

Задачи на региональную студенческую олимпиаду 2017

1. (15 баллов) Полиспаст, состоящий из трёх блоков, соединён тросом с валом ворота диаметром $d = 4$ см, приводимым в движение рукоятью с плечом $b = 20$ см (рис. 1). Усилие, которое может приложить человек в направлении, перпендикулярном рукоятки, равно $F = 98$ Н. Пренебрегая силами трения, рассчитайте массу груза, который может поднимать человек с помощью такого механизма с постоянной скоростью.

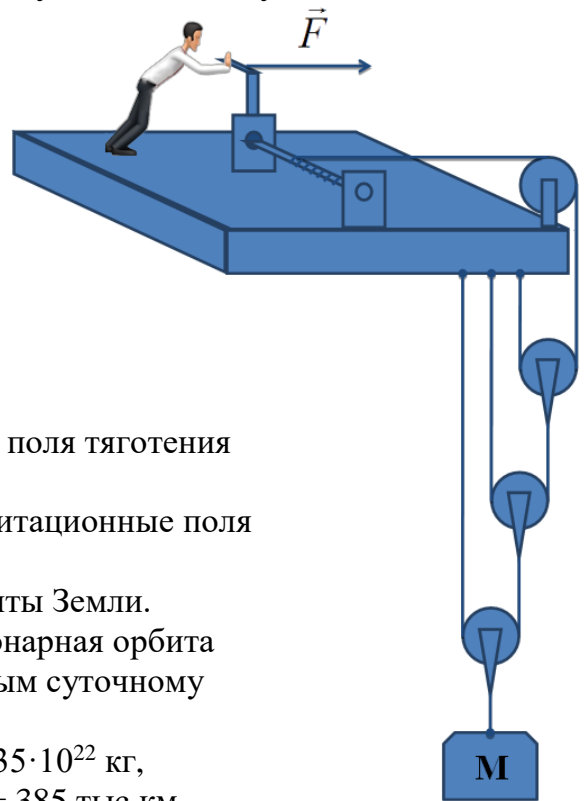


Рис. 1.

2. (20 баллов) Рассчитать напряженность и потенциал поля тяготения системы Земля-Луна:

а) в точке Лагранжа, то есть в точке, в которой гравитационные поля Земли и Луны скомпенсированы;

б) в ближайшей к Луне точке геостационарной орбиты Земли. Геостационарная орбита Земли — это круговая стационарная орбита искусственного спутника с периодом обращения равным суточному периоду вращения Земли.

Масса Земли $M_3 = 5,97 \cdot 10^{24}$ кг, масса Луны $M_Л = 7,35 \cdot 10^{22}$ кг, среднее расстояние между центрами Земли и Луны $a = 385$ тыс.км.

3. (25 баллов) Циклический процесс тепловой машины поставляет собой окружность на (T,S) -диаграмме, где S - энтропия, T - термодинамическая температура (см. рис. 2).

Найти КПД тепловой машины, если температура рабочего тела изменяется в пределах от T_{\min} до T_{\max} , причем $\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = 2$.

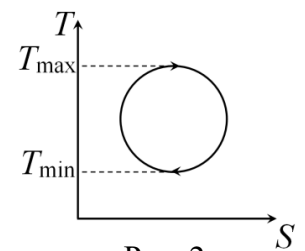


Рис. 2.

4. (15 баллов) Один из конденсаторов колебательного контура емкостью $C_1 = 10$ мкФ зарядили до напряжения $U_0 = 53,2$ В, после чего замкнули ключ «К» (рис. 3). Определите заряд на втором конденсаторе емкостью $C_2 = 28$ мкФ через время $t = 1$ мс после замыкания ключа, если индуктивность катушки $L = 24$ мГн. Активным сопротивлением колебательного контура пренебречь.

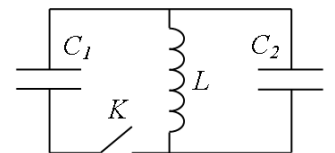


Рис. 3.

5. (25 баллов) Лабораторная работа. При определении вязкости жидкости методом Стокса используется выражение:

$$\eta = \frac{d^2 g (\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}}) t}{18L (1 + 2,4 d/D)},$$

где t - время равномерного движения шарика в сосуде с жидкостью между двумя отметками, D и d - диаметры цилиндрического сосуда и шарика, g - ускорение свободного падения, $\rho_{\text{ш}}$ и $\rho_{\text{ж}}$ - плотности шарика и жидкости соответственно, L - расстояние между отметками на сосуде.

Цель работы: из имеющихся материалов изготовить хронометр для отсчета времени, и с его помощью оценить коэффициент вязкости жидкости при однократном измерении параметров.

Приборы и материалы: цилиндрический сосуд с касторовым маслом ($\rho_{\text{ж}} = 0,96 \text{ г/см}^3$), свинцовые шарики ($\rho_{\text{ш}} = 11,3 \text{ г/см}^3$), штатив, нить, небольшой груз, линейка, микрометр.

Задачи на региональную студенческую олимпиаду с решениями

1. (15 баллов) Полиспаст, состоящий из трёх блоков, соединён тросом с валом ворота диаметром $d = 4$ см, приводимым в движение рукоятью с плечом $b = 20$ см (рис. 1). Усилие, которое может приложить человек в направлении, перпендикулярном рукояти, равно $F = 98$ Н. Пренебрегая силами трения, рассчитайте массу груза, который может поднимать человек с помощью такого механизма с постоянной скоростью.

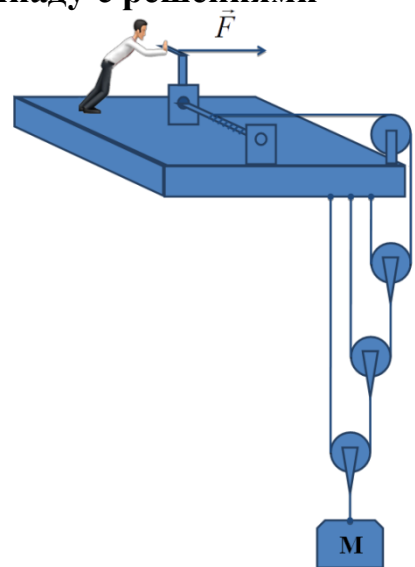


Рис. 1.

Дано:

$$d = 4 \text{ см}$$

$$b = 20 \text{ см}$$

$$F = 98 \text{ Н}$$

Найти:

$M - ?$

Решение:

При равномерном движении груза моменты сил, действующих на ворот, равны:

$$T \cdot \frac{d}{2} = F \cdot b,$$

где T – это сила натяжения троса на участке между воротом и полиспастом. Так как полиспаст увеличивает силу в восемь раз (см. рис.1.а), масса груза, удерживаемого силой F равна:

$$M = \frac{8T}{g} = \frac{16Fb}{gd} = \frac{16 \cdot 98 \cdot 20}{9,8 \cdot 4} \text{ кг} = 800 \text{ кг}.$$

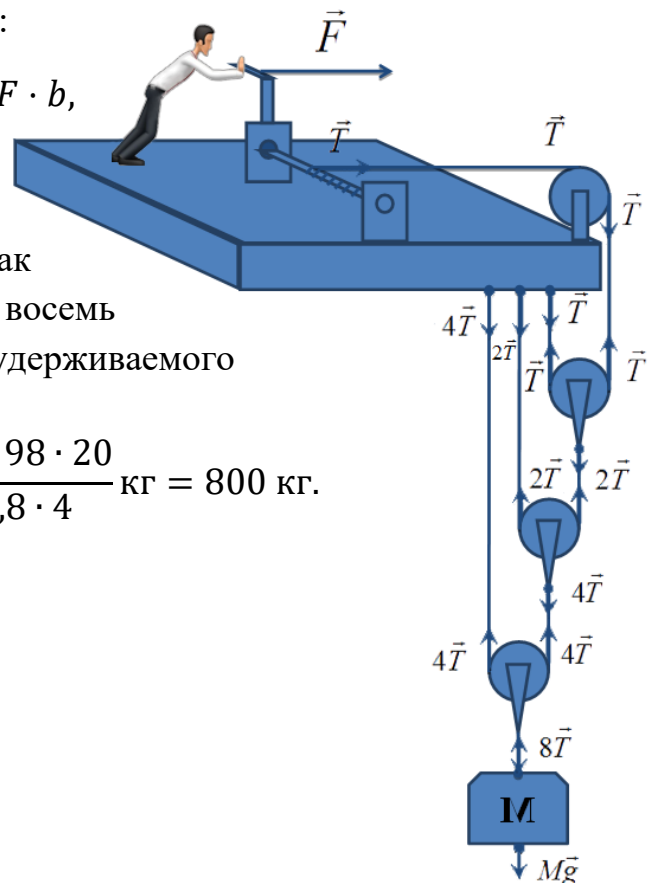


Рис. 1а.

Ответ: $M = 800$ кг.

2. (20 баллов) Рассчитать напряженность и потенциал поля тяготения системы Земля-Луна:

а) в точке Лагранжа, то есть в точке, в которой гравитационные поля Земли и Луны скомпенсированы;

б) в ближайшей к Луне точке геостационарной орбиты Земли. Геостационарная орбита Земли — это круговая стационарная орбита искусственного спутника с периодом обращения равным суточному периоду вращения Земли.

Масса Земли $M_3 = 5,97 \cdot 10^{24}$ кг, масса Луны $M_L = 7,35 \cdot 10^{22}$ кг, среднее расстояние между центрами Земли и Луны $a = 385$ тыс.км.

Дано:

$$M_3 = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

$$M_L = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ кг}$$

$$a = 3,85 \cdot 10^8 \text{ м}$$

Найти:

$$g - ? \quad \varphi - ?$$

Решение:

а) Гравитационные поля Земли и Луны могут быть скомпенсированы только в точке, лежащей на линии, соединяющей центры Земли и Луны. При этом напряженности полей тяготения Земли и Луны равны по модулю и противоположны по направлению.

$$g_3 = g_L, g = g_3 - g_L = 0 \quad (1)$$

$$G \frac{M_3}{R^2} = G \frac{M_L}{(a-R)^2}, \quad (2)$$

где R — расстояние от центра Земли до точки Лагранжа.

$$\left(\frac{R}{a-R}\right)^2 = \frac{M_3}{M_L} = n = 81,23 \quad (3)$$

$$R = \frac{a\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = 0,9a \quad (4)$$

Потенциал поля тяготения системы Земля-Луна в точке Лагранжа:

$$\varphi = \varphi_3 + \varphi_L = -G \left(\frac{M_3}{R} + \frac{M_L}{a-R} \right) = -G \frac{M_L}{a} \left(\frac{n}{(R/a)} + \frac{1}{1-(R/a)} \right) \quad (5)$$

$$\varphi = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{7,35 \cdot 10^{22}}{3,85 \cdot 10^8} \left(\frac{81,23}{0,9} + \frac{1}{1-0,9} \right) \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = -1,28 \cdot 10^6 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \quad (6)$$

б) Найдем радиус геостационарной орбиты Земли. В точках стационарной круговой орбиты центростремительное ускорение и ускорение свободного падения искусственного спутника равны по модулю.

$$G \frac{M_3}{R^2} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R, \quad (7)$$

где T — период обращения искусственного спутника Земли. Для геостационарной орбиты период равен одним суткам

$$T = 24 \text{ ч} = 24 \cdot 3600 \text{ с} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ с} \quad (8)$$

$$R = \sqrt[3]{GM_3 \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \left(\frac{8,64 \cdot 10^4}{2\pi}\right)^2} \text{ м} = 4,22 \cdot 10^7 \text{ м}$$

Ближайшая к Луне точка геостационарной орбиты Земли лежит на линии, соединяющей центры Земли и Луны. Напряженность поля тяготения системы Земля-Луна в этой точке направлена к центру Земли, и по величине равна разности модулей напряженности полей тяготения Земли и Луны, так как эти вектора противоположны по направлению.

$$g = g_3 - g_L = G \left(\frac{M_3}{R^2} - \frac{M_L}{(a-R)^2} \right) \quad (9)$$

$$g = 6,67 \cdot 10^{-11} \left(\frac{5,97 \cdot 10^{24}}{(4,22 \cdot 10^7)^2} - \frac{7,35 \cdot 10^{22}}{(3,85 \cdot 10^8 - 4,22 \cdot 10^7)^2} \right) \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 0,224 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 22,4 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

Потенциал поля тяготения системы Земля-Луна в ближайшей к Луне точке геостационарной орбиты Земли:

$$\varphi = \varphi_3 + \varphi_L = -G \left(\frac{M_3}{R} + \frac{M_L}{a-R} \right) \quad (10)$$

$$\varphi = -6,67 \cdot 10^{-11} \left(\frac{5,97 \cdot 10^{24}}{4,22 \cdot 10^7} + \frac{7,35 \cdot 10^{22}}{3,85 \cdot 10^8 - 4,22 \cdot 10^7} \right) \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = -9,45 \cdot 10^6 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

Ответ: а) $g = 0$, $\varphi = -1,28 \cdot 10^6 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$ б) $g = 22,4 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$, $\varphi = -9,45 \cdot 10^6 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$

3. (25 баллов) Циклический процесс тепловой машины поставляет собой окружность на (T,S)-диаграмме, где S - энтропия, T - термодинамическая температура (см. рис. 2).

Найти КПД тепловой машины, если температура рабочего тела изменяется в пределах от T_{\min} до T_{\max} , причем $\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = 2$.

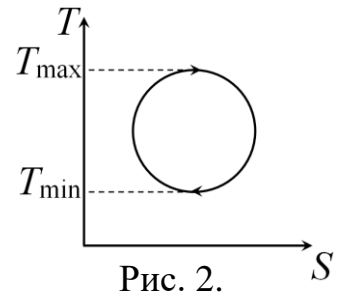


Рис. 2.

Дано:

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = 2$$

Решение:

КПД тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_H}, \quad (1)$$

Найти:

$\eta - ?$

где Q_H - тепло, полученное от нагревателя, A - работа за цикл.

Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A, \quad (2)$$

где U – внутренняя энергия.

Для цикла $\Delta U = 0$, т.к. внутренняя энергия - это функция состояния.

Рабочее тело возвращается в первоначальное состояние.

$$A = Q = \oint \delta Q = \oint TdS \quad (3)$$

Интеграл (3) равен площади круга радиуса $\frac{T_{\max} - T_{\min}}{2}$ на (T,S)-диаграмме:

$$A = \pi \left(\frac{T_{\max} - T_{\min}}{2} \right)^2 - \text{в масштабных единицах диаграммы.}$$

Рабочее тело получает от нагревателя тепло, когда энтропия возрастает (участок 1-2), и отдает тепло, когда энтропия уменьшается (участок 2-1) (см. рис.2а).

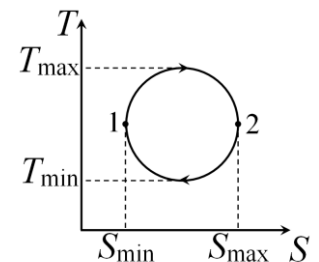


Рис. 2а.

$$Q_H = Q_{12} = \int_1^2 TdS \quad (4)$$

Интеграл (4) равен площади, ограниченной полуокружностью 1-2, прямыми $S = S_{\min}$, $S = S_{\max}$ и осью S . Эту площадь можно представить как сумму площади полукруга и площади прямоугольника $1/2 S_{\min} S_{\max}$:

$$Q_H = \frac{\pi}{2} \left(\frac{T_{\max} - T_{\min}}{2} \right)^2 + \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2} (S_{\max} - S_{\min}) \quad (5)$$

В масштабных единицах диаграммы:

$$S_{\max} - S_{\min} = T_{\max} - T_{\min}, \quad (6)$$

Поэтому

$$Q_H = \frac{\pi}{2} \left(\frac{T_{\max} - T_{\min}}{2} \right)^2 + \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2} (T_{\max} - T_{\min}), \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{A}{Q_H} = \frac{\pi(T_{\max} - T_{\min})^2 \cdot 100\%}{4\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{T_{\max} - T_{\min}}{4}\right) + \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2}\right)(T_{\max} - T_{\min})} = \\
&= \frac{2\pi(T_{\max} - T_{\min}) \cdot 100\%}{\pi T_{\max} - \pi T_{\min} + 4T_{\max} + 4T_{\min}} = \frac{2\pi\left(\frac{T_{\max}}{T_{\min}} - 1\right) \cdot 100\%}{(\pi + 4)\frac{T_{\max}}{T_{\min}} + (4 - \pi)} = \frac{2\pi \cdot 100\%}{\pi + 12} = 41,5\%
\end{aligned} \tag{8}$$

Ответ: КПД тепловой машины $\eta = 41,5\%$.

4. (15 баллов) Один из конденсаторов колебательного контура емкостью $C_1 = 10$ мкФ зарядили до напряжения $U_0 = 53,2$ В, после чего замкнули ключ «К» (рис. 3). Определите заряд на втором конденсаторе емкостью $C_2 = 28$ мкФ через время $t = 1$ мс после замыкания ключа, если индуктивность катушки $L = 24$ мГн. Активным сопротивлением колебательного контура пренебречь.

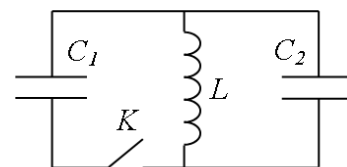


Рис. 3.

Дано:

$$C_1 = 10 \text{ мкФ}$$

$$C_2 = 28 \text{ мкФ}$$

$$U_0 = 53,2 \text{ В}$$

$$L = 24 \text{ мГн}$$

$$t = 1 \text{ мс}$$

Найти:

$$q_2 - ?$$

Решение:

В момент замыкания ключа заряд первого конденсатора $q_0 = C_1 U_0$ распределится по двум конденсаторам, образующим параллельное соединение.

Для параллельного соединения конденсаторов:

$$C = C_1 + C_2,$$

$$q = q_1 + q_2,$$

$$U = U_1 = U_2.$$

(1)

Далее в колебательном контуре будут совершаться свободные электрические колебания заряда на емкости параллельно соединенных конденсаторов с циклической частотой

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{L(C_1+C_2)}} = \frac{1}{\sqrt{24 \cdot 10^{-3}(10 \cdot 10^{-6} + 28 \cdot 10^{-6})}} = 1047 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (2)$$

Уравнение свободных электрических колебаний заряда позволяет найти заряд батареи конденсаторов через время t после замыкания ключа:

$$q = q_0 \cos(\omega t) = C_1 U_0 \cos(\omega t). \quad (3)$$

Заряд на втором конденсаторе в момент времени t можно найти из соотношений

$$U_1 = U_2 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \quad \text{и} \quad q = q_1 + q_2. \quad (4)$$

Тогда

$$q_2 = \frac{C_2 q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot U_0 \cos(\omega t). \quad (5)$$

Вычисления дают

$$q_2 = \frac{10 \cdot 10^{-6} \cdot 28 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-6} + 28 \cdot 10^{-6}} \cdot 53,2 \cdot \cos(1047 \cdot 10^{-3}) = 196 \text{ мкКл}. \quad (6)$$

Ответ: $q_2 = 196$ мкКл.

5. (25 баллов) Лабораторная работа.

При определении вязкости жидкости методом Стокса используется выражение:

$$\eta = \frac{d^2 g (\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}}) t}{18L \left(1 + 2,4 \frac{d}{D}\right)},$$

где t - время равномерного движения шарика в сосуде с жидкостью между двумя отметками, D и d - диаметры цилиндрического сосуда и шарика, g - ускорение свободного падения, $\rho_{\text{ш}}$ и $\rho_{\text{ж}}$ - плотности шарика и жидкости соответственно, L - расстояние между отметками на сосуде.

Цель работы: оценить коэффициент вязкости жидкости при однократном измерении параметров.

Приборы и материалы: цилиндрический сосуд с касторовым маслом ($\rho_{\text{ж}} = 0,96 \text{ Г/см}^3$), свинцовые шарики ($\rho_{\text{ш}} = 11,3 \text{ Г/см}^3$), штатив, нить, небольшой груз, линейка, микрометр.

Указание: из имеющихся материалов изготовьте хронометр для отсчета времени.

Возможный ход решения:

1) **Изготовление хронометра.** Из нити и небольшого груза изготавливаем математический маятник с длиной нити $l = 25$ см, который будет иметь период колебаний $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 1,00$ с.

2) **Оценка коэффициента вязкости жидкости.** Считаем количество малых колебаний маятника N за время прохождения шариком расстояния между отметками, тогда $t = N \cdot T$. Вычисляем коэффициент вязкости по приведённой в условии задачи формуле.

Измерения: $L = 20$ см, $d = 2,50$ мм, $D = 25$ мм, $l = 25$, $N = 7$.

Вычисления:

$$\eta = \frac{(2,5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 9,8 \cdot (11,3 \cdot 10^3 - 0,96 \cdot 10^3) \cdot 7 \cdot 1}{18 \cdot 0,2 \left(1 + 2,4 \cdot \frac{2,5}{25}\right)} = 0,99 \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Ответ: $\eta = 0,99 \text{ Па} \cdot \text{с}.$