МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Омский государственный технический университет»

МЕХАНИКА

Учебное текстовое электронное издание
локального распространения

Рекомендовано редакционно-издательским советом
Омского государственного технического университета

Омск
Издательство ОмГТУ
2023

Сведения об издании: 1, 2

Составители: *Е. В. Богданова*, ассистент каф. «Физика»;
О. В. Лях, канд. техн. наук, доцент каф. «Физика»;
О. М. Сухарева, ст. преподаватель каф. «Физика»;
Н. Г. Эйсмонт, канд. пед. наук, доцент каф. «Физика»

Рецензент *В. И. Левченко*, канд. техн. наук, доцент каф. «Радиотехнические устройства и системы диагностики»

Механика : практикум / Минобрнауки России, Ом. гос. техн. ун-т ; сост.: Е. В. Богданова, О. В. Лях, О. М. Сухарева, Н. Г. Эйсмонт. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2023. – 1 CD-ROM (3,31 Мб). – Систем. требования: процессор с частотой 800 МГц и выше ; 128 Мб RAM и более ; свободное место на жестком диске 300 Мб и более ; Linux / Windows XP и выше ; MacOS X 10.4 и выше ; CD/DVD-ROM-дисковод ; ПО для просмотра pdf-файлов. – Загл. с титул. экрана.

Практикум составлен в соответствии с программой раздела «Механика» курса общей физики. В каждой теме представлено значительное количество задач разной трудности, решение которых закрепляет знания, полученные в соответствующем лекционном курсе, и формирует ясное понимание физических законов, определений и взаимосвязей физических величин.

Издание предназначено для студентов первого курса всех направлений подготовки ОмГТУ, учебный план которых включает дисциплину «Физика».

Редактор *Л. Д. Ниязова*

Компьютерная верстка *Л. Ю. Бутаковой*

Рисунки *А. М. Сухарева*

Сводный темплан 2023 г.

Подписано к использованию 01.12.2023.
Объем 3,31 Мб.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 4

I. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ 6

II. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ 22

III. КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА 52

IV. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ 72

V. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ 86

VI. РАБОТА. МОЩНОСТЬ. ИЗМЕНЕНИЕ ЭНЕРГИИ 122

VII. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ 144

VIII. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА 177

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 194

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 195

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ 196

ОТВЕТЫ 198

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный практикум обеспечивает практическое освоение первого раздела курса общей физики – раздела «Механика» – посредством решения учебных задач.

Практикум состоит из восьми разделов, соответствующих темам курса. Каждый раздел включает в себя следующие подразделы:

1. Краткий теоретический материал.

Приведенные в пособии теоретические сведения предназначены для восстановления в памяти студента основных знаний по соответствующей теме. Объем теоретического блока существенно сокращен по сравнению с лекционным курсом и не является его полноценной заменой.

2. Контрольные вопросы.

Вопросы предназначены для самопроверки студента при его подготовке к предстоящему практическому занятию. Формулируя ответы на поставленные вопросы, студент систематизирует свои знания и добивается более четкого, ясного понимания сути изучаемых физических явлений.

На часть вопросов даны ответы непосредственно в тексте пособия, для ответов на другие вопросы необходимо обратиться к курсу лекций и соответствующим учебникам. Некоторые вопросы требуют самостоятельных размышлений.

3. Задачи для аудиторных занятий.

Задачи разделены на три блока в соответствии с уровнем сложности. Задачи первого уровня – подготовительные – предназначены для «знакомства» с темой, для освоения базовых формул. Задачи второго уровня – основные – служат для тщательной проработки материала, освоения типичных приемов, выработки устойчивых навыков по решению задач соответствующей темы. Задачи третьего уровня – дополнительные – позволят одаренным студентам не скучать, опередив одногруппников при решении задач во время аудиторного занятия. Ответы к аудиторным задачам даны в конце пособия, после последнего – восьмого – раздела.

Из числа задач для аудиторных занятий могут быть заданы и задачи «на дом» – для более тщательной проработки и закрепления материала.

4. Индивидуальное домашнее задание.

Здесь приведены задачи, предназначенные для контроля знаний. Преподаватель, ведущий занятия, на свое усмотрение выбирает темы, по которым будет проводиться проверка. Такие задания выдаются индивидуально для каждого студента. Таблица вариантов приведена в конце пособия, перед ответами на аудиторные задачи.

Практикум ориентирован на обеспечение качества подготовки обучающихся в техническом вузе, соответствующего требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, при актуальном объеме курса физики в ОмГТУ. В учебных планах разных направлений подготовки дисциплине «Физика» отводится разное количество времени. Данный практикум дает преподавателю необходимую свободу при подготовке к занятию: большое количество задач разного уровня позволяет подобрать задания, опираясь на доступный временной объем и стартовый уровень учебной группы.

Приходится также отметить, что в настоящем для всех направлений обучения аудиторного времени совершенно недостаточно для качественного освоения дисциплины. Поэтому большую роль в процессе обучения играет трудолюбие и самодисциплина студента, использование им по назначению всего времени, отведенного на самостоятельную работу и подготовку к занятиям. Данное пособие дает заинтересованному студенту возможность самосовершенствования: не ограничиваясь указаниями преподавателя, он может выполнять дополнительные задания. Наличие ответов к аудиторным задачам позволяет студенту контролировать правильность своих действий.

I. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Скалярные и векторные величины

Скалярная величина, или *скаляр* – это величина, для задания которой (в подходящих единицах измерения) достаточно одного числа.

Векторная величина, или *вектор* – это величина, характеризуемая: 1) неотрицательным скаляром; 2) направлением в пространстве. При этом скаляр называется модулем вектора, или его абсолютной величиной (модуль вектора $a \equiv |\vec{a}|$). Размерность вектора – это размерность его модуля.

Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Если направления двух коллинеарных векторов совпадают, то векторы называются *сонаправленными*; если же их направления различны, то векторы называются *противоположно направленными*.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарные, сонаправленные и имеют равные модули (рис. 1.1)

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}| \tag{1.1}$$

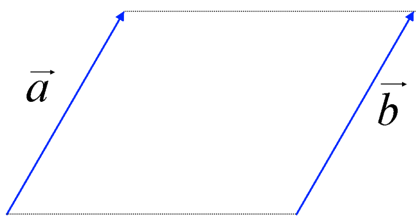


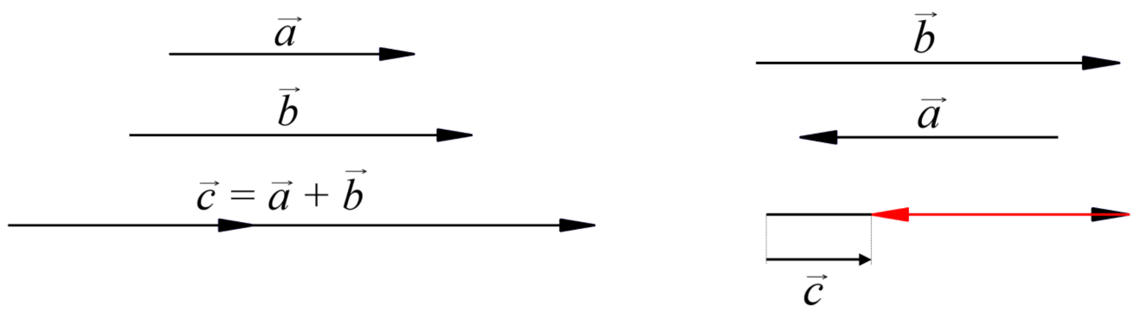
Рис. 1.1.

Равенство векторов не означает непременного совпадения их начал и концов: можно переносить вектор параллельно самому себе, и при этом получится вектор, равный исходному. Такой перенос постоянно применяется в тех случаях, когда желательно свести начала векторов в одну точку – например, при нахождении суммы или разности векторов.

Сложение векторов

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$

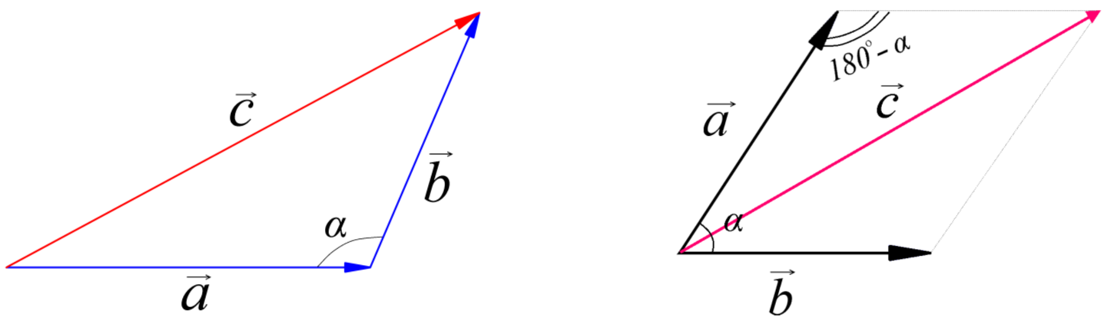
приложено к концу вектора $\vec{a}$. Примеры сложения коллинеарных векторов можно увидеть на рис. 1.2. Для неколлинеарных векторов приведенный способ сложения называется *правилом треугольника* (рис. 1.3, *а*). Также для неколлинеарных векторов может быть использовано *правило параллелограмма*: если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют общее начало, то суммарный вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ направлен по выходящей из той же точки диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1.3, *б*).



$c = a + b$ $\qquad$ $c = b - a$

а $\qquad$ *б*

Рис. 1.2. Сложение коллинеарных векторов:
а – сонаправленные векторы;
б – противоположно направленные векторы



$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)}$ $\qquad$ $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)}$

а $\qquad$ *б*

Рис. 1.3. Сложение неколлинеарных векторов:
а – по правилу треугольника;
б – по правилу параллелограмма

Вычитание векторов

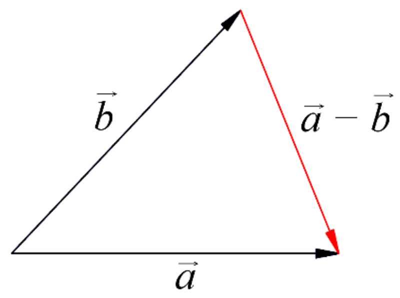


Рис. 1.4.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1.4) называется такой вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

Действительно, если $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$, то $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Умножение вектора на число

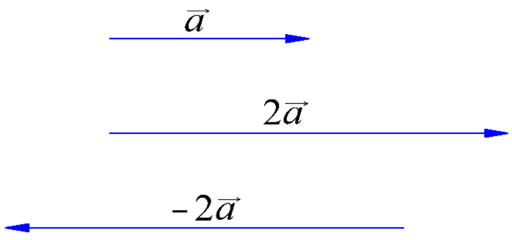


Рис. 1.5.

Рассмотрим умножение вектора $\vec{a}$ на число (скаляр) k. Запись $\vec{b}=k\vec{a}$ означает, что:

1) $|\vec{b}|=|k|\cdot|\vec{a}|$;

2) вектор $\vec{b}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$ при $k>0$ и направлен противоположно вектору $\vec{a}$ при $k<0$ (если же $k=0$, то из первого пункта следует, что $\vec{b}=0$).

Например, векторы $2\vec{a}$ и $-2\vec{a}$ имеют вид, как на рис. 1.5.

Разделить вектор на скаляр $k\neq 0$ – это значит умножить этот вектор на скаляр $^1/_k$.

Произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов на косинус угла φ между ними (рис. 1.6).

Обозначается скалярное произведение

$$(\vec{a},\vec{b})\equiv\vec{a}\cdot\vec{b}\equiv\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi. \tag{1.2}$$

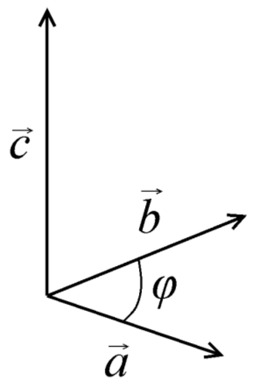


Рис. 1.6.

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$ (рис. 1.6), имеющий следующие свойства:

1) перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$;

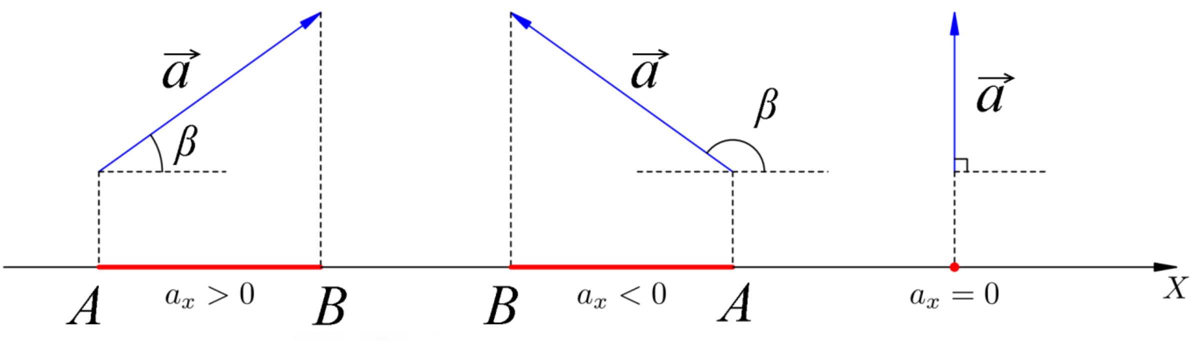
3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается векторное произведение:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \equiv \vec{a} \times \vec{b}. \qquad (1.3)$$

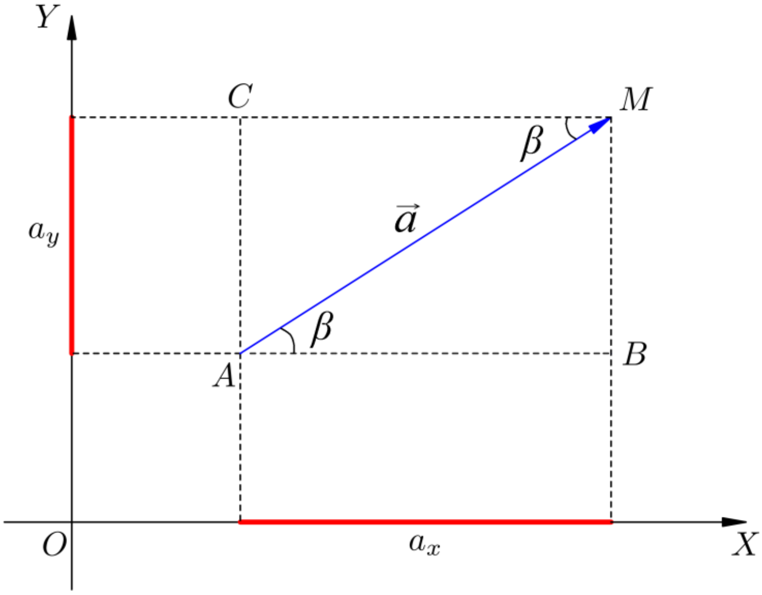
Проекция вектора на ось

Проекция a_x вектора $\vec{a}$ на ось X равна длине отрезка AB (где точки A и B получаются при опускании на ось X перпендикуляров из концов вектора $\vec{a}$), взятой со знаком плюс, если угол β между вектором $\vec{a}$ и положительным направлением оси OX является острым, и взятой соответственно со знаком минус, если β тупой (или развернутый). Если угол β прямой, то $a_x = 0$ (рис. 1.7, *а*). Во всех случаях проекция a_x вычисляется по формуле: $a_x = a\cos\beta$.



а

Рис. 1.7. Проецирование вектора (начало):
а – на одну ось; *б* – на две оси



б

Рис. 1.7. Проецирование вектора (окончание):
а – на одну ось; *б* – на две оси

В случае, когда вектор $\vec{a}$ находится на координатной плоскости XOY (рис. 1.7, *б*), а угол между вектором $\vec{a}$ и положительным направлением оси OX равен β, то кроме проекции $a_x = a\cos\beta$ можно вычислить и проекцию на ось OY: $a_y = a\sin\beta$.

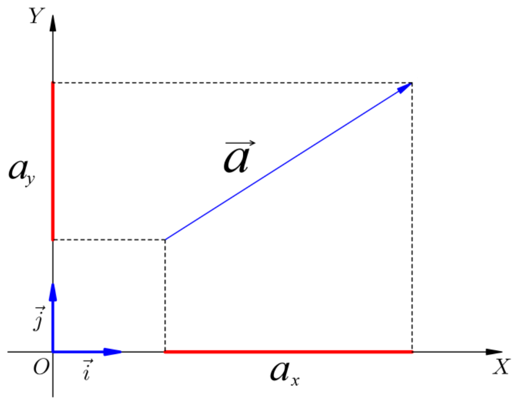


Рис. 1.8.

Пусть на плоскости фиксирована декартова прямоугольная система координат XOY; $\vec{i}$, $\vec{j}$ – единичные векторы (орты) осей OX и OY соответственно (рис. 1.8).

Разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\{\vec{i}, \vec{j}\}$:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}. \tag{1.4}$$

Модуль вектора можно определить через его координаты:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{1.5}$$

Все это можно обобщить на трехмерную систему координат.

Применение производной функции в физике

Физический смысл производной: если функция $y = f\,(x)$ и ее аргумент x являются физическими величинами, то производная $f'(x_0) \equiv \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ – скорость изменения переменной y относительно переменной x в точке x_0. Например, если $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t, то его производная $S'(t_0) \equiv \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=t_0}$ – это скорость в момент времени t_0, а $S''(t_0) \equiv \left.\frac{d^2S}{dt^2}\right|_{t=t_0}$ – это ускорение в момент времени t_0. Если точка движется вдоль оси x и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то проекция мгновенной скорости точки $\upsilon_x(t) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}$. Если $q = q(t)$ – заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за время t, то $I = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=t_0}$ – скорость изменения заряда в момент времени t_0, то есть сила тока в момент времени t_0.

Правила дифференцирования

1. Производная константы (постоянной величины) равна нулю $(C)' = 0$.
2. Если C – константа, тогда

$$\big(C \cdot f(x)\big)' = C \cdot f'(x), \qquad C \in R. \tag{1.6}$$

3. Производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных:

$$\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x). \tag{1.7}$$

4. Производная произведения двух функций

$$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \tag{1.8}$$

5. Производная частного двух функций (дроби)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}. \tag{1.9}$$

Необходимо оговорить, что $g(x)$ не обращается в ноль ни при каких x.

6. Если функция является сложной, то

$$\big[u\big(v(x)\big)\big]' = u'(v) \cdot v'(x). \tag{1.10}$$

Таблица 1.1

Таблица производных элементарных функций

$f(x)$	$\frac{df}{dx}$	$f(x)$	$\frac{df}{dx}$	$f(x)$	$\frac{df}{dx}$
C	0	e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$
x	1	a^x	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Частные производные

Если функция g является функцией нескольких переменных $g = g(x, y, z)$, то можно находить ее частные производные (их количество равно количеству переменных для конкретной функции). При вычислении частных производных от функций полагается, что все переменные, кроме той, по которой берется производная, фиксированы, то есть постоянны. Для частных производных справедливы все правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций.

Обозначение частных производных для функции нескольких переменных $g = g(x, y, z)$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial z}. \tag{1.11}$$

Первообразная и интеграл функции

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $F'(x) = f(x)$.

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для $f(x)$ на (a, b), то $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C – некоторая константа.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на интервале (a, b) и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{1.12}$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C.$
2. $\int dx = x + C.$
3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C \quad (\forall\alpha \neq -1).$
4. $\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
5. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$
6. $\int e^{x}dx = e^{x} + C.$
7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$
8. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$

Геометрический смысл определенного интеграла

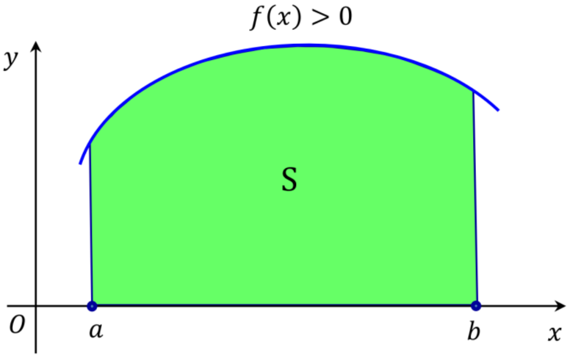


Рис. 1.9.

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x) > 0$, численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком подынтегральной функции, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью OX:

$$\int_a^b f(x)dx = S. \qquad (1.13)$$

Формула Ньютона – Лейбница: если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \qquad (1.14)$$

Основные понятия и формулы тригонометрии

Определения тригонометрических функций представлены ниже (рис. 1.10):

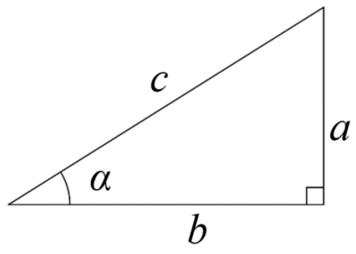


Рис. 1.10.

Синус угла α

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Косинус угла α

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Тангенс угла α

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Котангенс угла α

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

С помощью окружности единичного радиуса функции угла можно ввести следующим образом: *косинус* угла α – это абсцисса точки α, *синус* угла α – это ордината точки α (рис. 1.11).

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

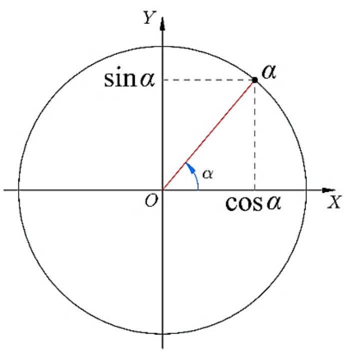


Рис. 1.11.

Знаки функций показаны на рис. 1.12.

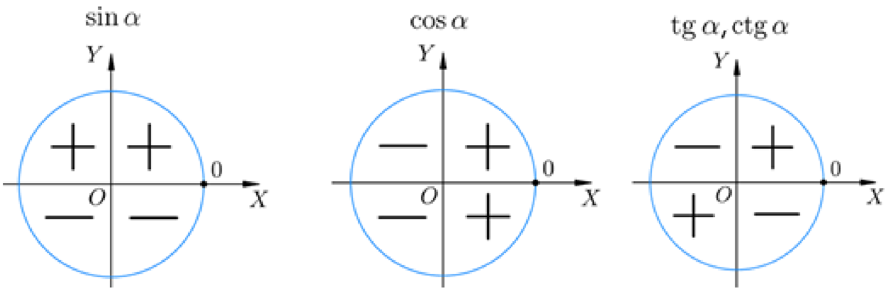


Рис. 1.12. Знаки тригонометрических функций в четвертях

Свойства тригонометрических функций

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(\alpha \pm 2\pi n) = \sin\alpha, n \in Z$

$\cos(\alpha \pm 2\pi n) = \cos\alpha, n \in Z$

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi n) = \operatorname{tg}\alpha, n \in Z$

$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha, n \in Z$

Таблица 1.2

Основные значения тригонометрических функций

α	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Таблица 1.3

Формулы приведения

Функция	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin(t)$	cos α	cos α	sin α	–sin α	–cos α	–cos α	–sin α
$\cos(t)$	sin α	–sin α	–cos α	–cos α	–sin α	sin α	cos α
$\operatorname{tg}(t)$	ctg α	–ctg α	–tg α	tg α	ctg α	–ctg α	–tg α
$\operatorname{ctg}(t)$	tg α	–tg α	–ctg α	ctg α	tg α	–tg α	–ctg α

Основные тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$$

Формулы кратных углов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\,\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}3\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\,\mathrm{ctg}\alpha}{3\,\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}$$

Формулы половинных углов

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Формулы сложения

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta}$$

Формулы суммы

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Формулы произведения

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

Формулы понижения степени

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Переход от tg/ctg к sin/cos

$$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Задания

1.1. Материальная точка движется прямолинейно по закону

а) $S(t) = 6t^2 - 48t + 17$,

б) $S(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$,

в) $S(t) = \log_5(t^2 - 30t + 249) + 8$,

г) $S(t) = -t^4 - 6t^3 + 5t + 23$,

д) $S(t) = \ln(t-3)^5 - 5t$,

е) $S(t) = 400\sqrt{2t+9} + 6t$,

ж) $S(t) = \sin(18t + 8\pi) + \frac{1008}{\pi}t^2 + 6$,

з) $S(t) = t^2\left(e^{\cos t^2} - e^{7t}\right) + 3t + \pi$,

где S – пройденный путь, а)–д) в метрах, е)–з) в километрах.

Найдите модуль ее скорости в момент времени:

а) $t = 9$ с,

б) $t = 6$ с,

в) $t = 15$ с,

г) $t = 3$ с,

д) $t = 4$ с,

е) $t = 8$ ч,

ж) $t = \frac{\pi}{18}$ ч,

з) $t = 0$.

1.2. Материальная точка движется прямолинейно по закону:

а) $S(t) = t^2 - 13t + 23$,

б) $S(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 40t + 3$,

в) $S(t) = 3t + \cos 2t$,

г) $S(t) = -t^3 - 8{,}25t^2 + \sqrt{\pi} + 22$,

д) $S(t) = 4t^2 - 10t + 2\ln t - 5$,

е) $S(t) = (t-19)^2(t^2 - 7t + 6)$,

ж) $S(t) = -\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 42t + 12$,

з) $S(t) = \sqrt{t^2 - 6t + 11}$,

где S – пройденный путь, а)–д), з) в метрах, е), ж) в километрах.

В какой момент времени модуль ее скорости был равен:

а) $\upsilon = 3$ м/с,

б) $\upsilon = 8$ м/с,

в) $\upsilon = 2$ м/с (в первый раз),

г) $\upsilon = 9$ м/с,

д) $\upsilon = 22{,}5$ м/с (во второй раз),

е) $\upsilon = 0$ км/ч (в третий раз),

ж) $\upsilon = 40$ км/ч.

з) $\upsilon = 0$ м/с.

1.3. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам

а)	$S_1(t) = 2{,}5t^2 - 6t + 1,$ $S_2(t) = 0{,}5t^2 + 2t - 3.$	В какой момент времени модули их скоростей равны?
б)	$S_1(t) = \dfrac{3t^2}{2} - 4t - 13,$ $S_2(t) = 1 + 7t - 4t^2.$	В какой момент времени модули их скоростей равны?
в)	$S_1(t) = t^2 - 8t + 4,$ $S_2(t) = 3t^2 - 4t - 9.$	В какой момент времени модуль скорости первой точки в три раза больше модуля скорости второй?
г)	$S_1(t) = 9t - 7,$ $S_2(t) = 0{,}5t^2 + 8t + 1.$	В какой момент времени модуль скорости первой точки в два раза меньше модуля скорости второй?
д)	$S_1(t) = 4t^2 - 3,$ $S_2(t) = 2t^3.$	В каком промежутке времени модуль скорости первой точки больше модуля скорости второй?

1.4. Автомобиль массой 664 кг отъезжает от остановки, его расстояние (в метрах) от остановки изменяется в зависимости от времени (в секундах):

а) $S(t) = t^3 + 2t^2 + 3t,$

б) $S(t) = \dfrac{t^2 + 36}{t},$

в) $S(t) = (t + 2)^2 \cdot t + 7,$

г) $S(t) = \dfrac{t^4}{2} - \dfrac{17t^3}{2} - \dfrac{161t^2}{4}.$

Найдите величину модуля его ускорения и равнодействующую сил, действующих на него:

а) в конце второй секунды,

б) в начале четвертой секунды,

в) в конце первой секунды,

г) в конце четвертой секунды.

1.5. Маховик, задерживаемый тормозом, поворачивается за t секунд на угол $\varphi(t) = 4t - 0{,}2t^2$. Найдите модуль угловой скорости вращения маховика в момент $t = 6$ с. В какой момент маховик остановится?

1.6. Зависимость количества электричества q, протекающего через проводник, от времени t задается формулой:

а) $q(t) = \sqrt{9 + t^2}$, в) $q(t) = \dfrac{7t^8}{t^4 + 1}$,

б) $q(t) = \text{tg}\pi t - \sin\dfrac{3\pi t}{2}$, г) $q(t) = 10^{2t-5}$.

Найдите силу тока в конце:

а) 4-й секунды, в) 1-й секунды,

б) 2-й секунды, г) 3-й секунды.

1.7. На тело, находящееся на горизонтальной плоскости, действуют три горизонтальные силы (на рис. 1.13 вид сверху). Каков модуль равнодействующей этих сил, если $F_1 = 1$ Н?

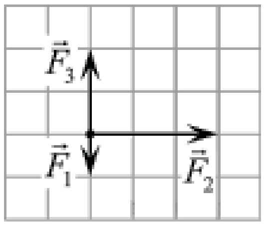


Рис. 1.13.

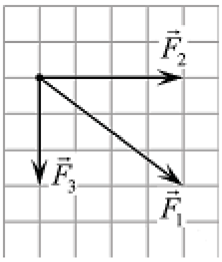
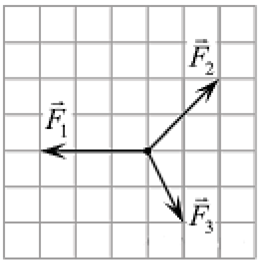


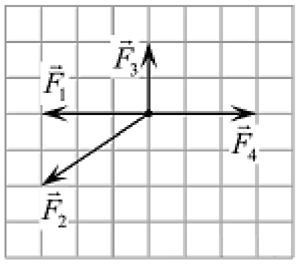
Рис. 1.14.

1.8. На рис. 1.14 представлены три вектора сил, лежащих в одной плоскости и приложенных к одной точке. Сторона одного квадрата сетки соответствует модулю силы 1 Н. Определите модуль вектора равнодействующей трех сил.

1.9. На рис. 1.15 представлены векторы сил, приложенных к одной точке и лежащих в одной плоскости. Модуль вектора силы F_1 равен 3 Н. Чему равен модуль равнодействующей всех векторов?



а



б

Рис. 1.15.

1.10. На тело действуют две силы: $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. По силе $\vec{F}_1$ и равнодействующей двух сил $\vec{F}$ найдите модуль второй силы (рис. 1.16). Ответ выразите в ньютонах и округлите до целого числа.

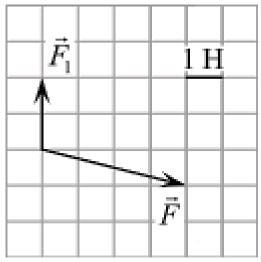
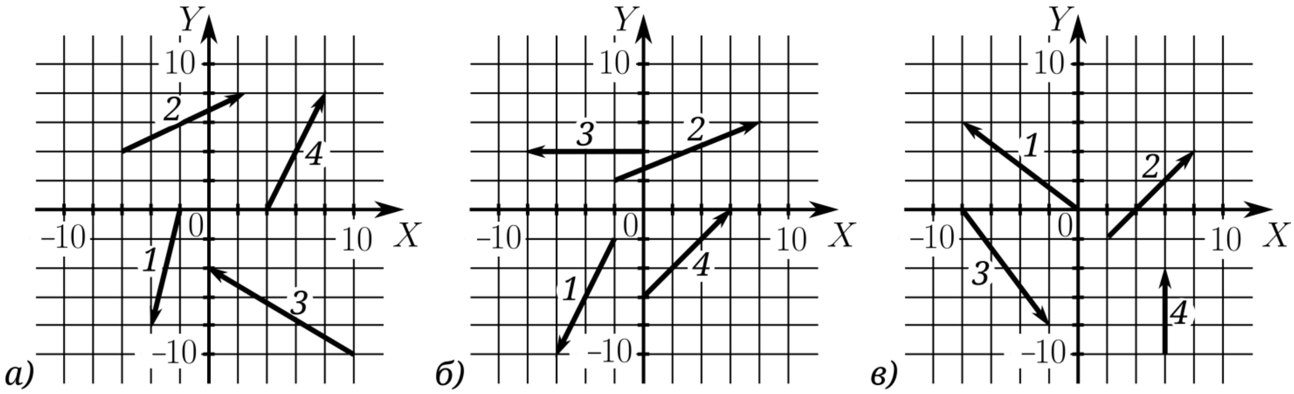


Рис. 1.16.

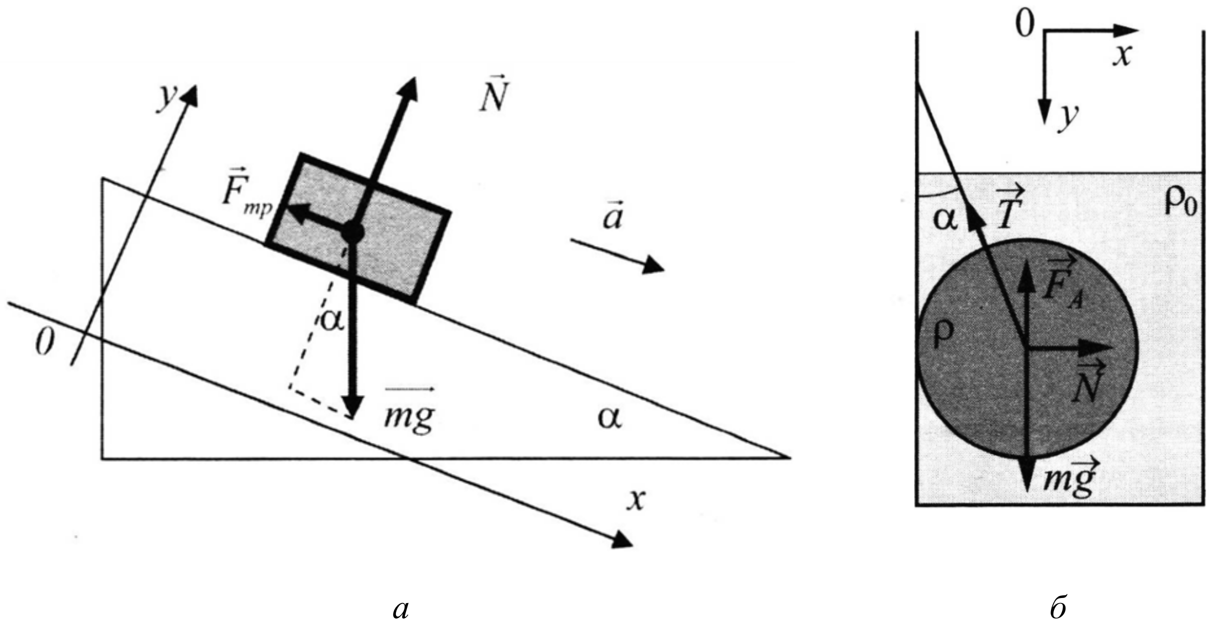
1.11. Найдите проекции на оси OX и OY векторов 1, 2, 3 и 4, представленных на рис. 1.17:



а *б* *в*

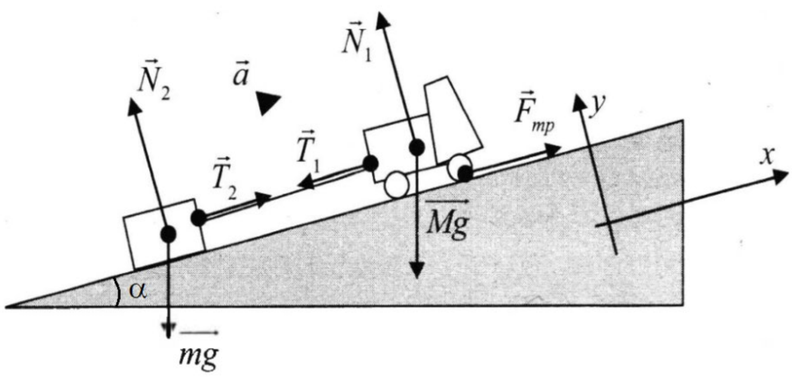
Рис. 1.17.

1.12. Найдите проекции векторов сил, действующих на тело, на оси OX и OY (рис. 1.18):

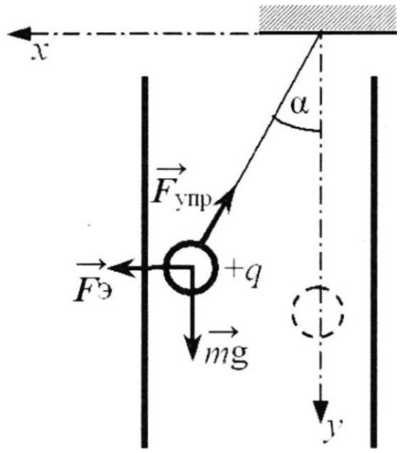


а *б*

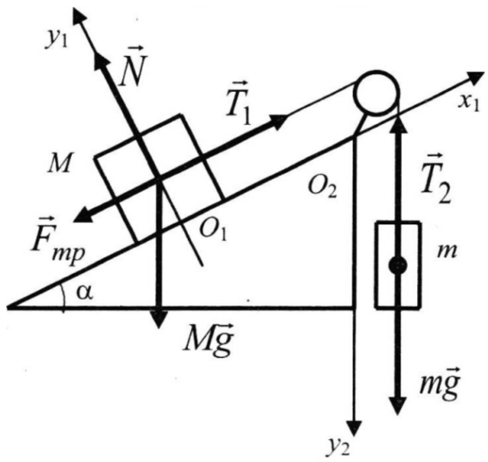
Рис. 1.18. (начало)



в



г



д

Рис. 1.18. (окончание)

1.13. Найдите частные производные для функций по всем переменным:

а) $\mathcal{I}_T = \mathcal{I}_P\left(\dfrac{T_1^2}{T_P^2} - 1\right)$,

б) $K = \dfrac{|\varphi_1 - \varphi_2|}{\varphi_0}$,

в) $R_x = \dfrac{R_1 \cdot R_M}{R_2}$,

г) $L = \dfrac{R}{2\pi\nu}\sqrt{\left(\dfrac{U_\Gamma}{U_R}\right)^2 - 1}$,

д) $g = \dfrac{GM}{(R+h)^2}$,

е) $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$,

ж) $N = N_0 \cdot 2^{-t/T}$.

II. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Кинематика – раздел механики, в котором рассматривается движение тел без учета их массы и действующих на них сил. Основной задачей кинематики является описание (с помощью уравнений, графиков или таблиц) движения, совершаемого телом или системой тел по отношению к выбранной системе отсчета, и определение всех кинематических характеристик этого движения.

В случаях, когда расстояния, проходимые точками движущегося тела, очень велики по сравнению с его размерами, тело можно рассматривать как *материальную точку*.

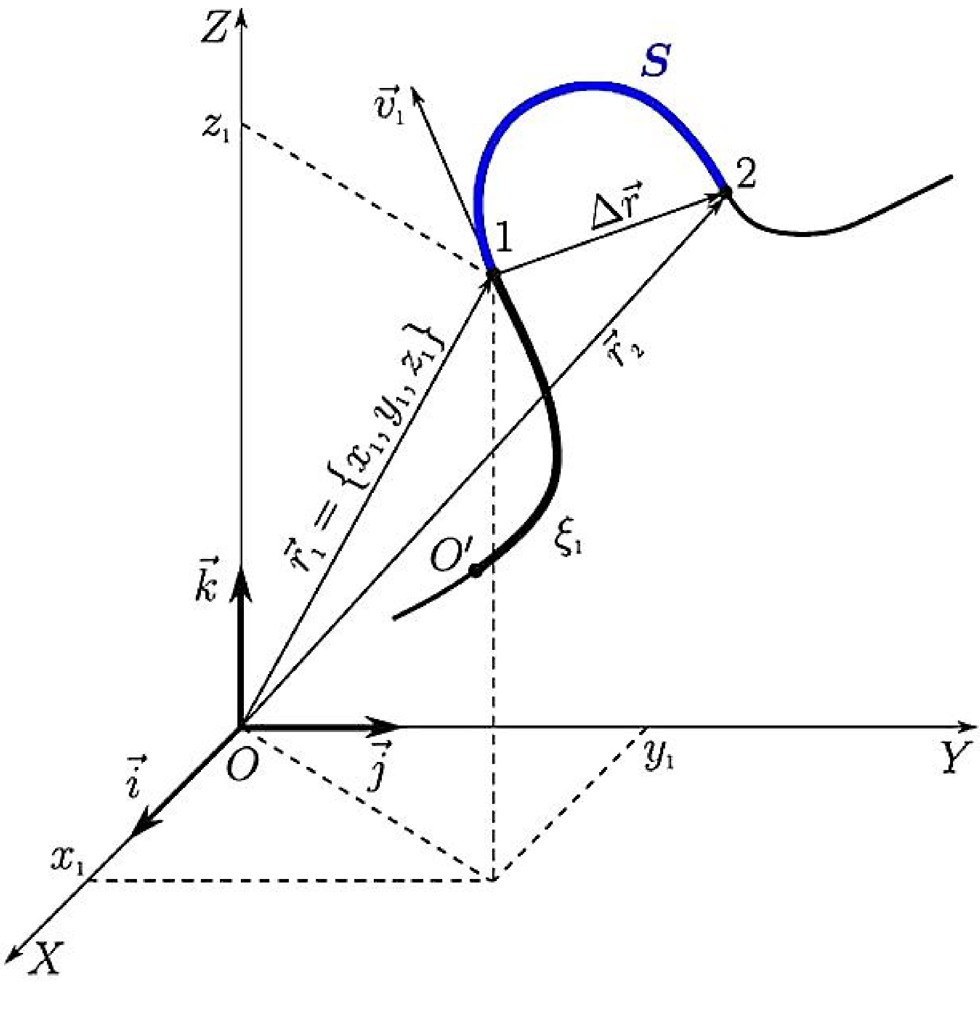


Рис. 2.1. Кинематические характеристики движения материальной точки

Положение свободной материальной точки в пространстве по отношению к какой-либо системе отсчета определяется тремя координатами, не зависящими друг от друга. В декартовой системе отсчета традиционно эти координаты обозначают (x, y, z). Три координаты можно объединить в *радиус-вектор* $\vec{r}$ – вектор, проведенный из начала координат в место нахождения материальной точки, – и указать положение точки при помощи одной векторной величины. Проекции этого вектора на оси координат равны координатам точки, поэтому

$$\vec{r} = \{x, y, z\} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}, \tag{2.1}$$

где $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ – единичные векторы, направленные вдоль соответствующих осей координат (рис. 2.1). Модуль радиус-вектора, то есть длина отрезка, соединяющего начало координат и место нахождения точки, равен

$$r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2.2}$$

С течением времени положение материальной точки меняется, и конец радиус-вектора описывает кривую, называемую *траекторией*. В зависимости от формы траектории различают *прямолинейное* и *криволинейное* движения. При криволинейном движении в случае, если все точки траектории лежат в одной плоскости, траектория называется *плоской*, в противном случае – *пространственной.*

Чтобы описать движение точки в выбранной системе отсчета, нужно знать ее положение в любой момент времени, то есть определить ее координаты как функции времени t. Скалярные уравнения

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{2.3}$$

называются *кинематическими уравнениями движения* (в декартовых координатах) и определяют так называемый *закон движения* точки. Одновременно эти уравнения являются параметрическими уравнениями траектории точки (в качестве параметра выступает t – время). Исключив время из уравнений движения, можно получить уравнение траектории в виде неявной зависимости между координатами точки $f(x, y, z) = 0$ или в виде явной зависимости одной координаты от других, к примеру, $z = z(x, y)$.

Объединяя (2.1) и (2.3), три уравнения для скалярных величин – координат – можно заменить одним векторным уравнением – зависимостью радиус-вектора от времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}. \tag{2.4}$$

Зависимость $\vec{r}(t)$ также задает *закон движения* точки.

Если траектория точки известна заранее, положение точки также можно указать при помощи измеренного вдоль траектории расстояния до материальной точки от некоторой выбранной точки траектории (см. точку O' на рис. 2.1). Тогда *закон движения* точки можно задать уравнением вида

$$\xi = \xi(t). \tag{2.5}$$

Величину ξ называют дуговой, или криволинейной координатой. (Часто криволинейную координату также обозначают буквой s, и из-за сходства обозначений эту величину иногда путают с путем S. Надо помнить, что эти величины **не** тождественны, хоть и связаны между собой.) Если точка движется по прямой, то в качестве такой координаты может использоваться любая из декартовых координат – x, y или z.

Функции, входящие в уравнения (2.3), (2.4), (2.5), должны быть однозначными и дважды дифференцируемыми (это необходимо для вычисления скоростей и ускорений).

Если (см. рис. 2.1) в некоторый момент времени t_1 точка находилась в положении 1, определяемом радиус-вектором $\vec{r}_1$, а в последующий момент t_2 – в положении 2 с радиус-вектором $\vec{r}_2$, то векторная величина

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.6)$$

называется *перемещением* (или *приращением радиус-вектора*). Одно и то же перемещение может потребовать больше или меньше времени. Для оценки быстроты перемещения вводится величина, называемая *скоростью*.

Отношение перемещения к промежутку времени Δt, за который оно произошло, называют *средней скоростью* движения точки:

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}. \quad (2.7)$$

Средняя скорость совпадает по направлению с вектором перемещения.

Если уменьшать промежуток Δt, устремляя его к нулю, то за малый промежуток времени dt точка совершит элементарное (малое) перемещение $d\vec{r}$, и *мгновенная скорость* точки (скорость точки в момент времени t) будет равна

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.8)$$

Направлена мгновенная скорость по касательной к траектории в сторону движения точки. С учетом (2.1) можно записать:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k} = \{v_x, v_y, v_z\}, \quad (2.9)$$

где $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$ – проекции скорости на оси координат.

Модуль мгновенной скорости равен:

$$v \equiv |\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}. \qquad (2.10)$$

Часто слово «мгновенная» опускают, если не требуется отличать мгновенную скорость от средней или если из контекста понятно, о чем идет речь.

Если мгновенная скорость при движении материальной точки остается постоянной (то есть не меняется с течением времени), движение называется *равномерным*. Тогда уравнения движения принимают вид

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t. \end{cases} \qquad (2.11)$$

Если скорость тела меняет свое значение с течением времени, движение является *неравномерным*.

Если известна зависимость скорости от времени $\vec{v}(t)$ и положение тела $\vec{r}_1$ в момент времени t_1, то можно решить обратную задачу кинематики – определить положение тела $\vec{r}_2$ в любой другой момент времени t_2. Из (2.8) следует, что

$$d\vec{r} = \vec{v}dt,$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}dt\,,$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}dt\,,$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}dt. \qquad (2.12)$$

Модуль мгновенной скорости соответствует расстоянию $|d\vec{r}|$, на которое смещается точка за малый промежуток времени dt, без учета направления этого смещения. Это расстояние и есть элементарный (малый) путь δS. Таким образом, модуль мгновенной скорости может быть определен не только как (2.10), но и как:

$$v \equiv |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{\delta S}{dt}. \tag{2.13}$$

И аналогично (2.12), если известна зависимость модуля скорости от времени $v(t)$, то можно определить *путь* S – расстояние, пройденное телом вдоль дуги траектории за промежуток времени Δt:

$$\delta S = v dt,$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v dt. \tag{2.14}$$

Средний модуль скорости равен, соответственно,

$$\langle v \rangle = \frac{S}{\Delta t}. \tag{2.15}$$

Средний модуль скорости не равен модулю средней скорости – это не тождественные понятия! Можно показать, что модуль средней скорости всегда не превышает среднего модуля скорости:

$$|\langle \vec{v} \rangle| \leq \langle v \rangle. \tag{2.16}$$

В случае неравномерного движения также можно интересоваться быстротой изменения скорости.

Средним ускорением материальной точки называется отношение изменения скорости точки $\Delta\vec{v}$ к промежутку времени Δt, за который оно произошло:

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.17}$$

Если за малый промежуток времени dt элементарное (малое) приращение (изменение) скорости составило $d\vec{v}$, то их отношение называется *мгновенным ускорением* материальной точки:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{2.18}$$

С учетом (2.9) можно записать:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} = \{a_x, a_y, a_z\}, \tag{2.19}$$

где $a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}$ – проекции ускорения на оси координат. Модуль мгновенного ускорения равен:

$$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}. \tag{2.20}$$

Мгновенное ускорение может оставаться постоянным – такое движение называется *равноускоренным (равнопеременным)*. Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + a_x\dfrac{t^2}{2} \\ y = y_0 + v_{0y}t + a_y\dfrac{t^2}{2} \\ z = z_0 + v_{0z}t + a_z\dfrac{t^2}{2}, \end{cases} \tag{2.21}$$

а проекции скорости зависят от времени следующим образом:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t \\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t \\ \upsilon_z = \upsilon_{0z} + a_z t. \end{cases} \tag{2.22}$$

Если известна зависимость ускорения от времени $\vec{a}(t)$ и скорость тела $\vec{\upsilon}_1$ в момент времени t_1, то можно определить скорость тела $\vec{\upsilon}_2$ в любой другой момент времени t_2. Из (2.18) следует, что

$$d\vec{\upsilon} = \vec{a}dt,$$

$$\int_{\vec{\upsilon}_1}^{\vec{\upsilon}_2} d\vec{\upsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}dt\,,$$

$$\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}dt\,,$$

$$\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}dt. \tag{2.23}$$

Кроме разложения ускорения в три проекции на оси декартовых координат существует также разложение мгновенного ускорения на тангенциальную (касательную к траектории) и нормальную (перпендикулярную к касательной) составляющие (рис. 2.2):

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}, \tag{2.24}$$

где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, сонаправленный со скоростью, а $\vec{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный $\vec{\tau}$ (рис. 2.2) и направленный к центру кривизны траектории. В отличие от векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, фиксированных в выбранной системе координат, векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ меняют свое направление во время движения точки.

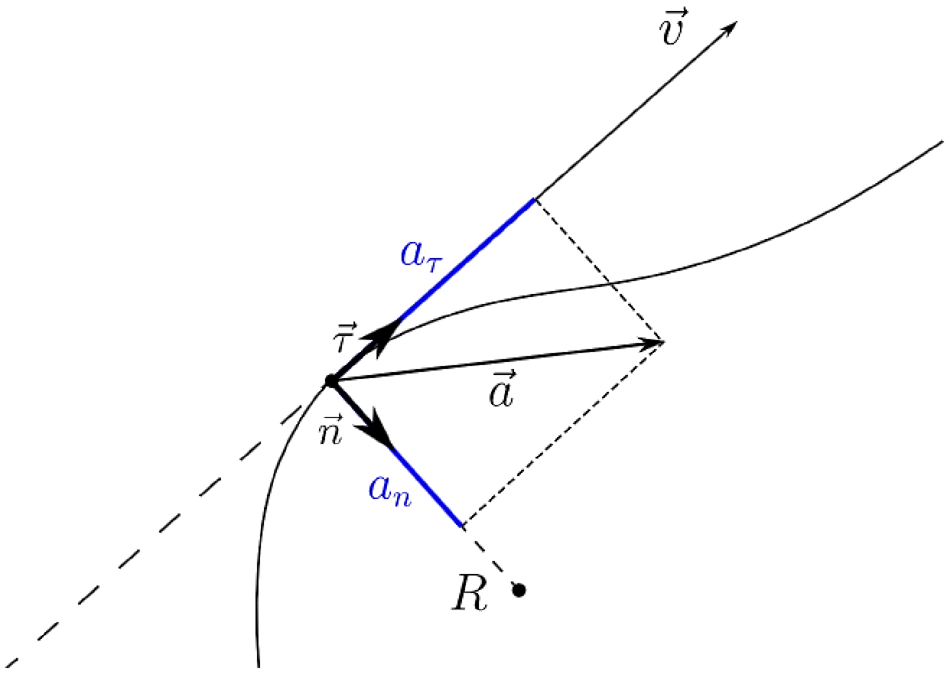


Рис. 2.2. Тангенциальная и нормальная проекции ускорения

Проекция ускорения на касательную к траектории называется тангенциальным ускорением и характеризует быстроту изменения скорости по модулю (то есть по ее численной величине):

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \tag{2.25}$$

Проекция ускорения на перпендикуляр к касательной (нормаль) называется нормальным (центростремительным) ускорением, характеризует быстроту изменения скорости точки по направлению и определяется формулой:

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \tag{2.26}$$

где R – радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке.

Модуль ускорения может быть также найден по известным нормальному и тангенциальному ускорениям:

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2}. \tag{2.27}$$

Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Движение тела, брошенного под углом к горизонту (*баллистическое* движение – рис. 2.3) – частный случай *равноускоренного* движения с *плоской* траекторией. Вектор ускорения постоянен ($g = 9{,}81$ м/с^2) и направлен против вертикальной оси координат.

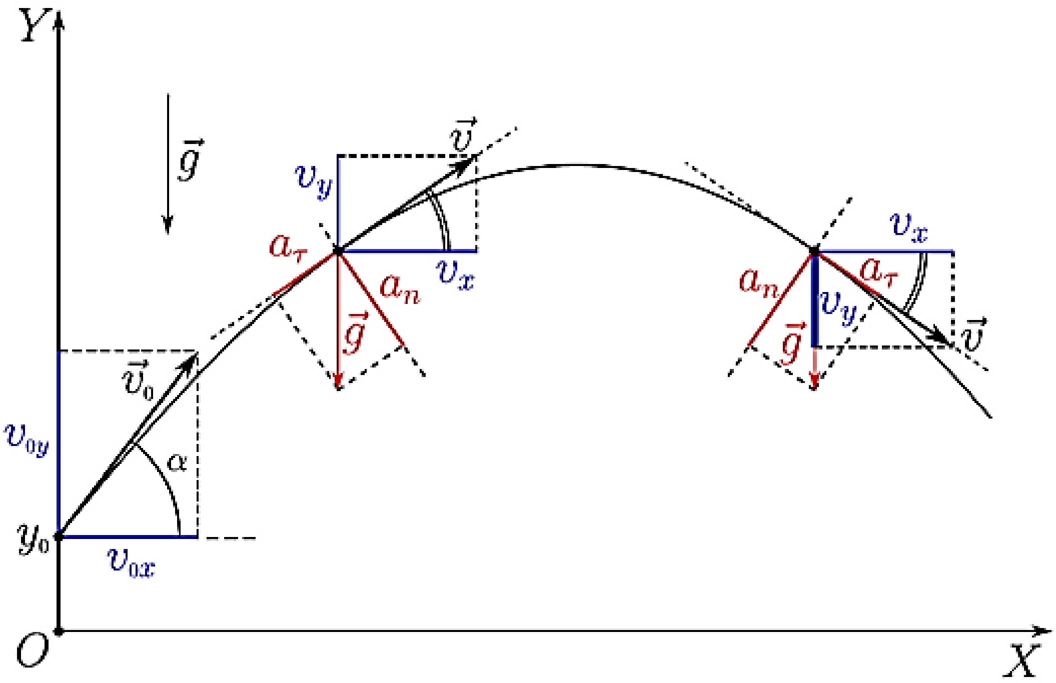


Рис. 2.3. Баллистическая траектория

Зависимости координат, проекций скорости и ускорения на оси при баллистическом движении (в двумерной системе отсчета, плоскость которой совпадает с плоскостью траектории точки, как на рис. 2.3) имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t = x_0 + v_0\cos\alpha\cdot t \\ y = y_0 + v_{0y}t + a_y\dfrac{t^2}{2} = y_0 + v_0\sin\alpha\cdot t - g\dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_y = v_{0y} + a_yt = v_0\sin\alpha - gt \end{cases} \qquad (2.28)$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g. \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Какие вы знаете виды систем отсчета?
2. Что такое радиус-вектор?
3. Покажите, что проекции радиус-вектора на оси декартовых координат равны координатам материальной точки.
4. Как определить модуль радиус-вектора?
5. Что такое траектория?
6. Каковы три способа задания уравнения траектории?
7. Какое движение точки называется прямолинейным?
8. Какое движение точки называется криволинейным?
9. Радиус-вектор точки изменяется только по модулю. Какой будет траектория?
10. Радиус-вектор точки изменяется только по направлению. Какой будет траектория?
11. Что представляет собой кинематическое уравнение движения (закон движения)?
12. Каковы три способа задания закона движения материальной точки?
13. Что такое перемещение?
14. Как вычислить среднюю скорость точки?
15. Что называется мгновенной скоростью точки?
16. Как направлена средняя скорость?
17. Как направлена мгновенная скорость?
18. Чем отличается равномерное движение от неравномерного?
19. Запишите кинематическое уравнение равномерного движения.
20. Покажите, что средний модуль скорости всегда больше либо равен модулю средней скорости.
21. В каком случае модуль средней скорости и средний модуль скорости равны друг другу?

22. Как определить среднее ускорение?

23. Что такое мгновенное ускорение?

24. Запишите кинематическое уравнение равноускоренного движения.

25. Чем отличается тангенциальное ускорение от нормального?

26. По какой траектории движется частица в случае, если $a_\tau = 0$, $a_n = \text{const}$?

27. По какой траектории движется частица в случае, если $a_\tau = const$, $a_n = 0$?

28. Какими способами можно вычислить модуль мгновенного ускорения?

29. Какие величины можно вычислить, если известны зависимость скорости от времени и значение радиус-вектора в некоторый момент времени?

30. Какие величины можно вычислить, если известна зависимость скорости от времени, но не известно значение радиус-вектора ни в какой из моментов времени?

31. Какие величины можно вычислить, если известна зависимость модуля скорости от времени?

32. Как связаны между собой путь и криволинейная координата?

Задачи для аудиторных занятий

I уровень

2.1. Движение материальной точки вдоль оси x описывается уравнением $x = 5 + 6t - 7t^2$. Чему равны проекции на ось x начальной скорости v_{0x} и ускорения a_{0x}?

2.2. Материальная точка движется вдоль оси x по закону $x = 3 - 5t - 10t^2$. Чему равна проекция ускорения материальной точки на ось x?

2.3. На рис. 2.4 задан график зависимости пути от времени. Какой график зависимости модуля скорости от времени (рис. 2.5) соответствует этому движению?

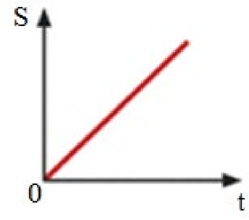


Рис. 2.4.

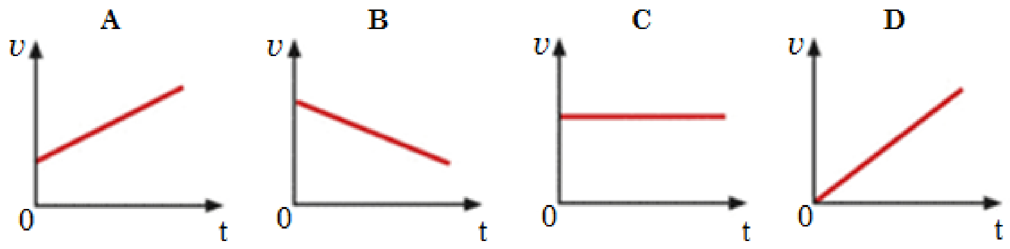


Рис. 2.5.

2.4. Материальная точка движется по криволинейной траектории из точки 1 в точку 2 (рис. 2.6). Определите:

а) с каким вектором совпадает вектор перемещения;

б) с каким вектором совпадает вектор мгновенной скорости.

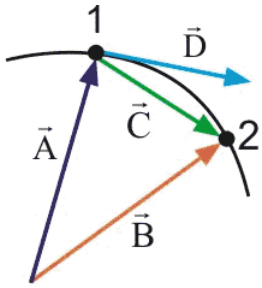


Рис. 2.6.

2.5. Укажите, на каком рисунке (рис. 2.7) правильно указано направление вектора полного ускорения для случая:

а) если модуль линейной скорости точки уменьшается в процессе движения;

б) если модуль линейной скорости точки возрастает в процессе движения.

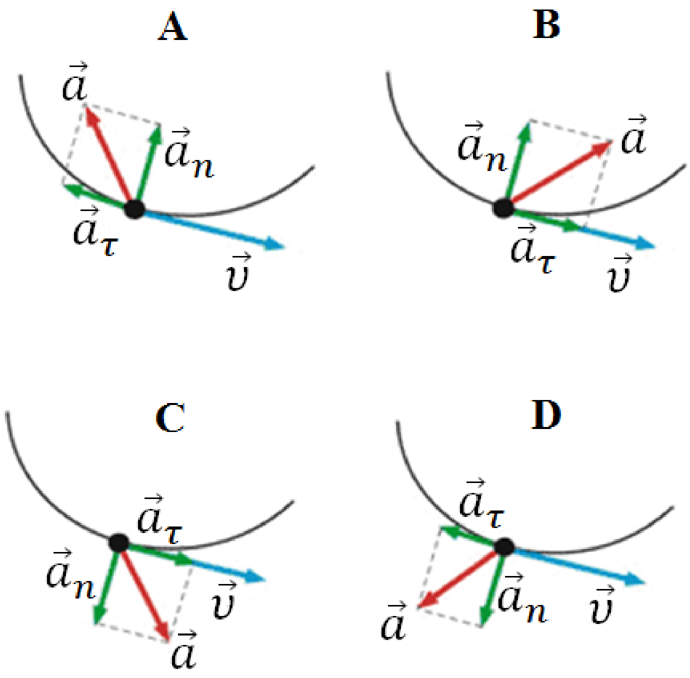


Рис. 2.7.

2.6. Мяч упал с высоты 3 м, отскочил от пола и был пойман на высоте 1 м от него. Чему равны путь S и модуль перемещения $|\Delta\vec{r}|$ мяча?

2.7. Тело брошено вертикально вверх. Какой из представленных графиков (рис. 2.8) зависимости модуля скорости v от времени соответствует этому движению?

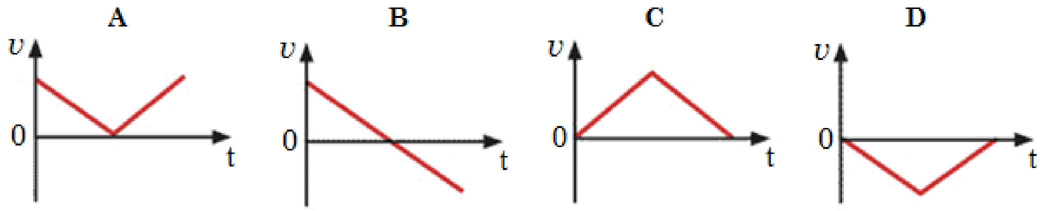


Рис. 2.8.

2.8. Тело брошено вертикально вверх. Какой из представленных графиков (рис. 2.9) зависимости проекции скорости v_y на ось OY от времени соответствует этому движению? Ось OY направлена от Земли вверх.

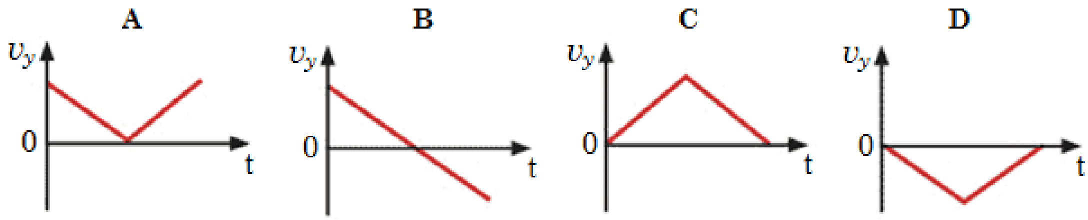


Рис. 2.9.

2.9. Движение материальной точки задано уравнением $x = At + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 5$ м/с, $B = 0{,}2$ м/с^2, $C = 0{,}1$ м/с^3. Определить модуль скорости точки в моменты времени $t_1 = 2$ с, $t_2 = 4$ с.

2.10. Уравнение прямолинейного движения имеет вид $x = A + Bt + Ct^2$, где $A = 1$ м, $B = 3$ м/с, $C = -0{,}25$ м/с^2. Построить графики зависимости координаты и пути от времени для первых десяти секунд движения.

2.11. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = At + Bt^2$, где $A = 2$ м/с, $B = -0{,}5$ м/с^2. Определить средний модуль скорости точки в интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

II уровень

2.12. Уравнения движения частицы имеют вид: $x = A + Bt^3$, $z = Ct^2$, где $A = 2$ м, $B = 1\,\text{м}/\text{с}^3$, $C = 1\,\text{м}/\text{с}^2$. Записать уравнение движения в векторной форме. Определить радиус-вектор частицы в момент времени $t = 2$ с. Вычислить модуль этого радиус-вектора.

2.13. Закон движения частицы задается уравнением $\vec{r} = At^2\vec{i} + Bt^3\vec{j}$, где $A = 1\,\text{м}/\text{с}^2$, $B = 3\,\text{м}/\text{с}^3$. Записать уравнение движения вдоль оси OY. Вычислить проекцию радиус-вектора на эту ось в момент времени $t = 3$ с.

2.14. Радиус-вектор частицы определяется выражением $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 7\vec{k}$ (м). Вычислить: а) перемещение частицы за первые 10 секунд движения; б) модуль этого перемещения.

2.15. Материальная точка движется по дуге окружности так, что ее криволинейная координата меняется по закону $\xi = A + Bt^2$, где $A = 2$ м, $B = 1\,\text{м}/\text{с}^2$. Определить путь, пройденный точкой за первые 5 секунд движения.

2.16. Точка движется вдоль оси x так, что ее координата меняется по закону $x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, где $A = 5$ м, $T = 8$ с. Найти для момента времени $t = 5$ с проекции на ось x скорости и ускорения точки.

2.17. Между первой и пятой секундами прямолинейного движения тела его координата изменяется по закону $z = B/t$, где $B = 50$ м·с. Построить графики зависимости от времени для пути, пройденного телом, и проекции его скорости на ось z.

2.18. Материальная точка движется по плоскости согласно уравнению $\vec{r} = At^3\vec{i} + Bt^2\vec{j}$. Написать зависимости $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$.

2.19. Материальная точка движется по закону $\vec{r} = A\sin(\omega t)\,\vec{i} + B\cos(\omega t)\,\vec{j}$, где $A = 2$ м, $B = 3$ м, $\omega = 5\,\text{рад}/\text{с}$. Вычислить скорость, модуль скорости, ускорение и модуль ускорения точки в момент времени $t = 2$ с. Определить траекторию точки.

2.20. Закон движения частицы имеет вид: $x = At + B$, $y = Ct^2 + D$, где $A = 1$ м/с, $B = 2$ м, $C = 3$ м/с^2, $D = 1$ м. Найти: а) приращение радиус-вектора за время от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 2$ с; б) модуль скорости в момент времени t_2.

2.21. Уравнение движения частицы имеет вид: $\vec{r} = At^3\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$, где $A = 1$ м/с^3, $B = 2$ м/с, $C = 1$ м. Найти: а) приращение скорости частицы за время от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с; б) модуль ускорения в момент времени $t_3 = 2$ с.

2.22. Закон движения частицы имеет вид: $x = At$, $y = Bt + Ct^2$, где $A = 0{,}5$ м/с, $B = 2$ м/с, $C = -0{,}25$ м/с^2. Найти угол между скоростью и ускорением точки в момент времени $t = 3$ с.

2.23. Закон движения частицы имеет вид: $x = Bt^2$, $z = Ct + Dt^3$, где $B = 2$ м/с^2, $C = 1$ м/с, $D = 1$ м/с^3. Найти: а) приращение скорости за время от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 4$ с; б) модуль ускорения в момент времени $t_3 = 2$ с.

2.24. Закон движения частицы имеет вид: $x = At + B$, $z = Ct^3$, где $A = 1$ м/с, $B = 2$ м, $C = 3$ м/с^3. Найти: а) модуль скорости в момент времени $t = 2$ с; б) приращение ускорения за 10 секунд от начала движения.

2.25. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = t^3\vec{i} + 3t^2\vec{j}$ (м). Для момента времени $t = 1$ с определить: а) модуль скорости; б) модуль ускорения.

2.26. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = 4t^2\vec{i} + 3t\vec{j} + 2\vec{k}$ (м). Для момента времени $t = 2$ с определить: а) скорость точки; б) модуль этой скорости; в) ускорение точки.

2.27. Радиус-вектор частицы изменяется со временем по закону $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + \vec{k}$ (м). Для момента времени $t = 1$ с найти: а) скорость частицы; б) ускорение частицы; в) модуль ускорения.

2.28. Закон движения частицы имеет вид $\vec{r} = At^2\vec{\imath} + Bt^3\vec{\jmath}$, где $A = 1\,\text{м/с}^2$, $B = 3\,\text{м/с}^3$. Найти: а) проекцию ускорения на ось y в момент времени $t = 1$ с; б) модуль скорости в тот момент времени, когда координата x частицы равна 4 м.

2.29. Материальная точка перемещается в пространстве так, что вектор ее скорости меняется по закону $\vec{v} = At\vec{\imath} + Bt^2\vec{\jmath}$, где $A = 1\,\text{м/с}^2$, $B = 2\,\text{м/с}^3$. Найти: а) модуль скорости в момент времени $t_1 = 2$ с и б) приращение радиус-вектора за время от t_1 до $t_2 = 4$ с.

2.30. Модуль скорости частицы изменяется с течением времени по закону $v = v_0 e^{-\beta t}$, где $v_0 = 6\,\text{м/с}$, $\beta = 3\,\text{с}^{-1}$. Определить: а) тангенциальное ускорение частицы в момент времени $t_1 = 1$ с и б) путь, который пройдет частица за время от t_1 до $t_2 = 3$ с.

2.31. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r} = (A + Bt^2)\vec{\imath} + Ct\vec{\jmath}$, где $A = 10$ м, $B = -5\,\text{м/с}^2$, $C = 10\,\text{м/с}$. Начертить траекторию точки. Найти выражения $\vec{v}(t)$ и $\vec{a}(t)$. Для момента времени $t = 1$ с вычислить: а) модуль скорости; б) модуль ускорения; в) модуль тангенциального ускорения; г) модуль нормального ускорения.

2.32. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r} = A(\vec{\imath}\cos(\omega t) + \vec{\jmath}\sin(\omega t))$, где $A = 0{,}5$ м, $\omega = 5\,\text{рад/с}$. Для момента времени $t = 4$ с определить модуль скорости и нормальное ускорение точки. Начертить траекторию точки.

2.33. По окружности радиусом $R = 5$ м движется материальная точка. Модуль скорости точки постоянен и равен $v = 10\,\text{м/с}$. Построить графики зависимости пути и модуля перемещения от времени. Путь и перемещение отсчитывать от точки старта.

2.34. Точка движется по окружности радиусом $R = 4$ м. Модуль начальной скорости точки v_0 равен 3 м/с, тангенциальное ускорение

$a_\tau = 1\ \text{м/с}^2$. Определить: а) путь, пройденный точкой к моменту времени $t = 2$ с; б) модуль перемещения за тот же промежуток времени.

2.35. Точка движется по окружности радиусом $R = 4$ м согласно уравнению $\xi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ м, $B = -2\ \text{м/с}$, $C = 1\ \text{м/с}^2$. Найти тангенциальное и нормальное ускорение точки в момент времени $t = 2$ с.

2.36. Точка движется по окружности радиусом $R = 4$ см так, что зависимость криволинейной координаты от времени имеет вид $s = A + Ct^3$, где $A = 2$ м, $C = 1\ \text{м/с}^3$. Сколько оборотов сделает точка к тому времени, когда ее тангенциальное ускорение станет равным $1{,}2\ \text{м/с}^2$?

2.37. По дуге окружности радиусом $R = 10$ м движется точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки $a_n = 4{,}9\ \text{м/с}^2$. В этот момент векторы нормали к траектории и полного ускорения образуют угол $\alpha = 60°$. Найти модуль скорости и тангенциальное ускорение точки.

2.38. С вышки бросили камень в горизонтальном направлении. Через две секунды камень упал на землю на расстоянии $L = 40$ м от основания вышки. Определить модули начальной и конечной скорости камня.

2.39. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении с начальной скоростью, модуль которой $\upsilon_0 = 30\ \text{м/с}$. Определить модуль скорости, тангенциальное и нормальное ускорение камня в конце второй секунды после начала движения.

2.40. Тело брошено под некоторым углом к горизонту. Найти этот угол, если горизонтальная дальность полета в четыре раза больше максимальной высоты траектории.

III уровень

2.41. Ускорение частицы меняется с течением времени по закону: $\vec{a} = Bt^2\vec{j} + C\sqrt{t}\,\vec{k}$, где $B = 1\ \text{м/с}^4$, $C = 2\ \text{м/с}^{5/2}$. Найти: а) приращение скорости за время от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 4$ с и б) модуль радиус-вектора в момент времени t_1, если в начальный момент времени частица находилась в точке $\vec{r}_0 = 3\vec{j} + 4\vec{k}$, а ее скорость была равна $\vec{v}_0 = 5\vec{j}$.

2.42. Материальная точка начинает двигаться вдоль прямой так, что ее ускорение линейно растет и за 10 с достигает значения $5\ \text{м/с}^2$. Определить в конце десятой секунды: а) модуль скорости точки; б) пройденный точкой путь.

2.43. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом $R = 4$ м, задается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$, где $A = 1\,\text{м/с}^2$, $B = 6\,\text{м/с}^3$, $C = 9\,\text{м/с}^4$. Определите: а) тангенциальное ускорение точки; б) путь, пройденный точкой за 5 с после начала движения; в) модуль полного ускорения для момента времени $t = 1$ с.

2.44. Тело брошено под углом к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти среднее значение скорости $\langle\vec{v}\rangle$ за первые τ секунд полета (для расчета использовать числовые данные, указанные преподавателем).

2.45. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды, перпендикулярной к берегам скоростью $v = 0{,}3$ м/с. Ширина реки равна $b = 63$ м. Скорость течения изменяется по параболическому закону

$$u = u_0 - 4\frac{u_0}{b^2}\left(x - \frac{b}{2}\right)^2,$$

где x – расстояние от берега, $u_0 = 5$ м/с. Найти снос лодки s вниз по течению от пункта ее отправления до места причала на противоположном берегу реки.

2.46. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности Земли. Скорость его подъема постоянна и равна по модулю v_0. Благодаря ветру шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $\upsilon_x = by$, где b – постоянная, y – высота от поверхности Земли. Найти: а) величину сноса шара в зависимости от высоты подъема; б) полное, тангенциальное и нормальное ускорение шара. Вычислить значения величин, используя числовые данные, указанные преподавателем.

2.47. Два тела бросили одновременно: одно – вертикально вверх со скоростью, равной по модулю $\upsilon_1 = 25$ м/с, другое – под углом к горизонту $\alpha = 30°$ со скоростью, равной по модулю $\upsilon_2 = 30$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти зависимость их относительной скорости от времени движения.

Индивидуальное домашнее задание

Уравнение движения. Кинематические характеристики

2.48. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0{,}5$ м/с^2. Модуль начальной скорости точки $\upsilon_0 = 2$ м/с. Определить: а) модуль скорости и б) модуль полного ускорения точки через 2 секунды от старта, если радиус кривизны траектории в этот момент $R = 3$ м.

2.49. Ускорение частицы меняется с течением времени по закону: $\vec{a} = At\vec{i} + Bt^4\vec{j}$, где $A = 4$ м/с^3, $B = 1$ м/с^6. В начальный момент времени частица была неподвижна. Найти: а) модуль скорости в момент времени $t = 1$ с; б) приращение радиус-вектора за 6 с от начала движения.

2.50. Точка движется по окружности радиусом $R = 2$ м согласно уравнению $s = At^3$, где $A = 2$ м/с^3. А) В какой момент времени тангенциальное и нормальное ускорение точки будут равны? Б) Определить модуль полного ускорения в этот момент.

2.51. Проекция скорости материальной точки на ось x, вдоль которой она движется, определяется уравнением $\upsilon_x = 0{,}2 - 0{,}1t$ (м/с). Найти: а) координату точки в момент времени $t = 10$ с, если в начальный момент времени она находилась в точке $x_0 = 1$ м; б) среднюю скорость за первые пять секунд движения.

2.52. Ускорение частицы меняется с течением времени по закону: $\vec{a} = Bt^2\vec{j} + Ct^3\vec{k}$, где $B = 1\,\text{м/с}^4$, $C = 2\,\text{м/с}^5$. Найти: а) модуль скорости в момент времени $t_1 = 2$ с, если в начальный момент времени частица была неподвижна; б) приращение радиус-вектора за время от $t_2 = 1$ с до $t_3 = 3$ с.

2.53. Движение точки по прямой задано уравнением $x = At + Bt^3$, где $A = 6$ м/с, $B = -0{,}125$ м/с^3. Определить: а) средний модуль скорости и б) модуль средней скорости точки в интервале времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с.

2.54. Скорость движущейся частицы меняется с течением времени по закону $\vec{\upsilon} = At^3\vec{i} + Bt^2\vec{k}$, где $A = 1\,\text{м/с}^4$, $B = 2\,\text{м/с}^3$. Найти: а) модуль ускорения в момент времени $t = 3$ с и б) приращение радиус-вектора за 7 с от начала движения.

2.55. Точка движется по окружности радиусом $R = 10$ см так, что ее нормальное ускорение меняется по закону $a_n = Bt^6$, где $B = 9$ м/с^8. А) Каково тангенциальное ускорение точки в момент времени $t = 5$ с? Б) Какой путь пройдет точка за 20 с от начала движения?

2.56. Радиус-вектор частицы изменяется с течением времени по закону $\vec{r} = At^2\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$, где $A = 3\,\text{м/с}^2$, $B = 2$ м/с, $C = 1$ м. Найти: а) модуль скорости частицы в момент времени $t_1 = 1$ с и б) путь, пройденный частицей за вторую секунду движения.

2.57. Точка движется по окружности радиусом $R = 10$ см с постоянным тангенциальным ускорением. А) Чему равно тангенциальное ускорение точки, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения скорость точки стала равна $8\ \text{см/с}$? Б) Чему в этот момент времени равно нормальное ускорение точки?

2.58. Ускорение частицы меняется с течением времени по закону: $\vec{a} = Bt\vec{j} + C\vec{k}$, где $B = 2\ \text{м/с}^3$, $C = 1\ \text{м/с}^2$. Найти: а) модуль скорости в момент времени $t = 2$ с; б) модуль радиус-вектора в этот момент времени. В начальный момент времени частица покоилась в начале координат.

2.59. Точка движется по окружности радиусом $R = 8$ см так, что ее тангенциальное ускорение меняется по закону $a_\tau = A + Bt$, где $A = 3\ \text{м/с}^2$, $B = 1\ \text{м/с}^3$. Найти модули: а) нормального и б) полного ускорений точки спустя 2 с от начала движения, считая начальную скорость точки равной нулю.

2.60. Частица движется так, что вектор ее скорости меняется по закону: $\vec{v} = At\vec{j} + Bt\vec{k}$, где $A = 3\ \text{м/с}^2$, $B = 4\ \text{м/с}^2$. Найти: а) путь, пройденный частицей за 8 с от начала движения; б) модуль радиус-вектора в момент времени $t = 2$ с, если в начальный момент времени частица покоилась в начале координат.

2.61. Точка движется по окружности радиусом $R = 10$ см так, что ее нормальное ускорение меняется по закону $a_n = At^4$, где $A = 4\ \text{м/с}^6$. Найти: а) тангенциальное ускорение точки спустя 2 секунды после начала движения, б) модуль полного ускорения в этот же момент времени.

2.62. Точка движется по окружности радиусом $R = 1$ м таким образом, что модуль ее скорости меняется по закону $v = At + Bt^3$, где $A = 2\ \text{м/с}^2$, $B = 1\ \text{м/с}^4$. Найти: а) путь, который пройдет точка за 5 с от начала движения; б) количество оборотов, которое сделает точка за это время.

2.63. Ускорение частицы меняется с течением времени по закону: $\vec{a} = Bt\vec{j} + Ct\vec{k}$, где $B = 6\,\text{м/с}^3$, $C = 8\,\text{м/с}^3$. Найти: а) путь, пройденный частицей за 4 с от начала движения; б) модуль радиус-вектора в момент времени $t = 2$ с, если в начальный момент времени частица покоилась в начале координат.

2.64. Точка движется по окружности радиусом $R = 20$ см с тангенциальным ускорением, изменяющимся по закону $a_\tau = Ct$, где $C = 2\ \text{см/с}^3$. А) Через какой промежуток времени от начала движения нормальное ускорение будет в два раза больше тангенциального, если начальная скорость точки равна нулю? Б) Каков в этот момент модуль скорости?

2.65. Точка движется по окружности радиусом $R = 10$ см так, что зависимость модуля ее скорости от времени задается уравнением $\upsilon = At + Bt^2$, где $A = 0{,}3\ \text{м/с}^2$, $B = 0{,}1\ \text{м/с}^3$. А) В какой момент времени вектор полного ускорения образует с нормалью к траектории угол $\alpha = 4°$? Б) Какой путь пройдет точка к этому моменту времени?

2.66. Скорость частицы меняется по закону $\vec{\upsilon} = At\vec{i} + Bt^2\vec{j} + C\vec{k}$, где $A = 1\,\text{м/с}^2$, $B = 2\,\text{м/с}^3$, $C = 4\ \text{м/с}$. Найти: а) модуль скорости в момент времени $t = 2$ с и б) приращение радиус-вектора за время от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

2.67. Первоначально покоившаяся частица прошла за время $\Delta t = 10$ с полторы окружности радиуса $R = 5$ м с постоянным тангенциальным ускорением. Вычислить: а) средний модуль скорости и б) модуль средней скорости, соответствующие этому промежутку времени.

2.68. Точка движется по параболе так, что зависимость модуля ее линейной скорости от времени имеет вид $\upsilon = At + Bt^2$, где $A = 2\ \text{м/с}^2$,

$B = 1\ \text{м}/\text{с}^3$. А) Чему равен путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения? Б) Чему равно тангенциальное ускорение в конце этого участка движения?

2.69. Материальная точка перемещается в пространстве так, что вектор ее скорости меняется по закону $\vec{v} = At^2\vec{i} + Bt^3\vec{j} + Ct\vec{k}$, где $A = 2\,\text{м}/\text{с}^3$, $B = 1\,\text{м}/\text{с}^4$, $C = 3\ \text{м}/\text{с}^2$. Найти: а) модуль мгновенного ускорения в момент времени $t = 2$ с и б) приращение радиус-вектора за 8 с от начала движения.

2.70. Частица движется со скоростью $\vec{v} = A\vec{i} + Bt\vec{j} + Ct^2\vec{k}$, где $A = 1\,\text{м}/\text{с}$, $B = 2\,\text{м}/\text{с}^2$, $C = 3\ \text{м}/\text{с}^3$. Найти: а) модуль скорости в момент времени $t = 2$ с и б) перемещение частицы за первые две секунды ее движения.

2.71. В течение 10 с модуль скорости тела изменялся по закону $v = At + Bt^3$, где $A = 2\ \text{м}/\text{с}^2$, $B = 3\ \text{м}/\text{с}^4$. А) Какой путь пройдет тело за это время? Б) Чему равен средний модуль скорости на пройденном участке?

2.72. Точка движется по окружности так, что модуль ее скорости изменяется по закону $v = At$, где $A = 0{,}5\ \text{м}/\text{с}^2$. Найти: а) путь, который пройдет точка за третью секунду движения и б) модуль ее полного ускорения в момент, когда она пройдет 0,1 длины окружности после начала движения.

2.73. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом $R = 4$ м, изменяется по закону $a_n = A + Bt + Ct^2$, где $A = 1\ \text{м}/\text{с}^2$, $B = 3\ \text{м}/\text{с}^3$, $C = 2{,}25\ \text{м}/\text{с}^4$. Найти: а) путь, пройденный точкой за первые 6 с движения и б) тангенциальное ускорение в конце этого участка.

2.74. Материальная точка начинает двигаться по окружности радиусом $R = 12{,}5$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0{,}5\ \text{см}/\text{с}^2$.

А) Определить момент времени, в который угол между скоростью и ускорением составит $\alpha = 45°$. Б) Какой путь пройдет точка к этому моменту?

2.75. Модуль скорости частицы изменяется с течением времени по закону $\upsilon = \upsilon_0 e^{-\beta t}$, где $\upsilon_0 = 4$ м/с, $\beta = 2$ с$^{-1}$. Определить: а) тангенциальное ускорение частицы в момент времени $t_1 = 2$ с и б) путь, который пройдет частица за время от t_1 до $t_2 = 5$ с.

2.76. Точка движется по окружности радиусом $R = 2$ м. Модуль начальной скорости точки υ_0 равен 5 м/с, тангенциальное ускорение $a_\tau = 2$ м/с^2. Определить: а) нормальное ускорение в момент времени $t = 2$ с; б) путь, пройденный точкой к этому моменту времени.

2.77. Движение точки по прямой задано уравнением $x = At + Bt^4$, где $A = 5$ м/с, $B = 0{,}5$ м/с^4. Определить: а) средний модуль скорости и б) модуль средней скорости точки в интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

Движение тела, брошенного под углом к горизонту

2.78. С самолета, летящего горизонтально со скоростью, равной по модулю $\upsilon = 180$ км/ч, на высоте $h = 1$ км сброшен груз. А) На какой высоте скорость груза будет направлена под углом 30° к горизонту? Б) Чему равен радиус кривизны траектории на этой высоте?

2.79. Мяч, брошенный горизонтально с высоты $h = 2$ м над землей, упал на расстоянии $S = 7$ м. Найти: а) модуль начальной скорости мяча; б) радиус кривизны траектории в точке приземления.

2.80. Тело брошено горизонтально с начальной скоростью, равной по модулю $\upsilon_0 = 10$ м/с, с высоты $h = 20$ м над поверхностью земли. Найти: а) модуль скорости тела через 0,5 с от начала движения; б) изменение тангенциального ускорения за все время движения.

2.81. Тело, брошенное горизонтально со скоростью, равной по модулю $v_0 = 16$ м/с, с края крыши, упало на землю. В момент падения вектор скорости составил угол $60°$ с горизонтом. Найти: а) высоту дома; б) модуль скорости тела в тот момент, когда расстояние от него до земли было равно половине высоты дома.

2.82. Камень брошен горизонтально с высоты $h = 20$ м над поверхностью земли. Через $t = 1{,}3$ с от начала движения вектор скорости камня составил с горизонтом угол $45°$. А) На какой высоте находился камень в этот момент времени? Б) На каком расстоянии от точки броска находится камень в момент приземления?

2.83. Дальность полета тела, брошенного в горизонтальном направлении со скоростью, равной по модулю $v_0 = 12$ м/с, равна высоте, с которой оно сброшено. А) С какой высоты сброшено тело? Б) Чему будет равно его нормальное ускорение в тот момент, когда расстояние от камня до земли будет равно половине этой высоты?

2.84. Камень, брошенный горизонтально на высоте $h = 2$ м над землей, упал на расстоянии $S = 7$ м от точки бросания. Найти: а) тангенциальное ускорение камня спустя $t = 0{,}5$ с от момента бросания; б) высоту, на которой он будет находиться в этот момент.

2.85. С вершины горы высотой $h = 50$ м брошено тело под углом $30°$ к горизонту с начальной скоростью, равной по модулю $v_0 = 14$ м/с. А) Какой угол образует вектор скорости с вектором полного ускорения спустя $t = 2$ с от начала движения? Б) Чему равен радиус кривизны траектории в этот момент времени?

2.86. С высоты $h = 80$ м над поверхностью земли брошено тело в горизонтальном направлении со скоростью, модуль которой равен $v_0 = 2$ м/с. Определить: а) дальность полета; б) тангенциальное и нормальное ускорение спустя $t = 1$ с от начала движения.

2.87. С вершины горы брошено тело в горизонтальном направлении с начальной скоростью, равной по модулю $\upsilon_0 = 10$ м/с. Оно упало на землю спустя $t = 4$ с от момента бросания. Найти: а) высоту горы; б) модуль скорости тела в момент приземления.

2.88. С вышки бросили камень в горизонтальном направлении со скоростью, равной по модулю $\upsilon_0 = 15$ м/с. Он упал на землю на расстоянии от ее основания, вдвое большем высоты вышки. Найти: а) время падения; б) высоту, на которой тангенциальное ускорение камня в два раза меньше его полного ускорения.

2.89. Тело брошено горизонтально с горы высотой $h = 80$ м с начальной скоростью, модуль которой равен $\upsilon_0 = 25$ м/с. Найти: а) величину и б) направление вектора перемещения между двумя точками траектории, в которых скорость тела равна $\upsilon_1 = 30$ м/с и $\upsilon_2 = 40$ м/с.

2.90. Тело бросили с поверхности земли под углом к горизонту с начальной скоростью, модуль которой равен $\upsilon_0 = 18$ м/с. Найти: а) величину этого угла, если дальность полета тела в четыре раза больше максимальной высоты подъема; б) радиус кривизны траектории в точке максимального подъема.

2.91. Из миномета, установленного на крыше здания высотой $h = 40$ м, вылетает мина под углом $60°$ к горизонту с начальной скоростью, модуль которой равен $\upsilon_0 = 50$ м/с. Найти: а) время полета; б) модуль изменения скорости за время полета.

2.92. Снаряд, выпущенный с поверхности земли под углом $30°$ к горизонту, дважды был на одной и той же высоте спустя $t_1 = 5$ с и $t_2 = 25$ с после вылета. Определить: а) модуль его начальной скорости; б) максимальную высоту подъема.

2.93. Из пушки, установленной под углом $45°$ на башне высотой $h = 25$ м, вылетает снаряд со скоростью, равной по модулю $\upsilon_0 = 300$ м/с.

Найти: а) высоту над поверхностью земли, на которой он окажется спустя $t = 1{,}5$ с от начала движения; б) радиус кривизны траектории в этот момент времени.

2.94. Пожарный направляет струю воды на крышу дома высотой $h = 20$ м. Максимальная высота подъема струи равна $h = 30$ м, а из шланга она вылетает со скоростью, модуль которой равен $\upsilon_0 = 25$ м/с. А) На каком расстоянии от пожарного и б) с какой (по модулю) скоростью падает струя на крышу?

2.95. Тело бросили с поверхности земли под углом $45°$ к горизонту с начальной скоростью, модуль которой равен $\upsilon_0 = 40$ м/с. Найти: а) высоту, на которой окажется тело спустя $t = 2$ с от начала движения; б) изменение тангенциального ускорения за это время.

2.96. Со стола высотой $h = 1{,}5$ м сбрасывают шарик, сообщив ему скорость, равную по модулю $\upsilon_0 = 10$ м/с и направленную вниз под углом $60°$ к горизонту. Найти: а) тангенциальное и нормальное ускорение шарика спустя $t = 0{,}1$ с от начала движения; б) на каком расстоянии от точки бросания упадет шарик.

2.97. Тело брошено с поверхности земли под углом $30°$ к горизонту с начальной скоростью, равной по модулю $\upsilon_0 = 20$ м/с. Определить: а) модуль скорости тела в тот момент, когда оно оказалось на высоте 3 м от поверхности земли; б) тангенциальное ускорение и радиус кривизны траектории в точке приземления.

2.98. С поверхности земли под углом $60°$ к горизонту брошено тело с начальной скоростью, модуль которой равен $\upsilon_0 = 10$ м/с. А) Через какое время оно будет находиться в верхней точке траектории? Б) Чему равно приращение скорости от начала движения до этого момента времени?

2.99. Из одной точки с поверхности земли одновременно брошено два тела под разными углами: $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 60°$. Модули их начальных скоростей одинаковы и равны $v_0 = 20$ м/с. Определить: а) расстояние между телами спустя $t = 2$ с от начала движения; б) величину и направление их скоростей в этот момент.

2.100. С вышки бросили камень в горизонтальном направлении с начальной скоростью, равной по модулю $v_0 = 15$ м/с. Он упал на землю на расстоянии от ее основания, вдвое большем высоты вышки. А) Чему равна высота вышки? Б) На какой высоте тангенциальное ускорение камня будет равно половине его полного ускорения?

2.101. С башни высотой $h = 30$ м бросили тело под углом $60°$ к горизонту с начальной скоростью, модуль которой равен $v_0 = 10$ м/с. А) На какой высоте угол между направлением скорости и полного ускорения будет равен $135°$? Б) Чему равен радиус кривизны траектории в этом месте?

2.102. Тело бросили под углом $45°$ к горизонту с поверхности земли с начальной скоростью, равной по модулю $v_0 = 25$ м/с. Найти: а) высоту, на которой окажется тело спустя первую секунду от начала движения; б) тангенциальное и нормальное ускорение тела в этом месте.

2.103. С крыши дома высотой $h = 25$ м бросили тело с начальной скоростью, равной по модулю $v_0 = 15$ м/с, под углом $60°$ к горизонту. А) С какой скоростью тело упадет на землю? Б) Чему равен радиус кривизны траектории в точке максимального подъема?

2.104. Шарик бросили с некоторой высоты в горизонтальном направлении со скоростью, модуль которой равен $v_0 = 20$ м/с. Он упал на землю со скоростью, равной по модулю $v = 36$ м/с. А) С какой высоты бросили шарик? Б) Чему равен радиус кривизны траектории в тот момент, когда его тангенциальное ускорение в 4 раза меньше полного ускорения?

2.105. Тело бросили под некоторым углом к горизонту с поверхности земли с начальной скоростью, равной по модулю $v_0 = 12$ м/с. Найти:

а) величину этого угла, если в точке максимального подъема модуль скорости тела равен $\upsilon = 6$ м/с; б) нормальное ускорение в момент приземления.

2.106. Тело, брошенное с высоты $h = 25$ м над поверхностью земли под углом $75°$ к горизонту, достигло максимальной высоты $h_m = 45$ м. Найти: а) дальность полета тела; б) высоту, на которой угол между направлением скорости и полного ускорения будет равен $30°$.

2.107. Шарик брошен под углом $45°$ к горизонту с высоты $h = 15$ м над землей с начальной скоростью, равной по модулю $\upsilon_0 = 15$ м/с. Найти: а) высоту, на которой угол между направлением скорости и полного ускорения будет равен $90°$; б) радиус кривизны траектории в точке приземления.

III. КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Абсолютно твердым телом называется тело, не подверженное деформациям. Такое тело при движении сохраняет свою форму и размер. При описании движения абсолютно твердого тела его представляют как совокупность жестко связанных материальных точек. Благодаря отсутствию деформаций расстояние между любыми двумя точками абсолютно твердого тела остается постоянным при любом типе движения.

Всякое сложное движение твердого тела можно представить как комбинацию *поступательного* и *вращательного* движений.

При *поступательном движении* все точки тела движутся по траекториям одинаковой формы, совпадающим при наложении. Тогда отрезок, соединяющий две произвольных точки тела, перемещается параллельно своему первоначальному положению (рис. 3.1). При таком движении в каждый момент времени отличны только координаты точек, составляющих тело, а все остальные их кинематические характеристики (скорость, ускорение, пройденный путь и т. д.) одинаковы для всех точек тела. Поэтому для описания поступательного движения абсолютно твердого тела достаточно задать движение какой-нибудь одной его точки. (Такую точку называют *полюсом*, и чаще всего в качестве полюса выбирается центр масс тела.) Следовательно, поступательное движение абсолютно твердого тела описывается идентично движению материальной точки.

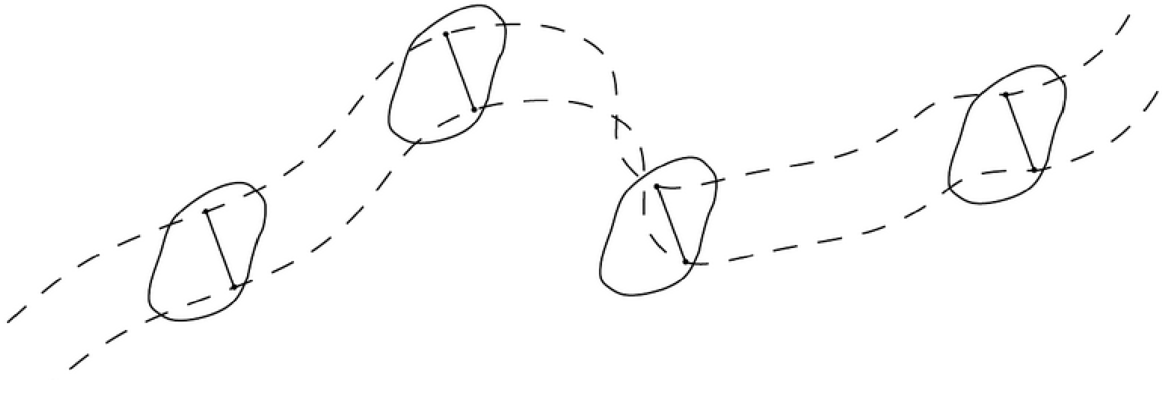


Рис. 3.1. Поступательное движение абсолютно твердого тела

Простейшим видом вращательного движения твердого тела является *вращательное движение вокруг неподвижной (закрепленной) оси*. При таком движении все точки твердого тела, двигаясь в параллельных плоскостях, описывают окружности с центрами, лежащими на одной неподвижной прямой. Положение вращающегося таким образом тела задается всего одной переменной – углом поворота φ. *Угол поворота* – это угол, на который поворачивается полуплоскость, жестко связанная с телом, относительно некоторой неподвижной полуплоскости (полуплоскости XOZ на рис. 3.2). Обе полуплоскости проводятся через ось вращения.

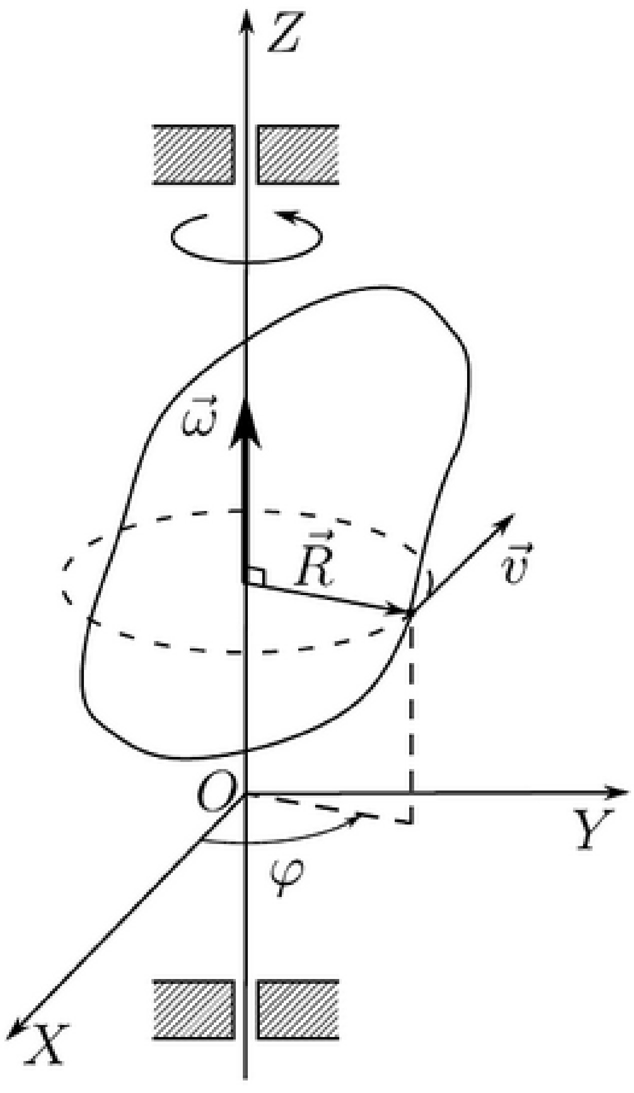


Рис. 3.2. Вращательное движение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси

Зависимость угла поворота от времени и есть уравнение движения (закон движения) в случае вращательного движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{3.1}$$

Основные кинематические характеристики вращательного движения – *угловая скорость* и *угловое ускорение*. Это *аксиальные* векторы (или *псевдовекторы*) – векторы, откладываемые вдоль оси вращения, направления которых связываются с направлением вращения. Эти векторы не имеют определенных точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения.

Угловая скорость – величина, характеризующая быстроту вращения твердого тела, то есть быстроту изменения угла поворота. *Проекция угловой скорости на ось вращения* равна отношению элементарного (малого) приращения угла поворота $d\varphi$ к малому промежутку времени dt, за который это приращение произошло:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{3.2}$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси проекции угловой скорости на оси, перпендикулярные оси вращения, равны нулю.

Направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ подчиняется *правилу правого винта* (направление вектора совпадает с направлением поступательного движения острия правого винта, головка которого вращается в том же направлении, что и тело). Другими словами, вектор угловой скорости направлен вдоль оси вращения в ту сторону, откуда поворот тела виден происходящим против хода часовой стрелки.

Если известна зависимость проекции угловой скорости от времени $\omega_z(t)$ и положение тела φ_1 в момент времени t_1, то можно определить положение тела φ_2 в любой другой момент времени t_2. Из (3.2) следует, что

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \int_{t_1}^{t_2} \omega_z dt. \tag{3.3}$$

Угловое ускорение – величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости твердого тела. *Проекция углового ускорения на ось вращения* равна отношению элементарного (малого) приращения проекции угловой скорости на ось вращения $d\omega_z$ к малому промежутку времени dt, за который это приращение произошло:

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{3.4}$$

Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения – в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$, при ускоренном вращении (когда модуль угловой скорости $\omega = |\omega_z|$ увеличивается), и противоположно $\vec{\omega}$ при замедленном вращении (когда модуль угловой скорости уменьшается).

Зная зависимость проекции углового ускорения от времени $\varepsilon_z(t)$ и проекцию угловой скорости ω_{z1} в некоторый момент времени t_1, можно вычислить проекцию угловой скорости ω_{z2} в любой другой момент времени t_2. Из (3.4)

$$\omega_{z2} = \omega_{z1} + \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_z dt. \tag{3.5}$$

Поскольку угловые скорость и ускорение – аксиальные векторы и, соответственно, имеют всего по одной ненулевой проекции, из (3.5) следует аналогичная связь и для векторных величин:

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{\varepsilon} dt. \tag{3.6}$$

Движение любой точки вращающегося тела можно описать в терминах раздела II настоящего пособия (Кинематика материальной точки). Чтобы подчеркнуть отличие от введенных в этом разделе угловых переменных, эти характеристики называют *линейными*. Для любой точки тела, находящейся на некотором расстоянии R от оси вращения, можно определить линейные характеристики движения, используя связь между линейными (путь, пройденный точкой по дуге окружности, линейная скорость, линейное, тангенциальное и нормальное ускорение) и угловыми величинами (угол поворота, угловая скорость, угловое ускорение).

Линейная и угловая скорости связаны соотношением

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}, \tag{3.7}$$

где $\vec{R}$ – вектор, по модулю равный расстоянию R, с направлением, показанным на рис. 3.2. Направление линейной скорости также подчиняется правилу правого винта (при вращении винта от $\vec{\omega}$ к $\vec{R}$). Из определения векторного произведения следует, что

$$v = \omega R \sin 90° = \omega R. \tag{3.8}$$

Ускорения связаны следующими соотношениями:

$$a_\tau = \varepsilon_z R, \tag{3.9}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R. \tag{3.10}$$

Из (2.27), (3.9) и (3.10) следует, что

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{3.11}$$

Длина дуги, пройденной точкой с начала движения:

$$\xi = \varphi R. \tag{3.12}$$

Путь, пройденный точкой в течение некоторого промежутка времени Δt, за которое приращение угла поворота составит $\Delta\varphi$:

$$S = \Delta\varphi R. \tag{3.14}$$

Таким образом, линейные характеристики всех точек тела прямо пропорциональны их расстояниям от оси вращения.

Число оборотов, которое делает тело за некоторый промежуток времени Δt, равно:

$$N = \frac{S}{2\pi R} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}. \tag{3.15}$$

Время, за которое точки тела делают один полный оборот (то есть $\Delta\varphi = 2\pi$), называется *периодом вращения* T. Обратной к нему величиной является *частота вращения* ν – число оборотов, которое делает тело в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T}. \tag{3.16}$$

Угловая скорость, частота вращения и период связаны между собой соотношениями

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{3.17}$$

Если за промежуток времени Δt тело делает N оборотов, то средняя частота вращения равна:

$$\langle\nu\rangle = \frac{N}{\Delta t}. \tag{3.18}$$

Контрольные вопросы

1. Какое тело называется абсолютно твердым?

2. Существуют ли абсолютно твердые тела в реальности? Если да, приведите примеры.

3. При каком условии тело можно считать абсолютно твердым?

4. Какое движение называется поступательным? Приведите три бытовых примера такого движения.

5. Дайте определение вращательного движения вокруг неподвижной оси. Приведите три бытовых примера такого движения.

6. Какие еще существуют разновидности вращательного движения, кроме вращательного движения вокруг неподвижной оси?

7. Каков физический смысл угловой скорости?

8. Как вычислить среднюю угловую скорость тела?

9. Что такое угловое ускорение?

10. Как могут быть направлены векторы угловой скорости и углового ускорения друг относительно друга?

Задачи для аудиторных занятий

I уровень

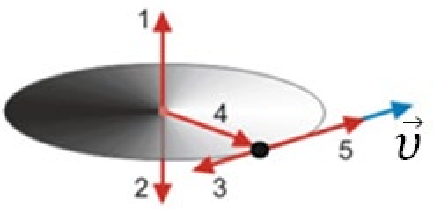


Рис. 3.3.

3.1. Диск вращается так, как показано на рис. 3.3. С каким из указанных векторов совпадает по направлению вектор угловой скорости $\vec{\omega}$?

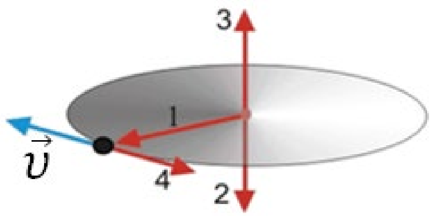


Рис. 3.4.

3.2. Диск вращается так, как показано на рис. 3.4. При этом модуль мгновенной скорости точки на ободе диска уменьшается. С каким из указанных векторов совпадает по направлению вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$?

3.3. Материальная точка движется по окружности. При этом модуль мгновенной скорости точки уменьшается. С направлением какого вектора из указанных на рис. 3.5 совпадает вектор тангенциального ускорения точки?

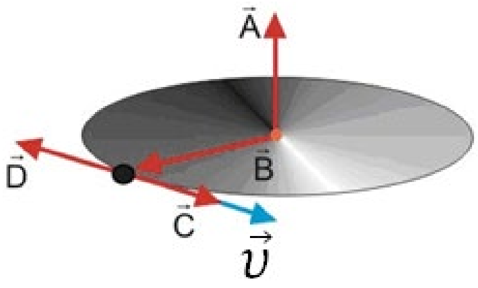


Рис. 3.5.

3.4. Материальная точка движется по окружности с постоянным по модулю тангенциальным ускорением. При этом угловая скорость точки в любой момент времени направлена в сторону, противоположную угловому ускорению. Какой из указанных на рис. 3.6 графиков зависимости мгновенной угловой скорости от времени соответствует такому движению?

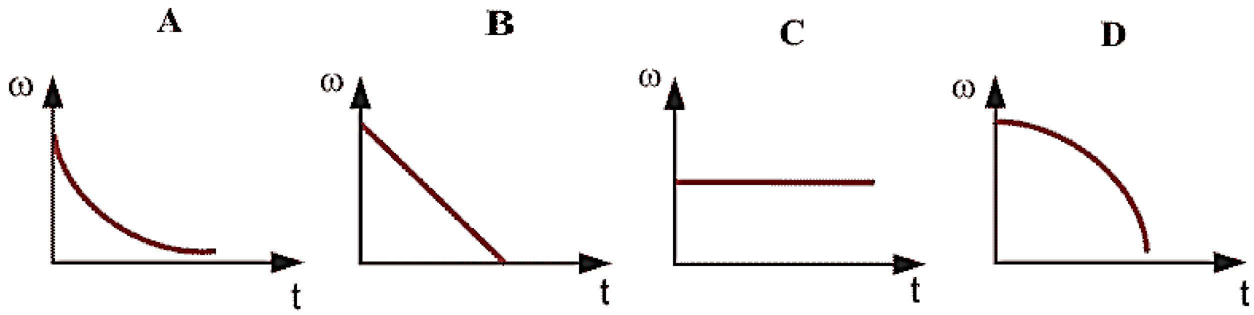


Рис. 3.6.

3.5. Материальная точка движется по окружности с постоянным нормальным ускорением. Какой из указанных на рис. 3.6 графиков зависимости мгновенной угловой скорости от времени соответствует такому движению?

3.6. Угол поворота вращающегося шара зависит от времени по закону: $\varphi = 2t + 3t^3$, рад. Вычислить угловое ускорение шара в момент времени 2 с.

3.7. Твердое тело вращается так, что зависимость его угловой скорости от времени имеет вид: $\omega = At$, где $A = \text{const} > 0$. Какой из указанных на рис. 3.7 графиков зависимости угла поворота тела от времени соответствует этому движению?

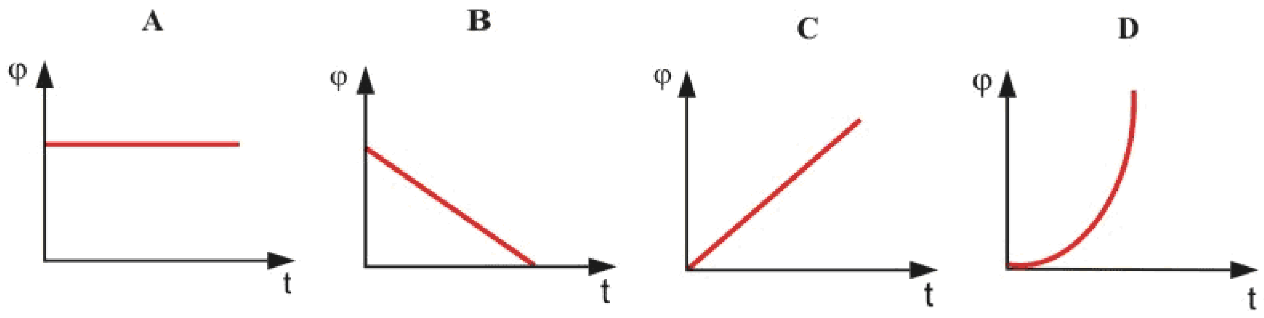


Рис. 3.7.

3.8. Определить зависимость угловой скорости и углового ускорения от времени для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z по закону $\varphi = At - Bt^2$, где $A = 20$ рад/с, $B = 1$ рад/с^2.

3.9. Модуль угловой скорости вращающегося тела изменяется по закону $\omega = A + Bt^2$, где A и B – постоянные величины. Какой из указанных на рис. 3.8 графиков зависимости модуля углового ускорения от времени соответствует этому движению?

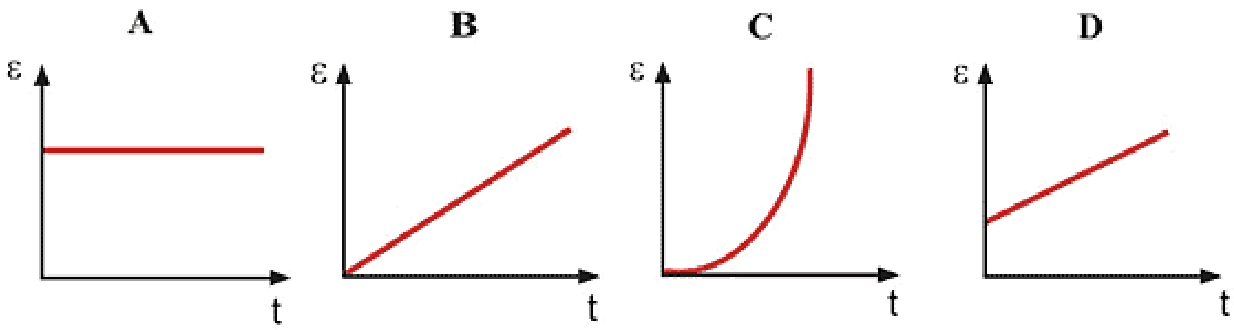


Рис. 3.8.

3.10. Частота вращения колеса равна 5 об/с. Чему равен его период?

3.11. Чему равно угловое ускорение колеса радиусом 2 м, если тангенциальное ускорение точек на ободе колеса равно 4 м/с^2?

3.12. Модуль угловой скорости движущейся по окружности радиусом 3 м материальной точки изменяется по закону $\omega = 5t$, рад/с. Чему равно тангенциальное ускорение точки в момент времени 2 с?

3.13. Точка движется по окружности с уменьшающейся по модулю линейной скоростью. На каком рисунке правильно показаны направления векторов основных кинематических характеристик точки (рис. 3.9)?

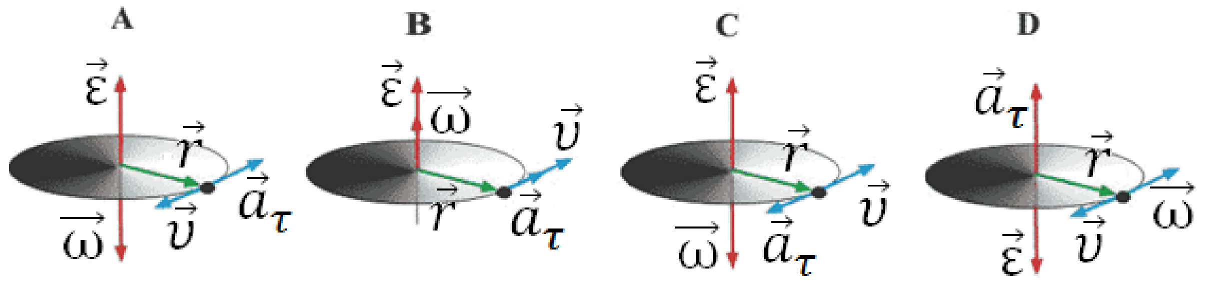


Рис. 3.9

3.14. Материальная точка движется по окружности с уменьшающейся по модулю линейной скоростью. На каком рисунке правильно показаны направления векторов угловой скорости и углового ускорения точки (рис. 3.10)?

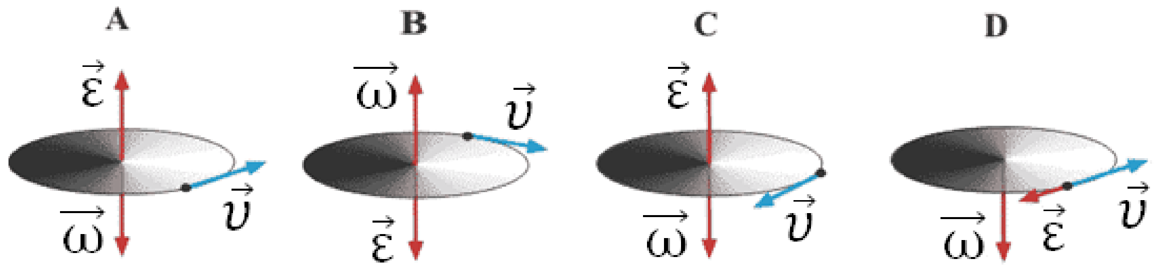


Рис. 3.10.

II уровень

3.15. Материальная точка движется по окружности радиуса $R = 3$ см. При этом угол поворота радиус-вектора точки зависит от времени по закону: $\varphi = 5t - t^2$, рад. Вычислить тангенциальное ускорение точки в моменты времени 2 с и 5 с. Изобразить векторы угловой скорости и углового ускорения на рисунке для обоих случаев.

3.16. Определить угловое ускорение маховика, частота вращения которого за время $N = 20$ полных оборотов возросла равномерно от $\nu_0 = 1$ об/с до $\nu = 5$ об/с.

3.17. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 8\,t - 2\,t^3$. Найти средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от старта до остановки.

3.18. Вентилятор вращается с частотой 600 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 оборотов. Какое время прошло с момента выключения вентилятора до его полной остановки?

3.19. Колесо радиусом $R = 0{,}1$ м вращается так, что зависимость угла поворота колеса от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $B = 2$ рад/с, $C = 1$ рад/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через 2 с после начала движения: а) угловую скорость; б) модуль линейной скорости; в) угловое ускорение; г) тангенциальное ускорение; д) нормальное ускорение.

3.20. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением, модуль которого равен $\varepsilon = 2$ рад/с^2. Через $\Delta t = 0{,}5$ с после начала движения модуль полного ускорения точек на ободе колеса стал равен $a = 13{,}6$ см/с^2. Найти радиус колеса.

3.21. Линейная скорость точек на окружности вращения диска равна по модулю $\upsilon_1 = 3$ м/с. Точки, расположенные на 10 см ближе к оси, имеют модуль линейной скорости $\upsilon_2 = 2$ м/с. Сколько оборотов в секунду делает диск?

3.22. При повороте трактора, движущегося со скоростью 24 км/ч, его центр масс описывает дугу радиусом 9 м. Найти разность скоростей гусениц трактора, если расстояние между ними 1,5 м.

3.23. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением: $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с^2, $D = 1$ рад/с^3. Найти радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек на ободе равно $a_n = 3{,}46 \cdot 10^2$ м/с^2.

3.24. Диск радиусом 10 см вращается так, что зависимость модуля линейной скорости точек, лежащих на ободе диска, от времени задается уравнением $\upsilon = At + B$, где $A = 0{,}1\ \text{м/с}^2$, $B = 0{,}3\ \text{м/с}$. Определить момент времени, для которого вектор полного ускорения образует с радиусом диска угол 4°.

3.25. Шар радиусом $R = 10$ см вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии. Проекция угловой скорости шара на ось вращения меняется по закону $\omega_z = A + Bt^2$, где $A = 7$ рад, $B = -1\ \text{рад/с}^3$. Найти тангенциальное ускорение точек, наиболее удаленных от оси вращения, в момент времени $t = 3$ с.

3.26. Определить модуль линейной скорости и нормальное ускорение точек, лежащих на земной поверхности: а) на экваторе; б) на широте Омска (55° с. ш.).

III уровень

3.27. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что модуль его углового ускорения меняется по закону $\varepsilon = At + Ct^2$, где $A = 3\ \text{рад/с}^3$, $C = 0{,}5\ \text{рад/с}^4$, причем частота вращения в начальный момент времени равна $\nu_0 = 1$ об/c и со временем растет. Найти: а) тангенциальное ускорение точек, расположенных на расстоянии 20 см от оси вращения в момент времени $t = 3$ с; б) число оборотов, которое сделает тело за пятую секунду от начала вращения.

3.28. Ось с двумя параллельными бумажными дисками, расположенными на расстоянии 0,5 м друг от друга, вращается с частотой 1200 об/мин. Пуля, летящая вдоль оси, пробивает оба диска; пробоины в дисках смещены относительно друг друга на угол 15°. Найти величину скорости пули. Силой тяжести, действующей на пулю, пренебречь.

3.29. На цилиндр, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, намотана нить. К концу нити привязали грузик и предоставили ему возможность опускаться. Двигаясь равноускоренно, грузик за 3 с опустился на 1,5 м. Определить угловое ускорение цилиндра, если его радиус 4 см.

3.30. Фонарь, находящийся на расстоянии 3 м от вертикальной стены, бросает на нее зайчик. Фонарь вращается вокруг вертикальной оси с частотой $0{,}5\ \text{с}^{-1}$. При вращении фонаря зайчик бежит по горизонтальной прямой. Найти модуль скорости зайчика через $\Delta t = 1/3$ с после того, как луч света был перпендикулярен стене.

Индивидуальное домашнее задание

Вращение твердого тела относительно закрепленной оси

3.31. Колесо радиусом $R = 50$ см вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии, перпендикулярной плоскости колеса. Угол поворота колеса меняется с течением времени по закону $\varphi = B + Ct^3$, где $B = 1$ рад, $C = 2\ \text{рад/с}^3$. Найти: а) модуль линейной скорости точек, удаленных от оси вращения на половину радиуса колеса, в момент времени $t = 3$ с; б) изменение нормального ускорения указанных точек за пятую секунду вращения.

3.32. Колесо радиусом $R = 16$ см вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии, перпендикулярной плоскости колеса. Угол поворота колеса меняется по закону $\varphi = At^3 + Bt^2 + C$, где $A = 1\ \text{рад/с}^3$, $B = 2\ \text{рад/с}^2$, $C = 1$ рад. Найти: а) модуль линейной скорости точек, лежащих на ободе колеса, в момент времени $t = 2$ с; б) число оборотов, которое сделает колесо за вторую секунду от начала вращения.

3.33. Колесо радиусом $R = 16$ см вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии, перпендикулярной плоскости колеса. Нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, меняется с течением времени по закону $a_n = At^6$, где $A = 9\ \text{см/с}^8$. Найти: а) изменение угловой скорости указанных точек за третью секунду от начала вращения; б) угол между направлениями линейной скорости и линейного ускорения этих точек спустя 1 с от начала вращения.

3.34. Диск радиусом $R = 1$ м вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии, перпендикулярной плоскости диска. Угол поворота диска меняется по закону $\varphi = Bt + Ct^3$, где $B = 4\ \text{рад/с}$, $C = 0{,}2\ \text{рад/с}^3$. Найти: а) частоту вращения диска в тот момент, когда его угловое ускорение равно по модулю $\varepsilon = 3\ \text{рад/с}^2$; б) для точек, расположенных на краю диска, угол между направлениями нормали к траектории и полного ускорения спустя одну секунду от начала вращения.

3.35. Диск радиусом $R\ =\ 10$ см вращается вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Точки, расположенные на краю диска, движутся по закону $S = At^2 + Ct^3$, где $A = 3\ \text{см/с}^2$, $C = 5\ \text{см/с}^3$. Найти: а) число оборотов, которое сделает диск за 10 с от начала вращения; б) модуль полного ускорения точек, удаленных от оси вращения на половину радиуса диска.

3.36. Колесо вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии колеса, перпендикулярно его плоскости. Угол поворота колеса меняется по закону $\varphi = Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 1\ \text{рад/с}$, $C = 0{,}2\ \text{рад/с}^2$, $D = -0{,}4\ \text{рад/с}^3$. Найти: а) частоту вращения колеса через две секунды после начала вращения; б) тангенциальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, в этот момент времени.

3.37. Твердое тело вращается вокруг закрепленной оси таким образом, что его угол поворота стал меняться с течением времени по закону $\varphi = At - Bt^2 + C$, где $A = 2{,}4\ \text{рад/с}$, $B = 0{,}2\ \text{рад/с}^2$, $C = 1$ рад. Найти: а) число оборотов, которое тело сделает до остановки; б) угол между направлениями нормали к траектории и линейного ускорения в момент времени $t = 3$ с для точек, расположенных на расстоянии 1 м от оси вращения.

3.38. Колесо радиусом $R = 50$ см вращается вокруг закрепленной оси, перпендикулярной плоскости колеса и проходящей через его центр. Точки, лежащие на ободе колеса, движутся так, что их путь меняется по закону $\mathrm{S} = Bt + Ct^2$, где $B = 31{,}4$ см/с; $C = 15{,}7\ \text{см/с}^2$. Найти: а) угловое ускорение колеса; б) нормальное ускорение указанных точек в тот момент, когда частота вращения колеса равна 10 об/с.

3.39. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси. Точки, расположенные на расстоянии 20 см от оси вращения, движутся так, что пройденный ими путь меняется по закону $\mathrm{S} = Bt^2 + Ct^3$, где $B = 20\ \text{см/с}^2$, $C = 15\ \text{см/с}^3$. Найти: а) изменение тангенциального ускорения указанных точек за третью секунду от начала вращения; б) число оборотов, которое сделает тело за три секунды от начала вращения.

3.40. Диск радиусом $R = 30$ см вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии, перпендикулярной плоскости диска. Точки, удаленные от оси вращения на треть радиуса диска, движутся таким образом, что зависимость пройденного ими пути от времени имеет вид $\mathrm{S} = Bt + Ct^3$, где $B = 5$ см/с; $C = 0{,}4\ \text{см/с}^3$. Найти: а) тангенциальное ускорение указанных точек в конце второй секунды от начала вращения; б) угол между линейной скоростью и линейным ускорением для этих точек в тот же момент времени.

3.41. Диск радиусом $R = 10$ см вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии, перпендикулярной плоскости диска. Проекция угловой скорости диска на ось вращения меняется по закону $\omega_z = At + Bt^2$, где $A = 2\ \text{рад/с}^2$, $B = -1\ \text{рад/с}^3$. Найти: а) тангенциальное ускорение точек, расположенных на краю диска, в момент времени $t = 3$ с; б) угол, на который повернется диск за две секунды от начала вращения.

3.42. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что модуль его углового ускорения меняется по закону $\varepsilon = At + Ct^2$, где $A = 2$ рад/с^3, $C = 1$ рад/с^4, причем частота вращения в начальный момент времени равна $\nu_0 = 2$ об/с и со временем растет. Найти: а) тангенциальное ускорение точек, расположенных на расстоянии 10 см от оси вращения в момент времени $t = 5$ с; б) число оборотов, которое сделает тело за четвертую секунду от начала вращения.

3.43. Диск радиусом 13 см вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии, перпендикулярной плоскости диска. Модуль линейной скорости точек, расположенных на краю диска, меняется по закону $\upsilon = At^2 + Bt$, где $A = 0{,}2$ м/с^3, $B = 0{,}6$ м/с^2. Найти: а) угловое ускорение диска спустя 5 с от начала вращения; б) угол, на который повернется диск за это время.

3.44. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что тангенциальное ускорение точек, расположенных на расстоянии $R = 20$ см от оси вращения, меняется по закону $a_\tau = At^2 + Bt$, где $A = 0{,}2$ м/с^4, $B = 0{,}4$ м/с^3, причем начальная угловая скорость тела равна нулю. Найти: а) изменение модуля углового ускорения тела за третью секунду вращения; б) нормальное ускорение указанных точек в момент времени $t = 2$ с от начала вращения.

3.45. Шар радиусом $R = 4$ см вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр. Проекция углового ускорения шара на ось вращения меняется по закону $\varepsilon_z = Bt^2 + Ct$, где $B = 0{,}3$ рад/с^4, $C = 0{,}2$ рад/с^3. Проекция начальной угловой скорости равна $\omega_{0z} = -0{,}5$ рад/с. Найти: а) тангенциальное ускорение точек, удаленных от оси вращения на половину радиуса, в момент времени $t = 2$ с; б) модуль линейной скорости точек, расположенных на максимальном удалении от оси вращения, в момент времени $t = 5$ с.

3.46. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что модуль его угловой скорости меняется по закону $\omega = A + Bt + Ct^2$, где $A = 4$ рад/с, $B = 2$ рад/с^2, $C = 1$ рад/с^3. Найти: а) нормальное ускорение точек, лежащих на расстоянии 8 см от оси вращения, в момент времени $t = 2$ с; б) угол, на который повернется тело за третью секунду от начала ускоренного вращения.

3.47. Шар вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр. Тангенциальное ускорение точек, расположенных на расстоянии $R = 50$ см от оси вращения, меняется по закону $a_\tau = At^3 + Bt$, где $A = 4$ см/с^5, $B = 2$ см/с^3. Найти: а) изменение угловой скорости за четвертую секунду от начала вращения; б) угол между направлениями линейной скорости и полного ускорения указанных точек в конце второй секунды от начала вращения.

3.48. Шар вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с его осью симметрии. Модуль угловой скорости шара меняется по закону $\omega = Ct^3 + Dt$, где $C = 0{,}2$ рад/с^4, $D = 0{,}6$ рад/с^2. Найти: а) нормальное ускорение точек, расположенных на расстоянии 18 см от оси вращения, в тот момент, когда модуль углового ускорения шара равен $\varepsilon = 3$ рад/с^2; б) количество оборотов, которое сделает шар за три секунды от начала вращения.

3.49. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что тангенциальное ускорение точек, расположенных на расстоянии 10 см от оси вращения, меняется по закону $a_\tau = Bt^2 + Ct^3$, где $B = 2$ см/с^4, $C = -0{,}1$ см/с^5. Найти: а) изменение углового ускорения тела за четвертую секунду от начала вращения; б) модуль линейной скорости указанных точек в конце третьей секунды от начала вращения.

3.50. Твердое тело вращается вокруг закрепленной оси так, что модуль линейной скорости точек, расположенных на расстоянии 1 м от оси вращения, меняется по закону $\upsilon = At^2 + Bt^4$, где $A = 2$ см/с^3,

$B = 1$ см/с^5. Найти: а) угловое ускорение тела спустя 5 с от начала вращения; б) число оборотов, которое сделает тело за четвертую секунду вращения.

3.51. Шар вращается вокруг закрепленной оси, совпадающей с его осью симметрии, так, что проекция его угловой скорости меняется по закону $\omega_z = At^2 + Bt^3$, где $A = 0{,}2$ рад/с^3, $B = -0{,}1$ рад/с^4. Найти: а) модуль линейной скорости точек, лежащих на расстоянии 1 м от оси вращения, в конце второй секунды движения; б) модуль полного ускорения указанных точек через пять секунд от начала вращения.

3.52. Твердое тело вращается вокруг закрепленной оси так, что модуль его углового ускорения меняется по закону $\varepsilon = At^2 + Ct^3$, где $A = 0{,}1$ рад/с^4, $C = 0{,}2$ рад/с^5. Найти: а) тангенциальное ускорение точек, расположенных на расстоянии 60 см от оси вращения, спустя 3 с от начала вращения; б) число оборотов, которое сделает тело за 10 с от начала вращения.

3.53. Диск радиусом $R = 60$ см вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии, перпендикулярной плоскости диска. Модуль линейной скорости точек, лежащих на краю диска, стал меняться с течением времени по закону $\upsilon = A - Bt^2$, где $A = 10$ м/с, $B = 0{,}1$ м/с^3. Найти: а) модуль углового ускорения диска в момент остановки; б) угол, на который повернется диск за время от начала торможения до остановки.

3.54. Шар вращается относительно неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии. Проекция углового ускорения шара на ось вращения меняется по закону $\varepsilon_z = A + Bt$, где $A = 4$ рад/с^2, $B = 1$ рад/с^3. Модуль начальной угловой скорости равен $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с. Найти: а) модуль линейной скорости точек, расположенных на расстоянии 8 см от оси вращения, в начале пятой секунды; б) число оборотов, которое сделает шар за шестую секунду вращения.

3.55. Колесо радиусом $R = 30$ см вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии и перпендикулярной плоскости колеса. Модуль угловой скорости колеса меняется с течением времени по закону $\omega = At^2 + Ct^3$, где $A = 1$ рад/с^3, $C = 0{,}1$ рад/с^4. Найти: а) изменение нормального ускорения точек, лежащих на ободе колеса, за вторую секунду от начала вращения; б) число оборотов, которое колесо сделает за пятую секунду.

3.56. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что проекция углового ускорения тела на ось вращения меняется по закону $\varepsilon_z = At + Bt^3$, где $A = 2$ рад/с^3, $B = 0{,}6$ рад/с^5. В начальный момент времени тело покоится. Найти: а) изменение тангенциального ускорения точек, расположенных на расстоянии 10 см от оси вращения, за третью секунду от начала вращения; б) для указанных точек в конце третьей секунды угол между нормалью к траектории и линейным ускорением.

3.57. Диск радиусом $R = 20$ см вращается вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр диска. Модуль линейной скорости точек, удаленных от оси вращения на четверть радиуса диска, меняется по закону $\upsilon = At + Bt^3$, где $A = 40$ см/с^2, $B = 2$ см/с^4. Найти: а) частоту вращения диска в тот момент, когда проекция его углового ускорения на ось вращения равна 1 рад/с^2; б) угол, на который повернется диск за вторую секунду вращения.

3.58. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси. Тангенциальное ускорение точек, лежащих на расстоянии 20 см от оси вращения, меняется по закону $a_\tau = A + Bt$, где $A = 0{,}4$ м/с^2, $B = 0{,}1$ м/с^3. Найти: а) угловую скорость твердого тела в тот момент, когда нормальное ускорение указанных точек будет равно 5 м/с^2; б) путь, пройденный указанными точками за пять секунд от начала вращения.

3.59. Колесо радиусом $R = 1$ м вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии, перпендикулярной плоскости колеса. Нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, меняется по закону $a_n = Bt + Ct^2$, где $B = 0{,}1\ \text{м/с}^3$, $C = 0{,}02\ \text{м/с}^4$. Найти: а) модуль линейной скорости указанных точек в начале третьей секунды; б) частоту вращения колеса в этот момент времени.

3.60. Диск радиусом $R = 20$ см вращается вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии, перпендикулярной плоскости диска. Точки, удаленные от оси вращения на пятую часть радиуса диска, движутся таким образом, что зависимость пройденного ими пути от времени имеет вид $S = Bt + Ct^3$, где $B = 5$ см/с; $C = 0{,}2\ \text{см/с}^3$. Найти: а) число оборотов, которое сделает диск за четвертую секунду вращения; б) нормальное ускорение указанных точек в конце четвертой секунды от начала вращения.

IV. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Динамика – это раздел механики, который изучает движение тел с учетом причин, вызывающих это движение.

Основные величины динамики поступательного движения – сила, масса, импульс.

Сила. Масса. Импульс

Величину, являющуюся мерой изменения состояния тел и возникающую в результате их взаимодействия, называют силой.

Сила – это мера взаимодействия тел. Эта величина векторная, она имеет определенное численное значение, направление и точку приложения.

Все тела, свободные от внешних воздействий, стремятся сохранять состояние покоя или равномерного движения. Это свойство тел называется инертностью (или инерцией). Если же на тело оказывается воздействие, то свойство инертности сказывается в том, что изменение состояния покоя или движения тела (то есть изменение скоростей его точек) происходит постепенно, а не мгновенно.

Все тела инертны, но в разной степени. Масса – это мера инертности тела при поступательном движении. Масса – скалярная положительная величина.

Импульс $(\vec{p})$ – векторная физическая величина, равная произведению массы тела (m) на его мгновенную скорость $(\vec{v})$ – далее по тексту скорость.

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{4.1}$$

Направление импульса совпадает с направлением скорости.

Основные законы классической динамики

Законы классической динамики были сформулированы Ньютоном и носят его имя.

1. Первый закон Ньютона постулирует существование инерциальных систем отсчета и формулируется следующим образом: «*В инерциальных*

системах отсчета тело сохраняет состояние покоя или движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют силы».

2. Основным законом классической динамики является второй закон Ньютона: «В *инерциальных системах отсчета скорость изменения импульса равна приложенной силе и изменение импульса происходит в направлении прямой, вдоль которой эта сила действует»:*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_R. \tag{4.2}$$

Если масса тела во время движения остается величиной постоянной, то закон принимает вид:

$$m\vec{a} = \vec{F}_R \quad \text{или} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m}, \tag{4.3}$$

где $\vec{F}_R$ – результирующая (равнодействующая) всех сил, действующих на тело, то есть их векторная сумма

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N. \tag{4.4}$$

Ускорение, приобретаемое материальной точкой относительно инерциальной системы отсчета, прямо пропорционально действующей на точку силе, обратно пропорционально массе точки и совпадает по направлению с направлением силы.

3. Третий закон Ньютона описывает, как взаимодействуют два тела. «*Тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению*».

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{4.5}$$

Контрольные вопросы

1. Какая физическая величина является мерой воздействия на тело со стороны других тел или полей?

2. Как называют явление сохранения скорости движения тела при отсутствии действия на него других тел?

3. Что является мерой инертности тела при поступательном движении?

4. Дайте определения следующих физических величин: масса, сила, импульс.

5. Какие системы называются инерциальными?

6. Запишите второй закон Ньютона в случае тел постоянной массы и в обобщенной формулировке, справедливой и для тел переменной массы.

7. Сформулируйте третий закон Ньютона. Приведите примеры его применения.

Задачи для аудиторных занятий

I уровень

4.1. Выбрать на рис. 4.1, *а* направление равнодействующей всех сил, действующих на материальную точку в некоторый момент, когда ее скорость и ускорение взаимно перпендикулярны и направлены так, как показано на рис. 4.1, *в*.

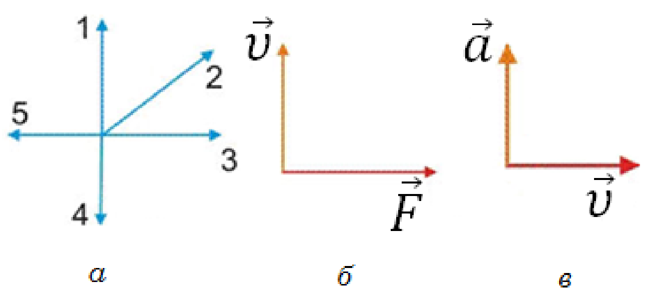


Рис. 4.1.

4.2. На тело, движущееся со скоростью $\vec{\upsilon}$, подействовали силой $\vec{F}$, как показано на рис. 4.1, *б*. Направлению какого вектора на рис. 4.1, *а* будет соответствовать вектор ускорения тела?

4.3. Чему равно отношение силы тяготения, действующей на Луну со стороны Земли, к силе тяготения, действующей на Землю со стороны Луны, если учесть, что масса Луны в 81 раз меньше, чем масса Земли, а радиус Луны в 4 раза меньше радиуса Земли?

4.4. Тело массой 2 кг движется вдоль оси OX. На рис. 4.2 представлен график зависимости проекции скорости υ_x этого тела от времени t.

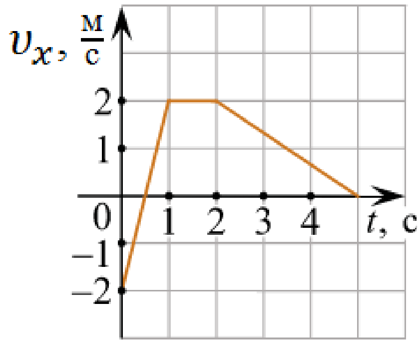


Рис. 4.2.

А) Чему равна проекция F_x силы, действующей на тело в течение первой секунды движения? Куда направлена сила в это время по отношению к оси OX?

Б) Чему равна проекция F_x силы, действующей на тело в течение пятой секунды движения? Куда направлена сила в это время по отношению к оси OX?

В) На каком временном интервале равнодействующая всех сил, действующих на тело, равна нулю?

Г) В какое время модуль проекции F_x силы, действующей на тело, максимален?

4.5. Точечное тело массой 0,5 кг свободно движется по гладкой горизонтальной плоскости параллельно оси OX со скоростью $\upsilon = 4$ м/с (на рис. 4.3 вид сверху). В момент времени $t = 0$, когда тело находилось в точке A, на него начинает действовать постоянная сила $\vec{F}$, модуль которой равен 1 Н. Чему равны координаты этого тела, а также модуль вектора перемещения, в момент времени $t = 4$ с?

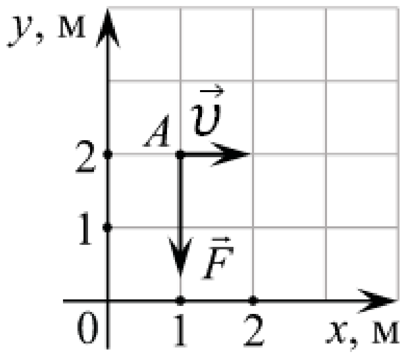


Рис. 4.3.

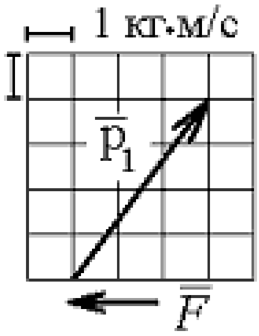


Рис. 4.4.

4.6. Теннисный мяч летел с импульсом $\vec{p}_1$ (масштаб и направление указаны на рис. 4.4). В горизонтальном направлении на короткое время $\Delta t = 0{,}1$ с на мяч подействовал порыв ветра с постоянной силой $F = 30$ Н. Направление силы указано на рис. 4.4. Чему стал равен импульс мяча в результате действия силы?

4.7. Брусок массой 100 г перемещают с постоянной скоростью вертикально вниз вдоль шероховатой вертикальной стены, действуя на него силой $\vec{F}$. Эта сила равна по модулю 5 Н и направлена под углом $\alpha = 30°$ к горизонтали так, как показано на рис. 4.5. Чему равны модуль силы трения, действующей на брусок, и коэффициент трения?

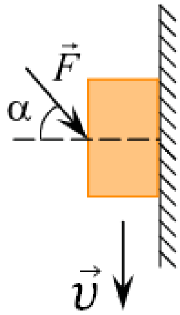


Рис. 4.5.

4.8. Конический маятник представляет собой маленький шарик, закрепленный на нити, который совершает движение по окружности в горизонтальной плоскости. Нить маятника составляет угол $60°$ с вертикалью, линейная скорость шарика 3 м/с. Определите длину нити этого маятника.

4.9. Небольшое тело массой 0,15 кг движется вдоль оси OX по инерции со скоростью 2 м/с. К этому телу прикладывают постоянную силу, направленную вдоль оси OX. Чему равен модуль этой силы, если под ее действием импульс тела за 3 с возрос до 0,9 кг · м/с?

4.10. Материальная точка массой 2 кг движется под действием некоторой силы согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 1$ м/с^2, $D = -0{,}2$ м/с^3. Найти величину этой силы в моменты времени 2 с и 5 с. В какой момент времени сила равна нулю?

II уровень

4.11. Гирька массой $m = 50$ г, привязанная к нити длиной $l = 25$ см, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Частота вращения гирьки $\nu = 2$ об/с. Найти силу натяжения нити T.

4.12. Автомашина движется с постоянным тангенциальным ускорением $0{,}62$ м/с^2 по горизонтальной поверхности, описывая окружность радиусом 40 м. Коэффициент трения скольжения между колесами машины и поверхностью равен 0,2. Какой путь пройдет машина без скольжения, если в начальный момент ее скорость равна нулю ($g = 9{,}8$ м/с^2)?

4.13. В установке, изображенной на рис. 4.6, массы брусков $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, масса груза $m_3 = 1{,}6$ кг. Коэффициент трения μ брусков о наклонную плоскость равен 0,2. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 60°$. Все тела связаны легкими нерастяжимыми нитями. Пренебрегая массой блока, найти: а) силу натяжения между брусками; б) силу натяжения между бруском 2 и грузом; в) ускорения груза и брусков.

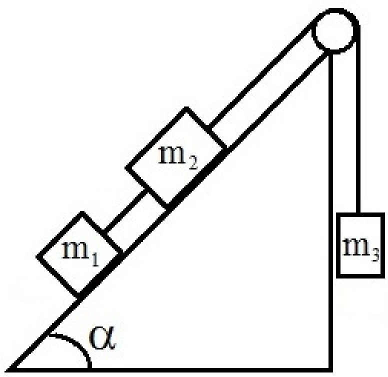


Рис. 4.6.

III уровень

4.14. Велосипедист едет по круглой горизонтальной площадке, радиус которой 50 м, а коэффициент трения зависит от расстояния r от центра площадки и меняется по закону $k = k_0\,(1 - r/R)$, где $k_0 = 0{,}3$. Найти радиус окружности, по которой велосипедист может ехать с максимальной скоростью.

4.15. Нагруженная песком железнодорожная платформа с начальной массой m_0 начинает движение из состояния покоя под воздействием постоянной силы тяги F. Через отверстия в дне платформы высыпается песок с постоянной скоростью μ (кг/с). Определите $v(t)$, то есть зависимость скорости платформы от времени.

4.16. Ракета с начальной массой $m_0 = 1{,}5$ кг, начиная движение из состояния покоя вертикально вверх, выбрасывает непрерывную струю газов с постоянной относительной нее скоростью $v = 600$ м/с. Определите, какую скорость приобретет ракета через 1 с после начала движения, если она движется: а) при отсутствии внешних сил; б) в однородном поле силы тяжести.

Индивидуальное домашнее задание

4.17. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45°$. Зависимость пройденного телом пути S от времени t задана уравнением $S = Ct^2$, где $C = 1{,}73$ м/с^2. Найти коэффициент трения k тела о плоскость.

4.18. Тело массой $m = 0{,}5$ кг движется так, что зависимость координаты тела от времени t дается уравнением $x = A\sin(\omega t)$, где $A = 5$ см и $\omega = \pi$ рад/с. Найти силу F, действующую на тело через время $t = (1/6)$ с после начала движения.

4.19. Невесомый блок укреплен в вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$ (рис. 4.7). Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены невесомой нерастяжимой нитью. Нить перекинута через блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением гирь 1 и 2 о наклонные плоскости, а также трением в блоке пренебречь.

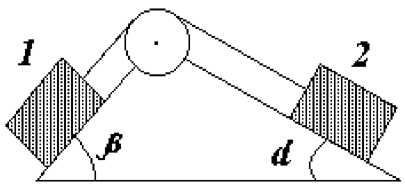


Рис. 4.7.

4.20. Самолет делает «мертвую петлю» радиусом 500 м с постоянной скоростью 360 км/ч. Найти вес летчика массой 70 кг в нижней точке петли.

4.21. Самолет делает «мертвую петлю» радиусом 500 м с постоянной скоростью 360 км/ч. Найти вес летчика массой 70 кг в верхней точке петли.

4.22. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинули шнур, к концам которого привязали грузы массой $1{,}5$ кг и 3 кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

4.23. Наклонная плоскость, образующая угол $45°$ с плоскостью горизонта, имеет длину 2 м. Тело, двигаясь равноускоренно, соскользнуло с этой плоскости за время 2 с. Определить коэффициент трения тела о плоскость.

4.24. Самолет делает «мертвую петлю» радиусом 500 м с постоянной скоростью 360 км/ч. Найти вес летчика массой 70 кг в точке петли, где скорость самолета направлена вертикально вниз.

4.25. Самолет делает «мертвую петлю» радиусом 500 м с постоянной скоростью 360 км/ч. Найти вес летчика массой 70 кг в точке петли, где скорость самолета направлена вертикально вверх.

4.26. На гладком столе стоит тележка массой $m_1 = 4$ кг. К тележке привязан один конец шнура, перекинутого через невесомый блок. Шнур при этом натянут горизонтально, параллельно плоскости стола. С каким ускорением будет двигаться тележка, если к другому концу шнура привязать гирю массой $m_2 = 1$ кг?

4.27. Аэростат массой m начал опускаться с постоянным ускорением a. Определить массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэростат получил такое же ускорение, но направленное вверх. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4.28. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $15°$ с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в 2 раза меньше времени спуска.

4.29. Тело массой $m = 1$ кг движется так, что зависимость координаты тела от времени t дается уравнением $x = At^3 + Bt + C$, где $A = 0{,}2$ см/с^3, $B =– 3$ см/с и $C = 20$ см. Найти силу F, действующую на тело через время $t = 3$ с после начала движения.

4.30. Тело массой $m = 1$ кг движется так, что зависимость координаты тела от времени t дается уравнением $x = At^2 + Bt$, где $A = 0{,}1$ см/с^2, $B =– 0{,}5$ см/с. Найти силу F, действующую на тело через время $t = 3$ с после начала движения.

4.31. Груз массой 1 кг, находящийся на столе, связан легкой нерастяжимой нитью, переброшенной через идеальный блок, с другим грузом. На первый груз действует горизонтальная постоянная сила $\vec{F}$, равная по модулю 10 Н (рис. 4.8). Второй груз движется из состояния покоя с ускорением 2 м/с^2, направленным вверх. Коэффициент трения скольжения первого груза по поверхности стола равен 0,2. Чему равна масса второго груза?

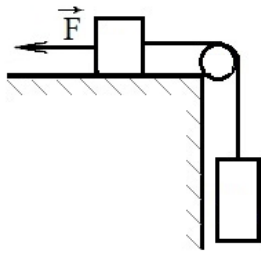


Рис. 4.8.

4.32. Конический маятник представляет собой маленький грузик массой $m = 100$ г, обращающийся с частотой ν_1 вокруг вертикальной оси на невесомой нерастяжимой нити длиной l, составляющей с этой осью угол $\alpha_1 = 60°$. Во сколько раз надо увеличить частоту обращения маятника, чтобы нить порвалась, если максимальная сила натяжения, которую она выдерживает, равна учетверенной силе тяжести грузика?

4.33. На шероховатой горизонтальной плоскости находится грузик, привязанный невесомой нерастяжимой тонкой нитью длиной $r = 50$ см к гвоздику, вбитому в плоскость. Коэффициент трения грузика о плоскость равен 0,15. Нить натягивают, и грузику толчком в горизонтальном направлении, перпендикулярном нити, сообщают скорость 3 м/с. На какой угол повернется нить к моменту остановки грузика?

4.34. Деревянный шар массой $m = 1{,}6$ кг наполовину погружен в воду и давит на дно с силой $F = 6$ Н. Найти плотность дерева.

4.35. Плоская льдина плавает в воде, выступая над ее поверхностью на $h = 0{,}04$ м. Определите массу льдины, если площадь ее поверхности $S = 2500\ \text{см}^2$. Плотность льда равна $900\ \text{кг/м}^3$.

4.36. К потолку лифта прикреплена пружина жесткостью 100 Н/м, к пружине прикрепили груз некоторой массы. Лифт начинает движение вниз с ускорением $2{,}5\ \text{м/с}^2$. Найдите массу груза, если удлинение пружин в состоянии покоя относительно движущегося лифта равно $1{,}5$ см.

4.37. На каком расстоянии от центра Земли силы притяжения космического корабля к Земле и Луне уравновешивают друг друга? Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а расстояние между их центрами в 60 раз больше радиуса Земли. Ответ выразите в радиусах Земли.

4.38. В аттракционе человек массой 70 кг движется на легкой тележке по рельсам и совершает «мертвую петлю» в вертикальной плоскости. С какой скоростью движется тележка в верхней точке круговой траектории радиусом 20 м, если в этой точке сила давления человека на сидение тележки равна 700 Н?

4.39. В аттракционе человек движется на легкой тележке по рельсам и совершает «мертвую петлю» в вертикальной плоскости. С какой скоростью должна двигаться тележка в верхней точке круговой траектории радиусом $6{,}4$ м, чтобы в этой точке сила давления человека на сидение тележки была равна 0 Н?

4.40. Имеется недеформированная пружина длиной $L = 30$ см и жесткостью $k = 30$ Н/м, груз массой $m = 1$ кг, а также вращающийся с частотой 0,5 Гц массивный диск. На каком минимальном расстоянии от центра диска можно положить на него груз, прикрепив его пружиной к центру диска, чтобы груз оставался неподвижным относительно диска? Коэффициент трения между грузом и диском 0,5. Размерами груза пренебречь.

4.41. В аттракционе человек массой 90 кг движется на легкой тележке по рельсам и совершает «мертвую петлю» в вертикальной плоскости. Каков радиус круговой траектории, если в нижней точке при движении тележки со скоростью 10 м/с сила давления человека на сидение тележки была равна 1800 Н?

4.42. В аттракционе человек массой 50 кг совершает «мертвую петлю» в вертикальной плоскости. Когда вектор скорости был направлен вертикально вниз, сила нормального давления человека на сидение была 1 000 Н. Найдите скорость тележки в этой точке при радиусе круговой траектории 5 м.

4.43. Два одинаковых груза массой $M = 100$ г каждый подвешены на концах невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок с неподвижной осью. На один из них кладут перегрузок массой $m = 20$ г, после чего система приходит в движение. Найдите модуль силы F, действующей на ось блока во время движения грузов. Трением пренебречь.

4.44. На шероховатом горизонтальном диске, вращающемся вокруг вертикальной оси, покоится небольшое тело. Расстояние от оси вращения до тела $r = 25$ см. Угловую скорость вращения начали медленно увеличивать. Каков коэффициент трения μ между телом и диском, если тело начало скользить по диску при угловой скорости $\omega = 4{,}5$ рад/с?

4.45. На горизонтальном столе лежит деревянный брусок. Коэффициент трения между поверхностью стола и бруском $\mu = 0{,}1$. Если приложить к бруску силу, направленную вверх под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, то брусок будет двигаться по столу равномерно. С каким ускорением будет двигаться этот брусок по столу, если приложить к нему такую же по модулю силу, направленную под углом $\beta = 30°$ к горизонту?

4.46. К потолку лифта прикреплена пружина жесткостью 100 Н/м, к пружине прикрепили груз массой 3 кг. Лифт, двигаясь вверх, начинает тормозить с постоянным ускорением. Найдите ускорение лифта, если удлинение пружины в состоянии покоя относительно движущегося лифта равно 2 см.

4.47 – 4.76. В вершине треугольной призмы закреплен, так как указано на рис. 4.9, блок массой $m_Б$ и радиусом R. Форма блока указана в табл. 4.2. На блок действует тормозящий момент силы M. Углы при основании призмы α и β. Через блок перекинута тонкая невесомая нерастяжимая нить, к концам которой привязаны два бруска массами m_1 и m_2. Коэффициенты трения брусков о наклонные плоскости равны μ_1 и μ_2 соответственно. На один из брусков в соответствии с вариантом действует горизонтальная сила F. Направление силы указано в табл. 4.2.

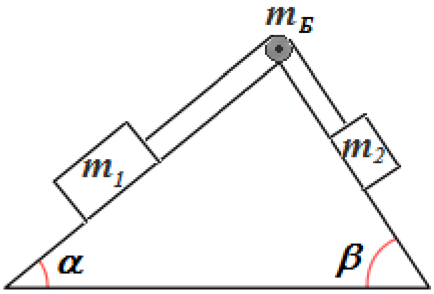


Рис. 4.9.

Найти ускорения брусков, пренебрегая действием тормозящего момента силы и пренебрегая массой блока.

По указанию преподавателя можно:

а) считать обе плоскости гладкими;

б) считать одну из плоскостей гладкой;

в) считать массы брусков одинаковыми;

д) пренебречь действием силы F.

Таблица 4.2

№	Форма тела блока	На какой брусок действует сила F	Направление силы F	$m_Б$, г	R, см	M, Н·м	α, °	β, °	m_1, г	m_2, г	μ_1	μ_2	F, Н
4.47	сплошной цилиндр	левый	вправо	10	15	0,55	30	75	100	120	0,1	0,2	1
4.48	кольцо	правый	влево	80	14	0,3	45	60	110	130	0,15	0,15	2
4.49	однородный шар	левый	вправо	70	13	0,2	60	45	120	140	0,2	0,1	3
4.50	полый цилиндр	правый	влево	60	12	0,08	75	30	130	150	0,25	0,05	4
4.51	однородный диск	левый	вправо	50	11	0,06	30	45	140	160	0,3	0,2	5
4.52	сплошной цилиндр	правый	вправо	40	10	0,04	45	75	90	120	0,35	0,15	6
4.53	кольцо	левый	влево	30	9	0,025	30	60	80	110	0,4	0,1	7
4.54	однородный шар	правый	вправо	20	8	0,25	60	30	70	100	0,1	0,05	8
4.55	полый цилиндр	левый	влево	10	7	0,15	30	75	60	90	0,15	0,2	9
4.56	однородный диск	правый	влево	20	6	0,05	45	60	50	80	0,2	0,15	10
4.57	сплошной цилиндр	левый	влево	30	5	0,07	60	45	40	70	0,25	0,1	11
4.58	кольцо	правый	вправо	40	4	0,06	75	30	120	100	0,3	0,05	12
4.59	однородный шар	левый	влево	50	15	0,5	30	45	70	260	0,35	0,2	11
4.60	полый цилиндр	правый	вправо	60	14	0,6	45	75	80	70	0,4	0,15	10
4.61	однородный диск	правый	вправо	70	13	0,7	30	60	90	80	0,1	0,1	9

Окончание табл. 4.2

№	Форма тела блока	На какой брусок действует сила F	Направление силы F	$m_Б$, г	R, см	M, Н·м	α, °	β, °	m_1, г	m_2, г	μ_1	μ_2	F, Н
4.62	сплошной цилиндр	правый	влево	80	12	0,8	60	30	100	120	0,15	0,05	8
4.63	кольцо	левый	вправо	90	11	0,9	30	75	200	150	0,2	0,2	7
4.64	однородный шар	правый	влево	30	22	1	45	60	200	300	0,25	0,15	6
4.65	полый цилиндр	левый	вправо	110	24	1,5	60	45	200	350	0,3	0,1	5
4.66	однородный диск	левый	влево	20	20	2	75	30	200	170	0,35	0,05	4
4.67	однородный диск	левый	вправо	180	19	2,5	30	45	200	180	0,4	0,2	3
4.68	сплошной цилиндр	правый	вправо	160	18	3	45	75	200	220	0,1	0,15	2
4.69	кольцо	левый	влево	210	17	1,2	30	60	300	400	0,15	0,1	1
4.70	однородный шар	правый	вправо	190	16	1,1	60	30	400	500	0,2	0,05	24
4.71	полый цилиндр	левый	влево	170	15	1,3	30	75	500	300	0,25	0,2	25
4.72	однородный диск	правый	влево	150	14	1,4	45	60	350	310	0,3	0,15	26
4.73	сплошной цилиндр	левый	влево	130	13	2,1	60	45	170	200	0,35	0,1	27
4.74	кольцо	правый	вправо	140	12	2,2	75	30	220	180	0,4	0,05	28
4.75	однородный шар	левый	влево	160	11	2,4	30	45	190	310	0,1	0,2	29
4.76	полый цилиндр	правый	вправо	180	10	1,9	45	75	250	320	0,15	0,15	30

V. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Основными динамическими характеристиками вращательного движения тела являются: момент инерции, момент силы и момент импульса.

Момент инерции твердого тела относительно оси вращения

Момент инерции при вращательном движении имеет тот же смысл, что и масса при поступательном движении. Момент инерции – это скалярная физическая величина, являющаяся мерой инертности тела при вращательном движении.

Момент инерции материальной точки $\mathcal{J}_{(\cdot)}$ относительно заданной оси вращения равен массе этой точки m, умноженной на квадрат расстояния r от нее до оси вращения

$$\mathcal{J}_{(\cdot)} = m \cdot r^2. \tag{5.1}$$

Любое тело состоит из множества точек. Момент инерции тела $\mathcal{J}$ относительно заданной оси вращения определяется суммой моментов инерции всех его точек относительно этой оси:

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \cdot r_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \rho \cdot r_i^2 \cdot \Delta V_i, \tag{5.2}$$

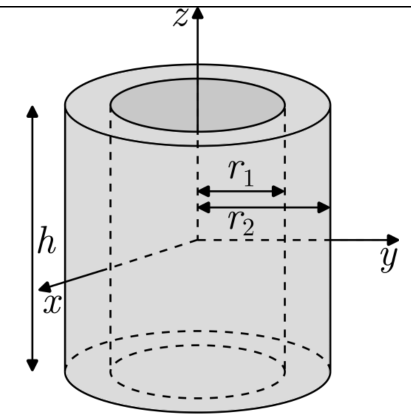
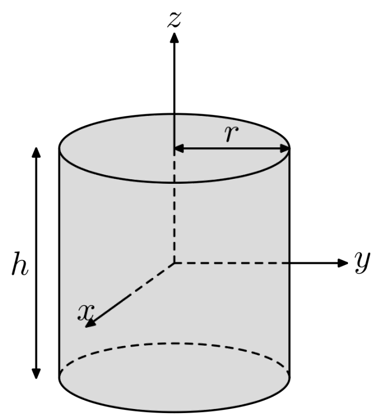
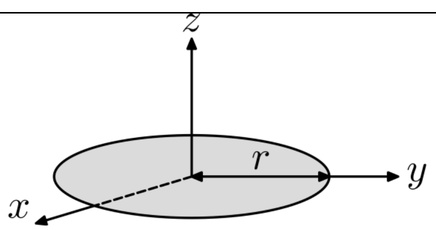
где Δm_i – масса, заключенная в элементарном объеме ΔV_i, равная $\Delta m_i = \rho \cdot \Delta V_i$, ρ – плотность тела, r_i – расстояние от элементарной массы до оси вращения. Чем меньше элементарные объемы ΔV_i, тем более точно будет вычислен момент инерции тела. Поэтому для точного определения момента инерции тела необходимо перейти к интегрированию:

$$\mathcal{J} = \int r^2\, dm = \int \rho\, r^2\, dV. \qquad (5.3)$$

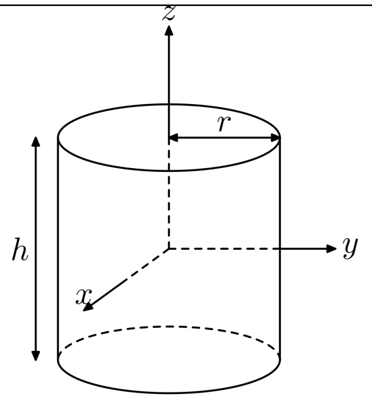
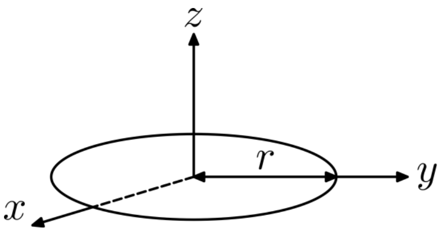
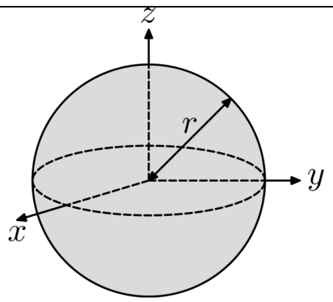
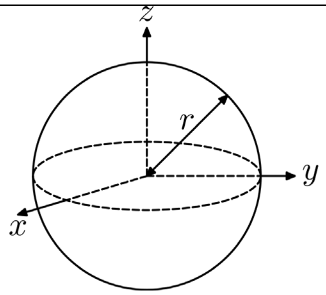
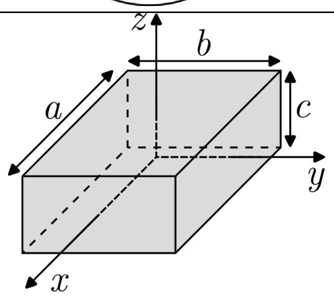
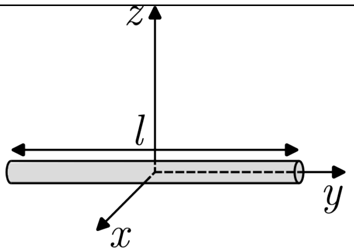
Момент инерции твердого тела зависит от размеров тела, его формы, от распределения плотности материала тела по его объему и от положения оси вращения.

Пользуясь формулой $\mathcal{J} = \int r^2\, dm$, можно найти моменты инерции $\mathcal{J}_C$ однородных тел правильной геометрической формы массой m относительно оси, проходящей через центр масс тела C. В табл. 5.1 приведены выражения для расчета момента инерции $\mathcal{J}_C$ некоторых однородных тел.

Таблица 5.1

Изображение тела	Описание тела	Момент инерции тела $\mathcal{J}_C$
	толстостенный цилиндр высотой h с внутренним и внешним радиусами r_1 и r_2	$\mathcal{J}_{Cz} = \frac{m(r_1^2 + r_2^2)}{2}$ $\mathcal{J}_{Cx} = \mathcal{J}_{Cy} = m\left[\frac{r_1^2 + r_2^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right]$
	сплошной цилиндр высотой h и радиусом r	$\mathcal{J}_{Cz} = \frac{mr^2}{2}$ $\mathcal{J}_{Cx} = \mathcal{J}_{Cy} = m\left[\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right]$
	Тонкий диск радиуса r	$\mathcal{J}_{Cz} = \frac{mr^2}{2}$ $\mathcal{J}_{Cx} = \mathcal{J}_{Cy} = \frac{mr^2}{4}$

Окончание табл. 5

Изображение тела	Описание тела	Момент инерции тела $\mathcal{J}_C$
	тонкостенный цилиндр высотой h и радиусом r	$\mathcal{J}_{Cz} = mr^2$ $\mathcal{J}_{Cx} = \mathcal{J}_{Cy} = m\left[\dfrac{r^2}{2} + \dfrac{h^2}{12}\right]$
	Тонкое кольцо радиуса r	$\mathcal{J}_{Cz} = mr^2$ $\mathcal{J}_{Cx} = \mathcal{J}_{Cy} = \dfrac{mr^2}{2}$
	шар радиуса r	$\mathcal{J}_C = \dfrac{2}{5}mr^2$
	сфера радиуса r	$\mathcal{J}_C = \dfrac{2}{3}mr^2$
	Прямой параллелепипед со сторонами a, b, c	$\mathcal{J}_{Cx} = \dfrac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $\mathcal{J}_{Cy} = \dfrac{1}{12}m(a^2 + c^2)$ $\mathcal{J}_{Cz} = \dfrac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
	стержень длиной l	$\mathcal{J}_{Cy} = 0$ $\mathcal{J}_{Cx} = \mathcal{J}_{Cz} = \dfrac{ml^2}{12}$

Если ось вращения z не проходит через центр масс, то момент инерции относительно этой оси определяется по теореме Штейнера.

Момент инерции тела $\mathcal{I}$ относительно произвольной оси равен сумме момента инерции $\mathcal{I}_C$ относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_C + md^2. \quad (5.4)$$

Момент силы

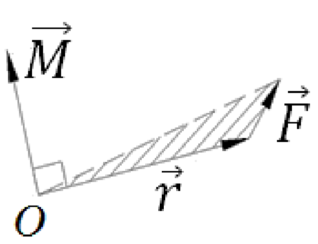


Рис. 5.1.

Моментом силы $\vec{M}$ относительно произвольной точки O (рис. 5.1) называется векторная физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного от точки O к точке приложения силы, на саму силу $\vec{F}$.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv [\vec{r}, \vec{F}] \quad (5.5)$$

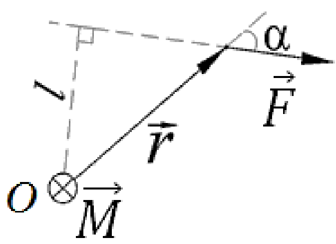


Рис. 5.2.

Модуль вектора $\vec{M}$ определяется по формуле: $M = rF\sin\alpha = Fl$, где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$; l – длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы – эта величина называется плечом силы (рис. 5.2).

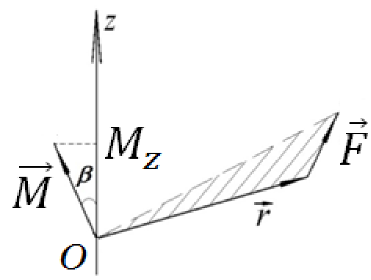


Рис. 5.3.

В случае, когда твердое тело вращается вокруг закрепленной оси, вращающее действие силы будет характеризоваться величиной, называемой моментом силы относительно этой оси. *Моментом силы относительно некоторой оси z* называется проекция момента силы на эту ось относительно любой точки, принадлежащей оси (рис. 5.3).

$$M_z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_z = rF \sin \alpha \cos \beta. \tag{5.6}$$

Момент импульса материальной точки. Момент импульса твердого тела

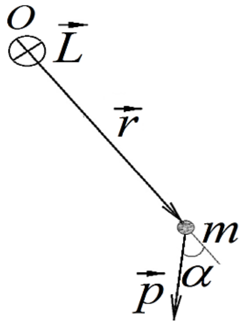


Рис. 5.4.

Моментом импульса материальной точки массой m относительно произвольного центра вращения O называется векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного от точки O к данной материальной точке, на вектор импульса этой материальной точки (рис. 5.4)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \equiv [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]. \tag{5.7}$$

Модуль вектора $\vec{L}$ определяется по формуле: $L = rp \sin \alpha$, где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$.

При этом моментом импульса материальной точки относительно некоторой оси z называется проекция момента импульса на эту ось относительно любой точки, принадлежащей оси (рис. 5.5)

$$L_z = [\vec{r}, \vec{p}]_z = rp \sin \alpha \cos \beta. \tag{5.8}$$

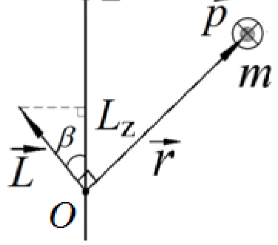


Рис. 5.5.

Так как твердое тело представляет собой совокупность материальных точек, то момент импульса твердого тела равен сумме моментов импульсов всех материальных точек, из которых состоит тело.

В случае, когда ось вращения твердого тела закреплена и совпадает с осью z, используется понятие момента импульса твердого тела относительно оси вращения. Момент импульса твердого тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой же оси вращения на проекцию угловой скорости тела на ось вращения

$$L_z = \mathcal{J}_z \omega_z. \tag{5.9}$$

Основной закон динамики вращательного движения

Скорость изменения момента импульса материальной точки относительно некоторой произвольной точки O пространства равна результирующему моменту действующих на материальную точку сил, определенному относительно той же точки O:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_R. \tag{5.10}$$

Спроецировав все величины, входящие в уравнение (5.10), на некоторую ось Z, совпадающую с осью вращения, получим соотношение

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{R,z}, \tag{5.11}$$

согласно которому *скорость изменения момента импульса материальной точки относительно оси Z равна сумме моментов сил относительно этой оси*.

Соотношения (5.10) и (5.11) можно обобщить на случай любой системы материальных точек (в частности, твердого тела). Для системы точек величина $M_{R,z}$ равна результирующему моменту *внешних* сил $M_{R,z}^{\text{внеш}}$ (поскольку сумма моментов внутренних сил системы равна нулю).

Если тело в процессе вращения вокруг оси Z не деформируется, то его момент инерции остается постоянным ($\mathcal{J}_z = \text{const}$), и соотношение (5.11) принимает вид

$$\mathcal{J}_z \varepsilon_z = M_{R,z}^{\text{внеш}} \tag{5.12}$$

или, что то же самое,

$$\varepsilon_z = \frac{M_{R,z}^{\text{внеш}}}{\mathcal{J}_z}, \tag{5.13}$$

где $\mathcal{J}_z$ – момент инерции тела относительно оси Z, ε_z – проекция вектора углового ускорения на ось Z, $M_{R,z}^{\text{внеш}}$ – результирующий момент действующих на тело внешних сил относительно оси Z.

Равенство (5.13) представляет собой основной закон динамики вращательного движения твердого тела: *проекция углового ускорения тела на ось вращения прямо пропорциональна суммарному моменту приложенных к телу внешних сил относительно этой оси и обратно пропорциональна моменту инерции тела относительно этой же оси.*

Контрольные вопросы

1. Что является мерой инертности тела при вращательном движении? Сформулируйте определение этой физической величины.

2. Дайте определения следующих физических величин: момент импульса материальной точки относительно точки, момент силы относительно точки.

3. Дайте определения следующих физических величин: моменты импульса материальной точки и твердого тела относительно неподвижной оси вращения, момент силы относительно неподвижной оси вращения.

4. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения для материальной точки и для твердого тела относительно неподвижной оси.

Задачи для аудиторных занятий

I уровень

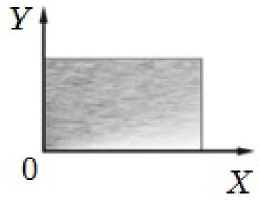


Рис. 5.6.

5.1. Сравнить моменты инерции однородной пластины относительно осей OX и OY (рис. 5.6)

5.2. Частица массой m вращается вокруг оси со скоростью $\vec{v}$, а) замедляясь, б) ускоряясь (рис. 5.7). Изобразите на рисунке для обоих случаев направления: импульса $\vec{p}$ частицы; результирующей силы $\vec{F}$, действующей на частицу; момента импульса частицы $\vec{L}$ относительно точки O; момента силы $\vec{M}$ относительно точки O.

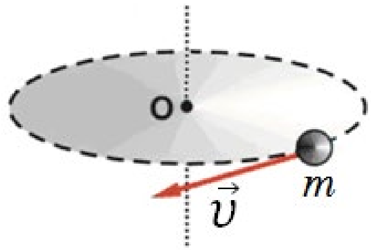


Рис. 5.7.

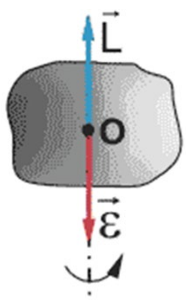


Рис. 5.8.

5.3. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, на рис. 5.8 указаны направления момента импульса тела относительно точки O, лежащей на оси вращения, и углового ускорения. Укажите направления угловой скорости и момента сил относительно точки O для данного тела.

5.4. Имеются три тела: а) однородный шар; б) однородный цилиндр; в) пустотелый цилиндр. Их массы и радиусы одинаковы. Сравните моменты импульса этих тел при вращении с одинаковой угловой скоростью относительно своих осей симметрии.

5.5. Шар катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Сравните его моменты импульса относительно оси качения, которая проходит через центр шара O, и мгновенной оси, проходящей через точку соприкосновения шара с землей O_1.

5.6. Под действием постоянного относительно оси вращения Z момента силы, равного 15 Н · м, диск сделал полный оборот за 5 с. На сколько изменился момент импульса диска относительно оси Z? Трением пренебречь.

5.7. К вращающемуся относительно оси Z с постоянной скоростью маховику в момент времени t_0 приложен тормозящий момент сил $M_{\mathrm{z}} = C/t^2$ $(C = \mathrm{const})$ относительно оси Z. Найти зависимость момента импульса маховика L_z относительно оси Z от времени и построить график зависимости $L_z(t)$.

II уровень

5.8. Определить момент инерции шара массой 2 кг и радиусом 50 см относительно оси, соприкасающейся с поверхностью шара.

5.9. Шар массой 10 кг и радиусом 0,2 м вращается вокруг оси, проходящей через его центр тяжести. Проекция угловой скорости шара на ось вращения меняется по закону $\omega_z(t) = A + Bt^2 + Ct^3$, где $B = 4$ рад/с, $C =- 1$ рад/с^3. По какому закону меняется момент действующих на шар сил относительно этой оси? Найти величину момента сил в момент времени 2 с.

5.10. Через блок в виде диска, имеющего массу 0,08 кг, перекинута тонкая нить, к концам которой подвешены грузы массами 0,1 кг и 0,2 кг.

С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением пренебречь, $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$.

5.11. Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого $\mathcal{J} = 150\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$, вращается с частотой $\nu = 240\ \text{об/мин}$. Через 1 мин после начала действия сил торможения он остановился. Определите: а) момент сил торможения относительно оси вращения маховика; б) число оборотов маховика от начала торможения до полной остановки.

5.12. Сплошной однородный диск скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определите линейное ускорение a центра диска.

5.13. Два груза массами $m_1 = 4$ кг и $m_2 = 1$ кг связаны нитью, перекинутой через блок в виде сплошного диска радиусом $R = 10$ см массой $\text{M} = 200$ г, который прикреплен к вершине треугольной призмы. Начальные скорости грузов равны нулю. Найти ускорение грузов, если углы при основании призмы равны $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, а коэффициент трения $\mu = 0{,}2$.

III уровень

5.14. При строительстве объектов повышенной этажности для подъема грузов используются башенные краны, монтируемые как на подвижные, так и неподвижные основания. Найдем предельные характеристики башенного крана КБ-474, смонтированного на 4-х опорах, скрепленных рамой с линейными размерами 6 м×6 м. На раме равномерно распределен груз в 80 т. Модификация КБ-474-20 (-21, -22, -23, -24) определяется вылетом стрелы крана – максимальным возможным расстоянием по горизонтали от оси крана до центра масс поднимаемого груза (рис. 5.9). Основные технические характеристики крана приведены в табл. 5.2.

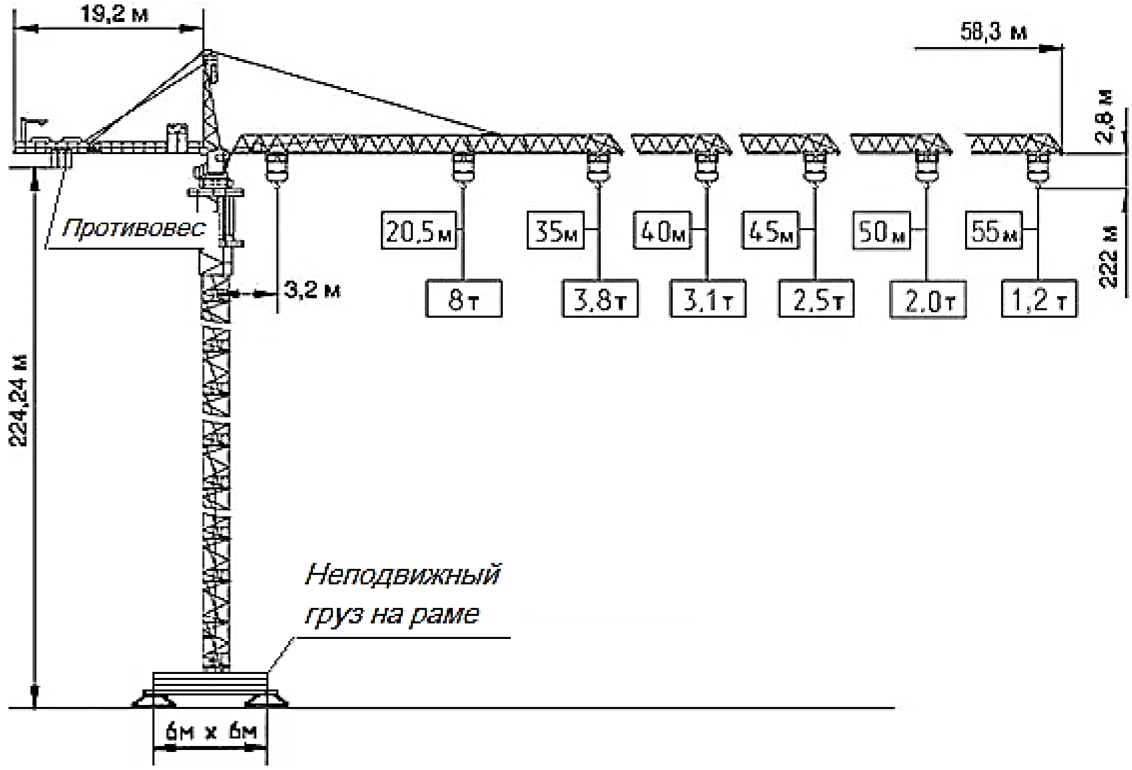


Рис. 5.9

Таблица 5.2

Характеристика крана КБ-474	Модификация крана				
	КБ-474-20	КБ-474-21	КБ-474-22	КБ-474-23	КБ-474-24
Макс. вылет стрелы, м	55	50	45	40	35
Грузоподъемность при макс. вылете, т	1,2	2	2,5	3,1	3,8
Масса подвижных плит противовеса, т	8,7	7,7	5,8	2,9	0,7
Конструктивная масса крана, т	74,8	74,2	73,6	72,7	71,7
из нее: масса башни, т	62	62	62	62	62
масса стрелы, т	12,8	12,2	11,6	10,7	9,7

В качестве противовеса используются подвижные плиты. Максимальная возможная удаленность противовеса от оси башни составляет 19,2 м.

Для всех модификаций крана КБ-474 рассчитайте:

а) предельную массу груза, при которой кран перевернется;

б) силы реакции, действующие на каждую из опор при максимальной грузоподъемности;

в) как меняется вес груза при повороте стрелы без раскачивания с угловой скоростью 0,75 об/мин (посчитайте для разных вылетов стрелы с максимальной грузоподъемностью);

г) Почему рекомендуемая скорость поднятия-спуска при максимальной массе груза не должна превышать 22 м/мин, а для плавной посадки рекомендуют скорости 2,4–4,8 м/мин?

Индивидуальное домашнее задание

Движение связанных тел

4.47 – 4.76.

Решить задачи 4.47 – 4.76 из IV главы с учетом массы блока и действующим на блок тормозящим моментом силы.

В вершине треугольной призмы закреплен, так как указано на рис. 4.9, блок массой $m_Б$ и радиусом R. Форма блока указана в табл. 4.2. На блок действует тормозящий момент силы M. Углы при основании призмы α и β. Через блок перекинута тонкая невесомая нерастяжимая нить, к концам которой привязаны два бруска массами m_1 и m_2. Коэффициенты трения брусков о наклонные плоскости равны μ_1 и μ_2 соответственно. На один из брусков в соответствии с вариантом действует горизонтальная сила F. Направление силы указано в табл. 4.2.

Найти угловое ускорение блока.

По указанию преподавателя можно:

а) считать обе плоскости гладкими;

б) считать одну из плоскостей гладкой;

в) пренебречь действием силы F.

5.15 – 5.45.

При решении задач 5.15 – 5.45 считать:

- блоки однородными сплошными дисками, чья ось вращения проходит через центр масс блока перпендикулярно его основаниям;
- нити нерастяжимыми и невесомыми.

Таблица 5.3

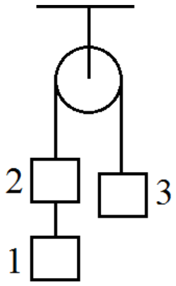


Рис. 5.10.

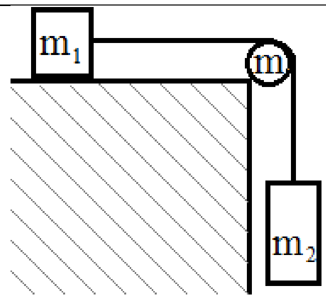


Рис. 5.11.

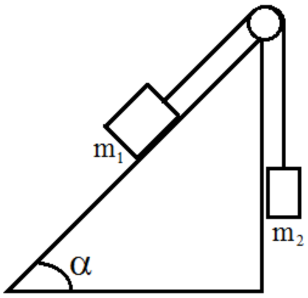


Рис. 5.12.

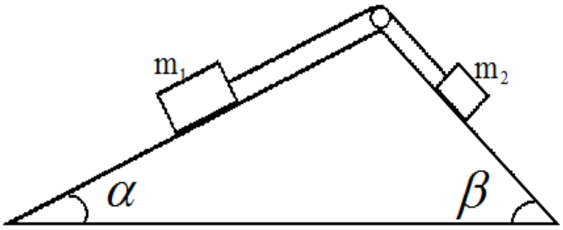


Рис. 5.13.

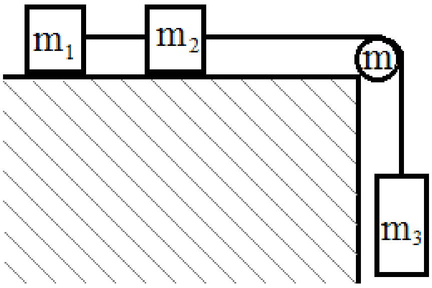


Рис. 5.14.

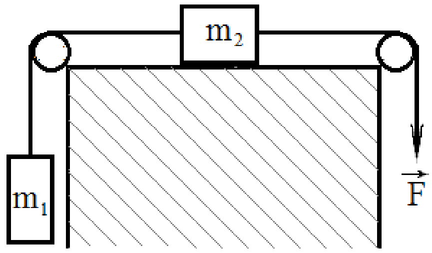


Рис. 5.15.

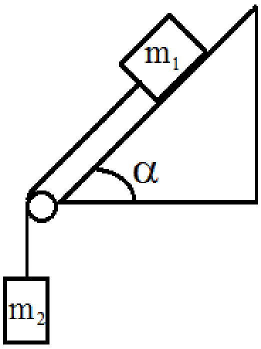


Рис. 5.16.

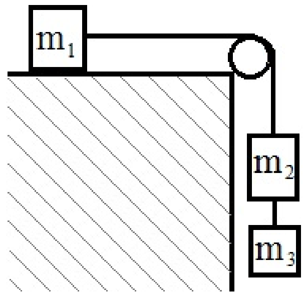


Рис. 5.17.

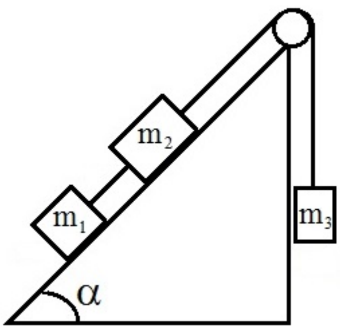


Рис. 5.18.

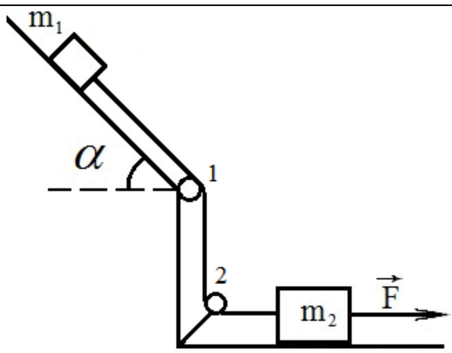


Рис. 5.19.

Окончание табл. 5.3

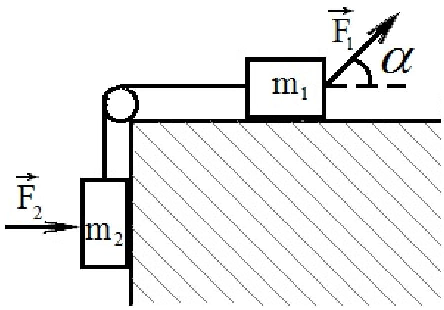


Рис. 5.20.

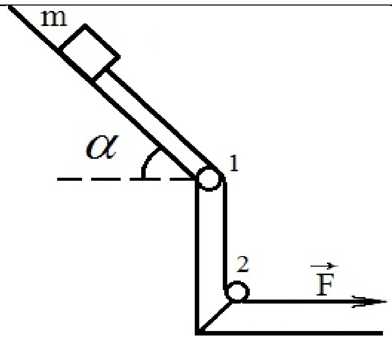


Рис. 5.21.

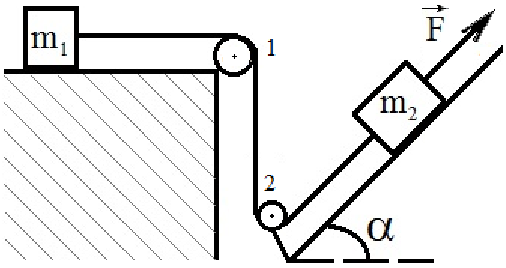


Рис. 5.22.

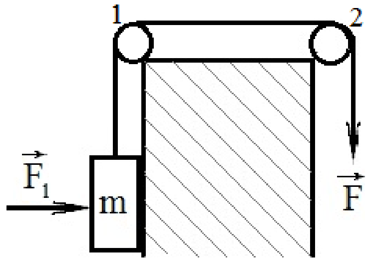


Рис. 5.23.

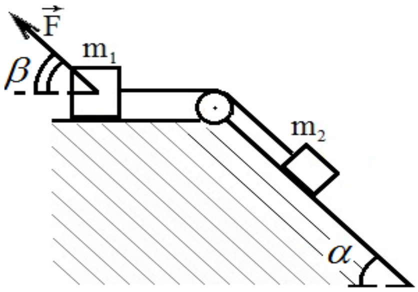


Рис. 5.24.

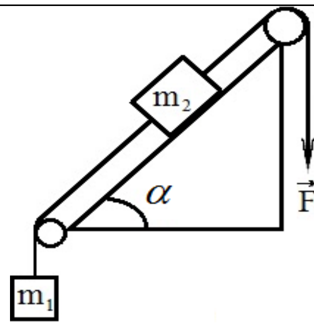


Рис. 5.25.

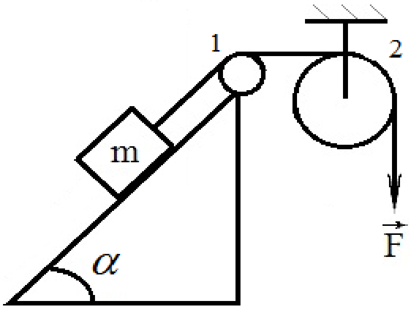


Рис. 5.26.

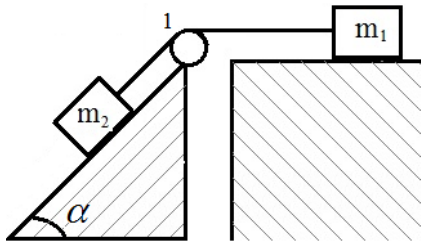


Рис. 5.27.

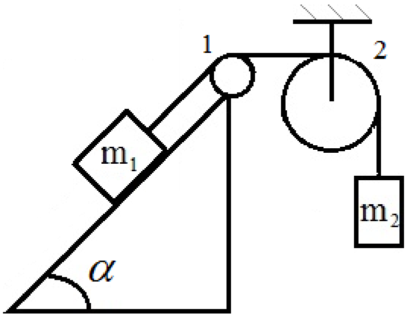


Рис. 5.28.

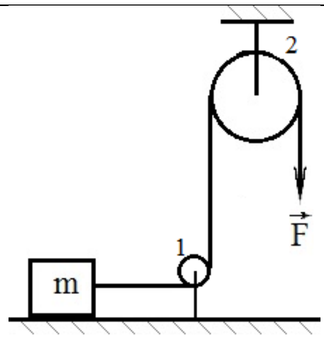


Рис. 5.29.

5.15. Через неподвижный блок массой $m = 0{,}5$ кг и радиусом $R = 12$ см перекинута нить, к концам которой прикреплены три одинаковых груза массой 5 кг каждый (табл. 5.3, рис. 5.10). На оси блока действует тормозящий момент $M = 15$ Н · м. Найти: а) ускорение грузов; б) силу натяжения нити между грузами 1 и 2.

5.16. Через неподвижный блок массой 400 г перекинута нить, на которой висят грузы одинаковой массы 1 кг. Радиус блока 10 см. На оси блока действует тормозящий момент. На каждый из грузов одновременно кладут по перегрузку: справа – массой 900 г, слева – 200 г. Определить: а) величину тормозящего момента, если грузы движутся с ускорением $0{,}6$ м/с^2; б) силы давления перегрузков на основные грузы.

5.17. Брусок массой $m_1 = 200$ г движется по горизонтальному столику под действием груза массой $m_2 = 300$ г (табл. 5.3, рис. 5.11). Груз соединен с бруском нитью, перекинутой через блок массой $m = 100$ г, радиусом $R = 8$ см. Коэффициент трения бруска о стол 0,1. Найти: а) силу натяжения нити; б) угловую скорость блока в начале третьей секунды от начала вращения.

5.18. В установке, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.12, масса бруска $m_1 = 2$ кг, масса груза $m_2 = 1{,}5$ кг, масса блока 400 г, радиус 12 см. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. Коэффициент трения о наклонную плоскость 0,2. Найти: а) ускорение, с которым движутся грузы; б) частоту вращения блока через 4 с после начала вращения.

5.19. В установке, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.12, масса бруска $m_1 = 1$ кг, масса груза $m_2 = 2$ кг, масса блока 800 г, радиус 16 см. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 45°$. Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость 0,12. Найти: а) угловое ускорение блока; б) силу натяжения нити, действующую на брусок m_1.

5.20. В установке, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.11, масса бруска $m_1 = 2$ кг, масса груза $m_2 = 800$ г, масса блока 300 г, радиус 10 см. На брусок массой m_1 действует сила $F = 18$ Н, направленная под утлом $\alpha = 30°$ к горизонту влево. Определить: а) коэффициент трения бруска о горизонтальную поверхность, если, двигаясь без начальной скорости, он прошел путь $0{,}9$ м за одну секунду; б) моменты сил, действующие на блок.

5.21. В установке, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.13, масса брусков $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 1{,}5$ кг, масса блока 400 г, радиус 16 см. Углы наклона плоскостей к горизонту $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$. Коэффициенты трения о наклонные плоскости одинаковые и равны 0,1. Найти: а) угловое ускорение блока; б) скорость движения грузов через 2 с после начала движения.

5.22. В установке, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.14, масса брусков $m_1 = m_2 = 100$ г, масса груза $m_3 = 200$ г, масса блока 160 г, радиус 15 см. Коэффициенты трения между брусками и горизонтальной поверхностью одинаковые и равны 0,3. Определите: а) силу натяжения нити, связывающей грузы m_1 и m_2, б) угловую скорость блока спустя 2 с от начала движения.

5.23. В установке, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.15, масса груза $m_1 = 0{,}8$ кг, $m_2 = 2$ кг. Блоки одинаковые. Масса каждого блока равна 400 г, радиус 10 см. Коэффициент трения бруска о горизонтальную поверхность 0,2. К свободному концу шнура приложена сила $F = 14$ Н. Определить: а) ускорение грузов; б) частоту вращения блоков спустя 2 с после начала вращения.

5.24. В установке, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.16, масса бруска $m_1 = 3$ кг, масса груза $m_2 = 1$ кг, масса блока 600 г, радиус 20 см. Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость 0,2, угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 60°$. Найти: а) ускорение, с которым движется груз; б) угловую скорость блока спустя 2 с после начала вращения.

5.25. В установке, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.16, масса бруска $m_1 = 3$ кг, масса груза $m_2 = 1$ кг, масса блока 600 г, радиус 20 см. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 60°$. Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость 0,2. Найти: а) угловое ускорение, с которым вращается блок; б) отношение угловых скоростей блока в моменты времени 1 с и 2 с после начала вращения.

5.26. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.16, масса бруска $m_1 = 1$ кг, масса груза $m_2 = 1$ кг, масса блока 600 г, радиус блока 20 см. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 60°$. Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость 0,2. На брусок действует сила $\vec{\mathrm{F}}$, направленная вправо под углом $\beta = 30°$ к наклонной плоскости. Найти: а) величину силы F, если угловое ускорение блока равно 5 рад/с^2; б) силы натяжения нитей.

5.27. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.17, масса бруска $m_1 = 800$ г, массы грузов $m_2 = 1$ кг, $m_3 = 900$ г. Масса блока 400 г, радиус 20 см. Коэффициент трения бруска о горизонтальную поверхность 0,2. Найти: а) частоту вращения блока спустя 5 с от начала вращения; б) силу натяжения нити между грузами m_2 и m_3.

5.28. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.17, масса бруска $m_1 = 2$ кг, массы грузов $m_2 = 1$ кг, $m_3 = 0{,}5$ кг. Масса блока 800 г, радиус 20 см. Коэффициент трения бруска о горизонтальную поверхность 0,2. На брусок действует сила $F = 24$ Н, направленная влево под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найти: а) ускорение грузов; б) силу натяжения нити, действующую на брусок.

5.29. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.12, масса бруска $m_1 = 2$ кг, масса груза $m_2 = 1$ кг. Масса блока 400 г, радиус 10 см. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 20°$. Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость 0,3. А) Какую силу, направленную вертикально вниз, нужно приложить к грузу m_2, чтобы он стал двигаться с ускорением $1{,}2\ \text{м/с}^2$? Б) Найти силу натяжения нити, действующую на груз m_2.

5.30. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.15, масса груза $m_1 = 1$ кг, масса бруска $m_2 = 1{,}6$ кг. Масса каждого блока 600 г, радиус 20 см. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 20°$. Коэффициент трения бруска о горизонтальную плоскость 0,2. На оси каждого блока действует тормозящий момент $0{,}8\ \text{Н} \cdot \text{м}$. А) С какой силой F нужно тянуть за свободный конец шнура, чтобы брусок стал двигаться с ускорением $1{,}4\ \text{м/с}^2$? Б) Чему будет равна скорость бруска через 0,5 с после начала движения?

5.31. В установке, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.18, массы брусков $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, масса груза $m_3 = 1{,}6$ кг. Масса блока 600 г, радиус 12 см. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 60°$. Найти: а) коэффициенты трения брусков о наклонную плоскость, считая их одинаковыми, если груз m_1 за 2 с проходит расстояние 2 м; б) угловую скорость блока спустя 2 с от начала его вращения.

5.32. В установке, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.16, масса бруска $m_1 = 1$ кг, масса груза $m_2 = 800$ г, масса блока 600 г, радиус 20 см. Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость 0,2, угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. На оси блока действует тормозящий момент $1{,}2\ \text{Н} \cdot \text{м}$. На брусок m_1 действует сила $\vec{F}$, направленная параллельно наклонной плоскости вверх. А) Найти величину этой силы, если брусок движется с ускорением $0{,}8\ \text{м/с}^2$. Б) Чему будет равна скорость груза через 1,25 с после начала движения?

5.33. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.19, масса бруска $m_1 = 600$ г, масса бруска $m_2 = 1$ кг. Масса каждого блока 800 г, радиус 10 см. На брусок m_2 действует сила $F = 5$ Н. Коэффициенты трения брусков о плоскости одинаковы и равны 0,3. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. Найти: а) ускорение брусков; б) силу натяжения нити, действующей на брусок m_2.

5.34. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.20, массы брусков $m_1 = 1{,}2$ кг, $m_2 = 1$ кг. Масса блока 800 г, радиус 20 см. На первый брусок действует сила $F_1 = 16$ Н, направленная вправо под углом

$\alpha = 30°$ к горизонту. Второй брусок прижимается к вертикальной поверхности с силой $F_2 = 4$ Н. Коэффициенты трения брусков о поверхности одинаковые и равны 0,2. Найти: а) угловую скорость блока спустя 3 с от начала его вращения; б) силу натяжения нити, действующую на брусок.

5.35. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.21, масса бруска $m = 600$ г, массы блоков $m_1 = 0{,}8$ кг, $m_2 = 400$ г, радиусы $r_1 = 20$ см и $r_2 = 30$ см. Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость 0,2, угол наклона плоскости к горизонту 45°. На оси блоков действуют одинаковые тормозящие моменты, равные $1{,}8$ Н $\cdot$ м. К свободному концу шнура приложена сила $F = 13{,}8$ Н. А) Найти угловые ускорения блоков. Б) Чему будет равна скорость бруска через 1 с после начала движения?

5.36. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.22, массы брусков $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 800$ г. Масса каждого из блоков 600 г, радиус 20 см. Коэффициенты трения брусков о поверхности одинаковые и равны 0,1. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 60°$. На брусок действует сила $F = 9$ Н. Найти: а) угловое ускорение блоков; б) силу натяжения нити, действующую на брусок m_1.

5.37. В установке, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.23, масса бруска 500 г. Коэффициент трения его о вертикальную поверхность 0,3. Масса первого блока 400 г, радиус 10 см, масса второго 600 г, радиус – 30 см. Брусок прижимается к вертикальной поверхности с силой $F_1 = 4$ Н. На оси блоков действуют одинаковые тормозящие моменты $1{,}3$ Н $\cdot$ м. А) Какую силу F нужно приложить к свободному концу шнура, чтобы брусок стал двигаться с ускорением $0{,}5$ м/с^2? Б) Какова будет угловая скорость первого блока через 1 с после начала действия силы F?

5.38. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.22, сила F приложена ко второму бруску и направлена вправо параллельно плоскости скольжения. Массы первого и второго брусков соответственно равны

$m_1 = 1$ кг, $m_2 = 400$ г. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. Коэффициенты трения брусков о плоскости одинаковые и равны 0,1. Масса каждого блока 800 г, радиус 10 см. Найти: а) величину силы F, если бруски движутся с ускорением 1,7 м/с^2; б) угловую скорость блоков через 1 с после начала движения.

5.39. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.24, массы брусков $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 1{,}2$ кг. Масса блока 800 г, радиус 10 см. Коэффициенты трения брусков о плоскости одинаковы и равны 0,2. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 45°$. На брусок действует сила $\vec{F}$, направленная под углом $\beta = 30°$ к горизонту. Найти: а) величину этой силы, если бруски движутся с ускорением 1,26 м/с^2; б) силу натяжения нити, действующую на брусок m_2.

5.40. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.13, массы брусков $m_1 = 1{,}2$ кг, $m_2 = 2$ кг. Масса блока 800 г, радиус 24 см. Коэффициенты трения брусков о наклонные плоскости одинаковые и равны 0,2. Углы наклона плоскостей $\alpha = \beta = 45°$. На брусок m_2 действует сила $F = 5$ Н, направленная параллельно наклонной плоскости вниз. Найти: а) момент сил, действующих на блок; б) число оборотов, которое сделает блок спустя 5 с от начала вращения.

5.41. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.25, масса груза $m_1 = 1$ кг, масса бруска $m_2 = 0{,}9$ кг. Масса каждого блока 600 г. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 45°$. Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость 0,1. Найти: а) силу F, действующую на свободный конец шнура, если брусок движется с ускорением 1,3 м/с^2; б) скорость груза через 1,5 с после начала движения.

5.42. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.26, масса бруска $m = 1$ кг. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость 0,2. Масса первого блока 400 г, второго – 800 г, их радиусы 10 см и 20 см соответственно. К свободному концу шнура приложена сила $F = 10$ Н. Найти: а) угловые ускорения блоков; б) момент сил, действующих на первый блок, относительно оси его вращения.

5.43. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.27, массы брусков $m_1 = m_2 = 2$ кг. Коэффициент трения первого бруска о горизонтальную поверхность 0,2, второго бруска о наклонную плоскость 0,3. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 60°$. Масса блока 400 г, радиус 20 см. Найти: а) угловое ускорение блока; б) результирующий момент силы, действующий на блок относительно оси вращения блока.

5.44. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.28, масса бруска $m_1 = 1$ кг, масса груза $m_2 = 1{,}2$ кг. Масса каждого блока 800 г, радиус первого – 10 см, второго – 20 см. Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость 0,1. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. Найти: а) моменты всех сил, действующих на блок 2, относительно оси вращения; б) ускорение бруска.

5.45. В системе тел, изображенной в табл. 5.3 на рис. 5.29, масса бруска $m = 2$ кг. Коэффициент трения бруска о горизонтальную поверхность 0,2. Масса первого блока 400 г, радиус 10 см, второго – 600 г и 12 см. За свободный конец шнура тянут с силой $F = 8$ Н, направленной вертикально вниз. Найти: а) сколько оборотов сделает второй блок за 10 с от начала вращения; б) силу натяжения, действующую на брусок.

Определение момента инерции системы тел

Считать стержень одномерным объектом, чей радиус стремится к нулю.

5.46. На концах однородного стержня массой 1 кг и длиной 2 м закреплены шары массами 500 г и 800 г и радиусами 80 см и 120 см соответственно. Центры шаров совпадают с концами стержня. Найти момент инерции этой системы относительно оси, проходящей через стержень на расстоянии 50 см от центра первого шара перпендикулярно стержню.

5.47. На краю горизонтальной платформы в виде диска массой 10 кг и радиусом 2 м закреплен шар массой 3 кг и радиусом 40 см. Центр шара лежит на оси, проходящей через край платформы перпендикулярно ее плоскости. На платформе закреплен обруч массой 2 кг и радиусом 0,5 м. Центр обруча лежит на оси, перпендикулярной платформе, и проходит через ее центр. Плоскость обруча параллельна плоскости платформы. Найти момент инерции системы относительно оси вращения, проходящей через центр платформы перпендикулярно к ее плоскости.

5.48. На однородном стержне длиной 80 см и массой 1,2 кг закреплены 2 одинаковых шара массами 2,5 кг и радиусами 20 см. Центр первого шара совпадает с концом стержня, а второго – с его серединой. Найти момент инерции системы относительно оси вращения, проходящей через свободный конец стержня перпендикулярно к стержню.

5.49. На горизонтальной платформе массой 10 кг и радиусом 2 м находится шар массой 5 кг и радиусом 30 см. Шар расположен так, что его центр масс лежит на оси, проходящей через центр платформы перпендикулярно ее плоскости. На краю платформы лежит диск массой 4 кг и радиусом 20 см. Центр диска совпадает с краем платформы, а его плоскость параллельна плоскости платформы. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр платформы перпендикулярно ее плоскости.

5.50. Два одинаковых стержня образуют крестовину. На концах одного из стержней закреплены одинаковые шары массами 200 г и радиусами 20 см. Центры шаров совпадают с концами стержня. Масса каждого стержня 400 г, длина 80 см. Определить момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр крестовины перпендикулярно к обоим стержням.

5.51. На однородном стержне длиной 60 см и массой 2 кг закреплены два одинаковых шара вплотную друг к другу. Диаметры шаров 30 см, массы 1 кг. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно к стержню.

5.52. На стержне длиной 90 см и массой 1,5 кг закреплены три одинаковых диска вплотную друг к другу. Плоскости дисков параллельны стержню. Диаметры дисков 30 см, массы 1 кг. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр третьего диска перпендикулярно диску.

5.53. На однородном стержне длиной 120 м и массой 1,4 кг вплотную друг к другу закреплены три одинаковых шара диаметрами 40 см и массами 2 кг. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр второго шара и середину стержня.

5.54. Два одинаковых стержня образуют крестовину. Точка соприкосновения стержней совпадает с их центрами масс. Длина каждого стержня 1,6 м, масса 800 г. На концах одного из стержней закреплены диски массой 300 г и радиусом 20 см каждый. Плоскости дисков параллельны второму стержню. На концах второго стержня закреплены шары массой 1,2 кг и радиусом 40 см каждый. Центры шаров совпадают с концами стержня. Крестовина вращается вокруг оси, направленной вдоль первого стержня. Найти момент инерции системы относительно этой оси.

5.55. Система состоит из трех одинаковых стержней, состыкованных под углом 120° друг к другу. Точка соприкосновения стержней совпадает с их центрами масс. На стержнях закреплены одинаковые шары массами 800 г и радиусами 10 см. Центры тяжести шаров совпадают с концами стержней. Масса каждого стержня 600 г, длина 60 см. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр симметрии системы перпендикулярно к стержням.

5.56. На тонком стержне длиной 90 см и массой 2 кг закреплены три одинаковых шара вплотную друг к другу. Радиусы шаров 15 см, массы 2 кг. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр третьего шара и стержень перпендикулярно стержню.

5.57. Два одинаковых стержня расположены перпендикулярно друг другу, центры стержней совпадают. Масса каждого стержня 1,2 кг, длина 2 м. На концах первого стержня закреплены одинаковые шары массами 1 кг и радиусами 20 см. Центры шаров совпадают с концами стержня. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр одного из шаров параллельно второму стержню.

5.58. На стержне длиной 1,2 м и массой 2 кг закреплены три одинаковых диска вплотную друг к другу. Радиусы дисков 20 см, массы 1 кг. Плоскости дисков параллельны стержню. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр второго диска перпендикулярно плоскости диска.

5.59. Система состоит из трех одинаковых состыкованных под углом 120° друг к другу стержней. Точка соприкосновения стержней совпадает с их центрами масс. Масса каждого стержня 1,4 кг, длина 60 см. На одном из стержней закреплен шар массой 1 кг, радиусом 20 см, так, что его центр масс лежит на оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно оси стержня. На конце другого стержня закреплен шар массой 800 г и радиусом 30 см. Найти момент инерции относительно оси, проходящей через центр симметрии системы стержней перпендикулярно к стержням.

5.60. На концах стержня массой 2 кг и длиной 2 м закреплены одинаковые шары массами 1 кг и радиусами 20 см. Центры шаров совпадают с концами стержня. К середине стержня прикреплен диск массой 800 г и радиусом 40 см. Плоскость диска параллельна стержню. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр одного из шаров перпендикулярно плоскости диска.

5.61. Два одинаковых стержня длиной 1,6 м и массой 2 кг образуют крестовину, середины стержней совпадают. На конце одного из стержней закреплен диск так, что его плоскость перпендикулярна этому стержню. Масса диска 1 кг, радиус 40 см. На конце второго стержня закреплен шар массой 1 кг, радиусом 60 см. Центр шара совпадает с концом стержня. Найти момент инерции относительно оси, проходящей через центр диска вдоль первого стержня.

5.62. На концах стержня массой 2 кг и длиной 1 м закреплены одинаковые диски массами 8 кг, радиусами 30 см. Центры дисков совпадают с концами стержня, а их плоскости параллельны стержню. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через стержень на расстоянии 60 см от центра второго диска перпендикулярно стержню.

5.63. Два одинаковых стержня массой 1 кг и длиной 1,5 м каждый расположены перпендикулярно друг другу, образуя крестовину. Центры стержней совпадают. На концах стержней закреплены одинаковые шары массами 1 кг, радиусами 30 см каждый. Центры шаров совпадают с концами стержней. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через конец первого стержня параллельно второму.

5.64. К одному из концов стержня длиной 1,2 м, массой 2 кг прикреплен шар массой 1 кг, радиусом 30 см. Центр шара лежит на оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно стержню. К середине стержня прикреплен диск массой 0,5 кг, радиусом 20 см. Плоскость диска параллельна плоскости стержня, а его центр лежит на оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно стержню. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через стержень перпендикулярно к стержню на расстоянии 20 см от его свободного конца.

5.65. Два одинаковых стержня расположены перпендикулярно друг другу, образуя крестовину. Центры их совпадают. Масса каждого стержня 2,4 кг, длина 2 м. К концу второго стержня прикреплен шар массой 2 кг и радиусом 20 см. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр шара параллельно первому стержню.

5.66. На концах стержня массой 2,8 кг, длиной 3 м закреплены шары массами 1 кг и 1,6 кг и радиусами 40 см и 60 см соответственно. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр второго шара перпендикулярно стержню.

5.67. На тонком стержне длиной 1,8 м и массой 1,2 кг закреплены три одинаковых шара вплотную друг к другу. Диаметры шаров 60 см. Момент инерции системы относительно оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно ему, равен 7,8 кг $\cdot$ м^2. Найти массу шара.

5.68. Два одинаковых стержня расположены перпендикулярно друг другу, образуя крестовину. Центры их совпадают. Длина каждого стержня 1,8 м, масса 0,5 кг. К концам одного из них прикреплены два одинаковых шара массами 1 кг, радиусами 20 см. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр правого шара параллельно второму стержню.

5.69. На стержне длиной 2,7 м и массой 3 кг закреплены три одинаковых диска вплотную друг к другу. Плоскости дисков параллельны оси стержня. Диаметр дисков 90 см, масса 1 кг. Найти момент инерции системы относительно оси, перпендикулярной плоскостям дисков и проходящей через конец стержня.

5.70. Система состоит из трех одинаковых стержней, состыкованных концами в одной точке под углом 120° друг к другу. Масса каждого стержня 500 г, длина 160 см. На стержнях закреплены одинаковые шары радиусом 30 см каждый. Центры шаров находятся на расстоянии 130 см от точки соединения стержней. Найти массу шара, если момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр симметрии системы стержней перпендикулярно к ним, равен 1,58 кг $\cdot$ м^2.

5.71. На концах стержня длиной 2,4 м закреплены шары. Центры шаров совпадают с концами стержня. Момент инерции стержня относительно оси симметрии, проходящей перпендикулярно к стержню, равен 8,69 кг $\cdot$ м^2.

Масса каждого шара 1 кг, радиус 40 см. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через стержень перпендикулярно к нему на расстоянии 80 см от его конца.

5.72. На краю горизонтальной платформы массой 6 кг и радиусом 1,8 м закреплен шар радиусом 50 см. Центр шара лежит на оси, перпендикулярной плоскости платформы и проходящей через край платформы. Момент инерции шара относительно этой оси равен $0{,}2\ кг \cdot м^2$. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей перпендикулярно платформе на расстоянии 30 см от ее центра, отложенном вдоль прямой, соединяющей центр платформы и вышеупомянутую ось шара.

5.73. На концах тонкого стержня длиной 2,6 м, массой 1,4 кг закреплены два одинаковых диска массой 1 кг и радиусом 30 см каждый. Плоскости дисков параллельны оси стержня. Края дисков совпадают с концами стержня, расстояние между ближайшими краями дисков равно длине стержня. Найти момент инерции системы относительно оси, перпендикулярной плоскости дисков и проходящей через стержень на расстоянии 0,5 м от его края.

5.74. На горизонтальной платформе массой 6 кг, радиусом 2 м закреплен диск массой 2 кг и радиусом 50 см. Плоскость диска параллельна плоскости платформы, край диска совпадает с краем платформы, диск полностью лежит на платформе. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей перпендикулярно платформе через точку, расположенную на прямой, соединяющей центры платформы и диска, на расстоянии 30 см от центра диска.

5.75. На тонком стержне длиной 2,6 м, массой 3 кг закреплены два шара. Центр первого шара массой 1 кг и радиусом 40 см находится на расстоянии 80 см от левого конца стержня. Центр второго шара массой 800 г и радиусом 60 см совпадает с правым концом стержня. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через левый конец стержня перпендикулярно стержню.

Основной закон динамики вращательного движения

В задачах 5.76–5.105 моменты сил, моменты импульсов и моменты инерции определяются относительно осей вращения тел. Если не указано иное, ось вращения проходит через центр масс тела, причем для дисков (колес) – перпендикулярно плоскости диска, для стержней – перпендикулярно стержню. Вращающим моментом называется момент силы, ускоряющей вращение тела, тормозящим моментом – момент силы, замедляющей вращение тела. Силы в задачах полагаются постоянными.

5.76. Два диска массами 1 кг и 500 г и радиусами 50 см и 60 см соответственно вращаются. На диски подействовали одинаковые вращающие моменты сил. Во сколько раз будут отличаться их угловые ускорения?

5.77. К ободу колеса радиусом 4 м и массой 20 кг приложена касательная сила 100 Н. На сколько изменится частота вращения колеса за время от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 6$ с?

5.78. Маховое колесо, имеющее момент инерции 120 кг $\cdot$ м^2, вращается, делая 10 об/с. Через 30 с после того, как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось. Найти момент сил трения.

5.79. Колесо, вращаясь равнозамедленно, при торможении за $1{,}5$ мин уменьшило свою частоту вращения от 240 до 60 об/мин. Момент инерции колеса равен 12 кг $\cdot$ м^2. Найти тормозящий момент.

5.80. Маховое колесо, имеющее форму диска массой 6 кг и радиусом $0{,}4$ м, вращается, делая 18 об/мин. После того, как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось, сделав 900 оборотов. Найти момент силы трения.

5.81. Маховое колесо массой 3 кг и радиусом 60 см вращается, делая 12 об/с. К маховику приложили тормозящую силу, направленную по касательной к ободу колеса. В течение 8 с частота вращения колеса уменьшилась до 4 об/с. Определить величину тормозящей силы.

5.82. Сплошной шар массой 4 кг и радиусом 0,8 м вращается вокруг оси, проходящей через его центр, делая 5 об/с. На шар подействовал постоянный вращающий момент и его частота вращения возросла до 15 об/с за время, в течение которого он сделал 80 оборотов. Определить угловое ускорение шара.

5.83. Маховик, момент инерции которого 50 кг $\cdot$ м^2 и радиус 40 см, вращается вокруг оси, совпадающей с осью симметрии маховика, с угловой скоростью 20 рад/с. К ободу колеса прикладывают постоянную вращающую силу 150 Н, направленную по касательной к нему. За какое время угловая скорость колеса увеличится в 3 раза?

5.84. Сплошной шар, имеющий момент инерции 160 кг $\cdot$ м^2, приводится во вращение постоянной силой 320 Н. Ось вращения касается поверхности шара. Сила приложена в точке, наиболее удаленной от оси вращения, и направлена перпендикулярно этой оси. Определить радиус и массу шара, если спустя 4 с от начала вращения угловая скорость шара стала равна 2 рад/с.

5.85. Два колеса массами 0,8 и 0,6 кг и радиусами 40 и 30 см соответственно начинают вращаться одновременно. Угловое ускорение первого колеса 3,14 рад/с^2. За время 10 с от начала вращения первое колесо сделало на 10 оборотов больше второго. На сколько отличаются вращающие моменты, действующие на колеса?

5.86. Маховик, имеющий форму обруча массой 2 кг и радиусом 40 см, начинает вращаться вокруг неподвижной оси. Вращающий момент силы, действующий на маховик, равен 30 Н $\cdot$ м. Найти изменение его угловой скорости за время от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 2$ с.

5.87. Сплошной шар массой 2 кг и радиусом $0{,}4$ м вращается вокруг оси, касательной к поверхности шара, с частотой 50 об/с. В точке, наиболее удаленной от оси вращения, на шар подействовала касательная тормозящая сила, равная 5 Н $\cdot$ м и лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Определить число оборотов, которое сделает шар от начала торможения до полной остановки.

5.88. Вентилятор вращается с частотой 10 об/с. На него подействовал тормозящий момент $6{,}28$ Н $\cdot$ м и он остановился через 20 с. Найти момент инерции вентилятора.

5.89. Два шара массами 500 г и 2 кг, радиусами 15 см и 40 см соответственно начинают одновременно вращаться. На первый шар действует вращающий момент 20 Н $\cdot$ м, а на второй в два раза больший. На сколько будут отличаться их моменты импульса спустя время, в течение которого первый шар сделает 300 оборотов?

5.90. Диск массой 2 кг и радиусом 10 см вращается относительно оси, касательной к краю диска и перпендикулярной его плоскости. Под действием постоянного вращающего момента частота его вращения возросла от 2 об/с до 10 об/с за время 16 с. Найти вращающий момент.

5.91. Стержень массой 1 кг и длиной 2 м вращается относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно стержню, с частотой 1 об/с. На стержень подействовал вращающий момент, равный 25 Н $\cdot$ м. Сколько оборотов сделал стержень за 10 секунд от начала действия вращающего момента?.

5.92. Однородный шар радиусом 40 см и массой 2 кг начинает вращаться относительно оси, совпадающей с осью симметрии. За время 10 с от начала вращения шар сделал 20 оборотов. Найти изменение момента импульса шара за 10 с вращения.

5.93. Вентилятор вращается с частотой 10 об/с. На него подействовал тормозящий момент $6{,}28\ \text{Н} \cdot \text{м}$, и он остановился через 20 с. Найти изменение момента импульса вентилятора за 10 с от начала торможения.

5.94. Диск массой 2 кг и радиусом 10 см вращается относительно оси, касательной к краю диска и перпендикулярной его плоскости. Под действием постоянного вращающего момента частота его вращения возросла от 2 об/с до 10 об/с за время 16 с. На сколько изменился момент импульса диска за 30 с от начала действия вращающего момента?

5.95. Однородный шар радиусом 1 м, массой 2 кг и диск радиусом $0{,}8$ м, массой 4 кг начинают одновременно вращаться под действием внешних вращающих моментов. Угловое ускорение шара в два раза больше, чем у диска. Во сколько раз отличаются вращающие моменты, действующие на шар и на диск?

5.96. Два диска массами 1 кг и 500 г и радиусами 50 см и 60 см соответственно вращаются, делая, первый – 3 об/с, а второй – 1 об/с. На диски подействовали равные вращающие моменты. Сколько оборотов сделает второй диск за 5 с после начала вращения, если момент импульса первого диска за это время стал равен $26\ \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$?

5.97. Два диска массами 1 кг и 3 кг и радиусами 20 см и 15 см соответственно вращаются, делая 10 об/с. На диски подействовали постоянные вращающие моменты, и за время 10 с от начала их действия первый диск сделал на 20 оборотов больше второго. Найти величины этих вращающих моментов, если угловое ускорение первого диска в два раза больше, чем второго.

5.98. К ободу колеса, имеющего форму диска радиусом $0{,}5$ м, приложена касательная сила 3 Н. За 6 с от начала ее действия угловая скорость колеса изменилась на 9 рад/с. Найти угол, на который повернулось колесо за время от $t_1 = 6$ с до $t_2 = 8$ с.

5.99. Однородный шар радиусом 1 м, массой 2 кг и диск радиусом 0,8 м, массой 4 кг начинают одновременно вращаться под действием внешних вращающих моментов. За время, в течение которого шар сделал 100 оборотов, диск приобрел угловую скорость 5 об/с. Угловое ускорение шара в два раза больше, чем у диска. Найти величины вращающих моментов.

5.100. Сплошной шар радиусом 2 м вращается, делая 2 об/с. На шар подействовал вращающий момент, и спустя 10 с его угловая скорость стала равна 26,28 рад/с, а момент импульса за это время изменился на 6,58 кг $\cdot$ м^2/с. Найти вращающий момент сил, действующий на шар.

5.101. Однородный шар радиусом 40 см и массой 2 кг начинает вращаться относительно оси, совпадающей с осью симметрии. За время 10 с от начала вращения шар сделал 20 оборотов. Найти величину вращающего момента.

5.102. Два стержня массами 1 кг и 2 кг и длиной 2 м и 2,5 м соответственно вращаются, делая 10 об/с. На стержни подействовали одинаковые вращающие моменты, равные 5 Н $\cdot$ м. Во сколько раз будут отличаться их угловые скорости спустя 16 с от начала действия вращающих моментов?

5.103. К ободу колеса радиусом 4 м и массой 20 кг приложена касательная сила 100 Н. Найти угловую скорость колеса через 5 с от начала вращения.

5.104. Маховое колесо, имеющее момент инерции 120 кг $\cdot$ м^2, вращается, делая 10 об/с. Через 30 с после того, как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось. Найти изменение момента импульса колеса за время от 2 с до 5 с.

5.105. Два диска массами 1 кг и 500 г и радиусами 50 см и 60 см соответственно вращаются, делая первый – 3 об/с, а второй – 1 об/с. На диски подействовали одинаковые вращающие моменты сил. Чему равны угловые ускорения, если момент импульса первого диска спустя 5 с после начала вращения стал равен 26 кг · м^2/с?

5.106 – 5.135.

На одном из концов стержня длиной l, радиусом r и массой m укреплен шар массой M и радиусом R, так что его центр масс лежит на продолжении оси стержня. Значения l, r, m, M, R и их размерности в соответствии с вариантом приведены в табл. 5.4.

Система вращается вокруг оси, проходящей так, как указано в варианте в табл. 5.4. Зависимость угла поворота системы от времени определяется законом:

$$\varphi(t) = \left(A_1 t^{n_1} + A_2 t^{n_2} + B\cos\left(\pi(Ct + D)\right)\right), \text{(рад)}$$

где A_1, A_2, B, C, D, n_1, n_2 – константы, приведенные в табл. 5.4 в соответствии с вариантом.

Определите, чему будут равны через время t (табл. 5.4) от начала движения относительно заданной оси: а) момент инерции системы; б) момент импульса системы; в) момент силы, действующей на систему для приведения ее во вращение.

Таблица 5.4

	l, м	r, см	m, кг	M, кг	R, см	Ось вращения	A_1, $\frac{\text{рад}}{\text{с}^{n_1}}$	A_2, $\frac{\text{рад}}{\text{с}^{n_2}}$	n_1	n_2	B, рад	C, $\frac{1}{\text{с}}$	D	t, с
5.106	2	0,1	1	2	50	проходит через свободный конец стержня перпендикулярно его оси	1	0,2	1	3	0	–	–	0,5
5.107	3	0,03	3	3	15	проходит через центр масс стержня перпендикулярно его оси	0	0	–	–	2	0,5	0,25	1
5.108	2	0,02	2	2	20	проходит перпендикулярно оси стержня через его конец, на котором закреплен шар	1,2	0,01	2	4	0	–	–	1,5
5.109	2	0,01	3	5	25	проходит через центр масс шара перпендикулярно оси стержня	0	0	–	–	3	0,3	1,5	2
5.110	1	30	2	3	50	проходит через центры масс шара и стержня	2	0,05	2	3	0	–	–	2,5
5.111	1	25	4	3	30	проходит по касательной к поверхности шара параллельно оси стержня	0	0	–	–	4	0,2	0,25	0,5
5.112	2	15	2	1	10	проходит параллельно оси стержня на расстоянии R от поверхности шара	1,1	0,01	1	4	0	–	–	1
5.113	1	10	3	4	40	проходит параллельно оси стержня на расстоянии r от поверхности шара	0	0	–	–	5	0,4	1,5	1,5
5.114	2	0,03	2	5	30	проходит через свободный конец стержня перпендикулярно его оси	2,5	0,3	1	2	0	–	–	2
5.115	3	0,02	4	2	45	проходит через центр масс стержня перпендикулярно его оси	0	0	–	–	6	0,5	0,25	2,5

Продолжение табл. 5.4

	l, м	r, см	m, кг	M, кг	R, см	Ось вращения	A_1, $\frac{\text{рад}}{\text{с}^{n_1}}$	A_2, $\frac{\text{рад}}{\text{с}^{n_2}}$	n_1	n_2	B, рад	C, $\frac{1}{\text{с}}$	D	t, с
5.116	2	0,01	1	2	20	проходит перпендикулярно оси стержня через его конец, на котором закреплен шар	3	0,003	2	5	0	–	–	0,5
5.117	2	0,05	3	3	25	проходит через центр масс шара перпендикулярно оси стержня	0	0	–	–	7	0,3	1,5	1
5.118	3	20	2	2	35	проходит через центры масс шара и стержня	2,4	0,04	1	3	0	–	–	1,5
5.119	2	10	3	5	40	проходит по касательной к поверхности шара параллельно оси стержня	0	0	–	–	2,5	0,4	0,25	2
5.120	2	10	2	3	15	проходит параллельно оси стержня на расстоянии R от поверхности шара	1	0,2	0	2	0	–	–	2,5
5.121	1	30	4	3	50	проходит параллельно оси стержня на расстоянии r от поверхности шара	0	0	–	–	4,5	0,3	1,5	0,5
5.122	1	0,03	2	1	15	проходит через свободный конец стержня перпендикулярно его оси	1,3	0,02	2	3	0	–	–	1
5.123	2	0,01	3	4	25	проходит через центр масс стержня перпендикулярно его оси	0	0	–	–	3,5	0,5	0,25	1,5
5.124	1	0,02	2	5	30	проходит перпендикулярно оси стержня через его конец, на котором закреплен шар	2	0,2	1	2	0	–	–	2
5.125	2	0,01	4	2	20	проходит через центр масс шара перпендикулярно оси стержня	0	0	–	–	5,5	0,2	1,5	2,5

Окончание табл. 5.4

	l, м	r, см	m, кг	M, кг	R, см	Ось вращения	A_1, $\frac{\text{рад}}{\text{с}^{n_1}}$	A_2, $\frac{\text{рад}}{\text{с}^{n_2}}$	n_1	n_2	B, рад	C, $\frac{1}{\text{с}}$	D	t, с
5.126	3	0,02	1	2	10	проходит через центры масс шара и стержня	1,1	0,002	0	3	0	–	–	0,5
5.127	2	25	3	3	45	проходит по касательной к поверхности шара параллельно оси стержня	0	0	–	–	6,5	0,1	0,25	1
5.128	2	30	2	2	50	проходит параллельно оси стержня на расстоянии R от поверхности шара	2,1	0,2	3	4	0	–	–	1,5
5.129	3	10	3	5	15	проходит параллельно оси стержня на расстоянии r от поверхности шара	0	0	–	–	3	0,3	1,5	2
5.130	2	0,02	2	3	25	проходит через свободный конец стержня перпендикулярно его оси	3,5	0,2	1	3	0	–	–	2,5
5.131	2	0,01	4	3	35	проходит через центр масс стержня перпендикулярно его оси	0	0	–	–	4	0,5	0,25	0,5
5.132	1	0,03	2	1	55	проходит перпендикулярно оси стержня через его конец, на котором закреплен шар	4	0,002	1	4	0	–	–	1
5.133	1	0,02	3	4	15	проходит через центр масс шара перпендикулярно оси стержня	0	0	–	–	5,5	0,3	1,5	1,5
5.134	2	15	2	5	20	проходит параллельно оси стержня на расстоянии R от поверхности шара	3,5	0,2	1	3	0	–	–	2
5.135	1	10	4	2	25	проходит параллельно оси стержня на расстоянии r от поверхности шара	0	0	–	–	2,5	0,1	1,25	2,5

VI. РАБОТА. МОЩНОСТЬ. ИЗМЕНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Механическая работа

Работа – это физическая величина, характеризующая процесс превращения одной формы движения в другую.

Элементарная работа δA, совершаемая силой $\vec{F}$, равна скалярному произведению силы на элементарное перемещение точки приложения силы $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \qquad (6.1)$$

Работа при конечном перемещении равна интегралу

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}\,, \qquad (6.2)$$

где 1 и 2 – начальное и конечное положения точки приложения силы.

Если в процессе перемещения сила $\vec{F}$, действующая на тело, постоянна по модулю, а также является постоянным угол α, под которым сила приложена к телу (угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$) (рис. 6.1), то элементарная работа равна:

$$\delta A = F\delta S \cos\alpha = F_S \delta S, \qquad (6.3)$$

где $\delta S = |d\vec{r}|$ – элементарный путь, $F_s = F\cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$.

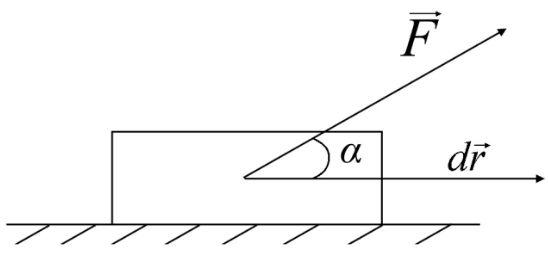


Рис. 6.1.

В зависимости от угла α работа A может быть положительной, отрицательной и равной нулю: при $\alpha < \frac{\pi}{2}$ $A > 0$, при $\alpha > \frac{\pi}{2}$ $A < 0$, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $A = 0$.

Если построить график зависимости F_s от S, то работа может быть вычислена графически.

Если $F_s = \text{const}$, то графиком F_s будет прямая, параллельная оси S (рис. 6.2), а работа силы на пути S_{12} численно равна площади прямоугольника, покрытого штриховкой.

$$A_{12} = F_S \int\limits_{S_{12}} \delta S = F_S\, S_{12}. \tag{6.4}$$

Если $F_s \neq \text{const}$, то графиком F_s будет некоторая кривая (рис. 6.3). Работа силы на пути S_{12} в этом случае равна площади заштрихованной криволинейной трапеции

$$A_{12} = \int\limits_{S_{12}} F_S\, \delta S. \tag{6.5}$$

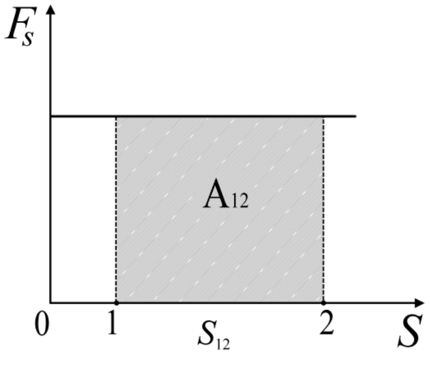


Рис. 6.2.

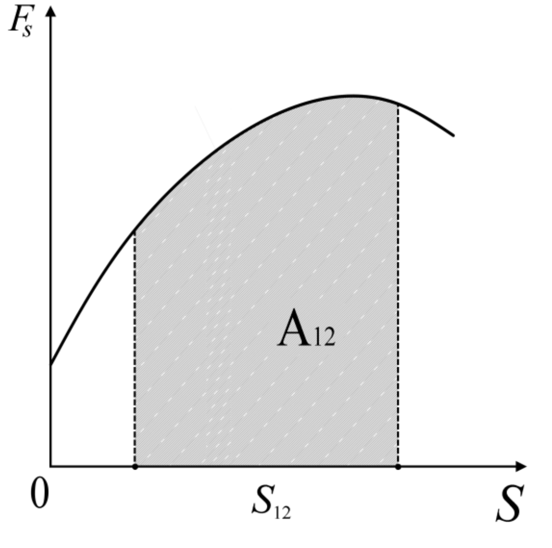


Рис. 6.3.

Быстроту совершения работы характеризует *мощность*. Мощность равна работе, совершаемой за единицу времени. Различают среднюю и мгновенную мощность.

Средняя за промежуток времени Δt мощность равна

$$\langle N \rangle = \frac{A_{12}}{\Delta t}. \quad (6.6)$$

Мгновенная мощность равна

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \left|\vec{F}\right| \cdot |\vec{v}| cos\alpha. \quad (6.7)$$

Консервативные и неконсервативные силы

Силы, работа которых не зависит от формы пути, по которому материальная точка переходит из некоторого начального положения в конечное, называются *консервативными* (*потенциальными*). Примеры консервативных сил: сила тяготения и сила тяжести, сила упругости, сила кулоновского (электростатического) взаимодействия.

Сила называется *неконсервативной* (*непотенциальной*), если совершаемая ею работа зависит от формы пути, по которому материальная точка переходит из начального положения в конечное. Примеры неконсервативных сил: сила трения, сила сопротивления при движении тел в среде, сила Лоренца.

Энергия

Энергия – единая мера различных форм движения материи и типов взаимодействия материальных объектов, являющаяся однозначной, непрерывной, конечной, дифференцируемой функцией состояния объекта.

Механическое состояние объекта характеризуется двумя наборами параметров – радиус-векторами материальных точек, из которых он состоит, и их скоростями (импульсами). Поэтому полная механическая энергия объекта является функцией координат и скоростей материальных точек. Ту часть полной энергии, которая определяется скоростями точек объекта, принято называть кинетической энергией ($E_К$), а ту часть, которая зависит от их координат, – потенциальной энергией ($E_П$).

$$E = E_К + E_П. \tag{6.8}$$

Кинетическая энергия материальной точки или тела является мерой их механического движения, зависящей от скоростей их движения в данной инерциальной системе отсчета.

При поступательном движении тела его кинетическая энергия равна половине произведения массы тела на квадрат его линейной скорости:

$$E_{К\ пост} = \frac{mv^2}{2}. \tag{6.9}$$

При вращательном движении тела его кинетическая энергия равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости:

$$E_{К\ вращ} = \frac{\mathcal{J}\omega^2}{2}. \tag{6.10}$$

При качении тела его движение может быть представлено в виде суммы двух движений: поступательного движения центра масс и вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс и сохраняющей неизменную ориентацию в пространстве. Тогда кинетическая энергия такого движения равна сумме энергий поступательного и вращательного движений:

$$E_К = \frac{mv^2}{2} + \frac{\mathcal{J}\omega^2}{2}. \tag{6.11}$$

Кинетическая энергия – величина аддитивная: кинетическая энергия системы $E_К$ складывается из кинетических энергий $E_{Кi}$ всех n материальных точек, из которых состоит система:

$$E_К = \sum_{i=1}^{n} E_{Кi}. \tag{6.12}$$

Изменение кинетической энергии обусловлено работой всех действующих на тело сил – и консервативных, и неконсервативных. Если эта работа положительная, кинетическая энергия тела возрастает, если отрицательная – уменьшается.

Теорема о кинетической энергии: изменение кинетической энергии тела при его переходе из одного положения в другое равно работе всех сил, действующих на тело

$$A = \Delta E_К = E_{К2} - E_{К1}. \tag{6.13}$$

Работа любых сил является мерой изменения кинетической энергии тела (материальной точки), она может быть, как положительной ($E_{К2} > E_{К1}$), так и отрицательной ($E_{К1} > E_{К2}$).

Потенциальной энергией материальной точки или тела называется часть механической энергии, зависящая от конфигурации системы, то есть от взаимного расположения ее частей и их положения во внешнем силовом поле.

Числовое значение потенциальной энергии определяется с точностью до произвольной постоянной, значение которой зависит от выбора нулевого уровня (начала отсчета) потенциальной энергии. Нулевой уровень можно выбирать где угодно, это определяется удобством расчетов.

Состояние взаимодействующих тел можно охарактеризовать потенциальной энергией только в том случае, если между телами действуют консервативные силы.

Мерой изменения потенциальной энергии системы при ее переходе из одного состояния в другое является работа консервативных (потенциальных) сил, осуществляющих взаимодействие между элементами системы. При этом работа потенциальных сил равна убыли потенциальной энергии, то есть изменению потенциальной энергии системы при ее переходе из начального состояния в конечное, взятому с обратным знаком:

$$A_{\text{пот}} = -\Delta E_{\text{П}} = E_{\text{П}1} - E_{\text{П}2}. \qquad (6.14)$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух тел (материальных точек) с массами m и M, находящихся на расстоянии r друг от друга

$$E_{\text{П}} = -\frac{GmM}{r}. \qquad (6.15)$$

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия тела массой m с Землей ($M_З$ – масса Земли, $R_З$ – радиус Земли, h – высота тела над поверхностью Земли)

$$E_{\text{П}} = -\frac{GmM_Зh}{R_З(R_З + h)}. \qquad (6.16)$$

При условии $h \ll R_З$

$$E_{\text{П}} = mgh. \qquad (6.17)$$

Потенциальная энергия деформированной пружины (k – коэффициент жесткости пружины, x – ее удлинение)

$$E_{\text{П}} = \frac{kx^2}{2}. \qquad (6.18)$$

Работа неконсервативных сил приводит к изменению суммарной механической энергии:

$$A_{\text{неконс.сил}} = \Delta E_{\text{мех}} = (E_{K2} + E_{\Pi 2}) - (E_{K1} + E_{\Pi 1}). \qquad (6.19)$$

Контрольные вопросы

1. Что такое работа? Элементарная работа?
2. Какими способами можно вычислить работу?
3. Что такое мощность? Средняя мощность? Мгновенная мощность?
4. Дайте определение консервативных и неконсервативных сил.
5. Какие механические силы являются консервативными? Неконсервативными?
6. Что такое энергия?
7. Какие виды механической энергии существуют?
8. Какая энергия является кинетической? Назовите ее свойства.
9. Какая энергия является потенциальной? Назовите ее свойства.
10. Как кинетическая энергия связана с работой?
11. Как потенциальная энергия связана с работой?

Задачи для аудиторных занятий

I уровень

6.1. Ящик тянут по земле за веревку по горизонтальной окружности длиной 70 м с постоянной по модулю скоростью. Модуль силы трения, действующей на ящик со стороны земли, равен 50 Н. Чему равна работа силы тяги за один оборот?

6.2. Тело массой 3 кг под действием силы F перемещается вниз по наклонной плоскости на расстояние 5 м, расстояние от тела до поверхности Земли при этом уменьшается на 3 м. Вектор силы F направлен параллельно наклонной плоскости, модуль силы равен 20 Н. Какую работу при этом перемещении совершила сила тяжести? Коэффициент трения $\mu = 0{,}5$.

6.3. Человек взялся за конец лежащего на земле однородного стержня длиной 2 м и массой 100 кг и поднял этот конец на высоту 1 м. Какую работу он совершил?

6.4. Телу массой 2 кг, находящемуся у основания шероховатой наклонной плоскости, сообщили начальную скорость 3 м/с в направлении вверх вдоль наклонной плоскости. Через некоторое время тело вернулось в исходную точку, имея втрое меньшую кинетическую энергию. Какую работу совершила сила трения за время движения тела?

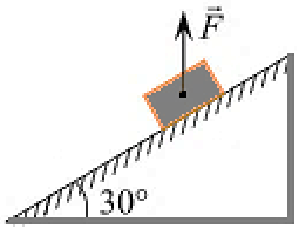


Рис. 6.4.

6.5. Брусок массой 2 кг, к которому приложена сила 4 Н, направленная вертикально вверх, равномерно движется вниз по шероховатой наклонной плоскости с углом при основании 30° (рис. 6.4). Чему равен модуль работы, которую совершит над бруском сила трения при перемещении бруска на 1 м?

6.6. К телу массой 5 кг, покоящемуся на шероховатой горизонтальной плоскости, в момент времени $t = 0$ прикладывают горизонтально направленную силу 5 Н. Коэффициент трения между поверхностью тела и плоскостью равен 0,2. Чему равна работа, совершаемая этой силой за первые 10 минут ее действия?

6.7. При равномерном перемещении саней по горизонтальному участку пути длиной 50 м к ним прикладывали силу, которая совершила работу, равную 1000 Дж. Какова сила трения саней о снег?

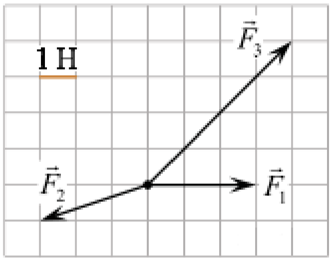


Рис. 6.5.

6.8. На точечное тело, покоившееся на горизонтальной поверхности, одновременно начинают действовать три постоянные горизонтально направленные силы (рис. 6.5), в результате чего тело начинает двигаться. Какую работу совершит равнодействующая этих сил при перемещении тела на расстояние 2 м?

6.9. Телу массой 4 кг, находящемуся на шероховатой горизонтальной плоскости, сообщили скорость 10 м/с, направленную вдоль плоскости. Определите модуль работы, совершенной силой трения, с момента начала движения тела до того момента, когда скорость тела уменьшится в 2 раза.

6.10. Какую мощность развивает двигатель подъемного механизма крана, если он равномерно поднимает плиту массой 600 кг на высоту 4 м за 3 с?

6.11. Брусок массой 5 кг равномерно перемещают по горизонтальной поверхности со скоростью 1 м/с, прикладывая к нему постоянную силу $F = 4$ Н, направленную под углом 60° к горизонту. Чему равна мощность силы F?

6.12. Тело массой 1 кг свободно падает на землю с высоты 20 м. Какую среднюю мощность развивает сила тяжести за время падения тела?

6.13. Подъемный кран равномерно поднимает груз массой 1000 кг. В таблице приведена зависимость высоты h этого груза над землей от времени подъема t. Какую мощность развивает кран при поднятии груза?

h, м	2	4	6	8
t, с	5	10	15	20

6.14. Слон поднимает бревно массой 200 кг на высоту 4 м за 8 с. Какую среднюю полезную мощность развивает при этом животное?

6.15. Вьючный осел, идущий по горной тропе, поднимает тюк массой 30 кг на высоту 120 м за 2 часа. Какую среднюю полезную мощность развивает при этом животное?

6.16. Покоившееся тело массой 20 кг начало двигаться вдоль прямой под действием силы, которая в течение 6 секунд развивала среднюю мощность 15 Вт. Какую скорость в результате приобрело это тело, если другие силы работы не совершали?

6.17. Растянутая на 2 см стальная пружина обладает потенциальной энергией упругой деформации 4 Дж. На сколько увеличится потенциальная энергия упругой деформации при растяжении этой пружины еще на 2 см?

6.18. Первая пружина имеет жесткость 20 Н/м, вторая – 40 Н/м. Обе пружины растянуты на 1 см. Чему равно отношение потенциальных энергий пружин $\frac{E_2}{E_1}$?

6.19. Потенциальная энергия упругой пружины при ее растяжении на 2 см равна 2 Дж. Найдите модуль изменения потенциальной энергии этой пружины при уменьшении ее растяжения на 0,5 см.

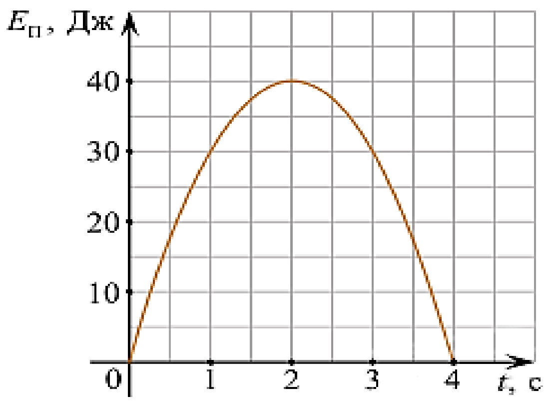


Рис. 6.6.

6.20. Небольшое тело массой 0,2 кг бросили вертикально вверх. На рис. 6.8 показан график зависимости потенциальной энергии тела от времени в течение полета. На какую максимальную высоту поднялось тело?

6.21. Груз массой m на пружине, совершая свободные колебания, проходит положение равновесия со скоростью v. Через половину периода колебаний он проходит положение равновесия, двигаясь в противоположном направлении с такой же по модулю скоростью v. Чему равен модуль изменения кинетической энергии груза за это время?

6.22. Изменение скорости тела массой 2 кг, движущегося по оси x, описывается формулой $\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$, где $\upsilon_{0x} = 8$ м/с, $a_x = -2$ м/с^2, t – время в секундах. Какова кинетическая энергия тела через 3 с после начала отсчета времени?

6.23. Небольшое тело массой 0,2 кг бросили вертикально вверх. На рис. 6.7 показан график зависимости кинетической энергии тела от времени в течение полета. Чему равна максимальная скорость тела в первые четыре секунды полета?

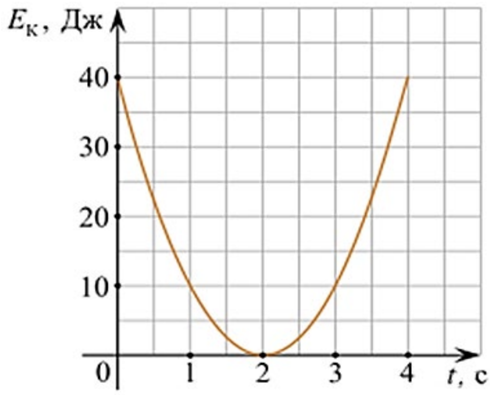


Рис. 6.7.

6.24. Самосвал массой m_0 при движении на пути к карьеру имеет кинетическую энергию $2{,}5 \cdot 10^5$ Дж. Какова его кинетическая энергия после загрузки, если он двигался с прежней скоростью, а масса его увеличилась в 2 раза?

6.25. Тела 1 и 2 взаимодействуют только друг с другом. Изменение кинетической энергии тела 2 за некоторый промежуток времени равно 10 Дж. Работа, которую совершили за этот же промежуток времени силы взаимодействия тел 1 и 2, равна 30 Дж. Чему равно изменение кинетической энергии тела 1 за это время?

II уровень

6.26. Какую работу совершает автомобиль «Лада Калина» массой 1,2 т после начала движения с места на расстоянии 75 м пути, если это расстояние автомобиль проходит за 10 с, а коэффициент сопротивления движению равен 0,05?

6.27. На тело массой 10 кг действует постоянная сила 5 Н. Определите кинетическую энергию тела через 2 с после начала движения. Сопротивлением пренебречь.

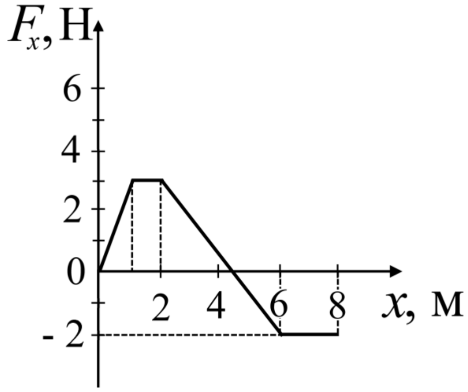


Рис. 6.9.

6.28. Тело движется в положительном направлении вдоль оси Ox. На него действует сила, проекция которой на ось зависит от координаты x так, как показано на рис. 6.9. Определить работу силы к тому моменту времени, когда тело из начала координат переместится в точку с координатой: а) 4 м, б) 8 м.

6.29. Оконную штору массой 2 кг, длиной 2 м, шириной 4 м:

а) свертывают в тонкий валик наверху окна;

б) отодвигают по карнизу на одну сторону окна.

Коэффициент трения шторы о карниз $\mu = 0{,}25$. Найдите работу, совершаемую в каждом случае, сравните результаты.

6.30. Диск диаметром 60 см и массой 1 кг вращается вокруг оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости с частотой 20 об/с. Какую работу нужно совершить, чтобы остановить диск?

6.31. По канатной железной дороге, идущей с углом наклона 45° к горизонту, поднимается вагонетка массой 500 кг. Найдите работу, которую совершает мотор подъемника при поднятии вагонетки на высоту 10 м, если коэффициент трения $\mu = 0{,}1$.

6.32. Человек перемещает ящик массой 100 кг по горизонтальной поверхности на расстояние 20 м с постоянной скоростью, прикладывая силу под углом 30° к горизонту. С какой силой должен действовать человек на ящик и какую он выполняет работу по перемещению ящика, если коэффициент трения ящика о плоскость $\mu = 0{,}15$? Рассмотрите случаи:

а) человек толкает ящик;

б) человек тянет ящик.

6.33. Пуля, летящая со скоростью υ_0, пробивает несколько одинаковых досок, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. В какой по счету доске застрянет пуля, если после прохождения первой доски скорость пули уменьшилась на 20 %?

6.34. Шофер автомобиля, имеющего массу 1 т, начинает тормозить на расстоянии 25 м от препятствия на дороге. Сила трения в тормозных колодках автомобиля 3,84 кН. При какой предельной скорости движения автомобиль успеет остановиться перед препятствием? Трением колес о дорогу пренебречь.

6.35. Тормозной путь автомобиля, двигавшегося со скоростью 10 м/с, равен 7,2 м. Чему будет равен тормозной путь, если скорость автомобиля возрастет до 20 м/с?

6.36. Диск массой 2 кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $\upsilon = 4$ м/с. Найдите кинетическую энергию диска.

6.37. Шар диаметром 6 см и массой 0,25 кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости с частотой вращения 4 об/с. Найдите кинетическую энергию шара.

6.38. Найти кинетическую энергию велосипедиста, едущего со скоростью $\upsilon = 9$ км/ч. Масса велосипедиста вместе с велосипедом 78 кг, причем на колеса приходится масса 3 кг. Колеса велосипеда считать обручами.

6.39. Обруч и диск одинаковой массы катятся без скольжения с одной и той же скоростью υ. Кинетическая энергия обруча 39,24 Дж. Найдите кинетическую энергию диска.

6.40. Шар массой 1 кг катится без скольжения, ударяется о стенку и откатывается от нее. Скорость шара до удара о стенку $\upsilon = 10$ см/с, после удара $u = 8$ см/с. Найдите количество теплоты, выделившееся при ударе шара о стенку.

6.41. С башни высотой 25 м горизонтально брошен камень массой 0,2 кг со скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с. Найдите кинетическую и потенциальную энергии камня через 1 с после начала движения.

III уровень

6.42. Перед самой посадкой ракета массой M с работающим двигателем неподвижно «зависла» над землей. Скорость вытекающих из ракеты газов υ. Какова мощность N двигателя ракеты?

6.43. Бассейн площадью 100 м^2 разделен пополам подвижной вертикальной перегородкой и заполнен водой до уровня 2 м. Перегородку медленно передвигают так, что она делит бассейн в отношении 1 : 3. Какую работу пришлось совершить? Вода не проникала через перегородку и не переливалась через край бассейна.

6.44. Груз начинает скользить с начальной скоростью υ_0 вверх по наклонной плоскости, имеющей длину l и высоту h. Коэффициент трения равен μ. Какой путь S пройдет тело до остановки?

6.45. На толкание ядра массой 2 кг, брошенного под углом 30° к горизонту, затрачена работа 216 Дж. Через какое время и на каком расстоянии от места бросания ядро упадет на землю?

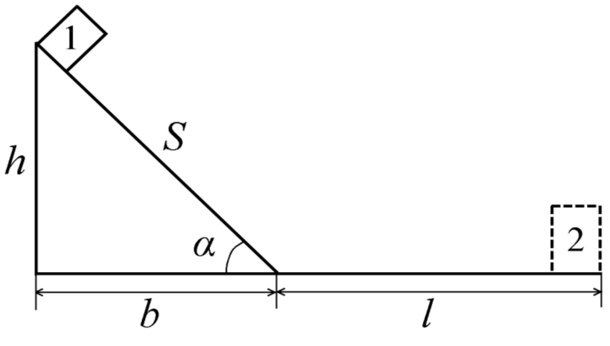


Рис. 6.10.

6.46. С ледяной горы высотой 1 м и основанием 5 м съезжают санки, которые останавливаются, пройдя горизонтальный путь, равный 95 м (рис. 6.10). Найдите коэффициент трения и КПД наклонной плоскости.

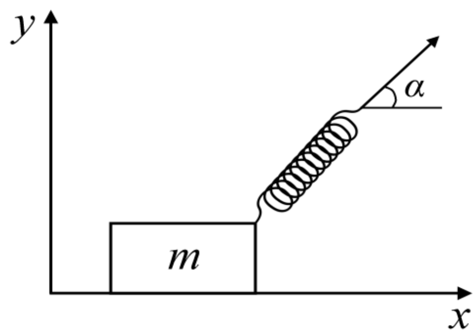


Рис. 6.11.

6.47. К лежащему на горизонтальной поверхности бруску массой 12 кг прикреплена пружина жесткостью 300 Н/м (рис. 6.11). Коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0{,}4$. Вначале пружина не деформирована. Затем, приложив к свободному концу пружины силу, направленную под углом 30° к горизонту, медленно переместили брусок на расстояние 0,4 м. Какая работа при этом была совершена? (Колебаний не происходит).

6.48. На горизонтальной плоскости лежит груз массой 100 г на расстоянии x от пружины жесткостью 100 Н/м (рис. 6.12). Коэффициент трения μ между телом и плоскостью. Какую работу надо совершить, чтобы передвинуть груз на $x_0 = 3$ см, в случаях:

а) $x = 0$, $\mu = 0$; б) $x = 1$ см, $\mu = 0{,}1$.

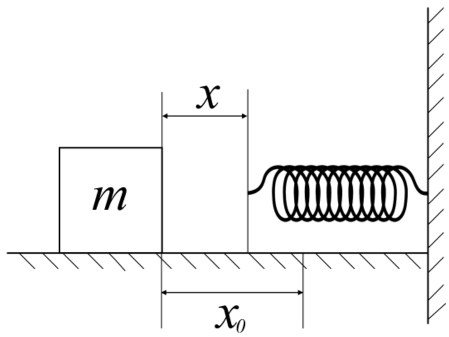


Рис. 6.12.

6.49. Небольшое тело массы m поднимается без начальной скорости с поверхности Земли под действием двух сил: силы тяжести $m\vec{g}$ и силы $\vec{F}$, меняющейся с высотой подъема y по закону $\vec{F} = -2mg(1 - ay)\vec{j}$, где a – положительная постоянная, $\vec{j}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси y. Найти работу силы $\vec{F}$ на первой половине пути подъема и соответствующее приращение потенциальной энергии тела в поле силы тяжести Земли. (Поле силы тяжести предполагается однородным).

6.50. При выстреле из пружинного пистолета вертикально вверх пуля массой 20 г поднялась на высоту 5 м. Определить жесткость k пружины пистолета, если она была сжата на 10 см. Массой пружины пренебречь.

6.51. С какой скоростью должна быть выброшена с поверхности Солнца частица, чтобы она смогла удалиться в бесконечность?

6.52. Самолет массой 10 000 кг имеет кинетическую энергию $5 \cdot 10^7$ Дж и движется по окружности радиусом 1 км, расположенной в горизонтальной плоскости. Определите центростремительное ускорение самолета.

6.53. Шарик массой 100 г, подвешенный на нити длиной 40 см, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Какова кинетическая энергия шарика, если во время его движения нить образует с вертикалью постоянный угол 60°?

Индивидуальное домашнее задание

6.54. Мальчик бросил вверх мяч массой 200 г и поймал мяч при его падении в точке бросания. При этом мяч проделал путь 8 м. Чему равна работа, совершенная силой тяжести при подъеме мяча на максимальную высоту? Чему равна работа, совершенная силой тяжести при падении мяча с этой высоты? Чему равна работа, совершенная силой тяжести на всем пути, проделанном мячом?

6.55. Груженая шахтная клеть массой 10 т поднимается с ускорением 0,5 м/с^2. Определить работу по подъему клети за первые 10 с движения.

6.56. Какую работу надо совершить, чтобы лежащий на земле однородный стержень длиной 2 м и массой 100 кг поставить вертикально?

6.57. Две пружины с жесткостями 200 Н/м и 400 Н/м соединены последовательно друг с другом. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть их на 10 см?

6.58. Для погрузки угля в вагоны применяется ленточный транспортер, который перемещает уголь вверх по наклону на высоту 5 м. В минуту погрузчик доставляет 12 т угля к товарным вагонам. Какую работу совершает транспортер за 5 мин?

6.59. В воде с глубины 5 м поднимают до поверхности камень объемом 0,6 м^3. Плотность камня 2500 кг/м^3. Найти работу по подъему камня.

6.60. Какую работу надо совершить, чтобы из колодца глубиной 10 м поднять ведро с водой массой 8 кг на тросе, каждый метр которого имеет массу 400 г?

6.61. Какая работа произведена при сжатии буферной пружины железнодорожного вагона на 5 см, если для сжатия пружины на 1 см требуется сила 30 кН?

6.62. Какую работу надо совершить, чтобы пружину жесткостью 600 Н/м, растянутую на 4 см, дополнительно растянуть на 10 см?

6.63. Металлический шарик массой 100 г равномерно движется в горизонтальной плоскости по окружности радиусом 50 см с частотой 3 $с^{-1}$. Какую работу нужно совершить, чтобы увеличить частоту до 5 $с^{-1}$?

6.64. Рабочий равномерно поднимает кирпич массой 3 кг на высоту 50 см. Определите работу силы тяжести, действующей на кирпич, и работу силы давления кирпича на руку рабочего.

6.65. Самолет поднимается и на высоте 5 км достигает скорости 360 км/ч. Во сколько раз работа против силы тяжести, совершаемая при подъеме, больше работы, идущей на увеличение скорости самолета?

6.66. Санки массой 40 кг тянут за веревку, составляющую с горизонтом угол 30°. Сила натяжения веревки 250 Н. Коэффициент трения между полозьями санок и дорогой 0,03. Определите работу каждой из сил, действующих на санки, при их перемещении вдоль дороги на 100 м.

6.67. Лифт массой 1 т поднимается с ускорением 1 м/$с^2$. Определите работу силы натяжения тросов за первые 2 с движения.

6.68. Лифт массой 1 т поднимается с ускорением 1 м/$с^2$. Определите работу силы тяжести, действующей на лифт, за первые 2 с движения.

6.69. Груз массой 20 кг равноускоренно опускают на веревке на высоту 10 м за 4 с. Определите работу силы натяжения веревки при этом перемещении груза.

6.70. Груз массой 20 кг равноускоренно опускают на веревке на высоту 10 м за 4 с. Определите работу силы тяжести при этом перемещении груза.

6.71. На нерастяжимой нити длиной 80 см в вертикальной плоскости вращают шарик массой 0,5 кг. Определите работу силы тяжести за время, когда шарик совершит 5,5 оборотов.

6.72. Кубик массой m поднимают на вершину наклонной плоскости на высоту h, а затем отпускают и он скатывается. Определите работу при подъеме кубика. Трением пренебрегите.

6.73. Кубик массой m поднимают на вершину наклонной плоскости на высоту h, а затем отпускают и он скатывается. Определите работу силы тяжести на всем пути кубика. Трением пренебрегите.

6.74. В табл. 6.1 приведены законы движения $S(t)$, $\varphi(t)$ тел 1 – 12:

1. Тонкий стержень массой m и длиной l (ось вращения проходит через середину стержня перпендикулярно ему).

2. Тонкий стержень массой m и длиной l (ось вращения проходит через конец стержня перпендикулярно ему).

3. Прямоугольный параллелепипед массой m и сторонами a вдоль Ox и b вдоль Oy (ось вращения проходит параллельно оси Oz через центр симметрии тела).

4. Сплошной цилиндр массой m и радиусом r (ось вращения совпадает с осью симметрии цилиндра).

5. Сплошной цилиндр массой m с радиусом r и длиной l (ось вращения проходит перпендикулярно оси симметрии через центр цилиндра).

6. Шар массой m и радиусом r (ось вращения проходит через любой диаметр).

7. Полый тонкостенный цилиндр массой m и радиусом r (ось вращения совпадает с осью симметрии цилиндра).

8. Полый толстостенный цилиндр массой m и радиусами r_1, r_2 (ось вращения совпадает с осью симметрии цилиндра).

9. Тонкое кольцо массой m и радиусом r (ось вращения проходит через центр кольца перпендикулярно его плоскости).

10. Прямоугольная пластина массой m и стороной b (ось вращения проходит перпендикулярно стороне b вдоль стороны a).

11. Тонкостенная сфера массой m и радиусом r (ось вращения проходит через любой диаметр).

12. Диск массой m и радиусом r (ось вращения проходит через любой диаметр).

где S – путь, пройденный телом, φ – угол поворота тела.

Найдите кинетическую энергию заданного в варианте тела через время t после начала движения.

Таблица 6.1

а) тело 9 m = 200 г r = 17 см $S(t) = 5t^3 + 11t$ $\varphi(t) = 7t^2 - 9$ t = 3 с	**б)** тело 7 m = 513 г r = 96 см $S(t) = 2t^4 - t^2 + 7t$ $\varphi(t) = 3t + 21$ t = 15 с	**в)** тело 5 m = 842 г r = 21 см, l = 37 см $S(t) = t^2 + 11t$ $\varphi(t) = 2t^2 + 2$ t = 2 с
г) тело 10 m = 415 г a = 35 см, b = 83 см $S(t) = 4t^3 + 10t$ $\varphi(t) = 6t^2 - 8$ t = 5 с	**д)** тело 12 m = 93 г r = 34 см $S(t) = t^3 - 6t^2 + 11t$ $\varphi(t) = t^4 - 13t$ t = 4 с	**е)** тело 1 m = 834 г l = 117 см $S(t) = 4t^2 - 4t$ $\varphi(t) = 8t + 19$ t = 3 с
ж) тело 6 m = 160 г r = 68 см $S(t) = 9t + 2t^2$ $\varphi(t) = t^3 + 2t^2 - 2$ t = 7 с	**з)** тело 11 m = 398 г r = 42 см $S(t) = 7t^3 - 5t$ $\varphi(t) = 3t^2 + 1$ t = 6 с	**и)** тело 2 m = 61 г l = 17 см $S(t) = 2t^2$ $\varphi(t) = 2 - 2t^{3/2} - 15$ t = 2 с
й) тело 7 m = 189 г r = 49 см $S(t) = 6t^4 + 13t^3 + 2t$ $\varphi(t) = 25 + 10t^2$ t = 1 с	**к)** тело 3 m = 113 г a = 13 см, b = 55 см $S(t) = 5t^3 - 3t$ $\varphi(t) = t^4$ t = 8 с	**л)** тело 8 m = 753 г r_1 = 123 см, r_2 = 21 см $S(t) = 11t^4 - 12t + 8$ $\varphi(t) = t^5$ t = 4 с
м) тело 4 m = 1017 г r = 160 см $S(t) = (-5t)^4$ $\varphi(t) = 3t^3 - 7t^2$ t = 2 с	**н)** тело 1 m = 13 г l = 3 см $S(t) = 2t^2 + 5t$ $\varphi(t) = 7t^2$ t = 1 с	**о)** тело 12 m = 47 г d = 66 см $S(t) = 10t^2 + 7t$ $\varphi(t) = \sqrt{3t^3}$ t = 4 с

п) тело 11 m = 1238 г r = 242 см $S(t) = 5t^3 + 8t^2 - 8t$ $\varphi(t) = -t^2 + 9t$ t = 2 с	**р)** тело 10 m = 465 г a = 11 см, b = 8 см $S(t) = 15t^3 - 8t$ $\varphi(t) = \sqrt{2t^6} + 9t$ t = 5 с	**с)** тело 3 m = 320 г a = 51 см, b = 43 см $S(t) = t^7$ $\varphi(t) = (3t - 9)^4$ t = 1,5 с
т) тело 8 m = 29 г r_1 = 16 см, r_2 = 37 см $S(t) = 2t^2 + \frac{t}{8}$ $\varphi(t) = 4t^3 - 9t$ t = 7 с	**у)** тело 9 m = 42 г r = 59 см $S(t) = \frac{5}{3}t^4 + 2t$ $\varphi(t) = t^2 + 2 - t$ t = 2 с	**ф)** тело 6 m = 514 г r = 98 см $S(t) = 2t^2$ $\varphi(t) = 15t - t^2$ t = 5 с
х) тело 7 m = 300 г r = 61 см $S(t) = \sqrt{t^7}$ $\varphi(t) = 2t^3 - 24t + 5$ t = 3 с	**ц)** тело 4 m = 76 г r = 18 см $S(t) = t^2 + 16t$ $\varphi(t) = -t^2 + 11t$ t = 4 с	**ч)** тело 5 m = 2 г r = 1 см, l = 5 см $S(t) = t^4 - 4t^3 + 4t^2$ $\varphi(t) = 2t - t^2$ t = 1 с
ш) тело 10 m = 21 г a = 4 см, b = 15 см $S(t) = t^3$ $\varphi(t) = e^{t-5}$ t = 5 с	**щ)** тело 5 m = 888 г r = 44 см, l = 87 см $S(t) = \sqrt[3]{t^5}$ $\varphi(t) = t^2$ t = 27 с	**ы)** тело 3 m = 140 г a = 21 см, b = 27 см $S(t) = 2^{t+1} + 5t$ $\varphi(t) = 7t - 2$ t = 2 с
э) тело 4 m = 565 г r = 92 см $S(t) = 9\sqrt[3]{2t^4}$ $\varphi(t) = 3t^2$ t = 10 с	**ю)** тело 2 m = 144 г l = 79 см $S(t) = \frac{2t}{3}$ $\varphi(t) = e^{t-1}$ t = 1 с	**я)** тело 7 m = 27 г r = 16 см $S(t) = \sqrt{5t^4}$ $\varphi(t) = 7t^3 - 9t + 12$ t = 2 с

6.75. Определить, на какой уровень плотина гидроэлектростанции поднимает воду, если известно, что это:

а) Саяно-Шушенская ГЭС;
б) Богучанская ГЭС;
в) Волжская ГЭС;
г) Нижнекамская ГЭС;
д) Красноярская ГЭС;
е) Братская ГЭС;
ж) Усть-Илимская ГЭС;
з) Волжская ГЭС;
и) Жигулевская ГЭС;
й) Вилюйская ГЭС;
к) Верхне-Свирская ГЭС;
л) Бурейская ГЭС;
м) Верхнетуломская ГЭС;
н) Саратовская ГЭС;
о) Серебрянская ГЭС-1;
п) Чебоксарская ГЭС;
р) Зейская ГЭС;
с) Нижегородская ГЭС;
т) Майнская ГЭС;
у) Нижне-Бурейская ГЭС;
ф) Усть-Хантайская ГЭС;
х) Новосибирская ГЭС;
ц) Ирганайская ГЭС;
ч) Рыбинская ГЭС;
ш) Зарамагская ГЭС-1;
щ) Зеленчукская ГЭС-ГАЭС;
ы) Светлинская ГЭС;
э) Миатлинская ГЭС;
ю) Цимлянская ГЭС;
я) Кубанская ГЭС-2.

Для решения задачи необходимо определить такие величины, как мощность ГЭС, КПД, расход воды.

6.76. Какую массу топлива или количество электроэнергии расходует двигатель автомобиля на пути 100 км, если скорость его движения $60\ \text{км/ч}$? КПД двигателя: бензинового $\eta_\text{Б} = 0{,}25$; дизельного $\eta_\text{Д} = 0{,}40$; дизельного с турбокомпрессором $\eta_\text{Т} = 0{,}53$; электродвигателя $\eta_\text{Э} = 0{,}75$; удельная теплота сгорания бензина $q_\text{Б} = 46\ \text{Мдж/кг}$; удельная теплота сгорания дизельного топлива $q_\text{Д} = 44{,}8\ \text{Мдж/кг}$.

а) TATA Nano Рестайлинг, 2015 (0,6 л);
б) Honda Civic 2001, 7 поколение (1,7 л);
в) Suzuki Celerio, 2023 (1,0 л);

г) Smart Fortwo electric drive, 2020;
д) BMW 3 серии 320d xDrive, 2020 (2,0 л);
е) Aston Martin V8 Vantage IV, 2018 (4,0 л);
ж) ГАЗ 12 ЗИМ, 1956 (3,5 л);
з) Bentley Arnage Red Label, 1999 (6,8 л);
и) SEAT Ibiza V, 2018 (1,0 л);
к) Jaguar XJR II (X308), 1998 (4,0 л);
л) BMW i4 M50;
м) Citroen Xsara, 2001 (2,0 л);
н) Dacia Sandero Stepway 0.9 TCe Start & Stop MT Prestige, 2017 (0,9 л);
о) Hyundai Kona Electric, 2018;
п) Chevrolet Corvette C3, 1981 (5,7 л);
р) Peugeot 206, 1999 (1,9 л);
с) Tesla Model 3 Long Range I, 2018;
т) ЗиС 110, 1950 (6,0 л);
у) SEAT Leon, III Рестайлинг, 2017 (1,6 л).

VII. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Неуничтожимость материи и движения, фундаментальные свойства пространства и времени находят свое отражение в законах сохранения энергии, импульса и момента импульса. Важно понять условия, при которых выполняется тот или иной закон сохранения.

Тела, образующие механическую систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. Силы, с которыми тела системы взаимодействуют между собой, называются *внутренними*. Силы, которые действуют на тела системы со стороны тел, не принадлежащих системе, называются *внешними*.

Механическая система называется *замкнутой (или изолированной)*, если на нее (на тела системы) не действуют внешние силы (система не обменивается с внешними телами энергией).

Система называется *незамкнутой*, если на нее действуют внешние силы.

Механическая система называется *консервативной*, если на тела системы действуют только консервативные силы (как внешние, так и внутренние).

Закон сохранения механической энергии: полная механическая энергия консервативной системы тел сохраняется.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы тел сохраняется.

На практике приходится иметь дело со взаимодействием тел в условиях, когда действием внешних сил пренебречь нельзя (система незамкнутая), но можно найти такое направление (ось X), на которое внешние силы имеют нулевые проекции (либо проекции сил на это направление компенсируются). Тогда будет оставаться постоянной сумма проекций импульсов на данную координатную ось.

Также закон сохранения импульса можно применять для незамкнутых систем в случае, если внешние силы действуют в системе в течение малого промежутка времени $\Delta t \to 0$ (мгновенные взаимодействия). В таком случае изменением импульса системы тел под действием внешних сил по сравнению с действием внутренних сил можно пренебречь:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t \to 0 \text{ при } \Delta t \ \to \ 0. \tag{7.1}$$

Примерами кратковременных взаимодействий тел являются удары, взрывы, выстрелы, прыжки, толчки и т. д.

Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы тел сохраняется.

На практике приходится рассматривать вращение взаимодействующих тел относительно некоторой неподвижной оси Z. В этом случае может сохраняться суммарный момент импульса системы относительно данной оси L_z, если суммарный момент внешних сил относительно этой же оси вращения $M_{z\,\text{внеш.}} = 0$. Последнее может выполняться и для незамкнутой системы, если внешние силы параллельны оси вращения или пересекают эту ось.

Применение законов сохранения для описания ударов тел

Удар (*соударение*) – это кратковременное взаимодействие частиц или тел, при котором силы внутреннего взаимодействия много больше, чем внешние силы, поэтому систему соударяющихся тел (или частиц) можно считать замкнутой. Классификация ударов представлена в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Удары

<table>
<tr><td colspan="6">По направлению скоростей</td></tr>
<tr><td colspan="3">Прямой (векторы скоростей тел коллинеарны)</td><td colspan="3">Непрямой (скорости тел направлены под углом друг к другу)</td></tr>
<tr><td colspan="6">По расположению линии удара относительно центра масс</td></tr>
<tr><td colspan="3">Центральный
(движение происходит по прямой, соединяющей центры шаров)</td><td colspan="3">Нецентральный
(направление движения не совпадает с линией, соединяющей центры шаров)</td></tr>
<tr><td colspan="6">По виду деформации тел</td></tr>
<tr><td colspan="2">Абсолютно неупругий удар
($k = 0$)</td><td colspan="2">Частично упругий (реальный) удар
($0 < k < 1$)</td><td colspan="2">Абсолютно упругий удар
($k = 1$)</td></tr>
</table>

Коэффициент восстановления скорости k – физическая величина, определяющая, какая доля начальной относительной скорости тел восстановится к концу удара:

$$k = \frac{|u_1 - u_2|}{|v_1 - v_2|}, \tag{7.1}$$

где u_1, u_2 – скорости тел после удара;

v_1, v_2 – скорости тел до удара.

Также k – характеристика степени упругости удара (см. табл. 7.1).

Значения коэффициента восстановления скорости для различных материалов представлены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Материал соударяющихся тел	Коэффициент восстановления скорости
Стекло	0,94
Слоновая кость (бильярдные шары)	0,92
Латунь	0,60
Сталь	0,56
Пробка	0,56
Дерево	0,50
Дерево о резину	0,25
Алюминий	0,23
Пластилин	0,05

Закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса выполняются при любом ударе, так как предполагается, что за малое время удара действием внешних сил на систему соударяющихся тел можно пренебречь, и эту систему тел можно считать замкнутой.

Закон сохранения механической энергии выполняется только при абсолютно упругом ударе. В остальных случаях механическая энергия частично или полностью переходит во внутреннюю энергию деформированных тел.

Контрольные вопросы

1. Какие силы называются внутренними? Внешними?

2. Какая механическая система называется замкнутой? Незамкнутой? Консервативной? Неконсервативной?

3. При каком условии сохраняется полная механическая энергия системы тел? Импульс системы? Проекция импульса на произвольное направление? Момент импульса системы? Проекция момента импульса на произвольное направление?

4. Какими могут быть удары двух бильярдных шаров? Двух деревянных шаров? Как могут начать двигаться шары после удара в этих случаях?

5. Приведите примеры а) нецентрального абсолютно упругого удара; б) абсолютно неупругого взаимодействия тел.

Задачи для аудиторных занятий

I уровень

7.1. Два рыбака, находящиеся в лодках разной массы, начали подтягиваться друг к другу с помощью веревки. Как при этом будет двигаться каждая из лодок? Какие законы нужно использовать для расчета их движения?

7.2. Тело массой m, двигаясь со скоростью υ, сталкивается с массивной стеной. Какой импульс оно передаст стене, если:

а) до удара тело двигалось перпендикулярно поверхности стены, и удар был абсолютно неупругим?

б) до удара тело двигалось перпендикулярно поверхности стены, и удар был абсолютно упругим?

в) до удара тело двигалось под углом α к поверхности стены, и удар был абсолютно неупругим?

г) до удара тело двигалось под углом α к поверхности стены, и удар был абсолютно упругим?

7.3. Какие превращения энергии происходят в следующих случаях:

а) тело падает на землю с некоторой высоты;

б) тело тормозит под действием силы трения;

в) при выстреле из ружья пуля, пролетев некоторое расстояние, попадает в мишень;

г) шарик абсолютно неупруго налетает на такой же неподвижный шарик;

д) шарик абсолютно упруго налетает на более массивный неподвижный шарик.

7.4. Придумайте свою цепочку процессов и поясните, какие превращения энергии в ней происходят.

7.5. При торможении тела на горизонтальной поверхности сила трения совершила работу, равную по модулю 3 кДж. На сколько при этом изменились кинетическая и потенциальная энергии тела? Справедлив ли в этом случае закон сохранения энергии? Закон сохранения механической энергии? Какие превращения энергии произошли в этом примере?

7.6. Исключите равенство, которое несправедливо для закона сохранения импульса замкнутой системы тел:

а) $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = 0$;

б) $\vec{p} = \mathrm{const}$;

в) $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \mathrm{const}$;

г) $\vec{p} = 0$.

7.7. Снаряд, летевший горизонтально со скоростью $\vec{v}$, разрывается на две равные части. Одна часть летит вертикально вниз со скоростью $\vec{u}_1$ (рис. 7.1).

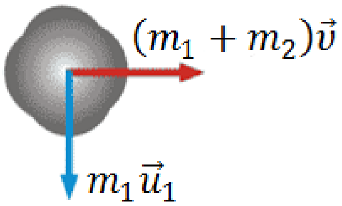


Рис. 7.1.

Выберите направление движения второй части снаряда на рис. 7.2.

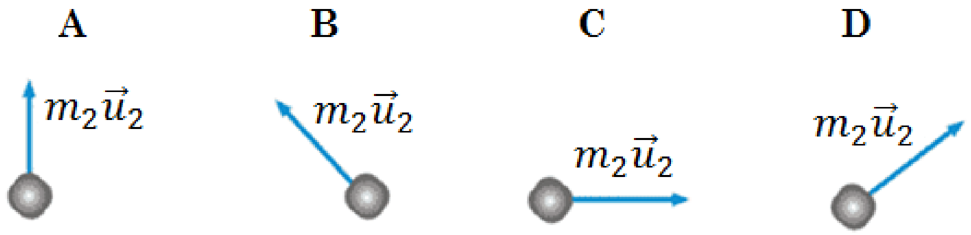


Рис. 7.2.

7.8. В результате взрыва первоначально покоящийся камень разлетелся на три части. Скорости двух кусков одинаковы по модулю и направлены под прямым углом друг к другу (рис. 7.3).

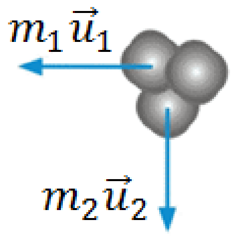


Рис. 7.3.

Выберите направление движения третьего осколка на рис. 7.4.

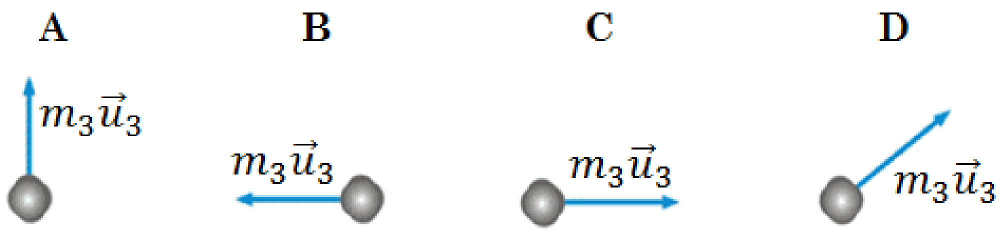


Рис. 7.4.

7.9. Один из двух шаров одинаковой массы отклонили на угол φ и отпустили (рис. 7.5).

Определите, на каком из вариантов рис. 7.6 правильно показано положение шаров одинаковой массы после:

а) абсолютно упругого удара;

б) абсолютно неупругого удара;

в) частично упругого удара.

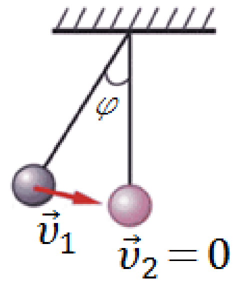


Рис. 7.5.

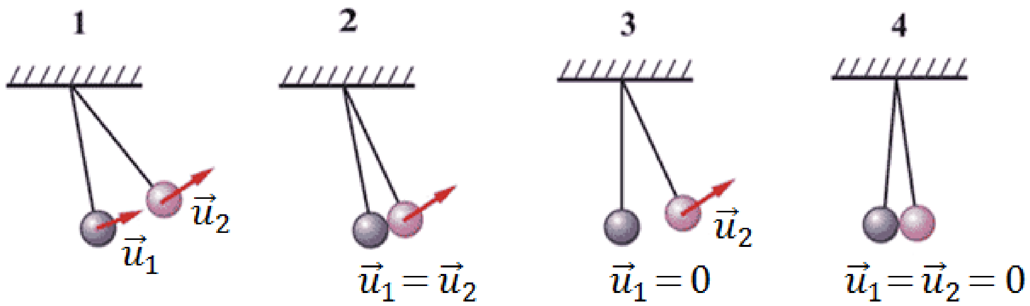


Рис. 7.5.

II уровень

7.10. Шар массой $m_1 = 1$ кг движется со скоростью $\upsilon_1 = 4$ м/с и сталкивается с шаром массой $m_1 = 3$ кг, движущимся навстречу ему со скоростью $\upsilon_1 = 2$ м/с. Каковы скорости шаров u_1 и u_2 после удара, если:

а) удар абсолютно неупругий, прямой, центральный?

б) удар абсолютно упругий, прямой, центральный?

7.11. Решите предыдущую задачу для случая, когда до столкновения шары двигались в перпендикулярных направлениях и удар был абсолютно неупругий.

7.12. Конькобежец, стоя на коньках на льду, бросает камень массой $m_1 = 5$ кг под углом α = 30° к горизонту со скоростью $\upsilon_1 = 10$ м/с. Какова будет при этом начальная скорость движения конькобежца υ_2, если масса его $m_2 = 60$ кг?

7.13. Тележка массой 100 кг движется по гладким горизонтальным рельсам со скоростью 6 м/с. При этом в тележку сверху начинают засыпать песок со скоростью 5 кг/с. Какой будет скорость тележки через 40 с?

7.14. Лягушка массой m сидит на конце доски массой M и длиной L. Доска плавает на поверхности пруда. Лягушка прыгает под углом α к горизонту вдоль доски. Какой должна быть скорость лягушки v, чтобы она оказалась на другом конце доски?

7.15. Частица массой m испытывает упругое столкновение с покоящейся частицей массой M, в результате чего частицы разлетелись симметрично относительно первоначального направления движения частицы m. Найти отношение масс частиц m/M, если угол разлета 60°.

7.16. На скамье Жуковского сидит человек и держит на вытянутых руках гири массой 5 кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси скамьи 80 см. Скамья вращается с частотой 1 с$^{-1}$. На сколько изменится частота вращения скамьи, если человек согнет руки так, что расстояние от каждой гири до оси уменьшится до 20 см? Момент инерции человека и скамьи (вместе) относительно оси вращения считать равным $2{,}5$ кг $\cdot$ м^2 Изменением момента инерции человека при сгибании рук пренебречь.

7.17. Человек стоит на неподвижной скамье Жуковского в ее центре и ловит мяч массой $0{,}5$ кг, летящий в горизонтальном направлении на расстоянии 60 см от оси вращения скамьи. После этого скамья начинает вращаться с частотой $0{,}2$ с$^{-1}$. Момент инерции человека и скамьи 4 кг $\cdot$ м^2. Определите скорость мяча.

7.18. Из пружинного пистолета с пружиной жесткостью $k = 150$ Н/м был произведен выстрел пулей массой $m = 8$ г. Определите скорость v пули при вылете ее из пистолета, если пружина была сжата на $\Delta x = 4$ см.

7.19. С поверхности Земли вертикально вверх пущена ракета со скоростью $v = 10$ км/с. На какую высоту она поднимется? Рассмотрите случай, когда а) ускорение свободного падения можно считать постоянным, и б) когда оно зависит от расстояния до Земли.

7.20. Из бесконечности на поверхность Земли падает метеорит массой $m = 30$ кг. Определить скорость, которой будет обладать метеорит при подлете к Земле. Ускорение свободного падения у поверхности Земли g и ее радиус R считать известными.

7.21. Пренебрегая трением, определить наименьшую высоту h_0 (рис. 7.7), с которой должна скатываться тележка по желобу, переходящему в петлю радиусом $R = 2$ м, чтобы она сделала полную петлю и не выпала из желоба.

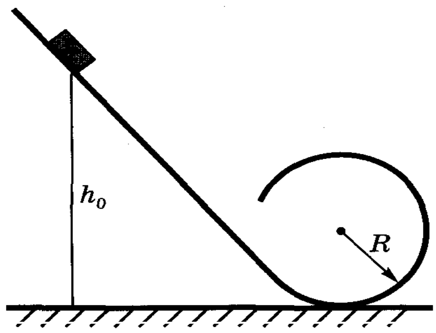


Рис. 7.7.

7.22. Бревно длиной 3 м, поставленное вертикально, падает на землю. Какую угловую и линейную скорость будет иметь в конце падения его верхний конец?

7.23. С наклонной плоскости, составляющей угол 37° с горизонтом, без скольжения скатывается сплошной диск. Пренебрегая трением, определите скорость диска через 4 секунды после начала движения.

7.24. Пуля массой 20 г, летевшая горизонтально, попала в небольшой шарик массой 2 кг и застряла в нем. Шарик был закреплен на нижнем конце невесомого стержня длиной 0,5 м, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. С какой минимальной скоростью должна двигаться пуля, чтобы после ее попадания в шарик стержень с шариком сделали полный оборот?

7.25. Решите задачу 7.24 для случая, когда шарик закреплен на конце невесомой нити длиной 0,5 м.

7.26. Решите задачу 7.24 для случая, когда масса стержня равна 1,5 кг и ею нельзя пренебречь.

7.27. Два шара массами 1 и 3 кг подвешены на нитях длиной 1 м и соприкасаются. Первый шар отвели в сторону на угол 60° и отпустили. На какие углы отклонятся шары после взаимодействия, если оно было:

а) абсолютно неупругим,

б) абсолютно упругим?

7.28. Решите задачу 7.27 для случая, если шарики были сделаны из дерева. Коэффициент восстановления скорости для дерева примите равным 0,5.

7.29. Какую максимальную угловую скорость может развить маятник Максвелла, представляющий собой массивный диск радиусом 8 см, насаженный на стержень радиусом 4 мм, если его предварительно подняли на высоту 50 см? Массой стержня по сравнению с массой диска и потерями механической энергии в условиях данной задачи можно пренебречь.

7.30. Деревянным молотком, масса которого $m = 0{,}5$ кг, ударяют о неподвижную стенку. Скорость молотка в момент удара $\upsilon = 1$ м/с. Считая коэффициент восстановления скорости при ударе $k = 0{,}5$, найдите количество теплоты, выделившееся при ударе.

III уровень

7.31. Шарик массой m_1 сталкивается с неподвижным шаром массой m_2 ($m_1 > m_2$). Происходит абсолютно упругий удар. Найдите максимальный угол, на который может отклониться шарик массой m_1 от первоначального направления движения.

7.32. Снаряд, запущенный вертикально, разорвался в верхней точке траектории на три осколка одинаковой массы. Один из осколков, двигаясь строго вниз, упал на землю через время t_1 после взрыва. Два других упали одновременно через время t_2. Найдите высоту, на которой разорвался снаряд над землей.

7.33. С горы с уклоном α ($\cos\alpha = 5/6$) съезжают с постоянной скоростью сани с седоком общей массой M. Навстречу саням по горе бежит и запрыгивает на них собака массой m, имеющая при прыжке в момент отрыва от поверхности скорость υ, направленную под углом β ($\cos\beta = 2/3$) к горизонту. После этого сани продолжают движение со скоростью u. Найдите скорость саней υ_0 до прыжка собаки.

7.34. С высоты $1{,}5R$ соскальзывает без начальной скорости маленький шарик и далее движется без трения по желобу, расположенному в вертикальной плоскости (рис. 7.8). Горизонтальный участок желоба плавно переходит в полуокружность радиуса R. Под каким углом β к горизонту упадет шарик на горизонтальный участок желоба после отрыва от его поверхности?

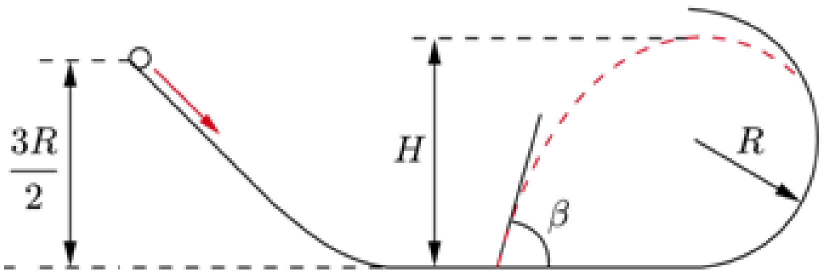


Рис. 7.8.

7.35. Тяжелая доска массы M лежит на двух тонкостенных катках массой m каждый. Цилиндрические катки радиусами r и R лежат на горизонтальной плоскости, и их оси параллельны друг другу. Расстояние между осями катков L. С каким ускорением будет двигаться центр масс доски, если ее отпустить? Трение между всеми поверхностями таково, что проскальзывания нет.

Индивидуальное домашнее задание

7.36. Упругий маленький шар налетает со скоростью v на другой такой же неподвижный шар, при этом центры шаров лежат на линии движения первого шара. Как будут двигаться шары после столкновения?

7.37. Упругий маленький шарик массой m_1 налетает со скоростью 4 м/с на другой упругий покоящийся шарик массой m_2, при этом центры шариков лежат на линии движения первого шарика. Найдите скорости шариков после столкновения при следующих значениях масс:

а) $m_1 = m$, $m_2 = 2m$;

б) $m_1 = 2m$, $m_2 = m$;

в) $m_1 = m$, $m_2 = 5m$;

г) $m_1 = 5m$, $m_2 = m$;

д) $m_1 = m$, $m_2 = 1000m$.

7.38. Два маленьких шара, изготовленных из упругих материалов, движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой. Найдите скорости шаров после столкновения в следующих случаях при заданных массах шаров и их скоростях до столкновения:

а) $m_1 = 200$ г, $m_2 = 300$ г, $v_1 = 6$ м/с, $v_2 = 4$ м/с;

б) $m_1 = 200$ г, $m_2 = 200$ г, $v_1 = 10$ м/с, $v_2 = 4$ м/с;

в) $m_1 = 800$ г, $m_2 = 100$ г, $v_1 = 6$ м/с, $v_2 = 4$ м/с;

г) $m_1 = 200$ г, $m_2 = 300$ г, $v_1 = 5$ м/с, $v_2 = 5$ м/с.

7.39. Два маленьких шара, изготовленных из упругих материалов, движутся друг за другом вдоль одной прямой. Найдите скорости шаров после столкновения в следующих случаях при заданных массах шаров и их скоростях до столкновения:

а) $m_1 = 200$ г, $m_2 = 300$ г, $v_1 = 6$ м/с, $v_2 = 4$ м/с;

б) $m_1 = 200$ г, $m_2 = 200$ г, $v_1 = 10$ м/с, $v_2 = 4$ м/с;

в) $m_1 = 800$ г, $m_2 = 100$ г, $v_1 = 6$ м/с, $v_2 = 4$ м/с;

г) $m_1 = 50$ г, $m_2 = 800$ г, $v_1 = 1$ м/с, $v_2 = 2$ м/с.

7.40. Шарики массами m_1 и m_2 движутся перпендикулярно друг другу со скоростями v_1 и v_2 соответственно. Найдите скорость шариков после абсолютно неупругого столкновения и углы, на которые изменили направление скорости шариков при столкновении, в следующих случаях:

а) $m_1 = 200$ г, $m_2 = 300$ г, $v_1 = 6$ м/с, $v_2 = 4$ м/с;

б) $m_1 = 200$ г, $m_2 = 200$ г, $v_1 = 6$ м/с, $v_2 = 8$ м/с;

в) $m_1 = 700$ г, $m_2 = 100$ г, $v_1 = 5$ м/с, $v_2 = 5$ м/с;

г) $m_1 = 200$ г, $m_2 = 100$ г, $v_1 = 5$ м/с, $v_2 = 10$ м/с.

7.41. Изготовленные из пластилина шарики массами m_1 и m_2 движутся со скоростями v_1 и v_2 соответственно в направлениях, составляющих между собой угол 60°, и в некоторый момент сталкиваются. Найдите конечные скорости шариков в следующих случаях:

а) $m_1 = 200$ г, $m_2 = 300$ г, $v_1 = 6$ м/с, $v_2 = 4$ м/с;

б) $m_1 = 200$ г, $m_2 = 200$ г, $v_1 = 5$ м/с, $v_2 = 5$ м/с;

в) $m_1 = 400$ г, $m_2 = 100$ г, $v_1 = 2$ м/с, $v_2 = 4$ м/с;

г) $m_1 = 200$ г, $m_2 = 100$ г, $v_1 = 2$ м/с, $v_2 = 1$ м/с.

7.42. Частица массой m налетает на неподвижную мишень массой M и отражается назад со скоростью, в 2 раза меньшей первоначальной:

а) определите отношение массы частицы к массе мишени, считая удар абсолютно упругим;

б) определите отношение скоростей частицы и мишени после их упругого соударения.

7.43. Шарик, движущийся со скоростью 2 м/с, налетает на неподвижный точно такой же шарик. В результате упругого столкновения первый шарик изменил направление движения на угол 30°. Определите:

а) скорость первого шарика после удара;

б) скорость второго шарика после удара;

в) угол между направлением скорости второго шарика и первоначальным направлением движения первого шарика.

7.44. Частица массой m движется со скоростью v и сталкивается с неподвижной частицей массой M. В результате упругого удара частица массой m отклонилась на угол $60°$ от направления своего первоначального движения и ее скорость уменьшилась вдвое. Найдите:

а) отношение масс частиц;

б) модуль и направление скорости движения частицы массой M;

в) отношение скоростей частиц после удара.

7.45. Две одинаковые тележки движутся друг за другом (без трения) с одинаковыми скоростями $2\ \text{м/с}$. На задней тележке находится человек массой 50 кг. Человек прыгает в переднюю тележку со скоростью $2\ \text{м/с}$ относительно своей тележки. Имея в виду, что масса каждой тележки равна 100 кг, найти скорости, с которыми будут двигаться тележки после этого.

7.46. На краю покоящейся тележки массой 100 кг стоят два человека, масса каждого из них 50 кг. Оба человека спрыгивают в одну сторону с одной и той же горизонтальной скоростью u относительно тележки 1) одновременно, 2) друг за другом. В каком случае скорость тележки будет больше и во сколько раз?

7.47. Ствол пушки без противооткатного устройства направлен под углом $45°$ к горизонту. Когда колеса пушки закреплены, скорость снаряда, масса которого в 50 раз меньше массы пушки, составляет $180\ \text{м/с}$. Найти скорость пушки сразу после выстрела, если ее колеса свободны.

7.48. Конькобежец, стоящий на льду, бросает вдоль льда камень массой 5 кг. После броска камень прошел по льду до остановки расстояние 20 м. С какой скоростью после броска камня начнет двигаться конькобежец, если его масса 60 кг? Коэффициент трения камня о лед равен 0,05, трением коньков о лед пренебречь.

7.49. Тело массой 1 кг движется по шероховатой поверхности навстречу другому телу массой $1{,}5$ кг и неупруго сталкивается с ним. Скорости тел непосредственно перед столкновением были 8 м/с и 4 м/с соответственно. Сколько времени будут двигаться эти тела после столкновения, если коэффициент трения обоих тел о поверхность равен 0,05?

7.50. Орудие установлено на железнодорожной платформе. Масса платформы с орудием 40 тонн, масса снаряда 25 кг. Орудие выстреливает в горизонтальном направлении вдоль железнодорожного пути. Начальная скорость снаряда относительно платформы 1000 м/с. Какую скорость будет иметь платформа после второго выстрела? Трением и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

7.51. На противоположных концах стоящей на рельсах железнодорожной платформы закреплены две пушки. Ствол первой из них установлен под углом 60°, а второй – под углом 45° к горизонту. Из первой пушки производят выстрел снарядом массой 50 кг. Затем таким же снарядом стреляют из второй пушки. Оба снаряда имеют одинаковые начальные скорости 200 м/с относительно платформы. Определить скорость платформы после двух выстрелов. Масса платформы с пушками и снарядами 1,5 тонны. Оба выстрела производятся в противоположные стороны вдоль рельсов. Трение отсутствует.

7.52. Человек массой 70 кг находится на корме лодки, длина которой 5 м и масса 280 кг. Человек переходит на нос лодки. На какое расстояние лодка передвинется относительно воды? Может ли лодка передвинуться на расстояние большее ее длины?

7.53. На корме и на носу лодки на расстоянии 3,4 м друг от друга сидят рыболовы, масса которых 90 кг и 60 кг. Рыболовы меняются местами. Каково при этом перемещение лодки, если ее масса 50 кг? Может ли перемещение лодки быть больше ее длины?

7.54. На носу лодки длиной 5 м стоит человек, держа на высоте 1 м камень массой 2 кг. Человек бросает камень горизонтально вдоль лодки.

Какую скорость относительно берега должен сообщить человек камню, чтобы попасть в корму лодки? Масса лодки с человеком 200 кг, сопротивление воды и воздуха не учитывать.

7.55. Плот массой 80 кг движется по течению со скоростью 4 м/с. По берегу перпендикулярно направлению движения плота бежит человек массой 75 кг со скоростью 3,2 м/с. Человек прыгает на плот. Чему равна скорость плота с человеком?

7.56. Два мальчика, стоя на коньках, отталкиваются друг от друга и разъезжаются в разные стороны. Найти скорости мальчиков, если через 2 секунды расстояние между ними возросло до 10 м. Массы мальчиков 40 и 60 кг. Трением пренебречь.

7.57. Платформа с установленным на ней орудием движется со скоростью 9 км/ч. Их общая масса 200 тонн. Из орудия выпущен снаряд массой 50 кг со скоростью 800 м/с относительно платформы. Определите скорость платформы после выстрела, если:

а) выстрел произведен по направлению движения;

б) выстрел произведен под углом 60° к направлению движения платформы.

7.58. Граната, летевшая горизонтально со скоростью 10 м/с, разорвалась на две части массами 1 кг и 1,5 кг. Скорость большего осколка осталась горизонтальной и возросла до 25 м/с. Определить скорость и направление полета меньшего осколка.

7.59. В покоящуюся на льду шайбу массой 100 г упруго ударяется вторая шайба массой 50 г. После удара первая шайба отлетает перпендикулярно к первоначальному направлению движения налетающей шайбы. Под каким углом к первоначальному направлению будет двигаться после удара вторая шайба? Трением шайб о лед пренебречь.

7.60. Пуля массой 10 г, летевшая горизонтально со скоростью 600 м/с, ударилась о незакрепленный деревянный брусок массой 5 кг и застряла в нем, углубившись на 10 см. Найти среднюю силу сопротивления дерева движению пули.

7.61. Снаряд массой 10 кг, двигаясь в верхней точке траектории со скоростью 200 м/с, разорвался на две части. Меньшая (массой 3 кг) полетела вперед под углом $60°$ к горизонту со скоростью 400 м/с. С какой скоростью и в каком направлении полетит большая часть снаряда?

7.62. Снаряд, выпущенный со скоростью 100 м/с под углом $45°$ к горизонту, разорвался в верхней точке O траектории на два одинаковых осколка. Один осколок упал на землю под точкой O со скоростью 97 м/с. С какой скоростью упал на землю второй осколок?

7.63. Молекула летит со скоростью 400 м/с и упруго ударяется о поршень, движущийся навстречу ей. Скорость молекулы составляет угол $60°$ с нормалью к поверхности поршня. Определить величину и направление скорости молекулы после удара. Скорость поршня 20 м/с.

7.64. Тележка с песком массой 10 кг катится со скоростью 1 м/с по гладкой горизонтальной поверхности. В песок попадает и застревает камень массой 2 кг, летевший горизонтально навстречу тележке со скоростью 4 м/с. В какую сторону и с какой скоростью покатится тележка после попадания камня?

7.65. Граната, летящая горизонтально со скоростью 20 м/с, разорвалась на два осколка. Меньший осколок, масса которого составляет 40 % массы гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении, но со скоростью 100 м/с. Найдите скорость большего осколка после разрыва гранаты.

7.66. В лодке массой 240 кг стоит человек массой 60 кг. Лодка плывет со скоростью 2 м/с. Человек прыгает с лодки в горизонтальном направлении со скоростью 4 м/с относительно лодки. Найти скорость движения лодки после прыжка человека, если он прыгнул:

а) вперед по движению лодки;

б) в сторону, противоположную движению лодки.

7.67. На полу стоит тележка массой 20 кг в виде длинной доски, снабженной колесами. На одном конце доски стоит человек массой 60 кг. С какой скоростью относительно пола будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль доски со скоростью (относительно доски) 1 м/с?

7.68. К аэростату, масса которого M, привязана веревочная лестница, на которой стоит человек массой m. Аэростат неподвижен. В каком направлении и с какой скоростью v будет перемещаться аэростат, если человек начнет подниматься с постоянной скоростью u относительно лестницы?

7.69. Между двумя лодками, находящимися на поверхности озера, натянута веревка. Человек на первой лодке начинает тянуть веревку с постоянной силой 50 Н. Определить скорости, с которыми будет двигаться первая лодка относительно берега и относительно второй лодки через 5 секунд после того, как человек на первой лодке начал тянуть веревку. Масса первой лодки с человеком 250 кг, масса второй лодки с грузом 500 кг. Сопротивление воды не учитывать.

7.70. Пуля массой m, летящая со скоростью v под углом α к горизонту, попадает в брусок массой M, лежащий на плоскости, и застревает в нем. Найти расстояние s, пройденное бруском до остановки, если коэффициент трения бруска о плоскость μ.

7.71. Два небольших тела, отношение масс которых равно 3, лежат на краю полусферы радиусом R так, что соединяющая их линия проходит через центр полусферы. Тела одновременно начинают соскальзывать внутрь полусферы. Происходит абсолютно неупругий удар. Определить максимальную высоту подъема тел после удара.

7.72. На дне гладкой полусферы радиусом R лежит маленький шарик массой m. С края полусферы соскальзывает другой маленький шарик массой M такого же размера, как и первый. Какой будет высота подъема шариков после абсолютно неупругого удара?

7.73. Два резиновых диска с шероховатой поверхностью вращаются вокруг осей, лежащих на одной вертикали, причем плоскости дисков параллельны. Первый диск имеет момент инерции $\mathcal{J}_1$ и угловую скорость ω_1, второй – $\mathcal{J}_2$ и ω_2. Определить угловую скорость и изменение кинетической энергии двух дисков при падении верхнего диска и соединении его с нижним без проскальзывания.

7.74. Пуля массой 5 г, двигаясь со скоростью 800 м/с, попадает в точку А (a = 10 см) крутильного баллистического маятника (рис. 7.9), момент инерции которого 0,025 кг/м^2, и застревает в нем. Определите начальные угловую и линейную скорости перемещения центра диска A.

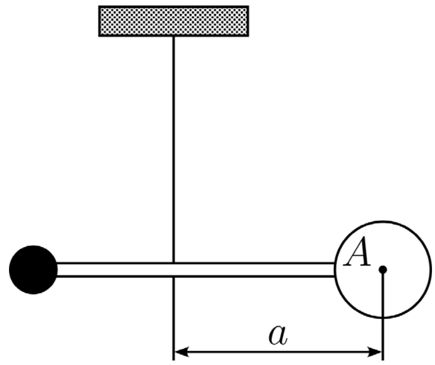


Рис. 7.9.

7.75. Горизонтальная платформа массой 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая 10 об/мин. Человек массой 60 кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считайте человека точечной массой, а платформу – однородным диском.

7.76. Горизонтальная платформа в виде диска массой 100 кг и радиусом 0,5 м вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр, с частотой 10 об/мин. Человек массой 60 кг стоит при этом на краю платформы. Какую работу совершит человек, перейдя от края платформы к ее центру? Человека считать материальной точкой.

7.77. Горизонтальная платформа в виде диска массой 80 кг и радиусом 1 м вращается, делая 10 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. Сколько оборотов в минуту будет делать платформа, если человек, опустив гири, уменьшит свой момент инерции от 30 кг · м^2 до 10 кг · м^2?

7.78. Горизонтальная платформа в виде диска вращалась, делая 6 об/мин. В центре платформы стоял человек и держал на вытянутых руках гири. Масса каждой гири 5 кг, расстояние от гири до оси вращения 1 м. Затем человек, прижав гири к себе, уменьшает расстояние от них до оси вращения до 20 см, и платформа с человеком начинает вращаться, делая 10 об/мин. Найдите момент инерции платформы с человеком, считая гири материальными точками.

7.79. Горизонтальная платформа в виде диска массой 80 кг и радиусом 1 м вращается, делая 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. Во сколько раз увеличится кинетическая энергия платформы с человеком, если человек, опустив гири, уменьшит свой момент инерции от 30 кг $\cdot$ м^2 до 10 кг $\cdot$ м^2?

7.80. Горизонтальная платформа массой 100 кг имеет форму диска радиусом 8 м и может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Сколько оборотов в минуту будет делать платформа, если человек массой 80 кг будет двигаться по окружности радиусом 5 м вокруг оси вращения? Скорость человека относительно платформы 4 км/ч.

7.81. В центре горизонтального диска, способного вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, стоит человек. Человек держит в руках тонкий стержень, расположенный вертикально по оси вращения диска. Диск с человеком вращается с частотой 1 об/с. С какой частотой будет вращаться диск с человеком, если повернуть стержень так, чтобы он принял горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и диска 6 кг $\cdot$ м^2. Длина стержня 2,4 м, его масса 10 кг.

7.82. Человек стоит на горизонтальном диске и держит в руках стержень, расположенный вертикально вдоль оси вращения диска. Стержень служит осью вращения колеса, расположенного на конце стержня. Диск неподвижен, колесо вращается с частотой 10 об/с. С какой частотой будет вращаться диск с человеком, если человек перевернет стержень на 180°?

Суммарный момент инерции человека и диска $6\ кг \cdot м^2$, радиус колеса $20\ см$. Массу колеса $3\ кг$ можно считать равномерно распределенной по ободу.

7.83. Шарик массой $100\ г$, привязанный к концу нити длиной $1\ м$, вращается, опираясь на горизонтальную поверхность, с частотой $1\ об/с$. Нить укорачивается, приближая шарик к оси вращения до расстояния $0{,}5\ м$. С какой частотой будет при этом вращаться шарик? Какую работу совершит внешняя сила, укорачивая нить?

7.84. Человек стоит на горизонтальном диске, способном вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, и ловит рукой мяч массой $0{,}4\ кг$, летящий в горизонтальном направлении со скоростью $20\ м/с$. Траектория мяча проходит на расстоянии $0{,}8\ м$ от оси вращения. С какой угловой скоростью начнет вращаться диск с человеком? Считать, что суммарный момент инерции человека и диска $6\ кг \cdot м^2$.

7.85. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска, стоит человек. Масса платформы $200\ кг$, масса человека $80\ кг$. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. С какой угловой скоростью начнет вращаться платформа, если человек пойдет вдоль ее края со скоростью $2\ м/с$ относительно платформы?

7.86. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. На краю платформы стоит человек. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль ее края и, обойдя платформу, вернется в исходную точку? Масса платформы $240\ кг$, а масса человека – $60\ кг$. Человека считать материальной точкой.

7.87. Деревянный стержень массой $1\ кг$ и длиной $40\ см$ может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину перпендикулярно к стержню. В конец стержня попадает пуля массой $10\ г$, летящая горизонтально перпендикулярно к стержню со скоростью 200 м/с. С какой угловой скоростью будет вращаться стержень, если пуля застрянет в нем?

7.88. Стальной горизонтальный стержень длиной 1 м и площадью поперечного сечения $2\ \text{см}^2$ подвешен за его середину на тонкой упругой нити. Теннисный шарик массой 5 г, летящий горизонтально перпендикулярно к стержню со скоростью 20 м/с, упруго ударяется в конец стержня (плотность стали $7800\ \text{кг/м}^3$):

а) С какой скоростью отскочит шарик?

б) Какую кинетическую энергию шарик сообщит стержню?

7.89. Горизонтальная платформа, имеющая форму диска радиусом 2 м и массой 200 кг, вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр, с частотой 1 об/с. Человек массой 80 кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек приблизится к оси вращения на $0{,}5$ м?

7.90. Горизонтальный стержень массой 5 кг и длиной 2 м может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, Шарик массой 50 г, летящий со скоростью 15 м/с в горизонтальном направлении перпендикулярно к стержню, ударяется о стержень на расстоянии 50 см от его конца. Считая удар абсолютно упругим, найдите угловую скорость стержня после соударения.

7.91. Горизонтальная платформа, имеющая форму сплошного однородного диска, вращается по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. На краю платформы стоит человек, масса которого в три раза меньше массы платформы. Определите, как и во сколько раз изменится угловая скорость вращения платформы, если человек перейдет ближе к центру на расстояние, равное половине радиуса платформы.

7.92. Человек стоит в центре горизонтальной платформы, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через ее центр, с частотой 30 об/мин. В вытянутых в стороны руках он держит по гире массой 5 кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси вращения 70 см. Суммарный момент инерции человека и платформы равен $2\ кг \cdot м^2$. Определите работу, которую совершит человек, если он прижмет гири к себе так, что расстояние от каждой гири до оси станет равным 20 см.

7.93. Человек массой 60 кг стоит на краю неподвижной горизонтальной платформы массой 80 кг. Платформа имеет форму диска диаметром 1 м и может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Человек бросает мяч массой 800 г в горизонтальном направлении по касательной к окружности диска со скоростью 20 м/с относительно земли. С какой угловой скоростью начнет вращаться платформа с человеком?

7.94. Горизонтальная платформа в виде однородного диска массой 80 кг может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. На краю платформы стоят два человека массами 40 кг и 70 кг. На какой угол повернется платформа, если люди пойдут в противоположные стороны вдоль края диска с одинаковыми (относительно платформы) скоростями и встретятся на диаметрально противоположном конце диска?

7.95. Шар скатывается по наклонной плоскости длиной 7 м с углом наклона 30°. Определить скорость шара в конце наклонной плоскости. Трением пренебречь.

7.96. Обод массой 2 кг и внешним радиусом 5 см скатывается по наклонной плоскости длиной 2 м с углом наклона 30°. Определить его момент инерции относительно оси вращения, если скорость в конце наклонной плоскости 3,3 м/с.

7.97. Шар и сплошной цилиндр с одинаковыми массами и радиусами, двигаясь с одинаковой скоростью, вкатываются вверх по наклонной плоскости. Какое из тел поднимается выше? Найти отношение высот подъема.

7.98. Обруч, имеющий скорость v, закатывается без проскальзывания на наклонную плоскость. На какую высоту поднимется его центр?

7.99. Имеются два цилиндра: алюминиевый (сплошной) и свинцовый (полый) одинакового радиуса 6 см и массой по 0,5 кг. За какое время каждый цилиндр скатится без скольжения с наклонной плоскости? Высота наклонной плоскости 0,5 м, угол наклона 30°, начальная скорость каждого цилиндра равна нулю. Плотность алюминия 2700 кг/м^3, плотность свинца $11\,300$ кг/м^3.

7.100. Однородный шар массой 5 кг скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонтом. Найти кинетическую энергию шара через 1,6 с после начала движения.

7.101. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью 7,2 км/ч. На какое расстояние может вкатиться обруч на горку за счет его кинетической энергии? Уклон горки равен 5 м на каждые 100 м пути.

7.102. Карандаш, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую и линейную скорость будет иметь его верхний конец в тот момент, когда угол между карандашом и горизонтом составит 30°? Длина карандаша 15 см.

7.103. С какой наименьшей высоты должен съехать велосипедист, чтобы по инерции (без трения) проехать дорожку, имеющую форму «мертвой петли» радиусом 3 м, и не оторваться от дорожки в верхней точке петли? Масса велосипедиста вместе с велосипедом 75 кг, причем на массу колес из них приходится 3 кг. Колеса велосипеда считать обручами.

7.104. Камешек скользит с наивысшей точки купола, имеющего форму полусферы. Какую дугу (в градусах) пройдет камешек, прежде чем оторвется от поверхности купола. Трением пренебречь.

7.105. Небольшое тело начинает скользить с высоты 1 м по наклонному желобу, переходящему в полуокружность в виде «мертвой петли» радиусом 0,5 м. Пренебрегая трением, найти скорость тела в точке его отрыва от желоба.

7.106. Шар, радиус которого 10 см, скатывается по наклонному скату и описывает «мертвую петлю» радиусом 0,3 м. Пренебрегая трением качения и сопротивлением воздуха, найти наименьшую высоту центра шара над центром петли, при которой это возможно.

7.107. Тело массой m брошено со скоростью v под углом α к горизонту с высоты h. Найти зависимость потенциальной и кинетической энергии от времени полета. В какой момент времени кинетическая энергия тела равна его потенциальной энергии? При каких начальных условиях это возможно? Сопротивление воздуха не учитывать.

7.108. Тело, не отрываясь, скользит без трения по поверхности, между горизонтальными частями которой перепад высот h (рис. 7.10). На верхней части поверхности скорость тела v, угол между скоростью и осевой линией α. Каким будет угол между скоростью и осевой линией на нижней части поверхности?

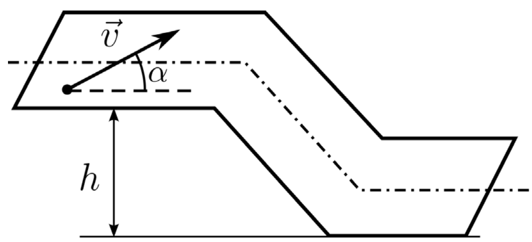


Рис. 7.10.

7.109. С высоты 5 м бросают вниз тело массой 1 кг с начальной скоростью 2 м/с. Тело углубляется в грунт на 0,1 м. Найти среднюю силу сопротивления грунта.

7.110. Сваю массой 100 кг забивают в грунт копром массой 400 кг. Копёр свободно падает с высоты 5 м, и при каждом его ударе свая опускается на глубину 25 см. Определить силу сопротивления грунта, считая ее постоянной, и КПД неупругого удара копра о сваю.

7.111. Пластмассовый шар массой M лежит на подставке с отверстием. Снизу в шар через отверстие попадает вертикально летящая пуля массой m и пробивает его насквозь. При этом шар подскакивает на высоту h.

На какую высоту H над подставкой поднимется пробившая шар пуля, если ее скорость перед попаданием была v_0?

7.112. На неподвижную частицу массой m_1 налетает частица массой m_2. После соударения первая частица полетела под прямым углом, а вторая под углом 30° к направлению первоначальной скорости налетевшей частицы. Найти отношение масс частиц m_2/m_1, если при столкновении 20 % первоначальной кинетической энергии перешло во внутреннюю энергию тел.

7.113. На гладкой горизонтальной поверхности около стенки находится брусок массой 200 г с углублением полусферической формы радиусом 50 см. С верхнего края углубления начинает соскальзывать маленькая шайба массой 100 г. Найти максимальную скорость бруска при его последующем движении. Трением пренебречь.

7.114. Два тела движутся навстречу друг другу и неупруго сталкиваются. Скорость первого тела до удара 2 м/с, скорость второго 4 м/с. Общая скорость тел после удара по направлению совпадает с направлением скорости второго тела и равна 2 м/с. Во сколько раз начальная кинетическая энергия первого тела была больше начальной кинетической энергии второго тела?

7.115. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на очень легком жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в n раз меньше массы шара. Расстояние от точки подвеса стержня до центра шара 1 м. Найти скорость пули, если известно, что стержень с шаром отклонился после попадания пули на угол 10°.

7.116. Движущееся тело массой m ударяется о неподвижное тело массой $9m$. Считая удар неупругим и центральным, найдите, сколько процентов первоначальной кинетической энергии:

а) переходит при ударе во внутреннюю энергию тел;

б) первое тело передает второму при ударе.

7.117. Шар массой 1 кг, катящийся без скольжения, ударяется о стенку и отскакивает от нее. Скорость шара до удара о стенку 10 см/с, а после удара – 8 см/с. Найти количество энергии, перешедшей во внутреннюю, при ударе.

7.118. Абсолютно упругий шар массой $1{,}8$ кг сталкивается с покоящимся упругим шаром большей массы. В результате прямого удара шар потерял 36 % своей кинетической энергии. Определите массу большего шара.

7.119. Какую максимальную часть своей кинетической энергии (в процентах) может передать частица массой $2\cdot10^{-20}$ г, сталкиваясь упруго с частицей массой $6\cdot10^{-20}$ г, которая до столкновения покоилась? От чего зависит эта доля?

7.120. Частица массой m испытала упругое столкновение с покоившейся частицей массой $4m$. Сколько процентов своей кинетической энергии потеряла налетающая частица, если:

а) она отскочила под прямым углом к своему первоначальному направлению движения;

б) столкновение лобовое?

7.121. Частица 1, имевшая скорость 10 м/с, испытала лобовое столкновение с покоившейся частицей 2 такой же массы. В результате столкновения кинетическая энергия системы уменьшилась на 10 %. Найти скорость частицы 1 после столкновения.

7.122. Пуля массой 10 г, летевшая с начальной скоростью 500 м/с, пробивает один подвешенный груз массой 100 г и застревает во втором таком же подвешенном грузе. Пренебрегая временем взаимодействия пули с грузами, найти количество теплоты, выделившейся в первом грузе, если во втором выделилось количество теплоты 100 Дж.

7.123. Два шарика массами 100 г и 200 г висят на нитях одинаковой длины. Между шариками зажата пружина, стянутая нитью. Энергия сжатой пружины 150 мДж. Нить, связывающую шарики, пережигают. Найдите максимальные высоты, на которые они при этом поднимутся.

7.124. В ящик с песком массой 5 кг, подвешенный на нити длиной 3 м, попадает пуля массой 5 г, летящая под углом 30° к горизонту, и отклоняет его на угол 10°. Определите скорость пули.

7.125. В тележку массой M, движущуюся по инерции со скоростью v, с высоты H падает кирпич массой m. Найти энергию, перешедшую во внутреннюю энергию тел при этом взаимодействии.

7.126. Снаряд массой 4 кг, летящий со скоростью 400 м/с, разрывается на две равные части, одна из которых летит в направлении движения снаряда, а другая – в противоположную сторону. В момент разрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличилась на величину ΔE. Скорость осколка, летящего по направлению движения снаряда, равна 900 м/с. Найдите ΔE.

7.127. Мимо наблюдателя равномерно и прямолинейно со скоростью 2 м/с движется тележка массой 100 кг. В тот момент, когда тележка поравняется с наблюдателем, он кладет на нее ящик массой 10 кг. Определите энергию, которая в этом процессе переходит в тепло.

7.128. Шар массой 4 кг движется со скоростью 5 м/с навстречу шару массой 1 кг. После центрального неупругого удара общая скорость шаров оказалась 3 м/с. Определите начальную скорость второго шара и изменение внутренней энергии обоих шаров.

7.129. Молотком массой M забивают гвоздь массой m. Определить отношение масс m/M, при котором молоток передает гвоздю максимальную энергию неупругого удара.

7.130. Из духового ружья стреляют в спичечную коробку, лежащую на расстоянии 30 см от края стола. Пуля массой 1 г, летящая горизонтально со скоростью 150 м/с, пробивает коробку и вылетает из нее со скоростью, составляющей 60 % от начальной. Масса коробки 50 г. При каком коэффициенте трения между коробкой и столом коробка упадет со стола?

7.131. Если на верхний конец вертикально расположенной пружины положить груз, то пружина сожмется на 3 мм. На сколько сожмется пружина, если тот же груз упадет на пружину с высоты 8 см?

7.132. Тело массой m подвешено к потолку с помощью пружины жесткостью k. Какой максимальной скорости достигнет тело, если его отпустить из положения, в котором пружина не растянута?

7.133. Акробат прыгнул с трапеции на батут, который при этом прогнулся на величину 1 м. Высота трапеции над батутом 4 м. На сколько прогнется батут, если акробат будет стоять на нем?

7.134. Система состоит из двух одинаковых кубиков массой m каждый, между которыми находится сжатая пружина жесткостью k (рис. 7.11). Кубики связаны нитью, которую в некоторый момент пережигают. При каких значениях начального сжатия пружины нижний кубик подскочит после пережигания нити?

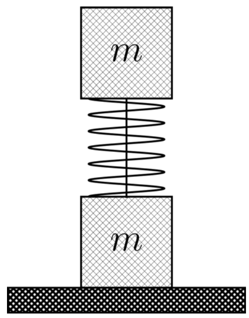


Рис. 7.11.

7.135. Груз положили на чашку пружинных весов. Сколько делений покажет стрелка весов при первоначальном отклонении, если после успокоения качаний она показывает 5 делений?

7.136. С какой скоростью двигался вагон массой 20 тонн, если при ударе о стенку каждый буфер сжался на 10 см? Известно, что пружина каждого буфера сжимается на 1 см под действием силы 9800 Н.

7.137. Мальчик, стреляя из рогатки, натянул резиновый шнур так, что его длина стала больше на 10 см. С какой скоростью полетел камень массой 20 г, если для натяжения резинового шнура на 1 см требуется сила 9,8 Н?

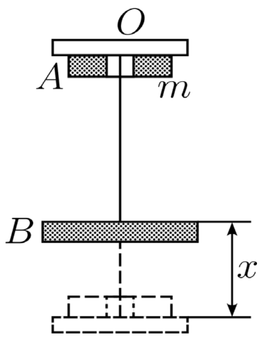


Рис. 7.12.

7.138. Гладкий резиновый шнур длиной L с коэффициентом жесткости k закреплен в точке O. На другом его конце имеется упор B. От точки O начинает свободно падать шайба A массой m (рис. 7.12). Пренебрегая массой шнура и упора, найдите максимальное растяжение x шнура.

7.139. На невесомом резиновом шнуре длиной 1 м закреплено тело массой 0,5 кг. Тело отвели в горизонтальное положение, не деформируя шнур. На сколько растянется шнур, когда тело будет проходить нижнюю точку траектории? Жесткость шнура 50 Н/м.

7.140. Груз массой m падает на плиту массой $2m$, укрепленную на вертикальной пружине с коэффициентом жесткости k. В момент удара груз имеет скорость v. Определите величину максимального сжатия пружины после абсолютно неупругого удара.

7.141. Ящик с песком массой 10 кг стоит на гладкой горизонтальной плоскости. Он соединен с вертикальной стеной пружиной, жесткость которой 200 Н/м. На сколько сожмется пружина, если пуля, летящая горизонтально со скоростью 500 м/с, попадет в ящик и застрянет в нем? Масса пули 0,01 кг.

7.142. Из пружинного пистолета выстрелили вертикально вниз в мишень, находящуюся на расстоянии 2 м от него. Совершив работу 0,12 Дж, пуля застряла в мишени. Какова масса пули, если пружина была сжата перед выстрелом на 2 см, а ее жесткость 100 Н/м?

7.143. На какой угол надо отклонить однородный стержень, горизонтальная ось вращения которого проходит через верхний конец стержня, чтобы нижний конец при прохождении им положения равновесия имел скорость 1 м/с? Длина стержня 1 м.

7.144. Однородный стержень длиной 85 см подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую наименьшую скорость надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси?

7.145. Нить математического маятника массой m отклонили до горизонтального положения и отпустили. Чему равна сила натяжения нити:

а) когда она составляет угол 45° с вертикалью;

б) в нижней точке траектории?

7.146. Нить с подвешенным на ней грузиком отклонили на угол и отпустили. На какой угол отклонится нить с противоположной стороны, если на одной вертикали с точкой подвеса на половине длины нити в стену вбит гвоздь?

7.147. На нити висит груз массой 0,2 кг. Нить разрывается при силе натяжения 2,94 Н. Нить с грузом отклоняют на угол 90° и отпускают. Определите угол между нитью и вертикалью в тот момент, когда она разорвется.

7.148. Летящая горизонтально пуля массой m_1 попадает в болванку массой m_2, подвешенную на двух нитях длиной l, и застревает в ней. В результате отклонения болванки максимальный угол поворота нитей оказался равным α (рис. 7.13). Найти начальную скорость пули.

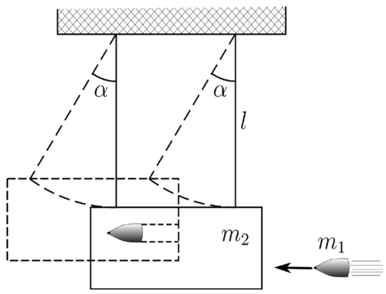


Рис. 7.13.

7.149. Нить математического маятника длиной L при его движении налетает на гвоздь, вбитый на расстоянии S под точкой подвеса. Найдите максимальное натяжение нити. Начальный угол отклонения нити α.

7.150. Деревянный стержень массой 6 кг и длиной 2 м может вращаться в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В нижний конец стержня попадает пуля массой 10 г, летевшая со скоростью 600 м/с, и застревает в нем. На какой угол отклонится стержень после удара?

7.151. Два абсолютно упругих шарика массами 0,1 кг и 0,3 кг подвешены на невесомых и нерастяжимых нитях длиной 0,5 м так, что касаются друг друга. Шарик, имеющий меньшую массу, отклоняют от положения равновесия на 90° и отпускают. На какую высоту поднимается второй шарик после удара?

7.152. Пуля массой 4 г, летящая горизонтально со скоростью 125 м/с, попадает в нижний конец жесткого стержня массой 100 г и длиной 0,5 м с шарниром наверху, и застревает в нем. Найдите модуль ускорения пули в верхней точке окружности, по которой двигался стержень после попадания пули. Трения шарика о воздух нет.

7.153. На невесомом стержне длиной 60 см подвешен шарик массой 0,5 кг. В шарик попадает горизонтально летящая пуля и застревает в нем. Масса пули 5 г. С какой минимальной скоростью должна лететь пуля, чтобы шарик мог сделать полный оборот вокруг точки подвеса? Крепление в точке подвеса шарнирное.

7.154. На невесомой нити длиной 60 см подвешен шарик массой 1 кг. В шарик попадает горизонтально летящая пуля массой 10 г и застревает в нем. С какой минимальной скоростью должна лететь пуля, чтобы шарик сделал полный оборот в вертикальной плоскости вокруг точки подвеса?

7.155. Деревянный шар массой 1,99 кг висит на невесомой нерастяжимой нити. В него попадает (и застревает в нем) пуля, летящая горизонтально со скоростью 600 м/с. Масса пули 10 г. Найдите максимальную высоту, на которую поднимается шар, и долю кинетической энергии пули, перешедшую во внутреннюю энергию тел.

7.156. Вертикально расположенный стержень массой 1 кг и длиной 0,5 м может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В нижний конец стержня попадает пуля массой 20 г, летящая горизонтально перпендикулярно оси вращения, и застревает в нем. Какова должна быть наименьшая скорость пули, чтобы стержень сделал полный оборот вокруг оси?

7.157. Вертикально расположенный стержень массой 1 кг и длиной 0,5 м может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В нижний конец стержня ударяется шарик массой 10 г, летящий горизонтально перпендикулярно оси вращения со скоростью 20 м/с. Считая удар абсолютно упругим, найдите угол, на который отклонится стержень после удара.

7.158. Между шариками массами m_1 и m_2, подвешенными на нитях разной длины L_1 и L_2 соответственно, зажата пружина, которая стянута нитью. Нить пережигают, и пружина разжимается. В результате шарики отклоняются на одинаковые углы α. Найдите отношение длин нитей L_1/L_2. Считайте, что сжатие пружины намного меньше длины нитей.

7.159. Два одинаковых пластилиновых шарика подвешены на нитях так, что касаются друг друга. Левый шарик отклоняют влево на угол α, а правый – вправо на угол β и одновременно отпускают без начальной скорости. На какой угол λ отклонятся шарики от вертикали после удара? (Углы считать малыми).

VIII. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА

Постулаты специальной теории относительности и следствия из них

В основу специальной теории относительности (СТО) Эйнштейна положены два постулата, которые не согласуются с классическими представлениями о пространстве и времени, но подтверждают и позволяют обосновать специфические эффекты релятивистской механики, наблюдаемые при движении тел со скоростями, близкими к скорости света.

I постулат (принцип относительности): Никакими физическими опытами, производимыми внутри инерциальной системы отсчета, невозможно установить, покоится ли эта система или движется прямолинейно и равномерно.

II постулат (принцип постоянства скорости света): Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета, не зависит от движения источников и приемников света и составляет $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Для преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой в СТО используют преобразования Лоренца (8.1). Для двух систем отсчета, из которых одна (система K) условно неподвижна, а вторая (система K') движется относительно K со скоростью υ вдоль оси x системы K' (в начальный момент времени начала координат обеих систем и направления соответствующих осей совпадают):

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}; \\ y' = y; \\ z' = z; \\ t' = \dfrac{t - \upsilon x/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}; \\ y = y'; \\ z = z'; \\ t = \dfrac{t' + \upsilon x'/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}. \end{cases} \qquad (8.1)$$

Из преобразований Лоренца вытекает несколько следствий:

А) *Относительность одновременности*: два события, одновременные в одной инерциальной системе отсчета, могут быть неодновременными в другой системе.

Б) *Относительность промежутков времени между событиями*:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{8.2}$$

где Δt – промежуток времени между событиями, измеренный в системе отсчета, относительно которой события движутся со скоростью v, Δt_0 – *собственное время* – промежуток времени между событиями, измеренный в системе отсчета, относительно которой события покоятся. Собственное время – минимально.

В) *Относительность размеров движущихся тел*:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{8.3}$$

где l – длина, измеренная в системе отсчета, относительно которой тело движется со скоростью v, l_0 – *собственная длина* – длина, измеренная в системе отсчета, относительно которой тело покоится. Собственная длина – максимальна. Сокращается размер тела только вдоль направления движения.

Г) *Релятивистский закон сложения скоростей.*

Обозначим $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$ – проекции скорости тела $\vec{u}$ на оси x, y, z в *K*-системе, $u'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}$, $u'_{y'} = \frac{dy'}{dt'}$, $u'_{z'} = \frac{dz'}{dt'}$ – проекции скорости тела $\vec{u}'$ на оси x', y', z' в K'-системе. Тогда из (8.1) следует, что связи между проекциями скоростей тела на оси декартовых координат в системах отсчета K и K' имеют вид:

$$\begin{cases} u'_{x'} = \dfrac{u_x - \upsilon}{1 - \dfrac{\upsilon\, u_x}{c^2}}; \\ u'_{y'} = \dfrac{u_y\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{\upsilon\, u_x}{c^2}}; \\ u'_{z'} = \dfrac{u_z\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{\upsilon\, u_x}{c^2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x = \dfrac{u'_{x'} + \upsilon}{1 + \dfrac{\upsilon\, u'_{x'}}{c^2}}; \\ u_y = \dfrac{u'_{y'}\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{\upsilon\, u'_{x'}}{c^2}}; \\ u_z = \dfrac{u'_{z'}\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{\upsilon\, u'_{x'}}{c^2}}; \end{cases} \tag{8.4}$$

Если тело движется параллельно оси x (и x' соответственно), то есть $\vec{u} = \{u_x, 0, 0\}$ и $\vec{u}' = \left\{u'_{x'}, 0, 0\right\}$, то закон сложения скоростей (8.4) упрощается и принимает вид:

$$u' = \frac{u - \upsilon}{1 - \dfrac{\upsilon\, u}{c^2}}; \qquad u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \dfrac{\upsilon\, u'}{c^2}}, \tag{8.5}$$

где υ_x – проекция скорости тела на ось x в K-системе, υ'_x – проекция скорости тела на ось x' в K'-системе, υ – скорость движения K'-системы относительно K-системы.

Д) *Связь пространства и времени*:

Точки пространства в релятивистской механике характеризуются 4 координатами (x, y, z, t) и называются *событиями*. Сумма всех событий была названа «мир», а путь какой-либо частицы в пространстве-времени – ее «мировой линией».

Пространственно-временной интервал между двумя событиями:

$$\Delta S = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}, \tag{8.6}$$

где x, y, z – пространственные координаты события, а t – его временная координата. Иначе выражение для интервала можно записать:

$$\Delta S = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - l^2}, \tag{8.7}$$

где Δt – промежуток времени между событиями, l – расстояние в пространстве между точками, в которых произошли события.

Интервал – величина инвариантная, то есть не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Виды интервалов:

а) нулевой; соответствует случаю $c\Delta t = l$. Разделяет посылку и прием светового сигнала;

б) действительный (или времениподобный); соответствует случаю $c\Delta t > l$. Разделяет события, которые могут быть связаны причинно-следственной связью. Их последовательность одинакова во всех системах отсчета, и ни в одной системе они не могут происходить одновременно;

в) мнимый (или пространственноподобный); соответствует случаю $c\Delta t < l$. Разделяет события, которые настолько удалены, что не могут повлиять друг на друга. Их последовательность произвольна в разных системах отсчета, но ни в одной системе эти события не могут происходить в одной и той же точке пространства.

Релятивистские масса и импульс. Взаимосвязь массы и энергии

Эйнштейн показал, что масса тела зависит от его скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{8.8}$$

где m_0 – масса тела в той системе отсчета, где тело покоится (масса покоя); m – масса тела в той системе, относительно которой тело движется;

υ – скорость тела относительно системы отсчета, в которой определяется масса m.

Релятивистский импульс:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}, \tag{8.9}$$

где m – релятивистская масса, то есть

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{8.10}$$

Закон взаимосвязи массы и энергии:

$$E = mc^2, \tag{8.11}$$

где E – полная энергия материального объекта, m – релятивистская масса.

Полная энергия объекта – это сумма его энергии покоя и кинетической энергии, таким образом кинетическая энергия объекта:

$$E_{\text{к}} = E - E_0, \tag{8.12}$$

где $E = mc^2$ – полная энергия; $E_0 = m_0c^2$ – энергия покоя.

Из закона взаимосвязи массы и энергии следует, что всякое изменение массы тела на Δm сопровождается изменением его энергии на ΔE:

$$\Delta E = \Delta mc^2. \tag{8.13}$$

Полная энергия тела связана с его релятивистским импульсом соотношением:

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2. \tag{8.14}$$

Отсюда следует, что величина $E^2 - p^2c^2 = inv$, то есть инвариантна по отношению к переходу из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Контрольные вопросы

1. Что является элементами мира в СТО?

2. Почему понятие «одновременность» в СТО относительно?

3. Как меняется интервал времени между событиями при увеличении скорости движения событий?

4. Как меняется размер тела при изменении скорости движения тела?

5. Что вы можете сказать о событиях, которые разделены а) времениподобным, б) пространственноподобным, в) светоподобным интервалами?

6. Что такое инвариантная величина? Приведите примеры таких величин в классической и релятивистской механике.

7. В чем отличие между массой и массой покоя тела? Какая из них больше и в каком случае? Могут ли эти два понятия обозначать одно и то же?

8. Что такое полная энергия объекта? От чего она зависит и как связана с другими видами энергии?

9. Чем релятивистский импульс отличается от классического и в чем их сходство?

10. Можно ли попасть в прошлое или будущее с точки зрения физики? Как это путешествие во времени может выглядеть?

11. Как объяснить невозможность изменить события прошлого с точки зрения СТО?

Задачи для аудиторных занятий

I уровень

8.1. Длина тела уменьшилась в 2 раза вследствие его движения. Как при этом изменилась масса этого тела?

8.2. Выберите все правильные утверждения относительно энергии покоя тела:

а) в энергию покоя входит потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле;

б) в энергию покоя входят все виды энергии тела;

в) энергия покоя – это энергия тела, измеренная в системе отсчета, относительно которой тело покоится;

г) энергия покоя рассчитывается по формуле $E_0 = m_0c^2$.

8.3. Выберите все правильные утверждения относительно полной энергии тела:

а) полная энергия рассчитывается по формуле $E = mc^2$;

б) в полную энергию тела входят все виды энергии;

в) в полную энергию тела не входит потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле;

г) полная энергия – это сумма кинетической и потенциальной энергии тел.

8.4. Выберите все правильные формулировки второго закона Ньютона в релятивистской механике:

а) $\vec{F} = m\vec{a}$;

б) $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$;

в) $\vec{F} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$;

г) $\vec{F} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)$;

д) второй закон Ньютона в релятивистской механике неприменим.

8.5. Выберите все правильные утверждения относительно кинетической энергии тела, движущегося со скоростью, близкой к скорости света:

а) рассчитывается по формуле $E_к = \dfrac{mv^2}{2}$;

б) рассчитывается по формуле $E_к = mc^2 - m_0c^2$;

в) может быть найдена по формуле $E_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$;

г) равна разности полной энергии тела и его энергии покоя.

8.6. Выберите все правильные утверждения относительно выражения $\Delta E = \Delta mc^2$:

а) устанавливает взаимосвязь массы и энергии;

б) говорит о возможном взаимном превращении массы в энергию и наоборот;

в) говорит, что всякое изменение массы тела сопровождается пропорциональным изменением энергии;

г) не имеет физического смысла.

II уровень

8.7. Определите собственную длину стержня, если в системе отсчета K его скорость составляет $0{,}6 \cdot c$, длина стержня равна 1,5 м, а угол между стержнем и направлением его движения равен 30°.

8.8. С какой скоростью должен двигаться квадрат параллельно одной из сторон, чтобы его площадь уменьшилась в 2 раза?

8.9. Прямоугольный треугольник, у которого каждый катет имеет длину 1 м, движется со скоростью $0{,}8 \cdot c$ вдоль оси x неподвижной системы отсчета K. При этом катеты треугольника ориентированы вдоль осей x и y K-системы. Определите периметр и площадь треугольника, определенные наблюдателем в системе K.

8.10. В K-системе отсчета в точках с координатами x_1 и $x_2 = x_1 + L$ одновременно происходят события 1 и 2 соответственно, причем $L = 1{,}4$ км. Определите: а) расстояние L' между точками, в которых происходят эти события в K'-системе отсчета, которая движется со скоростью $0{,}6 \cdot c$ в отрицательном направлении оси x; б) время между этими событиями, фиксируемое наблюдателем в K'-системе.

8.11. Два младенца родились на Земле одновременно, но в разных ее точках: один в городе N, другой в городе S. Определите разность в возрасте этих младенцев с точки зрения наблюдателя, пролетавшего мимо Земли со скоростью $v = 0{,}97 \cdot c$. Расстояние между городами N и S составляет 3000 км. Считайте, что наблюдатель двигался вдоль прямой, соединяющей эти города. Кривизной поверхности Земли пренебречь.

8.12. Мюоны, рождаясь в верхних слоях атмосферы при скорости $0{,}995 \cdot c$, пролетают до распада расстояние 6 км. Определите: а) время жизни мюона для наблюдателя на Земле; б) собственное время жизни мюона.

8.13. Две ракеты движутся навстречу друг другу с одинаковыми относительно неподвижного наблюдателя скоростями $0{,}6 \cdot c$. Определите скорость сближения ракет а) с точки зрения классической механики; б) с точки зрения специальной теории относительности.

8.14. Воспользовавшись тем, что интервал является инвариантной величиной по отношению к преобразованиям координат, определите расстояние, которое пролетел π-мезон с момента рождения до распада, если время его жизни в этой системе отсчета 4,4 мкс, а собственное время жизни 2,2 мкс.

8.15. Могут ли быть причинно связаны события, произошедшие в мировых точках с координатами:

а) $x_1 = 2$ м; $y_1 = 3$ м; $z_1 = 5$ м; $t_1 = 0$ нс

и $x_2 = 10$ м; $y_2 = 9$ м; $z_2 = 5$ м; $t_2 = 40$ нс;

б) $x_1 = 100$ м; $y_1 = 300$ м; $z_1 = 0$; $t_1 = 1$ мкс

и $x_2 = 700$ м; $y_2 = 1100$ м; $z_2 = 0$; $t_2 = 4$ мкс;

8.16. Может ли событие, произошедшее в Омске, быть причиной события, произошедшего в Москве, если одно событие произошло после другого спустя время:

а) 1 мс;

б) 10 мс;

в) 10 с?

Расстояние по прямой от Москвы до Омска 2235 км.

8.17. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его полная энергия была втрое больше его энергии покоя?

8.18. Определите релятивистский импульс и кинетическую энергию протона, движущегося со скоростью, составляющей 75 % от скорости света.

8.19. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы его скорость составила 90 % скорости света?

8.20. Определите релятивистский импульс электрона, кинетическая энергия которого равна 1 ГэВ.

III уровень

8.21. Покажите, что для частицы величина $E^2 - p^2c^2$ есть инвариант, то есть имеет одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета. Каково значение этого инварианта?

8.22. Частица движется в K-системе со скоростью $0{,}98 \cdot c$ под углом 45° к оси x. Определите: а) ее скорость в системе отсчета K', движущейся со скоростью $0{,}4 \cdot c$ относительно системы K в положительном направлении оси x, если оси x и x' совпадают; б) угол, под которым летит частица к оси x'.

Индивидуальное домашнее задание

Следствия постулатов СТО

8.23. На сколько процентов меньше скорости света должна быть скорость тела, чтобы его продольный размер уменьшился в 3 раза?

8.24. Чему равно относительное приращение длины стержня, если ему сообщить скорость $0{,}8 \cdot c$ в направлении, образующем с осью покоящегося стержня угол 60°?

8.25. В системе K', относительно которой стержень покоится, он имеет длину 1 м и образует с осью x' угол 45°. Определить в системе K длину стержня и угол, который стержень образует с осью x. Относительная скорость движения систем равна $0{,}9 \cdot c$.

8.26. Суммарная площадь поверхности неподвижного тела, имеющего форму куба, равна S_0. Чему равна площадь поверхности этого же тела, если оно движется в направлении, параллельном одному из своих ребер, со скоростью $0{,}968 \cdot c$?

8.27. Имеются две системы отсчета K и K', относительная скорость которых неизвестна. Параллельный оси x' стержень, движущийся относительно системы K' со скоростью $v' = 0{,}2 \cdot c$, имеет в этой системе длину 10 м. В системе K длина стержня 9 м. Найти скорость стержня в системе K и относительную скорость систем.

8.28. Стержень движется вдоль линейки с постоянной скоростью. Если зафиксировать положение обоих концов стержня одновременно в системе отсчета, связанной с линейкой, то разность отсчетов по линейке равна 4 м. Если положение обоих концов зафиксировать одновременно в системе отсчета, связанной со стержнем, то разность отсчетов по той же линейке – 9 м. Чему равны собственная длина стержня и его скорость относительно линейки?

8.29. Сколько процентов от скорости света составляет относительная скорость двух частиц, движущихся навстречу друг другу со скоростями $0{,}8 \cdot c$ и $0{,}7 \cdot c$?

8.30. Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями $0{,}75 \cdot c$ по отношению к лабораторной системе отсчета. Найти их относительную скорость.

8.31. Стержень пролетает с постоянной скоростью мимо метки, неподвижной в K-системе отсчета. Время пролета 20 нс (в K-системе). В системе же отсчета K', связанной со стержнем, метка движется вдоль него в течение 25 нс. Найдите собственную длину стержня.

8.32. Покоящийся прямой конус имеет угол полураствора $45°$ и площадь боковой поверхности 4 м^2. Найти в системе отсчета, движущейся со скоростью $0{,}8 \cdot c$ вдоль оси конуса, площадь его боковой поверхности.

8.33. Определите периметр квадрата со стороной L, движущегося со скоростью, составляющей 80 % от скорости света, параллельно одной из своих сторон.

8.34. Относительно K-системы отсчета летит куб со скоростью $0{,}9 \cdot c$. Собственная длина ребра куба равна 1 м. Направление движения параллельно одному из ребер. Чему равен объем куба в K-системе?

8.35. Стержень движется в продольном направлении с постоянной скоростью v относительно инерциальной системы отсчета. При каком значении v длина стержня в этой системе отсчета будет на 0,5 % меньше его собственной длины?

8.36. Имеется треугольник, собственная длина каждой стороны которого 1 м. Найдите периметр этого треугольника в системе отсчета, движущейся относительно него с постоянной скоростью $0{,}9 \cdot c$ параллельно одной из его сторон.

8.37. Имеется треугольник, собственная длина каждой стороны которого 1 м. Найдите периметр этого треугольника в системе отсчета, движущейся относительно него с постоянной скоростью $0,9 \cdot c$ параллельно одной из его биссектрис.

8.38. В K-системе отсчета мюон, движущийся со скоростью $0,975 \cdot c$, пролетел от места своего рождения до точки распада расстояние 3 км. Определите собственное время жизни этого мюона.

8.39. Две частицы, двигавшиеся в лабораторной системе отсчета по одной прямой с одинаковой скоростью $0,9 \cdot c$, попали в неподвижную мишень с интервалом времени 50 нс. Найти собственное расстояние между частицами до попадания в мишень.

8.40. На сколько процентов скорость звездолета меньше скорости света, если один год в кабине звездолета соответствует пяти годам, прошедшим на Земле?

8.41. Сколько процентов от скорости света составляет скорость частицы, если собственное время жизни частицы меньше релятивистского в 3 раза?

8.42. Во сколько раз увеличивается продолжительность существования нестабильной частицы (по часам неподвижного наблюдателя), если она движется со скоростью, составляющей 99 % скорости света?

8.43. С какой скоростью должна лететь частица относительно системы K для того, чтобы промежуток собственного времени был в 10 раз меньше промежутка, отсчитанного по часам системы K?

8.44. За промежуток времени 1,0 с, отсчитанный по часам некоторой системы отсчета K, частица, двигаясь прямолинейно и равномерно, переместилась из начала координат в точку с координатами $x = y = z = 1,5 \cdot 10^8$ м. Найти промежуток собственного времени частицы, за который произошло это перемещение.

8.45. Собственное время жизни нестабильной частицы 10 нс. Найти путь, который пролетит эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни 20 нс.

8.46. Собственное время жизни нестабильной частицы равно 2,00 мкс. Считая движение частицы прямолинейным и равномерным, определить путь, который она пройдет до распада в системе отсчета, в которой время жизни частицы равно 2,24 мкс.

8.47. Собственное время жизни нестабильного мюона 2,2 мкс. Определить время жизни мюона в системе отсчета, в которой он проходит до распада путь 30 км. Считая движение мюона прямолинейным и равномерным, найдите скорость мюона.

8.48. С какой скоростью двигались в K-системе отсчета часы, если за время 5 с (в K-системе) они отстали от часов этой системы на 0,1 с?

8.49. Собственное время жизни некоторой частицы оказалось равным 1 мкс. Чему равен интервал между рождением и распадом этой частицы?

8.50. Определить интервал, разделяющий два события с координатами $x_1 = 5$ м; $y_1 = 0$; $z_1 = 0$; $t_1 = 1$ нс и $x_2 = 4$ м; $y_2 = 0$; $z_2 = 0$; $t_2 = 4$ нс. Могут ли эти события быть причинно связаны друг с другом?

8.51. Найдите интервал, разделяющий два события, произошедшие в мировых точках с координатами $x_1 = 5$ м; $x_2 = 3$ м; $y_1 = 4$ м; $y_2 = 2$ м; $z_1 = z_2 = 0$; $t_1 = 10$ нс; $t_2 = 20$ нс. Определите вид этого интервала.

8.52. Два события произошли в K-системе отсчета в мировых точках с координатами $x_1 = 5$ м; $y_1 = z_1 = 0$; $t_1 = 10$ нс и $x_2 = 2$ м; $y_2 = 4$ м; $z_2 = 0$; $t_2 = 20$ нс. Можно ли найти систему отсчета, в которой эти события происходят: а) в один момент времени; б) в одной точке пространства?

Релятивистские масса и импульс. Энергия

8.53. Куб с длиной ребра 1 м изготовлен из материала с плотностью $5000\ \text{кг}/\text{м}^3$. Чему будет равна плотность куба в системе отсчета, относительно которой он движется параллельно одной из сторон со скоростью $0{,}8 \cdot c$?

8.54. С какой скоростью движется частица, если ее масса в три раза больше массы покоя?

8.55. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его масса равнялась массе покоящегося протона?

8.56. Скорость частицы $30\ \text{Мм}/\text{с}$. На сколько процентов масса движущейся частицы больше ее массы покоя?

8.57. Чему равна плотность стального кубика с точки зрения наблюдателя, движущегося вдоль одного из его ребер со скоростью $0{,}75 \cdot c$?

8.58. Плотность покоящегося тела равна ρ_0. Найдите скорость системы отсчета относительно данного тела, при которой его плотность ρ будет на 25 % больше, чем ρ_0.

8.59. Отношение заряда движущегося электрона к его массе, определенное экспериментально, составляет $0{,}88 \cdot 10^{11}\ \text{Кл}/\text{кг}$. Определите массу движущегося электрона и его скорость.

8.60. При какой скорости движения тела погрешность при вычислении его импульса по ньютоновской формуле $p = m_0 v$ не превышает 10 %?

8.61. Найдите скорость релятивистского электрона, импульс которого равен $2{,}7 \cdot 10^{-21}\ \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$.

8.62. При скорости частицы v_0 ее импульс равен p_0. Во сколько раз нужно увеличить скорость частицы, чтобы ее импульс удвоился?

8.63. Найдите скорость, при которой релятивистский импульс частицы в 2 раза превышает ее ньютоновский импульс.

8.64. Энергия покоя частицы равна E_0. Чему равна полная энергия частицы E в системе отсчета, в которой импульс частицы равен p?

8.65. Кинетическая энергия электрона составляет 0,8 МэВ. Определите импульс этого электрона.

8.66. Кинетическая энергия протона составляет 800 МэВ. Определите его массу.

8.67. Протон движется с импульсом 10 ГэВ$/c$ (где c – скорость света). На сколько процентов отличается скорость этого протона от скорости света?

8.68. Вычислите импульс протона с кинетической энергией 500 МэВ.

8.69. При какой скорости частицы ее кинетическая энергия равна энергии покоя?

8.70. Кинетическая энергия электрона составляет 10 МэВ. Во сколько раз его масса больше массы покоя? Сделайте такой же подсчет для протона.

8.71. Во сколько раз масса протона больше массы электрона, если обе частицы имеют одинаковую кинетическую энергию 1 ГэВ?

8.72. Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой покоя m_0 от $0{,}6 \cdot c$ до $0{,}8 \cdot c$? Сравните полученный результат со значением, вычисленным по классической формуле.

8.73. При каких значениях отношения кинетической энергии частицы к ее энергии покоя относительная погрешность нахождения скорости частицы по классической формуле не превышает 10 %?

8.74. Какую работу нужно совершить, чтобы сообщить покоящемуся нейтрону скорость, равную:

а) $0{,}5 \cdot c$;

б) $0{,}99 \cdot c$?

8.75. Сколько процентов от скорости света составляет скорость частицы, если ее кинетическая энергия в 2 раза больше энергии покоя?

8.76. На сколько процентов скорость частицы меньше скорости света, если ее полная энергия в 5 раз больше энергии покоя?

8.77. Во сколько раз кинетическая энергия частицы отличается от ее энергии покоя при движении частицы со скоростью $0{,}99 \cdot c$?

8.78. В момент вылета из ускорителя ядро выбросило β-частицу со скоростью $0{,}75 \cdot c$ относительно ускорителя. Найти кинетическую энергию этой β-частицы в системе отсчета, связанной с ускорителем.

8.79. При какой скорости частицы ее полная энергия в 1,5 раза больше кинетической?

8.80. При какой скорости движения тела погрешность при вычислении его кинетической энергии по классической формуле не превышает 5 %?

8.81. Найти кинетическую энергию одного протона в системе отсчета, связанной с другим, если эти протоны вылетели из ускорителя навстречу друг другу со скоростями $0{,}82 \cdot c$ и $0{,}85 \cdot c$ относительно ускорителя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Раздел курса общей физики «Механика» представлен в практикуме следующими темами: кинематика материальной точки и твердого тела, динамика поступательного и вращательного движения, работа и изменение энергии, законы сохранения в механике, элементы СТО. Практического изучения этих тем достаточно для того, чтобы составить общее впечатление о содержании раздела и овладеть типовыми приемами решения задач. Заинтересованному в более развернутом освоении предмета студенту необходимо обратиться к классическим учебникам и сборникам задач. Несколько достойных представителей этой группы перечислены в списке литературы, но ограничиваться ими совершенно не обязательно.

Следующий раздел курса общей физики, входящий в программу обучения студентов технических вузов, – «Молекулярная физика и термодинамика».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – Москва : Наука, 1979. – Т. 1 : Механика. – 520 с.

2. Савельев, И. В. Курс общей физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. / И. В. Савельев. – 7-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – Т. 1 : Механика. – 2022. – 340 с. – ISBN 978-5-8114-9196-4.

3. Трофимова, Т. И. Курс физики: учеб. пособие для инженер.-техн. специальностей вузов / Т. И. Трофимова. – 7-е изд. – Москва : Высшая школа, 2003. – 542 с. – ISBN 5-06-003634-0.

4. Детлаф, А. А. Курс физики: учеб. пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Высшая школа, 1999. – 718 с. – ISBN 5-06-003556-5.

5. Орир, Дж. Физика Полный курс: примеры, задачи, решения: учеб. / Дж. Орир ; пер. с англ. и науч. ред. Ю. Г. Рудого и А. В. Беркова. – Москва : КДУ, 2011. – 752 с. – ISBN 978-5-98227-366-6.

6. Трофимова, Т. И. Сборник задач по курсу физики: учеб. пособие для студентов втузов / Т. И. Трофимова. – Москва : Высшая школа, 1996. – 303 с. – ISBN 5-06-003395-3.

7. Савельев И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике: учеб. пособие для втузов / И. В. Савельев. – 2-е изд. перераб. – Москва : Наука, 1988. – 288 с. – ISBN 5-02-013851-7.

8. Иродов, И. Е. Сборник задач по общей физике : учеб пособие для втузов / И. Е. Иродов, О. И. Замша ; под ред. И. В. Савельева. – Москва : Наука, 1972. – 256 с.

9. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики: учеб. пособие для втузов / В. С. Волькенштейн. – 11-е изд. – Москва : Наука, 1985. – 381 с.

10. Чертов А. Г. Задачник по физике: учеб. пособие для студентов втузов / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – 6-е изд., испр. – Москва : Интеграл-Пресс, 1997. – 544 с. – ISBN 5-89602-001-5.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

№ вар.	Кинематика материальной точки		Кинематика АТТ	Динамика поступательного движения		Динамика вращательного движения			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2.48	2.78	3.31	4.17	4.47	5.15	5.46	5.76	5.106
2	2.49	2.79	3.32	4.18	4.48	5.16	5.47	5.77	5.107
3	2.50	2.80	3.33	4.19	4.49	5.17	5.48	5.78	5.108
4	2.51	2.81	3.34	4.20	4.50	5.18	5.49	5.79	5.109
5	2.52	2.82	3.35	4.21	4.51	5.19	5.50	5.80	5.110
6	2.53	2.83	3.36	4.22	4.52	5.20	5.51	5.81	5.111
7	2.54	2.84	3.37	4.23	4.53	5.21	5.52	5.82	5.112
8	2.55	2.85	3.38	4.24	4.54	5.22	5.53	5.83	5.113
9	2.56	2.86	3.39	4.25	4.55	5.23	5.54	5.84	5.114
10	2.57	2.87	3.40	4.26	4.56	5.24	5.55	5.85	5.115
11	2.58	2.88	3.41	4.27	4.57	5.25	5.56	5.86	5.116
12	2.59	2.89	3.42	4.28	4.58	5.26	5.57	5.87	5.117
13	2.60	2.90	3.43	4.29	4.59	5.27	5.58	5.88	5.118
14	2.61	2.91	3.44	4.30	4.60	5.28	5.59	5.89	5.119
15	2.62	2.92	3.45	4.31	4.61	5.29	5.60	5.90	5.120
16	2.63	2.93	3.46	4.32	4.62	5.30	5.61	5.91	5.121
17	2.64	2.94	3.47	4.33	4.63	5.31	5.62	5.92	5.122
18	2.65	2.95	3.48	4.34	4.64	5.32	5.63	5.93	5.123
19	2.66	2.96	3.49	4.35	4.65	5.33	5.64	5.94	5.124
20	2.67	2.97	3.50	4.36	4.66	5.34	5.65	5.95	5.125
21	2.68	2.98	3.51	4.37	4.67	5.35	5.66	5.96	5.126
22	2.69	2.99	3.52	4.38	4.68	5.36	5.67	5.97	5.127
23	2.70	2.100	3.53	4.39	4.69	5.37	5.68	5.98	5.128
24	2.71	2.101	3.54	4.40	4.70	5.38	5.69	5.99	5.129
25	2.72	2.102	3.55	4.41	4.71	5.39	5.70	5.100	5.130
26	2.73	2.103	3.56	4.42	4.72	5.40	5.71	5.101	5.131
27	2.74	2.104	3.57	4.43	4.73	5.41	5.72	5.102	5.132
28	2.75	2.105	3.58	4.44	4.74	5.42	5.73	5.103	5.133
29	2.76	2.106	3.59	4.45	4.75	5.43	5.74	5.104	5.134
30	2.77	2.107	3.60	4.46	4.76	5.44	5.75	5.105	5.135

№ вар.	Работа. Мощность. Энергия.				Законы сохранения					СТО	
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	6.54	6.74а	6.75а	6.76а	7.36	7.45	7.73	7.103	7.131	8.23	8.53
2	6.55	6.74б	6.75б	6.76б	7.37а	7.46	7.74	7.104	7.132	8.24	8.54
3	6.56	6.74в	6.75в	6.76в	7.37б	7.47	7.75	7.105	7.133	8.25	8.55
4	6.57	6.74г	6.75г	6.76г	7.37в	7.48	7.76	7.106	7.134	8.26	8.56
5	6.58	6.74д	6.75д	6.76д	7.37г	7.49	7.77	7.107	7.135	8.27	8.57
6	6.59	6.74е	6.75е	6.76е	7.37д	7.50	7.78	7.108	7.136	8.28	8.58
7	6.60	6.74ж	6.75ж	6.76ж	7.38а	7.51	7.79	7.109	7.137	8.29	8.59
8	6.61	6.74з	6.75з	6.76з	7.38б	7.52	7.80	7.110	7.138	8.30	8.60
9	6.62	6.74и	6.75и	6.76и	7.38в	7.53	7.81	7.111	7.139	8.31	8.61
10	6.63	6.74й	6.75й	6.76к	7.38г	7.54	7.82	7.112	7.140	8.32	8.62
11	6.64	6.74к	6.75к	6.76л	7.39а	7.55	7.83	7.113	7.141	8.33	8.63
12	6.65	6.74л	6.75л	6.76м	7.39б	7.56	7.84	7.114	7.142	8.34	8.64
13	6.66	6.74м	6.75м	6.76н	7.39в	7.57а	7.85	7.115	7.143	8.35	8.65
14	6.67	6.74н	6.75н	6.76о	7.39г	7.57б	7.86	7.116а	7.144	8.36	8.66
15	6.68	6.74о	6.75о	6.76п	7.40а	7.58	7.87	7.116б	7.145а	8.37	8.67
16	6.69	6.74п	6.75п	6.76р	7.40б	7.59	7.88	7.117	7.145б	8.38	8.68
17	6.70	6.74р	6.75р	6.76с	7.40в	7.60	7.89	7.118	7.146	8.39	8.69
18	6.71	6.74с	6.75с	6.76т	7.40г	7.61	7.90	7.119	7.147	8.40	8.70
19	6.72	6.74т	6.75т	6.76у	7.41а	7.62	7.91	7.120а	7.148	8.41	8.71
20	6.73	6.74у	6.75у	6.76а	7.41б	7.63	7.92	7.120б	7.149	8.42	8.72
21	6.54	6.74ф	6.75ф	6.76б	7.41в	7.64	7.93	7.121	7.150	8.43	8.73
22	6.55	6.74х	6.75х	6.76в	7.41г	7.65	7.94	7.122	7.151	8.44	8.74а
23	6.56	6.74ц	6.75ц	6.76г	7.42а	7.66а	7.95	7.123	7.152	8.45	8.74б
24	6.57	6.74ч	6.75ч	6.76д	7.42б	7.66б	7.96	7.124	7.153	8.46	8.75
25	6.58	6.74ш	6.75ш	6.76е	7.43а	7.67	7.97	7.125	7.154	8.47	8.76
26	6.59	6.74щ	6.75щ	6.76ж	7.43б	7.68	7.98	7.126	7.155	8.48	8.77
27	6.60	6.74ы	6.75ы	6.76з	7.43в	7.69	7.99	7.127	7.156	8.49	8.78
28	6.61	6.74э	6.75э	6.76и	7.44а	7.70	7.100	7.128	7.157	8.50	8.79
29	6.62	6.74ю	6.75ю	6.76к	7.44б	7.71	7.101	7.129	7.158	8.51	8.80
30	6.63	6.74я	6.75я	6.76л	7.44в	7.72	7.102	7.130	7.159	8.52	8.81

ОТВЕТЫ

1.1. а) 60 м/с; б) 20 м/с; в) 0 м/с; г) 59 м/с; д) 0 м/с; е) 86 км/ч; ж) 94 км/ч; з) 3 км/ч.

1.2. а) 8 с; б) 6 с; в) $\frac{\pi}{12}$ с; г) 6 с; д) 4 с; е) 19 ч; ж) 4 ч; з) 3 с.

1.3. а) 2 с; б) 1 с; в) 0,25 с; г) 10 с; д) от 0 до 0,75 с.

1.4. а) 18 м/с^2, ≈ 12 кН; б) 1,125 м/с^2, 747 Н; в) 14 м/с^2, ≈ 9,3 кН; г) 9,5 м/с^2, ≈ 6,3 кН.

1.5. 1,6 рад/с, 10 с.

1.6. а) 0,8 А; б) 2 А; в) 21 А; г) ≈ 46 А.

1.7. ≈ 3,2 Н.

1.8. 10 Н.

1.9. а) 0 Н; б) 3 Н.

1.10. 5 Н.

2.1. $\upsilon_{0x} = 6$, $a_{0x} = -14$.

2.2. $a_{0x} = -20$.

2.6. $S = 4$ м, $|\Delta\vec{r}| = 2$ м.

2.9. $\upsilon_1 = 7$ м/с, $\upsilon_2 = 11{,}4$ м/с.

2.11. $\langle\upsilon\rangle = 0{,}5$ м/с.

2.12. $\vec{r} = 10\vec{\imath} + 4\vec{k}$, $r \approx 10{,}8$ м.

2.13. 81 м.

2.14. $\Delta\vec{r} = 300\vec{\imath} + 400\vec{\jmath}$, $|\Delta\vec{r}| = 500$ м.

2.15. $S = 25$ м.

2.16. $\upsilon_x \approx 2{,}78$ м/с, $a_x \approx -2{,}18$ м/с^2.

2.19. $\vec{\upsilon} \approx -5{,}44\vec{\imath} + 12{,}6\vec{\jmath}$, $\upsilon \approx 13{,}7$ м/с, $\vec{a} \approx 42{,}0\vec{\imath} + 40{,}8\vec{\jmath}$, $a \approx 58{,}6$ м/с^2.

2.20. $\Delta\vec{r} = \vec{\imath} + 9\vec{\jmath}$, $\upsilon \approx 12{,}0$ м/с.

2.21. $\Delta\vec{\upsilon} = 24\vec{\imath}$, $a = 12$ м/с^2.

2.22. $3\pi/4$.

2.23. $\Delta\vec{\upsilon} = 12\vec{\imath} + 44\vec{k}$, $a \approx 12{,}6$ м/с^2.

2.24. $\upsilon \approx 36{,}0$ м/с, $\Delta\vec{a} = 180\vec{k}$.

2.25. $\upsilon \approx 6{,}71$ м/с, $a \approx 8{,}49$ м/с^2.

2.26. $\vec{\upsilon} = 16\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, $\upsilon \approx 16{,}3$ м/с, $\vec{a} = 8\vec{\imath}$.

2.27. $\vec{\upsilon} = 6\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, $\vec{a} = 6\vec{\imath}$, $a = 6$ м/с^2.

2.28. $a_y \approx 18$ м/с^2, $\upsilon \approx 36{,}2$ м/с.

2.29. $\upsilon \approx 8{,}25$ м/с, $\Delta\vec{r} = 6\vec{\imath} + \frac{112}{3}\vec{\jmath}$.

2.30. $a_\tau \approx -0{,}896$ м/с^2, $S \approx 9{,}94$ см.

2.31. $\upsilon \approx 14{,}1$ м/с, $a = 10$ м/с^2, $a_\tau \approx 7{,}07$ м/с^2, $a_n \approx 7{,}07$ м/с^2.

2.32. $\upsilon = 2{,}5$ м/с, $a_n = 12{,}5$ м/с^2.

2.34. $S = 8$ м, $|\Delta\vec{r}| \approx 6{,}73$ м.

2.35. $a_\tau = 2$ м/с^2, $a_n = 1$ м/с^2.

2.36. $N \approx 8$ оборотов.

2.37. $\upsilon = 7$ м/с, $a_\tau \approx 8{,}49$ м/с^2.

2.38. $\upsilon_0 = 20$ м/с, $\upsilon_к \approx 28{,}3$ м/с.

2.39. $\upsilon \approx 36{,}1$ м/с, $a_\tau \approx 5{,}34$ м/с^2, $a_n \approx 8{,}23$ м/с^2.

2.40. $\alpha = 45°$.

2.41. $\Delta\vec{\upsilon} \approx 18{,}7\vec{\jmath} + 6{,}90\vec{k}$, $\vec{r} \approx 16{,}3\vec{\jmath} + 3{,}02\vec{k}$.

2.42. $\upsilon = 50$ м/с, $S = 250$ м.

2.43. $a_\tau = 6$ м/с^2, $a \approx 17{,}1$ м/с^2,
$S = 85$ м.

2.45. $s = 700$ м.

3.6. $\varepsilon = 36$ рад/с^2.

3.10. $T = 0{,}2$ с.

3.11. $\varepsilon = 2$ рад/с^2.

3.12. $a_\tau = 15$ м/с^2.

3.15. $a_\tau = -0{,}06$ м/с^2.

3.16. $\varepsilon \approx 3{,}77$ рад/с^2.

3.17. $\langle\omega\rangle \approx 5{,}33$ рад/с,
$\langle\varepsilon\rangle \approx 6{,}93$ рад/с^2.

3.18. $\Delta t = 15$ с.

3.19. $\omega = 14$ рад/с^2,
$\upsilon = 1{,}4$ м/с, $\varepsilon = 12$ рад/с^2,
$a_\tau = 1{,}2$ м/с^2, $a_n = 19{,}6$ м/с^2.

3.20. $R \approx 6{,}08$ см.

3.21. $\nu \approx 1{,}59$ об/с.

3.22. $\Delta\upsilon = 4$ км/ч.

3.23. $R \approx 1{,}20$ м.

3.24. $t \approx 0{,}780$ с.

3.25. $a_\tau = -0{,}6$ м/с^2.

3.26. а) $\upsilon \approx 465$ м/с,
$a_n \approx 3{,}38$ см/с^2,
б) $\upsilon \approx 267$ м/с,
$a_n \approx 1{,}94$ см/с^2.

3.27. $a_\tau = 2{,}7$ м/с^2, $N \approx 14{,}2$ об.

3.28. $\upsilon = 240$ м/с.

3.29. $\varepsilon \approx 8{,}33$ рад/с^2.

3.30. $\upsilon \approx 37{,}7$ м/с.

4.5. $(16, -14)$; 22,6 м.

4.6. 4 кг·м/с.

4.7. 3,5 Н; 0,81.

4.8. 0,2 м.

4.9. 0,2 Н.

4.10. 0,8 Н; 8 Н; 1,67 с.

4.11. 1,97 Н.

4.12. 63 м.

4.13. а) 6 Н; б) 18 Н; в) 1,5 м/с^2.

4.14. 7,5 м.

4.15. $\upsilon(t) = \dfrac{F}{\mu}\ln\dfrac{m_0}{m_0 - \mu t}$.

4.16. а) 134 м/с; б) 124 м/с.

5.8. 0,7 кг · м^2.

5.9. $-0{,}64$ Н · м.

5.10. 2,88 м/с^2.

5.11. $M = 62{,}8$ Н · м; $N = 120$.

5.12. $a = \frac{2}{3} g \sin\alpha$.

5.13. 5,26 м/с^2.

6.1. 3,5 кДж.

6.2. 90 Дж.

6.3. 500 Дж.

6.4. -6 Дж.

6.5. 8 Дж.

6.6. 0 Дж.

6.7. 20 Н.

6.8. 10 Дж.

6.9. 150 Дж.

6.10. 8 кВт.

6.11. 2 Вт.

6.12. 100 Вт.

6.13. 4 кВт.

6.14. 1000 Вт.

6.15. 5 Вт.

6.16. 3 м/с.

6.17. 12 Дж.

6.18. 2.

6.19. 0,875 Дж.

6.20. 20 м.

6.21. 0.

6.22. 4 Дж.

6.23. 20 м/с.

6.24. 500 кДж.

6.25. 20 Дж.

6.26. $\approx$ 142 кДж.

6.27. 5 Дж.

6.28. а) 7,5 Дж; б) 1,5 Дж.

6.29. а) 20 Дж; б) 10 Дж.

6.30. 355 Дж.

6.31. 54 кДж.

6.32. а) 186 Н, 3220 Дж;
б) 156 Н, 2700 Дж.

6.33. В третьей доске.

6.34. 13,9 м/с.

6.35. 20 м.

6.36. 24 Дж.

6.37. 0,1 Дж.

6.38. 253 Дж.

6.39. 29,43 Дж.

6.40. 2,5 мДж.

6.41. $E_К = 32{,}2$ Дж, $E_П = 39{,}4$ Дж.

6.42. $N = \dfrac{Mgv}{2}$.

6.43. 650 кДж.

6.44. $S = \dfrac{v_0^2 l}{2g(h + \mu\sqrt{l^2 - h^2})}$.

6.45. 1,5 с; 19,1 м.

6.46. $\mu = 0{,}01,\ \eta = 0{,}95$.

6.47. 19 Дж.

6.48. а) 45 мДж; б) 23 мДж.

6.49. $A_F = \dfrac{3mg}{4a}$; $\Delta E_П = \dfrac{mg}{2a}$.

6.50. 190 Н/м.

6.51. $\geq 6{,}16 \cdot 10^5$ м/с.

6.52. 10 м/с^2.

6.53. 0,3 Дж.

7.10. а) $u_1 = u_2 = 0{,}4$ м/с; б)
$u_1 = 5{,}2$ м/с; $u_2 = 0{,}8$ м/с.

7.11. $u_1 = u_2 = 1{,}44$ м/с.

7.12. 0,72 м/с.

7.13. 2 м/с.

7.14. $v = \sqrt{\dfrac{gL}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)\sin 2\alpha}}$.

7.15. 2.

7.16. на 2 с$^{-1}$.

7.17. 17,5 м/с.

7.18. 5,48 м/с.

7.19. а) $5 \cdot 10^3$ км; б) $22{,}9 \cdot 10^3$ км.

7.20. 11,3 км/с.

7.21. 5 м.

7.22. 3,16 рад/с; 9,49 м/с.

7.23. 15,7 м/с.

7.24. 450 м/с.

7.25. 505 м/с.

7.26. 590 м/с.

7.27. а) $\varphi_1 = \varphi_2 = 14°$;
б) $\varphi_1 = \varphi_2 = 29°$

7.28. $\varphi_1 = 7°$; $\varphi_2 = 21{,}6°$.

7.29. 55,8 рад/с.

7.30. 0,1875 Дж.

7.31. $\arcsin\left(\dfrac{m_2}{m_1}\right)$.

7.32. $H = \dfrac{gt_1(t_1 + 2t_2)t_2}{2(2t_1 + t_2)}$.

7.33. $v_0 = u + \dfrac{m}{M}\left(u + \dfrac{4v}{5}\right)$.

7.34. $\cos\beta = 1/9$.

7.35. $a = \dfrac{du}{dt} =$

$= \dfrac{Mg\sin\beta}{M + \dfrac{m}{(\cos\beta)^2}}$, где $\sin\beta = \dfrac{R - r}{L}$.

8.1. Увеличилась в 2 раза.

8.7. 1,79 м.

8.8. $2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

8.9. 2,77 м; 0,3 м^2.

8.10. а) 1,75 км; б) 3,5 мкс.

8.11. 0,04 с.

8.12. а) 20,1 мкс; б) 2 мкс.

8.13. а) $1{,}2 \cdot c$; б) $0{,}882 \cdot c$.

8.14. 1,14 км.

8.15. а) да; б) нет.

8.16. а) нет; б) да; в) да.

8.17. $0{,}943 \cdot c$.

8.18. $5{,}68 \cdot 10^{-19}$ кг · м/с;
$7{,}69 \cdot 10^{-11}$ Дж.

8.19. 1,22 ГВ.

8.20. $5{,}34 \cdot 10^{-19}$ кг · м/с.

8.22. а) $0{,}8 \cdot c$; б) 60°.