МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Омский государственный технический университет»

ТЕОРИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Учебное текстовое электронное издание
локального распространения

Омск
Издательство ОмГТУ
2017

Сведения об издании: 1, 2

Составители:
И. И. Гончар, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры физики;
М. В. Чушнякова, канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель кафедры физики

Теория твёрдого тела : метод. указания к практ. занятиям / Минобрнауки России, ОмГТУ ; [сост.: И. И. Гончар, М. В. Чушнякова]. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2017.

Каждый раздел методических указаний содержит краткую теорию, необходимую для решения задач, а также задачи, рекомендуемые для самостоятельного решения и решения в аудитории.

Предназначены для обучающихся по направлению 28.04.02 «Наноинженерия» ОмГТУ.

Рекомендовано редакционно-издательским советом
Омского государственного технического университета

1 электронный оптический диск

Оригинал-макет издания выполнен в Microsoft Office Word 2007/2010
с использованием возможностей Adobe Acrobat Reader.

Минимальные системные требования:

· процессор Intel Pentium 1,3 ГГц и выше;
· оперативная память 256 Мб и более;
· свободное место на жестком диске 260 Мб и более;
· операционная система Microsoft Windows XP/Vista/7/10;
· разрешение экрана 1024×768 и выше;
· акустическая система не требуется;
· дополнительные программные средства Adobe Acrobat Reader 5.0 и выше.

Редактор *К. В. Муковоз*
Компьютерная верстка *Л. Ю. Бутаковой*

Сводный темплан 2017 г.
Подписано к использованию 02.11.17.
Объем 0,34 Мб.

Издательство ОмГТУ.
644050, г. Омск, пр. Мира, 11; т. 23-02-12
Эл. почта: info@omgtu.ru

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Данные методические указания содержат задачи для проведения практических занятий, а также домашние задания по дисциплине «Теория твёрдого тела». В каждом разделе задачам предшествует краткое теоретическое введение (набор формул с комментариями), необходимое для успешного решения задач. Материал методических указаний посвящен знакомству с тем разделом современной физикой, который является основой компьютерной техники. Несомненно, символами начала XXI в. являются персональный компьютер (ПК) и смартфон, которые не могут работать без чипа – полупроводникового кристалла кремния, который представляет собой интегральную микросхему, содержащую огромное число транзисторов, диодов, резисторов, конденсаторов. Как можно сделать из кремния такие функционально разные элементы? Почему чипы делают на основе кремния? Почему ещё 30 лет назад не было ни ПК, ни смартфонов? Как работают не так давно появившиеся на массовом рынке устройства флеш-памяти?

Чтобы ответить на эти вопросы, возникающие у каждого, кто сколько-нибудь интересуется современной техникой, надо опираться на понимание строения атомов. Оказывается, атомы могут находиться лишь в строго определённых дискретных квазистационарных состояниях. При этом электроны движутся вблизи ядра, имея постоянную энергию, т. е. находясь на энергетических уровнях. При сближении атомов волновые функции их электронов перекрываются, а уровни энергии расщепляются. При этом атомы представляют собой потенциальные ямы для электронов, отделённые друг от друга потенциальными барьерами. Электроны могут проникать от одного атома к другому (переходить от «своего» атома к «чужому») благодаря туннельному эффекту. При этом между электронами соседних атомов возникает специфический квантовый эффект, называемый обменным взаимодействием. Оно приводит к появлению дополнительной энергии и расщепляет атомный уровень на столько уровней, сколько имеется взаимодействующих электронов.

Так, из каждого атомного уровня энергии образуется энергетическая зона кристалла. Каковы будут электрические свойства кристалла? Это зависит от того, как заполнились электронами образовавшиеся зоны. В зависимости от этих электрических свойств кристаллы делят на диэлектри-

ки, проводники и полупроводники (ПП). Электроны, находящиеся в зоне, заполненной целиком, не принимают участия в электропроводности.

Если температуру ПП увеличивать, некоторые электроны из самой верхней заполненной зоны (она называется валентной) будут переходить в самую нижнюю из свободных зон (она называется зоной проводимости). Таким образом, проводимость ПП с увеличением температуры может увеличиваться.

ПП с зонной схемой (рис. 1) называются собственными. Таких ПП на самом деле не бывает: ведь в любом веществе всегда есть примеси! Они мешают использованию ПП (прежде чем использовать, ПП надо очищать от неконтролируемых примесей). Зато можно получать ПП с желаемыми свойствами, внося контролируемые примеси. Этот технологический процесс называется легированием. (Ниже на рис. 2.1 и 2.2 изображены зонные схемы электронного и дырочного ПП.) Из таких легированных ПП изготавливают фоторезисторы, терморезисторы, тензорезисторы, датчики Холла.

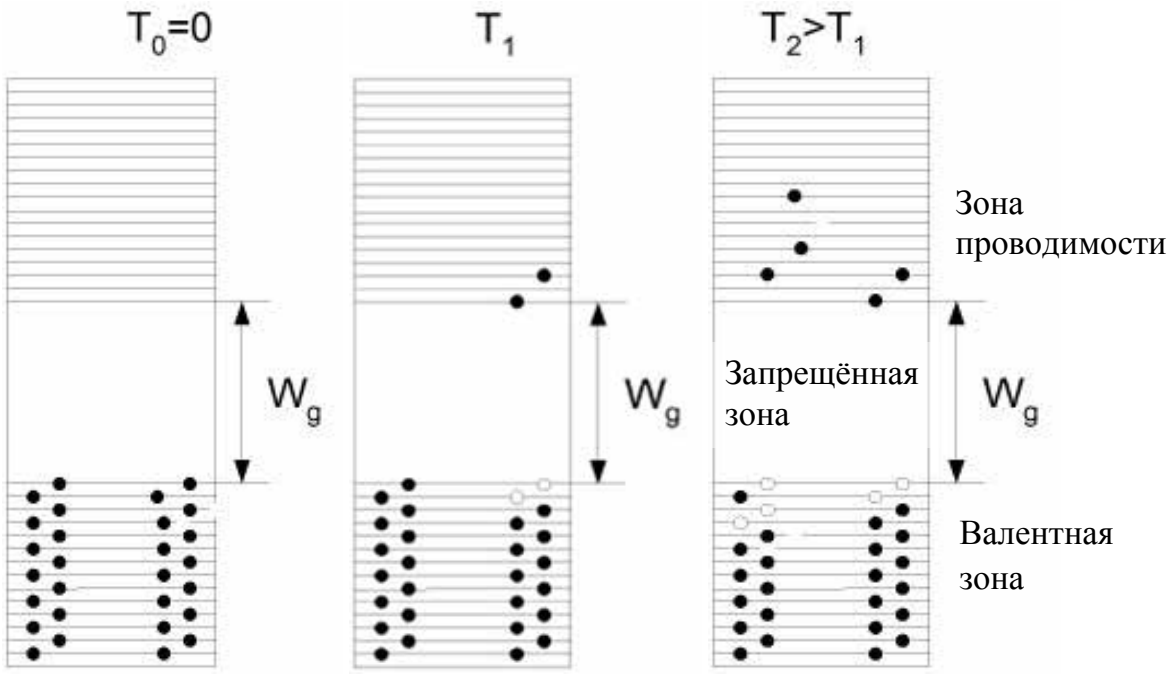

Рис. 1.1. Зонные диаграммы собственного ПП при разных температурах

В современной технике широко применяются проводники, которыми являются почти все металлы. Концентрация носителей тока в металлах с ростом температуры не изменяется, и на первый план выходит зависимость подвижности электронов проводимости от температуры. Она уменьшается с ростом температуры из-за столкновений электронов проводимости с фононами.

О фононах следует сказать особо. Электроны проводимости под действием электрического поля движутся в кристалле так, что «не замечают» ионов, совершающих нулевые колебания вблизи узлов кристаллической решётки. Но когда температура кристалла увеличивается, амплитуда колебаний ионов возрастает, и их тепловое хаотическое движение становится препятствием для протекания электрического тока. Чтобы описать количественно движение огромного (порядка 10^{23}) числа взаимодействующих ионов, его сводят к движению воображаемых невзаимодействующих частиц – фононов. Количество фононов тоже велико, но они «сконструированы» так, что, во-первых, не взаимодействуют друг с другом, а во-вторых, взаимодействуют с электронами проводимости только в кратковременных соударениях. Таким образом, фононы образуют своего рода идеальный газ, что сильно облегчает задачу. На языке фононов естественно объясняется не только электросопротивление, но и теплоёмкость, а также теплопроводность кристаллов.

До сих пор мы говорили о том, что происходит с кристаллами при повышении температуры. Однако, если температуру понижать, часто возникают ещё более интересные явления. Например, при низкой температуре (критическая температура T_c) многие вещества вообще теряют электрическое сопротивление, переходя в сверхпроводящее состояние. Ток в сверхпроводниковом колечке может циркулировать вечно – вот и элемент памяти компьютера. В наше время около 20 % произведённой электроэнергии теряется при передаче по проводам. Возможность изготовления сверхпроводящих проводов позволила получить значительную экономическую выгоду. К сожалению, значения T_c для большинства веществ настолько низки, что для получения такой температуры нужно потратить значительные средства, что применение сверхпроводника становится часто невыгодным. Сверхпроводимость к настоящему времени обнаружена у многих сплавов, ряда органических проводников, легированных фуллеренов, у широкого класса керамик. Керамики переходят в сверхпроводящее состояние при довольно высоких температурах – это так называемая высокотемпературная сверхпроводимость, которая, по-видимому, имеет большое будущее. В начале этого тысячелетия появлялись сообщения о том, что японским инженерам удалось сделать сверхпроводящие провода, набивая керамической крошкой пластиковые трубки. Правда, о широ-

ком применении высокотемпературной сверхпроводимости пока в литературе не сообщается.

Большинство элементов, из которых состоят чипы – транзисторы, диоды, конденсаторы, – можно изготовить, только обеспечив контакт двух веществ с различным типом проводимости. Любой контакт сред с разными свойствами приводит к появлению многочисленных интересных явлений. Обратите внимание, например, как много больших городов расположено на берегах океанов, т. е. на границе двух сред, в области их контакта. Если в контакт приводятся два кристалла с разными концентрациями носителей тока, то немедленно возникает диффузионный ток через границу раздела. В результате в приграничной области возникает двойной электрический слой, поле которого уравновешивает диффузионный ток. Такой обеднённый носителями тока слой обладает замечательным свойством: односторонней проводимостью. Именно это свойство обусловливает широкое использование контактных структур, самая известная из которых – pn-переход. Два pn-перехода при определённых условиях образуют транзистор, три и более – тиристор.

1. ОБРАЗОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗОН В КРИСТАЛЛАХ. СОБСТВЕННЫЕ ПОЛУПРОВОДНИКИ

Микроскопическое выражение для плотности тока имеет вид

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^{N} |q_i| n_i b_i \vec{E}. \qquad (1.1)$$

Подвижность носителей тока данного вида b_i – это коэффициент пропорциональности между средней скоростью их направленного движения u_i (её еще называют дрейфовой скоростью) и напряжённостью электрического поля в проводнике:

$$u_i = b_i E. \qquad (1.2)$$

Заряд носителя тока в металлах и полупроводниках – это просто элементарный заряд. А вот подвижности и концентрации могут быть очень разными. В основном проводимости (или удельные сопротивления) разных веществ различаются из-за того, что сильно различаются концентрации носителей тока. Чтобы понять, почему так велико это различие, удобно пользоваться зонными диаграммами.

При сближении атомов волновые функции их электронов перекрываются, а уровни энергии расщепляются. При этом атомы представляют собой потенциальные ямы для электронов, а друг от друга эти ямы отделены потенциальными барьерами. Там, где уровни энергии ниже этих барьеров, электроны проникают к соседним («чужим») атомам за счёт туннельного эффекта.

Если температуру ПП увеличивать, некоторые электроны из самой верхней заполненной зоны (она называется валентной) будут переходить в самую нижнюю из свободных зон (она называется зоной проводимости). Таким образом, проводимость ПП с увеличением температуры может увеличиваться.

Рассмотрим сначала идеализированную ситуацию: ПП, в котором абсолютно отсутствуют примеси. Такой ПП называется собственным полупроводником (intrinsic semiconductor, ПП i-типа, iПП). В нём концентрация электронов проводимости (n_i) равна концентрации дырок (p_i). И электроны проводимости, и дырки постоянно рождаются (этот процесс называется «генерация») и гибнут (этот процесс носит название «рекомбинация»). В состоянии равновесия ($n_i \neq n_i(t)$) скорость генерации равна скорости рекомбинации. Микроскопическое выражение для концентрации носителей в iПП имеет вид

$$n_i = \sqrt{N_c N_\text{v}} \exp\left(-\frac{W_g}{2k_B T}\right). \tag{1.3}$$

В этой формуле величины

$$N_c = 2\frac{(2\pi k_B T m_e^*)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad N_\text{v} = 2\frac{(2\pi k_B T m_h^*)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \tag{1.4}$$

имеют смысл концентрации доступных электронных и дырочных состояний соответственно в зоне проводимости и в валентной зоне. Подставляя величины из (1.4) в (1.3), получаем рабочую формулу для вычисления n_i:

$$n_i = 2\frac{\left(2\pi k_B T\sqrt{m_e^* m_h^*}\right)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{W_g}{2k_B T}\right), \tag{1.5}$$

где W_g – энергия активации электрон-дырочной пары, которая в iПП равна ширине запрещённой зоны (по-англ. gap – щель, дыра, промежуток). На самом деле вместо W_g надо было бы писать ΔW_{cv}, потому что ширина за-

прещённой зоны – это как раз $(W_c - W_v)$. Однако обозначение W_g является стандартным, и мы только им в дальнейшем и будем пользоваться.

Формула (1.3) очень напоминает распределение Больцмана (или Гиббса). Отличие заключается лишь в двойке в знаменателе аргумента экспоненты, которая появляется из-за того, что носители тока в iПП рождаются парами. Эффективные массы электрона m_e^* и дырки m_h^*, а также значения W_g для некоторых ПП можно найти в прил. 1.

Важнейшее значение для работы ПП устройств имеет диффузия носителей тока. Диффузия возникает всякий раз, как только распределение носителей по объему образца становится неоднородным (т. е. когда концентрация носителей зависит от координаты). Если в газах значительную роль при выравнивании неоднородностей играет конвекция, то в ПП диффузия является единственным механизмом, отвечающим за релаксацию концентрации носителей.

Динамические закономерности диффузии были впервые поняты Альбертом Эйнштейном и Марианом Смолуховским в начале XX в. Одна из этих закономерностей – зависимость среднего значения квадрата координаты частицы (например, электрона проводимости) от времени:

$$\langle x^2 \rangle = 2D_x t. \tag{1.6}$$

Коэффициент диффузии D_x связан с подвижностью носителей тока b соотношением Эйнштейна

$$D_x = bk_B T/e. \tag{1.7}$$

Эта важнейшая формула связывает между собой коэффициент диффузии – характеристику хаотического движения частиц и меру флуктуаций – с подвижностью, которая является диссипативной характеристикой частиц и описывает их реакцию на упорядочивающее внешнее воздействие. По этим причинам соотношение Эйнштейна называют еще иногда флуктуационно-диссипативной теоремой. Решая соответствующие задачи, надо учитывать, что при $T \sim 100\ K$ и выше подвижность носителей тока убывает с температурой приблизительно как T^{-2}.

В отличие от газов, где молекулы не исчезают и не появляются, в ПП носители рождаются и, спустя некоторое время («время жизни»), погибают, рекомбинируя. Поэтому еще одной важной характеристикой хаотического движения носителей в полупроводниках является диффузионная

длина. Под диффузионной длиной понимают среднеквадратичное смещение ($\sqrt{\langle x^2 \rangle}$), которое проходит в ПП носитель за время жизни.

Для того чтобы ускорить вычисления в задачах, полезно заранее найти, чему равен 1 эВ$/(2k_B)$ в кельвинах. Все концентрации надо рассчитывать в см$^{-3}$. Встречающиеся в задачах выражения типа $\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$ для вычислений лучше приводить к виду $\frac{x_2-x_1}{x_1 x_2}$. Это позволит избежать потери точности. Во всех задачах этого раздела предполагается, что примеси отсутствуют или их влиянием можно пренебречь.

1.1. Определите концентрацию электронов проводимости в кремнии при -30 °C.

1.2. Кристаллический образец содержит 0,17 моля некоторого химически простого вещества. Ширина разрешенной зоны равна 10 эВ. Оцените расстояние (разность энергий) между соседними энергетическими уровнями в зоне.

1.3. При какой температуре удельное сопротивление германия составит 0,48 Ом·м. Зависимостью подвижности от температуры при решении этой задачи следует пренебречь.

1.4. Определите, при какой температуре в монокристалле кремния объёмом 3,0 см^3 содержится 83,4 млн дырок.

1.5. Определите удельное сопротивление фосфида индия при 320 К.

1.6. Найдите коэффициент диффузии электронов проводимости в германии при 300 К.

2. ПРИМЕСНЫЕ ПОЛУПРОВОДНИКИ И ПП РЕЗИСТОРЫ

К ПП относятся вещества, электропроводность которых сильно зависит от внешних условий и примесей. Именно эта ни с чем не сравнимая чувствительность электрических свойств ПП к наличию ничтожных примесей долгое время препятствовала систематическому исследованию этих материалов. Парадоксально, но широкое распространение ПП в технике вызвано как раз этой чувствительностью: оказалось, что с помощью легирования можно получать материалы с заранее заданными свойствами.

Реальный ПП всегда содержит примеси. Предельно низкие концентрации посторонних примесей в SiC, которых удается достичь в процессе очистки, составляют 10^{16} см$^{-3}$, для GaAs это 10^{13} см$^{-3}$. Лучше всего научи-

лись очищать кремний: концентрацию примесей в нем удается понизить до 10^{10} см$^{-3}$.

Если в ПП доминирует донорная примесь (концентрация атомов донорной примеси N_d намного превосходит концентрацию атомов акцепторной примеси N_a) и если температура не слишком велика, то концентрация электронов проводимости намного превосходит концентрацию дырок: $n_n \gg p_n$. Индекс указывает здесь на то, что полученный ПП является электронным полупроводником (negative semiconductor, nПП, ПП n-типа). Зонная схема ПП n-типа показана на рис. 2.1. В запрещённой зоне расположены локальные примесные уровни (они показаны штрихами). Из рисунка видно, что энергия активации донорной примеси W_d намного меньше ширины запрещённой зоны. В такой ситуации говорят, что примесь мелкая. Обычно мелкую примесь подбирают так, чтобы при рабочих температурах все её атомы были ионизованы (полное примесное истощение). При этом всё равно некоторая часть проводимости обусловлена электронами, пришедшими из валентной зоны.

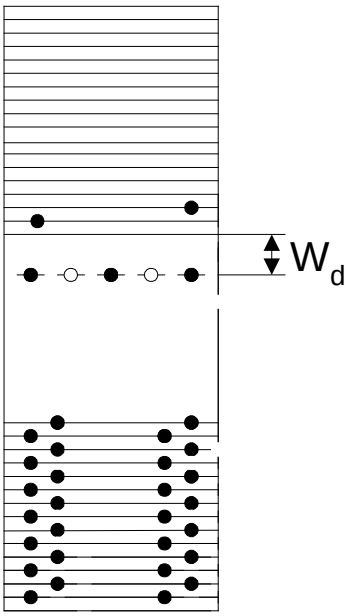

Рис. 2.1. Зонная диаграмма электронного полупроводника

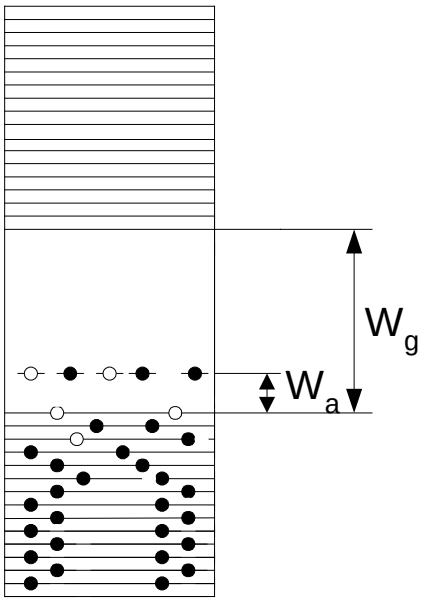

Рис. 2.2. Зонная диаграмма дырочного полупроводника

В рПП в запрещённой зоне расположены локальные энергетические уровни акцепторной примеси. На рис. 2.2 изображён случай мелкой примеси ($W_a \ll W_g$). Черные кружочки на примесных уровнях – это «бывшие» электроны проводимости, которые теперь захвачены атомами акцептор-

ной примеси. Эти атомы превратились в результате в отрицательные ионы, которые локализованы в узлах кристаллической решётки и не дают вклада в проводимость ПП.

Какая бы примесь и в какой концентрации ни была бы внесена в ПП, концентрации носителей тока в нём связаны законом действующих масс:

$$np = n_i^2 \ , \tag{2.1}$$

где концентрация дырок p, концентрация электронов проводимости n и концентрация n_i берутся для одной и той же температуры. Последняя есть концентрация электронов проводимости в том iПП, легированием которого получен данный примесный ПП. Для iПП закон действующих масс переходит в тождество.

Аналитически найти концентрации носителей тока в примесном ПП удаётся в двух предельных случаях. Первый – полное примесное истощение, все атомы примеси ионизованы. Тогда концентрации основных и неосновных носителей в nПП определяются законом действующих масс и формулой

$$n = N_d + p. \tag{2.2}$$

Соответственно концентрации основных и неосновных носителей в pПП в случае полного примесного истощения вычисляются по закону действующих масс и по формуле

$$p = N_a + n. \tag{2.3}$$

Второй предельный случай – небольшая часть атомов примеси ионизована. Тогда концентрация основных носителей вычисляется по формулам

$$n_n = \sqrt{N_d N_c}\exp\left(-\frac{W_d}{2k_BT}\right), \quad p_p = \sqrt{N_a N_\text{v}}\exp\left(-\frac{W_a}{2k_BT}\right) , \tag{2.4}$$

а концентрация неосновных носителей – по закону действующих масс. Заметьте, что формулы, полученные для двух предельных случаев, когда примесь полностью ионизована и когда она слабо ионизована, друг в друга не переходят.

ПП резистор, в котором используется высокая чувствительность сопротивления ПП к изменению его температуры, называется терморезистором. Одной из главных характеристик терморезистора является его темпе-

ратурный коэффициент сопротивления α_R, определением которого служит формула

$$\alpha_R(T) = \frac{1}{\rho_R(T)} \frac{d\rho_R(T)}{dT}. \quad (2.5)$$

В простейшем случае терморезистор можно изготовить из любого примесного ПП, если в области рабочих температур имеет место примесное истощение, а температура влияет только на составляющую, связанную с собственной проводимостью. Альтернатива состоит в том, чтобы использовать зависимость от температуры концентрации носителей, которая получается за счёт ионизации примеси. Тут важно, чтобы при рабочей температуре ионизация примеси была небольшой, а собственной проводимостью можно было бы пренебречь.

В любом из этих случаев для получения зависимости $\rho_R(T)$ надо использовать микроскопическую формулу для плотности тока и закон Ома в дифференциальной форме. При дифференцировании в формуле (2.3) следует пренебрегать любой зависимостью от температуры, кроме той, которая стоит в показателе экспоненты. Типичное (реальное) значение температурного коэффициента сопротивления для ПП терморезисторов варьируется от $-0{,}02$ до $-0{,}08\,K^{-1}$. Это примерно на порядок больше, чем для металлов ($\alpha_R \approx 0{,}0035\,K^{-1}$).

2.1. Вычислите концентрацию электронов проводимости и дырок в кремнии, легированном фосфором (концентрация примеси 10^{10} см$^{-3}$), при температуре 300 К в случае полного примесного истощения.

2.2. Вычислите концентрацию электронов проводимости и дырок в германии, легированном алюминием (концентрация примеси 10^{13} см$^{-3}$), в случае полного примесного истощения при температуре 400 К.

2.3. Найдите минимальную концентрацию донорной примеси в кремнии, которая обеспечивает стабильную концентрацию носителей тока (с точностью 10 %) в диапазоне температур от –30 до +30 °С.

2.4. При какой температуре концентрация носителей тока в фосфиде индия с i-типом проводимости равна концентрации дырок в фосфиде галлия, легированном алюминием, при комнатной температуре (300 К). Уровень легирования фосфида галлия таков, что дырок в нём в 10^3 раз больше, чем электронов проводимости. Возможно, придётся использовать метод итераций.

2.5. Кристалл фосфида индия размерами $10 \times 20 \times 1{,}5$ мм^3 содержит $5 \cdot 10^{18}$ атомов донорной примеси, энергия активации которой 0,034 эВ. Определите концентрации основных и неосновных носителей тока при температуре -20 °С.

2.6. Определите температурный коэффициент сопротивления для кремния i-типа при температуре 310 К.

2.7. Определите температурный коэффициент сопротивления для кремния, легированного бором при температуре 310 К. На каждый атом примеси приходится 10^{12} атомов кремния.

3. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ. ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНЫЙ (N-P) ПЕРЕХОД

Если в контакт приводятся два кристалла с разными концентрациями носителей тока, то немедленно возникает диффузионный ток через границу раздела. В результате в приграничной области возникает двойной электрический слой, поле которого уравновешивает диффузионный ток. Толщина этого слоя тем меньше, чем больше концентрация носителей тока. Условием равновесия является равенство электрохимических потенциалов (энергий Ферми, если их отсчитывать от вакуума).

В случае контакта, например, двух металлов между ними возникает контактная разность потенциалов, которая равна разности работ выхода, делённой на заряд электрона. Именно благодаря контактной разности потенциалов работают все элементы питания (батарейки).

Если контактируют вещества с сильно различающимися концентрациями носителей тока, то практически вся область приконтактного поля локализована в веществе с меньшей концентрацией. Эта область сильно обеднена носителями, а потому сопротивление такого контакта существенно зависит от полярности приложенного напряжения. Это свойство называют иногда односторонней проводимостью и используют для преобразования переменного напряжения в постоянное, т. е. для выпрямления тока.

Классический пример контакта – область в ПП, где один тип проводимости сменяется другим, так называемый pn-переход. За счёт диффузии электронов проводимости в p-область она заряжается отрицательно, а n-область – положительно. Этот процесс (релаксация) продолжается до тех пор, пока не сравняется уровень акцепторов в p-области с уровнем доноров

в n-области. Значит возникающий барьер будет иметь высоту, примерно равную ширине запрещенной зоны (примеси считаются мелкими). Вышеизложенное иллюстрируется рис. 3.1–3.3.

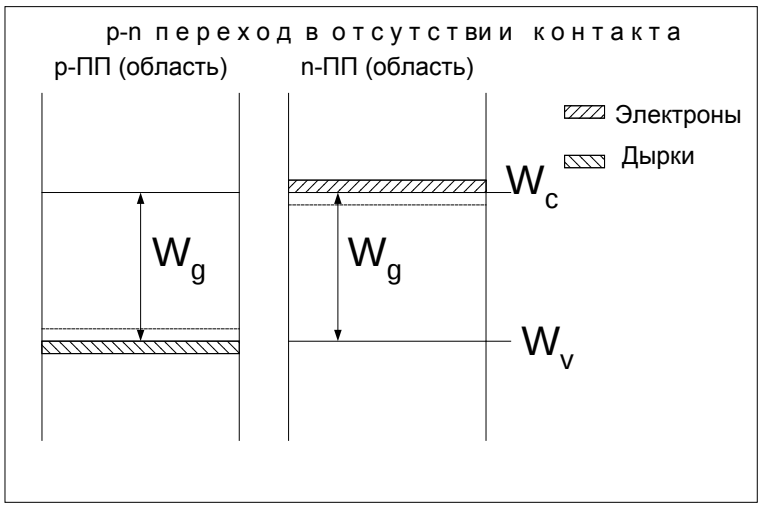

Рис. 3.1. Это, конечно, модельная ситуация – области с разными типами проводимости уже созданы в ПП с шириной запрещённой зоны W_g, но ещё не приведены в контакт. После приведения в контакт электроны диффундируют налево, а дырки – направо

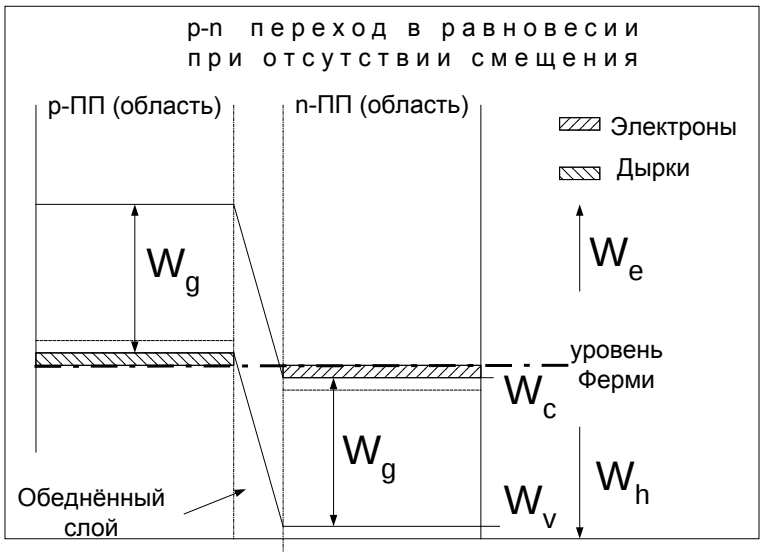

Рис. 3.2. Это уже более реальная ситуация – равновесная. Энергия электронов (они – основные носители справа) уменьшилась в n-ПП: туда пришли дырки, рекомбинировали с электронами проводимости, и остался нескомпенсированным заряд положительных ионов донорной примеси

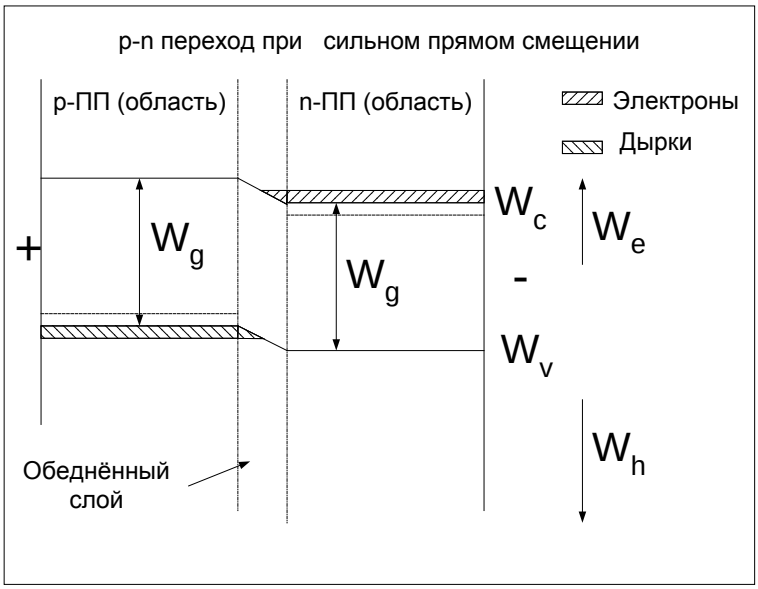

Рис. 3.3. Когда на n-область подан отрицательный потенциал (относительно p-области!), энергия электронов в n-области увеличилась, и барьер (или, скорее, порог потенциальной энергии) стал ниже. Потенциальная энергия в зависимости от горизонтальной координаты x меняется, конечно, более плавно

Равновесие, установившееся в pn-переходе, является динамическим. Это означает, что через него течёт несколько токов, которые (в отсутствии смещения) компенсируют друг друга. Это диффузионные токи основных носителей и полевые токи неосновных носителей. Сумма дырочного тока из n-области в p-область и электронного тока в обратном направлении называется током насыщения. Плотность тока насыщения можно рассчитать по формуле

$$j_s = en_i^2\left(\frac{1}{N_a}\sqrt{\frac{2D_e}{\tau_{ep}}}+\frac{1}{N_d}\sqrt{\frac{2D_h}{\tau_{hn}}}\right), \qquad (3.1)$$

где τ_{ep} – время жизни электрона проводимости в p-области; τ_{hn} – время жизни дырок в n-области. Если p-область легирована намного сильнее, чем n-область, первым слагаемым в скобках можно пренебречь.

Ток насыщения определяется неосновными носителями, но является важнейшим ингредиентом вольт-амперной характеристики (ВАХ) ПП диода. Она определяется формулой

$$I = I_s\left[\exp\left(\frac{eU}{k_BT}\right)-1\right], \qquad (3.2)$$

где U – напряжение на pn-переходе, которое может сильно отличаться от напряжения, приложенного к ПП диоду, особенно в случае прямого смещения.

В случае сильно асимметричного pn-перехода толщина области объёмного заряда Δx и максимальная напряжённость электрического поля в двойном электрическом слое E_m определяются формулами

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2W_g\varepsilon\varepsilon_0}{e^2N_d}}; \qquad E_m = \sqrt{\frac{2W_gN_d}{\varepsilon\varepsilon_0}}. \qquad (3.3)$$

При выводе этих формул считалось, что p-область легирована гораздо сильнее n-области и что внешнее постоянное напряжение (смещение) отсутствует. При наличии внешней разности потенциалов U обе эти формулы можно использовать, заменив W_g на $(W_g - eU)$.

3.1. Вычислите ширину pn-перехода в кремнии в отсутствии смещения, если концентрация доноров составляет $10\cdot10^{16}$ м$^{-3}$, а концентрация акцепторов – $50\cdot10^{15}$ м$^{-3}$.

3.2. Найдите ширину прямосмещённого pn-перехода в фосфиде индия, если концентрация доноров составляет $20 \cdot 10^{12}$ см$^{-3}$, а концентрация акцепторов – $30 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$. Величина смещения 130 мВ.

3.3. Определите максимальную напряженность электрического поля в pn-переходе в германии в отсутствии смещения, если концентрация доноров составляет $50 \cdot 10^{8}$ мм$^{-3}$, а концентрация акцепторов – $30 \cdot 10^{6}$ мм$^{-3}$.

3.4. Рассчитайте плотность тока насыщения через GaAs pn-переход при температуре 320 К, если концентрация акцепторов составляет $50 \cdot 10^{5}$ мм$^{-3}$, а концентрация доноров – $30 \cdot 10^{8}$ мм$^{-3}$.

3.5. Площадь pn-перехода германиевого диода с p-эмиттером равна 10 см^2. Необходимо обеспечить ток силой 1,0 А через диод при напряжении 150 мВ на pn-переходе при 300 К. Какова минимальная концентрация донорной примеси, необходимой для этого?

3.6. pn-переход, находящийся при температуре –15 °С под обратным напряжением в 150 мВ, имеет сопротивление 1,2 кОм. Каково сопротивление этого перехода при таком же прямом напряжении при той же температуре?

3.7. Сопротивления pn-перехода, находящегося под напряжением 20 мВ, при подключениях с разной полярностью равны 5,5 Ом и 1,5 кОм. Какова температура этого pn-перехода?

4. ПРОВОДИМОСТЬ МЕТАЛЛОВ, ЕЁ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Сопротивление, которое оказывают металлы при комнатных температурах прохождению электрического тока, обусловлено тем, что тепловые колебания ионов вблизи узлов кристаллической решетки мешают направленному движению свободных электронов. По-другому, сопротивление металлов при комнатных температурах можно описывать как столкновения электронов проводимости с фононами. При понижении температуры амплитуда колебаний ионов уменьшается. Иными словами, уменьшается число фононов, а также убывает средняя энергия фонона. При очень низких температурах сопротивление определяется дефектами кристаллической решетки и примесями (остаточное сопротивление).

На феноменологическом уровне зависимость сопротивления от температуры в области $T > \Theta$ можно описать простой формулой

$$\Delta R = R_0 \alpha_R \Delta T \,, \tag{4.1}$$

где α_R – температурный коэффициент сопротивления, значения которого для некоторых веществ можно найти в прил. 2; R_0 – сопротивление образца при 0 °C.

Полное теоретическое квантовое выражение для удельного сопротивления, которое возникает в идеально чистом проводнике за счёт рассеяния электронов проводимости на фононах, имеет вид

$$\rho_R = \frac{YT^5}{m_0 \Theta^6} \int_0^{\Theta/T} \frac{\xi^5 d\xi}{(\mathrm{e}^{\xi} - 1)(1 - \mathrm{e}^{-\xi})} \tag{4.2}$$

(формула Блоха – Грюнайзена).

Отсюда получаются предельные упрощённые выражения

$$\rho_R = \frac{124{,}4\, YT^5}{m_0 \Theta^6} \text{ при } T \ll \Theta\,; \tag{4.3}$$

$$\rho_R = \frac{YT}{4 m_0 \Theta^2} \text{ при } T \gg \Theta. \tag{4.4}$$

В этих формулах Y – коэффициент, который зависит от рода вещества, но не зависит от температуры:

$$Y = \frac{3\pi^2 \hbar^5 \rho_m}{2 k_B e^2 W_F m_e^* m_0}. \tag{4.5}$$

Температура Дебая Θ (дебаевская температура), входящая в эти формулы, характеризует энергию самого «жёсткого» фонона, который может существовать в данном кристалле. Значения дебаевских температур для некоторых кристаллов приведены в прил. 1.

4.1. Резистор выполнен в виде тонкой платиновой пленки, нанесенной на керамический цилиндр длиной 3,0 мм и радиусом 1,0 мм. Толщина пленки 70 мкм. Как и на сколько изменится сопротивление этого резистора при нагревании от +10 °C до 330 К?

4.2. Предположим, что резистору из задачи 4.1 предстоит работать в условиях зимней марсианской ночи. При этом температура поверхности

повышается от –125 °С на столько же, на сколько и в предыдущей задаче. Как и на сколько изменится сопротивление этого резистора при повышении температуры?

4.3. Предположим, что электроэнергия для домика полярников на антарктической станции «Восток» подаётся от генератора по медному проводу диаметром 3,1 мм. Расстояние от домика до генератора 12 м. Как и на сколько изменяется сопротивление этой линии электроснабжения при переходе от лета (температура воздуха –20 °С) к зиме (температура воздуха –80 °С)?

4.4. До какой степени согласуется формула Блоха – Грюнайзена с экспериментальными данными (прил. 2) при высоких температурах?

4.5. Получите приближённую формулу (4.4) из точной формулы (4.2).

4.6. Нарисуйте график зависимости сопротивления от температуры для ртути.

5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФЕРМИ – ДИРАКА. ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В МЕТАЛЛАХ

Проводимость металлов обусловлена наличием в них свободных (слабо связанных с конкретными атомами) электронов. Это электроны проводимости, их концентрация для большинства металлов равна концентрации ионов. Электроны проводимости в металлах на зонной диаграмме заполняют часть валентной зоны, которая является одновременно и зоной проводимости. Таким образом, наличие запрещённых зон никак не сказывается на свойствах металлов. Для них на первый план выходит энергия Ферми – энергия электрона, находящегося при нулевой температуре на самом верхнем из заполненных уровней.

Среднее число фермионов на уровне с энергией W_i (без учёта двух спиновых состояний) определяется формулой

$$\langle N_{iF} \rangle (W_i) = \left\{ 1 + \exp\left(\frac{W_i - W_F}{k_B T} \right) \right\}^{-1}. \qquad (5.1)$$

Эта формула называется распределением Ферми – Дирака. Подругому формулу (5.1) можно трактовать как вероятность того, что уро-

вень с энергией W_i заполнен. Полное число электронов nV в зоне проводимости постоянно:

$$nV = \sum_i \langle N_{iF} \rangle. \tag{5.2}$$

Если это условие переписать в интегральной форме

$$nV = \int_0^{W_F} \langle N_F \rangle (W) g(W) dW\,, \tag{5.3}$$

то его можно использовать для определения энергии Ферми той или иной системы. Во всех практически важных для физики металлов случаях зависимостью энергии Ферми от температуры можно пренебречь.

Внутренняя энергия идеального ферми-газа электронов проводимости складывается из двух частей. Это энергия нулевого движения W_0 (она постоянна и от температуры не зависит) и слагаемое, зависящее от температуры:

$$W_{in}(T) \approx W_0 + \frac{nVk_BT}{W_F} k_BT. \tag{5.4}$$

В последнем слагаемом множитель nVk_BT/W_F по порядку величины равен числу электронов, которые могут принимать энергию от решётки, а k_BT – это по порядку величины средняя энергия, которую получает один электрон от решётки. Более точное вычисление даёт

$$W_{in}(T) = nV\left[\frac{3}{5}W_F + \frac{(\pi k_BT)^2}{2W_F}\right]. \tag{5.5}$$

Формула (5.5) справедлива при $k_BT \ll W_F$, т. е. фактически вплоть до температуры плавления любого металла. Следовательно, теплоёмкость электронного газа при постоянном объеме и его энтропия вычисляются по одной и той же формуле:

$$C_V = S = nV\frac{(\pi k_BT)^2}{W_FT} \tag{5.6}$$

($dS = dW_{in}/T$, а постоянная интегрирования равна нулю по третьему началу термодинамики).

В заключение приведём рабочую формулу для вычисления энергии Ферми в металлах:

$$W_F = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e^*}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}. \qquad (5.7)$$

Энергия Ферми отсчитывается от дна зоны проводимости, которая для металлов совпадает с валентной зоной. Концентрацию электронов проводимости можно найти, умножая среднее число обобществлённых электронов одного атома на концентрацию атомов.

5.1. Найдите среднюю энергию хаотического движения электрона проводимости в алюминии.

5.2. Оцените давление электронного газа в меди при комнатной температуре.

5.3. Как и во сколько раз различаются энтропии 1 см^3 воздуха и электронного газа такого же объёма меди при –10 °С?

5.4. Какова вероятность (в процентах) заполнения электронами в золоте энергетического уровня, расположенного на 12 мэВ ниже уровня Ферми, при температуре +10 °С?

5.5. Вычислите разницу энергий (в эВ) двух электронов проводимости в цинке при температуре +50 °С: электрона, находящегося на уровне Ферми, и электрона, находящегося на уровне, вероятность заполнения которого равна 0,12.

5.6. Во сколько раз теплоёмкость электронного газа в меди при –10 °С меньше, чем теплоёмкость её кристаллической решётки? Молярная теплоёмкость кристаллической решётки меди при этих условиях равна $3R$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Детлаф, А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Академия, 2009. – 720 с.

2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Академия, 2006. – 560 с.

3. Савельев, И. В. Курс общей физики. Т. 5. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц / И. В. Савельев. – М. : Лань, 2011. – 384 с.

4. Kasap, S. O. Principles of Electrical Engineering Materials and Devices / S. O. Kasap. – New York : McGraw-Hill, 2000. – 704 p.

5. Бондарев, Б. В. Курс общей физики : в 3 кн. Кн. 3. Термодинамика, статистическая физика, строение вещества / Б. В. Бондарев, Н. П. Калашников, Г. Г. Спирин. – М. : Юрайт, 2015. – 369 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Свойства собственных полупроводников при 300 К

Энергия активации электрон-дырочной пары $[W_g]$ = эВ.
Диэлектрическая проницаемость $[\varepsilon] = 1$.
Время жизни носителя тока $[\tau]$ = сек.
Температура Дебая $[\Theta]$ = К.
Подвижность электрона (дырки) $[b] = \text{см}^2/(\text{В} \cdot \text{сек})$.
Эффективная масса электрона (дырки) $[m^*] = m_e$.
Плотность массы $[\rho_m] = \text{г}/\text{см}^3$.

Вещество	W_g	ε	τ	Θ	b_e (b_h)	m_e^* (m_h^*)	ρ_m	Применение
InSb	0,180	16,8	$3\cdot10^{-7}$	–	78000 (750)	0,014 (0,4)	5,78	Туннельные диоды, фотоэлементы
Ge	0,664	16	$3\cdot10^{-3}$	360	3800 (1820)	0,22 (0,39)	5,32	Терморезисторы, выпрямительные диоды
Si	1,11	12,5	$2\cdot10^{-3}$	640	1300 (500)	0,33 (0,81)	2,30	Варикапы, выпрямительные диоды
InP	1,34	14	–	–	4600 (150)	0,073 (0,6)	4,79	Светодиоды, лазерные диоды
GaAs	1,43	12,5	–	417	8500 (420)	0,067 (0,5)	5,4	Солнечные батареи, ПП лазеры
GaP	2,27	10,2	–	–	300 (75)	0,12 (0,56)	4,14	Светодиоды
SiC	2,86	10,2	–	–	230 (70)	0,25 (1,00)	3,21	Мощные транзисторы
Алмаз	–	–	–	1910	–	–	3,50	Свёрла, абразив

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Механические и тепловые свойства твердых тел при +20 °С

Коэффициент теплопроводности $[\gamma]$ = Вт/(м · К).

Удельная теплоёмкость $[C_{\text{уд}}]$ = кДж/(кг · К).

Линейный коэффициент теплового расширения $[\beta_l] = 10^{-6}$ К$^{-1}$ (приведено среднее значение в интервале температур от 0 до +100 °С).

Модуль Юнга $[E]$ = ГПа, плотность массы $[\rho_m]$ = кг · дм$^{-3}$.

Температура плавления $[t_m^{\circ}]$ = °С.

Удельное электрическое сопротивление при +0 °С $[\rho_R]$ = мкОм · см.

Температурный коэффициент электрического сопротивления при +0 °С $[\alpha_R] = 10^{-3}$ К$^{-1}$.

Вещество	γ	$C_{\text{уд}}$	β_l	E	ρ_m	t_m°	ρ_R	α_R
Алюминий	237	0,896	23,8	71	2,71	660	2,50	4,60
Вольфрам	174	0,136	4,5	370	19,4	3420	4,89	5,10
Золото	317	0,129	14,3	79	19,3	1063	2,06	4,02
Медь	401	0,385	17	120	8,9	1083	1,55	4,83
Олово	67	0,243	26	50	5,9	232	11,2	4,65
Платина	72	0,134	8,9	160	21,5	1772	9,81	3,96
Серебро	429	0,265	19,7	75	10,5	961	1,49	4,30
Цинк	116	0,402	32	110	7,1	420	5,65	4,17
Сталь Fe + xC, x < 2 %	88	0,462	11,7	200	7,8	1400	12,3	3,0
Чугун Fe + xC, x > 2 %	50	0,540	10,0	200	7,2	1200	80	–