

Задачи на региональную студенческую олимпиаду

1. (15 баллов) Три населенных пункта А, В и С, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга, соединены железной дорогой, образующей равносторонний треугольник АВС. Из пунктов А и В одновременно начинают движение два поезда в пункт С. Первый поезд движется равномерно со скоростью v . Второй – с начальной скоростью $\frac{3}{2}v$ и постоянным ускорением, направленным противоположно скорости.

Найдите модуль относительной скорости их движения в пункте С, если они прибывают в него одновременно.

2. (30 баллов) Рассчитать силу отдачи струи водонапорного шланга, подключенного к электронасосу, находящемуся на глубине 5 м. Мощность потребления насоса 1 кВт, КПД 50%. Площадь поперечного сечения отверстия шланга 5 см². Трением воды пренебречь.

3. (20 баллов) Фигура Лиссажу. Ко входам осциллографа «Х» и «Y» подключены два генератора звуковых колебаний, выходные напряжения которых описываются уравнениями:

$$\begin{aligned}U_x &= U_{x \max} \sin(\pi t) \\ U_y &= U_{y \max} \sin(2\pi t),\end{aligned}$$

где амплитуды напряжений $U_{x \max} = 4$ В и $U_{y \max} = 1$ В, коэффициент усиления осциллографа $k_x = 1$ В/дел и $k_y = 0,5$ В/дел. Найдите уравнение кривой на экране осциллографа и постройте ее график.

4. (15 баллов) Рассчитать потерю энергии Солнцем за год вследствие излучения электромагнитных волн, если максимум энергии излучения поверхности Солнца приходится на электромагнитное излучение с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм. Радиус Солнца $R = 7 \cdot 10^8$ м. Считать энергетическую светимость поверхности Солнца однородной величиной.

5. (20 баллов) Лабораторная работа.

Цель работы: определить массу образца. Оценить погрешность измерения с доверительной вероятностью 0,9.

Материалы и принадлежности: деревянный образец, миллиметровая линейка, мензурка с водой.

Задачи на региональную студенческую олимпиаду с решениями

1. (15 баллов) Три населенных пункта А, В, С, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга, соединены железной дорогой, образующей равносторонний треугольник АВС. Из пунктов А и В одновременно начинают движение два поезда в пункт С. Первый поезд движется равномерно со скоростью v . Второй - с начальной скоростью $\frac{3}{2}v$ и постоянным ускорением, направленным противоположно скорости.

Найдите модуль относительной скорости их движения в пункте С, если они прибывают в него одновременно.

Дано:

$$v_1 = v$$

$$v_{02} = \frac{3}{2}v$$

Найти:

$$\Delta v - ?$$

Решение:

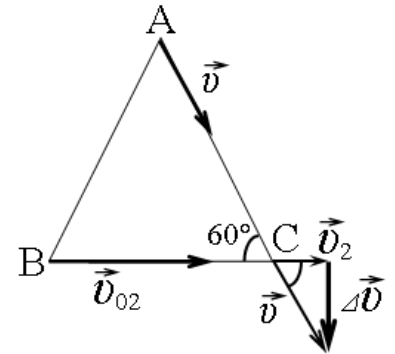
Движение по АС равномерное, поэтому

$$AC = v \cdot t, \quad (1)$$

где t – время движения.

Движение по ВС с постоянным ускорением, поэтому

$$BC = v_{02}t - \frac{at^2}{2} \text{ и } v_2 = v_{02} - at, \quad (2)$$



где v_2 – скорость второго поезда в пункте С.

$$BC = \left(v_{02} - \frac{at}{2} \right) t = \left(v_{02} + \frac{v_2 - v_{02}}{2} \right) t = \frac{v_{02} + v_2}{2} t. \quad (3)$$

AC = BC, т.к. треугольник равносторонний. Тогда

$$vt = \frac{v_{02} + v_2}{2} t, \quad (4)$$

откуда получаем, что

$$2v = v_{02} + v_2, \quad (5)$$

$$2v - \frac{3}{2}v = v_2, \quad (6)$$

$$v_2 = \frac{v}{2}. \quad (7)$$

Относительная скорость движения поездов равна

$$\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_2. \quad (8)$$

По теореме косинусов найдем

$$\Delta v = \sqrt{v^2 + v_2^2 - 2vv_2 \cos 60^\circ} = v \sqrt{1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} v. \quad (9)$$

Ответ: $\Delta v = \frac{\sqrt{3}}{2} v$.

2. (30 баллов) Рассчитать силу отдачи струи водонапорного шланга, подключенного к электронасосу, находящемуся на глубине 5 м. Мощность потребления насоса 1 кВт, КПД 50%. Площадь поперечного сечения отверстия шланга 5 см². Трением воды пренебречь.

Дано:

$$h = 5 \text{ м}$$

$$S = 5 \text{ см}^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$P = 1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт}$$

$$\eta = 0,5$$

Найти:

$$F - ?$$

Решение:

$$F = \frac{dp}{dt}, \quad (1)$$

где $dp = dm \cdot v$ – импульс, переданный шлангу за время dt выхода воды массой m со скоростью $v = \frac{dx}{dt}$. Учитывая, что $dm = \rho S dx$, а

плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, получим

$$F = \frac{dm}{dt} v = \frac{dx}{dt} S \rho v = S \rho v^2 \quad (2)$$

Найдем скорость струи. За время dt насос совершает полезную работу $dA = \eta P dt$. Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии и сообщение кинетической энергии массе жидкости dm :

$$dA = dmgh + \frac{dmv^2}{2} = \rho S dx \left(gh + \frac{v^2}{2} \right) = \eta P dt. \quad (3)$$

Из (3) следует, что

$$\eta P = \rho S v \left(gh + \frac{v^2}{2} \right). \quad (4)$$

Записывая все величины в СИ, получим уравнение:

$$v(100 + v^2) = 2000. \quad (5)$$

В (5) ускорение свободного падения принято $g = 10 \text{ м/с}^2$. Введем $u = \frac{v}{10}$ – скорость струи в десятках м/с, тогда из (5) следует, что

$$u(1 + u^2) = 2. \quad (6)$$

Из (6) получим кубическое уравнение на u :

$$u^3 + u - 2 = 0. \quad (7)$$

Решим уравнение (7).

Примечание: возможно решение уравнения (7) графическим способом.

$$u^3 - u + 2u - 2 = 0, \quad (8)$$

$$u(u^2 - 1) + 2(u - 1) = 0, \quad (9)$$

$$(u - 1)(u(u + 1) + 2) = 0, \quad (10)$$

$$(u - 1)(u^2 + u + 2) = 0. \quad (11)$$

Выражение (11) обращается в ноль только при условии $u = 1$, т.к. вторая скобка не равна нулю. Тогда $v = 10$ м/с и, подставляя это результат в (2), получим значение силы отдачи $F = 50$ Н.

Ответ: $F = 50$ Н.

3. (20 баллов) Фигура Лиссажу. Ко входам осциллографа «Х» и «Y» подключены два генератора звуковых колебаний, выходные напряжения которых описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} U_x &= U_{x \max} \sin(\pi t) \\ U_y &= U_{y \max} \sin(2\pi t), \end{aligned}$$

где амплитуды напряжений $U_{x \max} = 4 \text{ В}$ и $U_{y \max} = 1 \text{ В}$, коэффициент усиления осциллографа $k_x = 1 \text{ В/дел}$ и $k_y = 0,5 \text{ В/дел}$. Найдите уравнение кривой на экране осциллографа и постройте ее график.

Дано:

$$\begin{aligned} U_x &= U_{x \max} \sin(\pi t) \\ U_y &= U_{y \max} \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

$$U_{x \max} = 4 \text{ В}$$

$$U_{y \max} = 1 \text{ В}$$

$$k_x = 1 \text{ В/дел}$$

$$k_y = 0,5 \text{ В/дел}$$

Найти:

$$f(x, y) - ?$$

Решение:

Пусть x и y – координаты пятна на экране осциллографа (в делениях), тогда

$$x_{\max} = \frac{U_{x \max}}{k_x} = 4, \quad y_{\max} = \frac{U_{y \max}}{k_y} = 2, \quad (1)$$

$$x = 4 \sin(\pi t), \quad y = 2 \sin(2\pi t). \quad (2)$$

Найдем уравнение кривой:

$$y = 2 \sin(2\pi t) = 4 \sin(\pi t) \cos(\pi t) = x \cos(\pi t), \quad (3)$$

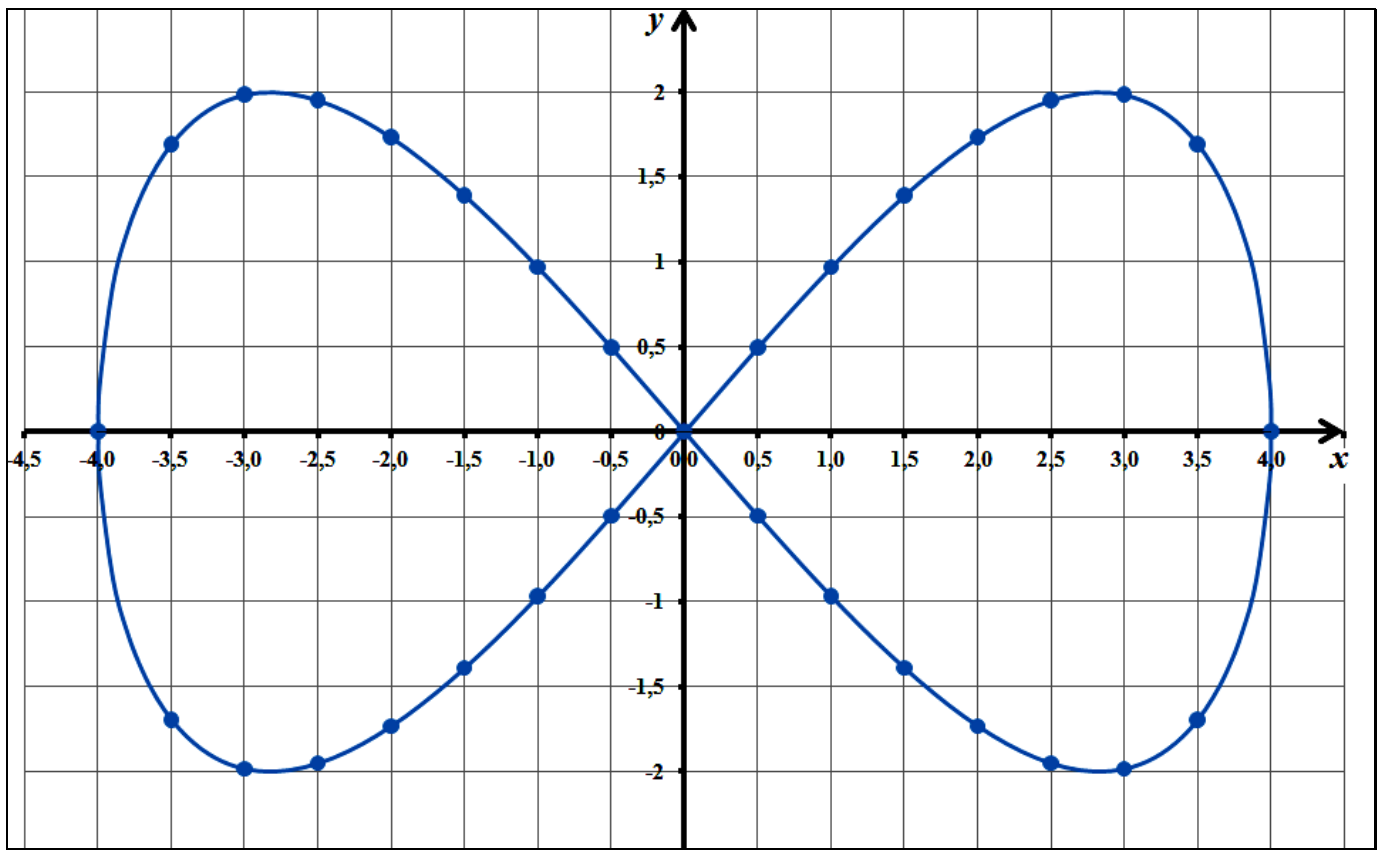
$$y^2 = x^2 \cos^2(\pi t) = x^2(1 - \sin^2(\pi t)) = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{16}\right). \quad (4)$$

$$\boxed{y^2 = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{16}\right)} \text{ – уравнение кривой.} \quad (5)$$

Построим график кривой (5) по точкам:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	0	0,496	0,968	1,39	1,73	1,95	1,98	1,69	0

Ответ: $y^2 = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{16}\right).$



4. (15 баллов) Рассчитать потерю энергии Солнцем за год вследствие излучения электромагнитных волн, если максимум энергии излучения поверхности Солнца приходится на электромагнитное излучение с длиной волны $\lambda_{\max} = 0,5$ мкм. Радиус Солнца $R = 7 \cdot 10^8$ м. Считать энергетическую светимость поверхности Солнца однородной величиной.

Дано:

$$\lambda_{\max} = 0,5 \text{ мкм}$$

$$R = 7 \cdot 10^8 \text{ м}$$

Решение:

Закон смещения Вина:

$$T = \frac{b}{\lambda_{\max}}, \quad (1)$$

где $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ – постоянная Вина, T – средняя температура поверхности Солнца:

Найти:

$E - ?$

$$T = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}}{0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 5800 \text{ К}. \quad (2)$$

Закон Стефана-Больцмана:

$$R_T = \sigma T^4 \quad (3)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$ — постоянная Стефана-Больцмана, R_T – энергетическая светимость единицы поверхности Солнца.

Потерю энергии Солнцем за год можно рассчитать по формуле:

$$E = R_T \cdot S \cdot t = 4\sigma T^4 \pi R^2 t = 4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (5,8)^4 \cdot 10^{12} \cdot 3,14 \cdot 49 \cdot 10^{16} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 125 \cdot 10^{32} \text{ Дж}. \quad (4)$$

$S = 4\pi R^2$ – площадь поверхности Солнца, $t = 365 \cdot 24 \cdot 3600$ – количество секунд в году.

Ответ: $125 \cdot 10^{32}$ Дж.

5. (20 баллов) Лабораторная работа.

Цель работы: определить массу образца. Оценить погрешность измерения с доверительной вероятностью 0,9.

Материалы и принадлежности: деревянный образец, миллиметровая линейка, мензурка с водой.

Ход работы:

1. Получение расчетной формулы.

Если образец плавает на поверхности, то сила Архимеда F_A уравновешена силой тяжести F_T :

$$F_A = \rho g V, \quad (1)$$

где V – объем погруженной в воду части образца, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды, g – ускорение свободного падения.

$$F_T = mg, \quad (2)$$

где m – масса образца. Приравнивая (1) и (2), получаем: $m = \rho V$.

2. Вычисление объема V .

Способ 1. Объем V можно найти по изменению уровня жидкости на шкале мензурки.

Способ 2. Объем V можно найти по формуле объема параллелепипеда $V = abc$, где c – глубина погруженной в воду части образца.

3. Определение погрешности измерения.

Абсолютная погрешность измерения массы образца:

$$\Delta m = \rho \Delta V, \quad (3)$$

где ΔV – абсолютная погрешность измерения объема V .

Примечание: вычисление ΔV должно учитывать случайную и приборную ошибки эксперимента.

Ответ: $m = \langle m \rangle \pm \Delta m$.