать классификацию всех калибровочных полей, для которых уравнения Вонга (13) допускают интегралы движения первого порядка. В **шестом параграфе** производится классификация полей Янга–Миллса в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, допускающих пуассонову алгебру интегралов первого порядка уравнений Вонга, в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Фиксируется подалгебра $\mathfrak{g}_{n,k} \in \mathfrak{e}(3)$ (см. рисунок 1) и для нее находятся все решения системы уравнений:

$$\xi_a \chi_b^\gamma - \xi_b \chi_a^\gamma + C^\gamma_{\alpha\beta} \chi_a^\alpha \chi_b^\beta = c^c_{ab} \chi_c^\gamma, \tag{14}$$

с точностью до калибровочных преобразований $\tilde{\chi} = \mathrm{g}\chi\mathrm{g}^{-1} - (\xi \mathrm{g})\,\mathrm{g}^{-1}$.

2. Для тех решений системы уравнений (14), для которых выполнено условие интегрируемости, находится общее решение уравнения

$$d\chi + [A, \chi] = -\mathcal{L}_\xi A. \tag{15}$$

Здесь $\mathcal{L}_\xi$ — производная Ли в направлении векторного поля ξ, $A = (A_i^\alpha dx^i)\, e_\alpha$, $\chi = \chi^\alpha e_\alpha$, где $\{e_\alpha\}$ — базис в калибровочной алгебре $\mathfrak{k}$, выбранный так, что $[e_\alpha, e_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$.

3. Выписываются полученные потенциалы A_i^α калибровочного поля и соответствующие им интегралы движения уравнений Вонга в соответствии с формулой

$$X(x, P, \tau) = \xi^i(x) P_i + \chi_i^\alpha(x) \tau_\alpha. \tag{16}$$

В заключение главы приводится список найденных с помощью предложенного алгоритма полей Янга-Миллса на пространстве $\mathbb{R}^3$.

В **заключении** приведены основные результаты работы.

1) На основе классификации связных подгрупп группы движений трехмерного евклидова пространства получена классификация постоянных электромагнитных полей, в которых стационарные уравнения Шредингера и Паули допускают алгебры симметрии первого порядка.

2) Используя классификацию трех- и четырехмерных связных подгрупп группы $E(3)$, получена классификация постоянных электромагнитных полей, в которых нестационарное уравнение Шредингера допускает алгебры симметрии первого порядка.

3) Основываясь на полученной классификации алгебр симметрии стационарных уравнений Шредингера и Паули, выделены интегрируемые случаи и построены соответствующие точные решения методом некоммутативного интегрирования.

4) Опираясь на классификацию неэквивалентных подгрупп группы $SO(1,3)$, получена классификация электромагнитных полей на пространстве де Ситтера dS_3, в которых уравнение Клейна-Гордона допускает алгебры симметрии первого порядка; на основе полученной классификации выделены интегрируемые случаи и построены соответствующие точные решения методом некоммутативного интегрирования.

5) На базе классификации неэквивалентных подгрупп группы $SO(2,2)$ получена классификация электромагнитных полей на пространстве анти де Ситтера AdS_3, в которых уравнение Клейна-Гордона допускает алгебры симметрии первого порядка

6) Исследована динамика классической нерелятивистской заряженной частицы, движущейся в суперпозиции бессилового и постоянного магнитных полей.

7) Применяя классификацию связных подгрупп группы $E(3)$, получена классификация полей Янга-Миллса, в которых уравнения Вонга допускают линейный по импульсным и изоспиновым координатам интеграл движения.

Автор выражает огромную благодарность Магазеву Алексею Анатольевичу, профессору, доктору физико-математических наук, за мотивацию, многолетние и частые обсуждения настоящей работы и за научное руководство.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:

[1] **Болдырева М. Н.** Об алгебрах Ли симметрии стационарных уравнений Шредингера и Паули / М. Н. Болдырева, А. А. Магазев // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2016. — Т. 59, №. 10. — С. 132–139. — 0,49/0,24 а.л.
в переводной версии журнала, входящей в Web of Science:
Boldyreva M. N. On the Lie Symmetry Algebras of the Stationary Schrodinger and Pauli Equations / M. N. Boldyreva, A. A. Magazev // Russian Physics Journal. — 2017. — Vol. 59, no. 10. — P. 1671–1680. — DOI: 10.1007/s11182-017-0959-0.

[2] **Болдырева М. Н.** Симметрия нестационарного уравнения Шредингера в электромагнитных полях, инвариантных относительно трехмерных E(3)-подгрупп / А. А. Магазев, М. Н. Болдырева // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2019. — Т. 62, № 2. — С. 39–45. – 0,43/0,22 а.л.
в переводной версии журнала, входящей в Web of Science:
Boldyreva M. N. Symmetry of the time-dependent Schr?dinger equation in electromagnetic fields invariant under three-dimensional E(3) subgroups / M. N. Boldyreva, A. A. Magazev // Russian Physics Journal. — 2019. — Vol. 62, no. 2. — P. 224–231. — DOI: 10.1007/s11182-019-01704-0.

[3] **Болдырева М. Н.** Классификация полей Янга-Миллса, допускающих интегралы движения уравнений Вонга / А. А. Магазев, И. В. Широков, М. Н. Болдырева // Математические структуры и моделирование. — 2020. — Т. 53, № 1. — С. 14–24. — 0,67/0,22 а.л.

[4] **Boldyreva M. N.** Particle dynamics in a magnetic field: symplectic reduction and classification of singular trajectories / A. A. Magazev, M. N. Boldyreva // Journal of Physics: Conference Series. — 2020. — Vol. 1441: AMSD-2019. — P. 012001–9. — DOI: 10.1088/1742-6596/1441/1/012001. — 0,55/0,27 а.л. (*Scopus*).

[5] **Boldyreva M. N.** Symmetry algebra of the time-dependent Schrodinger equation in constant and uniform fields / M. N. Boldyreva // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1791: AMSD-2020. — P. 012070–8. — DOI: 10.1088/1742-6596/1791/1/012070. — 0,49 а.л. (*Scopus*).

[6] **Boldyreva M. N.** Exact solutions of Klein-Gordon equations in external electromagnetic fields on 3D de Sitter background / A. A. Magazev, M. N. Boldyreva // Journal of Mathematical Physics. — 2021. — Vol. 62, no. 5. — P. 053503–23. — DOI: 10.1063/5.0023795. — 1,41/0,71 а.л. (*Web of Science*).

[7] **Boldyreva M. N.** Schrodinger equations in electromagnetic fields: symmetries and noncommutative integration / M. N. Boldyreva, A. A. Magazev // Symmetry. — 2021. — Vol. 13, no. 8. — P. 1527–22. — DOI: 10.3390/sym13081527. — 1,35/0,68 а.л. (*Web of Science*).

Публикации в прочих научных изданиях:

[8] **Болдырева М. Н.** Об алгебре инвариантности стационарного уравнения Шредингера для частицы в электромагнитном поле / А. А. Магазев, М. Н. Болдырева // Вестник Омского университета. — 2016. — № 2. — С. 24–27. — 0,25/0,12 а.л.

[9] **Болдырева М. Н.** Моделирование динамики заряженной частицы в бессиловом магнитном поле / А. А. Магазев, М. Н. Болдырева // Прикладная математика и фундаментальная информатика. — 2019. — Т. 6, № 1. — С. 4–16. — 0,8/0,4 а.л.

[10] **Болдырева М. Н.** Моделирование динамики заряженной частицы в бессиловом магнитном поле / М. Н. Болдырева // Информационный бюллетень Омского научно-образовательного центра ОмГТУ и ИМ СО РАН в области математики и информатики. — Омск : ОмГТУ, 2019. — Т. 3, №. 1. — С. 98–102. — 0,31 а.л.

[11] **Болдырева М. Н.** Динамика частицы в магнитном поле: симплектическая редукция и классификация особых траекторий / А. А. Магазев, М. Н. Болдырева // Динамика систем, механизмов и машин. — 2019. — Т. 7, № 3. — С. 169–176. — 0,49/0,24 а.л.

[12] **Болдырева М. Н.** Исследование алгебры симметрии нестационарного уравнения Шредингера в постоянном и однородном электрическом поле / М. Н. Болдырева // Информационный бюллетень Омского научно-образовательного центра ОмГТУ и ИМ СО РАН в области математики и информатики. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 2020. — Т. 4, № 1. — С. 7–11. — 0,31 а.л.

[13] **Болдырева М. Н.** Классификация электромагнитных полей на пространстве де Ситтера и проблема интегрируемости уравнения Клейна-Гордона / А. А. Магазев, М. Н. Болдырева // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. — Казань : Изд-во Академии наук РТ, 2021. — Т. 60. — С. 370–371. — 0,12/0,06 а.л.