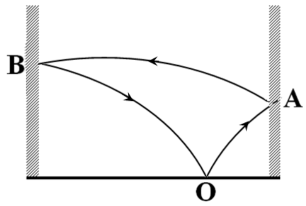
## Задачи на региональную студенческую олимпиаду




**1.** Мальчик бросает мяч в направлении вертикальной стенки с начальной скоростью $\upsilon_0$. Мяч, отскакивая от стенки в точке A, ударяется о вертикальную стенку в точке B (см. рис.). Под каким углом к горизонту мальчик должен бросить мяч, чтобы поймать его точке броска (точка O), если расстояние между стенками равно $L$? Сопротивлением воздуха и вращением мяча при движении пренебречь. Удары мяча о стенки считать абсолютно упругими, а стенки гладкими.

**2.** Две молекулы метана ($CH_4$) начинают сближение с большого расстояния с начальной относительной скоростью $\upsilon_{отн}$ = 0,95 км/с. На какое минимальное расстояние сблизятся молекулы при их центральном столкновении, если потенциальная энергия их взаимодействия описывается потенциалом Ленарда-Джонса?

Потенциал Ленарда-Джонса описывается формулой:

$$U(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right],$$

где $r$ – расстояние между центрами молекул, $\varepsilon = 2\cdot10^{-21}$ Дж – глубина потенциальной ямы, $\sigma$ = 3,76 Å.

**3.** В термостат с жидким бензолом объемом 1 литр, находящийся при температуре 10°C, помещают 338 г льда с температурой –10°C.

a) В каких агрегатных состояниях будут находиться вещества после установления теплового равновесия? Ответ поясните.

b) Вычислите температуру конечного состояния.

<u>Справочные данные:</u>

Плотность бензола $\rho_2$ = 0,879 г/см$^3$

Температура плавления льда $t_{пл1}$ = 0°C

Температура плавления бензола $t_{пл2}$ = 5,5°C

Удельная теплота плавления льда $\lambda_1$ = 330 кДж/кг

Удельная теплота плавления бензола $\lambda_2$ = 127 кДж/кг

Удельная теплоемкость льда $c_1$ = 2060 Дж/(кг·K)

Удельная теплоемкость воды $c_3$ = 4190 Дж/(кг·K)

Удельная теплоемкость бензола в диапазоне температур $t$ от –10°C до 10°C: $c_2 = c_{20}+\alpha\cdot t$,

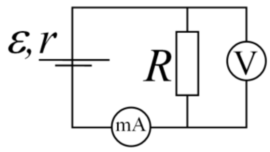
где $c_{20}$ = 1600 Дж/(кг·K), $\alpha$ = 10 Дж/(кг·°C$^2$)    Теплоемкостью термостата пренебречь.

**4.** Собирающая тонкая линза с фокусным расстоянием $F$ создает изображения точек треугольника ABC.

а) Постройте изображения A', B',C' точек A, B, C, если точки A и B находятся на расстоянии F от главной оптической оси, а точка C лежит на ней. Расстояния от точек A и C до линзы равно 2F, а для точки B равно 3/2F.

б) Вычислите площадь треугольника A'B'C' и сравните её с площадью треугольника ABC.

**5. Лабораторная работа.**




<u>Цель работы:</u> определить ЭДС источника постоянного тока с неизвестным внутренним сопротивлением, используя электрическую цепь, показанную на рисунке.

<u>Приборы и материалы:</u>

1) Генератор постоянного тока с неизвестными ЭДС и внутренним сопротивлением (блок ГН1).
2) Вольтметр – считать идеальным (блок АВ1).
3) Милиамперметр – считать идеальным (блок АВ1).
4) Резистор с переменным сопротивлением (стенд С3-ЭМО1)
5) Соединительные провода.

**Задачи на региональную студенческую олимпиаду с решениями**

**1.** Мальчик бросает мяч в направлении вертикальной стенки с начальной скоростью $\upsilon_0$. Мяч, отскакивая от стенки в точке А, ударяется о вертикальную стенку в точке В (см. рис.1). Под каким углом к горизонту мальчик должен бросить мяч, чтобы поймать его точке броска (точка О), если расстояние между стенками равно $L$? Сопротивлением воздуха и вращением мяча при движении пренебречь. Удары мяча о стенки считать абсолютно упругими, а стенки гладкими.

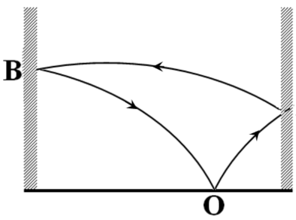


Рис.1.

Решение:

| Дано: | |
|---|---|
| $\upsilon_0$ | При абсолютно упругом ударе о стенку выполняется закон сохранения механической энергии: |
| $L$ | |
| Найти: | |
| $\alpha$ – ? | |

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{(p')^2}{2m} + \frac{(\Delta p)^2}{2M}, \qquad (1)$$

где $\vec{p}$ и $\vec{p}\,'$ – импульс мяча до и после удара о стенку соответственно, $\Delta\vec{p}$ – импульс, переданный стенке, $M$ и $m$ – массы стенки и мяча соответственно.
Так как $M >> m$, то из (1) следует, что

$$p = p' \qquad (2)$$

Так как стенка гладкая, то на мяч в момент удара со стороны стенки действуют только упругие силы, направленные горизонтально. Закон сохранения импульса при абсолютно упругом ударе:

$$\vec{p} = \vec{p}\,' + \Delta\vec{p}\,. \qquad (3)$$

Введём систему координат (см. рис.2).

$$x: \quad p\cos\alpha = -p'\cos\beta + \Delta p\,, \qquad (4)$$

$$y: \quad p\sin\alpha = p'\sin\beta\,, \qquad (5)$$

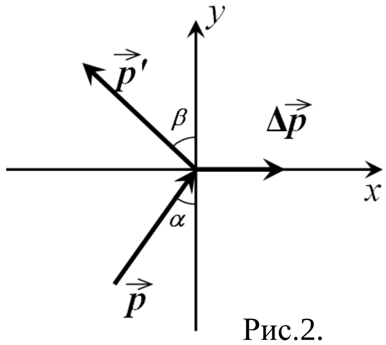


Рис.2.

Из (2) и (5) следует, что $\alpha = \beta$, тогда

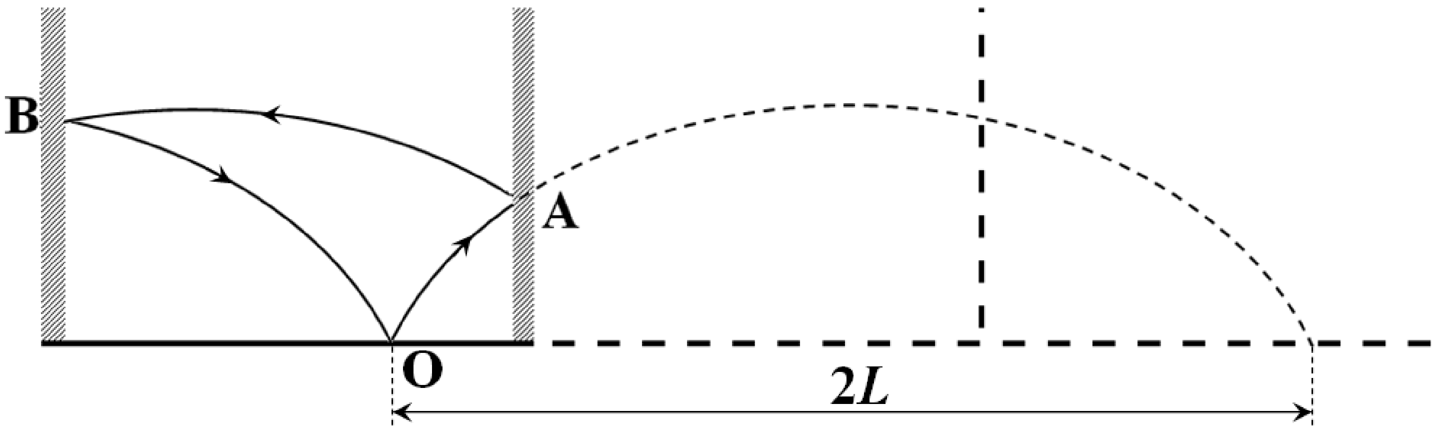
$$p_x = -p_x' \quad \text{и} \quad p_y = p_y' \qquad (6)$$

Т.е. при абсолютно упругом ударе мяча о гладкую вертикальную стенку сохраняется вертикальная составляющая вектора импульса, а горизонтальная меняет знак, не изменяясь по модулю.

Так как мальчик ловит мяч в точке броска, то расстояние, которое пролетает мяч по горизонтали, равно $2L$. При отсутствии стенки мяч пролетел бы по горизонтали такое же расстояние $2L$, так как при отражении от стенок происходит изменение только знака горизонтальной проекции импульса (см. рис. 3).

Решим задачу о нахождении расстояния до точки падения при броске мяча под углом к горизонту. Движение по горизонтали равномерное, поэтому

$$2L = \upsilon_x t = \upsilon_{0x} t = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t\,, \qquad (7)$$




где $t$ – время движения мяча.

Движение по вертикали равноускоренное, поэтому

$$t = \frac{2\upsilon_{0y}}{g} = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}, \tag{8}$$

Из (7) и (8) получаем

$$L = \frac{\upsilon_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}, \tag{9}$$

откуда получаем

Рис.3.

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2gL}{\upsilon_0^2}\right)}. \tag{10}$$

**Ответ:** $\boxed{\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2gL}{\upsilon_0^2}\right)}$.

**2.** Две молекулы метана ($CH_4$) начинают сближение с большого расстояния с начальной относительной скоростью $\upsilon_{отн} = 0{,}95$ км/с. На какое минимальное расстояние сблизятся молекулы при их центральном столкновении, если потенциальная энергия их взаимодействия описывается потенциалом Ленарда-Джонса?

Потенциал Ленарда-Джонса описывается формулой:

$$U(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right],$$

где $r$ – расстояние между центрами молекул, $\varepsilon = 2\cdot10^{-21}$ Дж – глубина потенциальной ямы, $\sigma = 3{,}76$ Å.

<u>Решение:</u>

| Дано: | |
|---|---|
| $\upsilon_{отн} = 0{,}95$ км/с | |
| $\varepsilon = 2\cdot10^{-21}$ Дж | |
| $\sigma = 3{,}76$ Å | |
| Найти: | |
| $r_{nin}$ - ? | |

Будем рассматривать движение молекул относительно центра масс системы. Такая система отсчета является инерциальной, поскольку отсутствуют внешние силы, действующие на систему.

Полный импульс системы:

$$\begin{aligned} m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 &= 2m\vec{\upsilon}_C = 0 \\ \vec{\upsilon}_1 &= -\vec{\upsilon}_2 \end{aligned}, \qquad (1)$$

где $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2$ – скорости молекул относительно центра масс системы. Относительная скорость движения молекул:

$$\vec{\upsilon}_{отн} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1 = -2\vec{\upsilon}_1 = 2\vec{\upsilon}_2\,, \qquad (2)$$

Кинетическая энергия системы:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{m\upsilon_2^2}{2} = m\upsilon_1^2 = \frac{m\upsilon_{отн}^2}{4}\,. \qquad (3)$$

При большом расстоянии между молекулами потенциал Ленарда-Джонса пренебрежимо мал, и полная механическая энергия системы $E$ равна кинетической энергии молекул:

$$E = \frac{m\upsilon_{отн}^2}{4}\,. \qquad (4)$$

В момент времени, когда расстояние между молекулами минимально, кинетическая энергия системы равна нулю. Между молекулами действуют потенциальные силы, поэтому система является консервативной и выполняется закон сохранения механической энергии.

$$U(r_{\min}) = E = \frac{m\upsilon_{отн}^2}{4}\,. \qquad (5)$$

Масса молекулы метана равна:

$$m = \frac{M(CH_4)}{N_A} = \frac{16\cdot10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{6{,}02\cdot10^{23}\,\text{моль}^{-1}} = 26{,}6\cdot10^{-27}\ \text{кг}\,. \qquad (6)$$

$$U(r_{\min}) = \frac{m\upsilon_0^2}{4} = \frac{26{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot \left(0{,}95 \cdot 10^3\right)^2}{4} \text{ Дж} = 6 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 3\varepsilon . \qquad (7)$$

$$4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r_{\min}}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_{\min}}\right)^{6}\right] = 3\varepsilon . \qquad (8)$$

Введем $x = \left(\frac{\sigma}{r_{\min}}\right)^6$, тогда уравнение (8) примет вид:

$$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0, \quad (x > 0). \qquad (9)$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{1+3}}{2} = \frac{3}{2}. \qquad (10)$$

Откуда получаем, что

$$\boxed{r_{\min} = \sigma\sqrt[6]{x^{-1}} = \sigma\sqrt[6]{\frac{2}{3}} \approx 3{,}5\ \mathring{\mathrm{A}}}$$

**<u>Ответ: $r_{\min}$ = 3,5 Å.</u>**

**3.** В термостат с жидким бензолом объемом 1 литр, находящийся при температуре 10°С, помещают 338 г льда с температурой –10°С.

а) В каких агрегатных состояниях будут находиться вещества после установления теплового равновесия? Ответ поясните.

б) Вычислите температуру конечного состояния.

<u>Справочные данные:</u>

Плотность бензола $\rho_2$ = 0,879 г/см$^3$

Температура плавления льда $t_{пл1}$ = 0°С

Температура плавления бензола $t_{пл2}$ = 5,5°С

Удельная теплота плавления льда $\lambda_1$ = 330 кДж/кг

Удельная теплота плавления бензола $\lambda_2$ = 127 кДж/кг

Удельная теплоемкость льда $c_1$ = 2060 Дж/(кг·К)

Удельная теплоемкость воды $c_3$ = 4190 Дж/(кг·К)

Удельная теплоемкость бензола в диапазоне температур $t$ от –10°С до 10°С:

$$c_2 = c_{20} + \alpha \cdot t,$$

где $c_{20}$ = 1600 Дж/(кг·К), $\alpha$ = 10 Дж/(кг·°С$^2$)

Теплоемкостью термостата пренебречь.

<u>Решение:</u>

Дано:
$V_2$ = 1 л
$t_2$ = 10°С
$m_1$ = 338 г
$t_1$ = –10°С

Найти:
$t_к$ – ?

а) При помещении льда в жидкий бензол лёд нагревается, а бензол охлаждается. Количество теплоты, необходимое для нагрева льда до $t_{пл1}$:

$$Q_1 = c_1 m_1 (t_{пл} - t_1) = 2060 \text{ Дж/(кг·К)} \cdot 0{,}338 \text{ кг} \cdot 10 \text{ К} = 6963 \text{ Дж} \quad (1)$$

Количество теплоты, выделяющееся при охлаждении бензола до $t_{пл2}$:

$$Q_2 = \rho_2 V_2 \int_{t_2}^{t_{пл2}} c_2(t)dt = \rho_2 V_2 \int_{t_2}^{t_{пл2}} [c_{20} + \alpha t]dt = \rho_2 V_2 \left[ c_{20}(t_{пл2} - t_2) + \frac{\alpha}{2}\left(t_{пл2}^2 - t_2^2\right) \right] = -6634 \text{ Дж} \quad (2)$$

Так как $Q_1 > |Q_2|$, то бензол начнет кристаллизироваться раньше, чем расплавится лёд.

Количество теплоты, необходимое для плавления льда:

$$Q_{пл} = \lambda_1 m_1 = 330 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг} \cdot 0{,}338 \text{ кг} = 111540 \text{ Дж} \quad (3)$$

Количество теплоты, выделяющееся при кристаллизации бензола:

$$Q_{кр} = -\lambda_2 \rho_2 V_2 = -127 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг} \cdot 0{,}879 \text{ кг} = -111633 \text{ Дж} \quad (4)$$

После охлаждения до $t_{пл2}$ бензол кристаллизуется, выделяющееся тепло идёт на нагрев льда и его плавление.

Так как $Q_1 + Q_{пл} > |Q_2| + |Q_{кр}|$, то после кристаллизации всего бензола часть льда останется в твёрдом состоянии. Для плавления остатка льда требуется количество теплоты:

$$\Delta Q = Q_1 + Q_{пл} - |Q_2| - |Q_{кр}| = 236 \text{ Дж} \quad (5)$$

Состояние веществ перестанет изменяться при температуре теплового равновесия $t_к$, при этом в конечном состоянии останется твёрдый бензол в воде.

б) Уравнение теплового баланса:

$$Q_1 + Q_{пл} + Q_3 + Q_2 + Q_{кр} + Q_4 = 0, \qquad (6)$$

где $Q_3$ – количество теплоты, получаемое при нагреве воды до $t_к$, $Q_4$ – количество теплоты, выделяющееся при охлаждении бензола до $t_к$.

$$\Delta Q + Q_3 + Q_4 = 0$$

$$Q_3 = c_3 m_1 (t_к - t_{пл1}) \qquad (7)$$

$$Q_4 = \rho_2 V_2 \left[ c_{20}\left(t_к - t_{пл2}\right) + \frac{\alpha}{2}\left(t_к^2 - t_{пл2}^2\right) \right]$$

Из уравнения теплового баланса получим:

$$5t_к^2 + 2823t_к - 7651 = 0 \qquad (8)$$

$$t_к = \frac{-2823 + \sqrt{2823^2 + 4 \cdot 5 \cdot 7651}}{10} = 2{,}7\ {}^\circ\mathrm{C} \qquad (9)$$

**<u>Ответ:</u>**

а) **<u>в состоянии теплового равновесия вода будет находиться только в жидклм состоянии, а бензол только в твёрдом.</u>**

б) **<u>$t_к$ = 2,7°C</u>**

**4.** Собирающая тонкая линза с фокусным расстоянием $F$ создает изображения точек треугольника ABC.

a) Постройте изображения A', B',C' точек A, B, C, если точки A и B находятся на расстоянии F от главной оптической оси, а точка C лежит на ней. Расстояния от точек A и C до линзы равно 2F, а для точки B равно 3/2F.

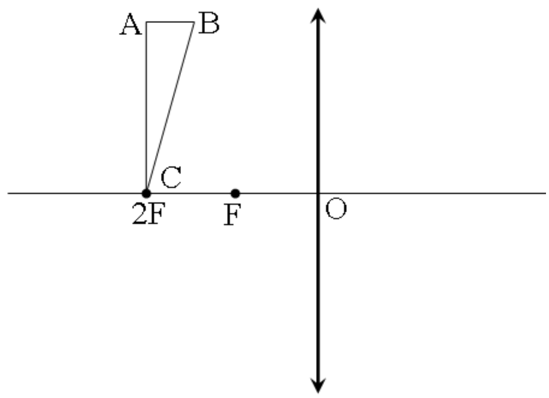
b) Вычислите площадь треугольника A'B'C' и сравните её с площадью треугольника ABC.

Решение:

Дано:
$h_A = h_B = F$
$h_C = 0$
$d_A = d_C = 2F$
$d_B = 3/2F$

Найти:
$S_{A'B'C'}$ – ?

Расстояние от точек изображения A', B', C' до линзы вычислим по формуле для тонкой линзы:



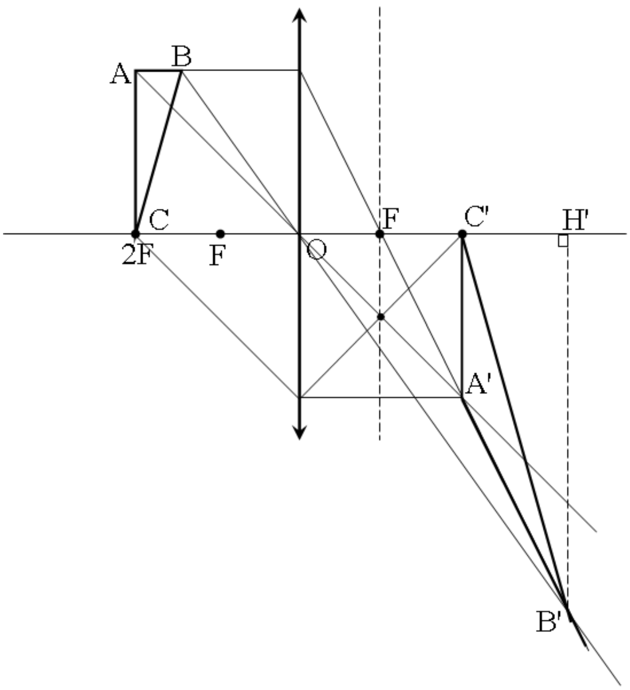

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}, \qquad (1)$$

где $d$ и $f$ – расстояния от предмета и изображения до линзы.

$$f_A = f_C = 2F \qquad (2)$$

$$\frac{1}{F} = \frac{2}{3F} + \frac{1}{f_B}, \qquad (3)$$

$$f_B = 3F, \qquad (4)$$




Расстояния от точек изображения до главной оптической оси найдём по формуле:

$$\frac{H}{h} = \frac{f}{d}, \qquad (5)$$

где $h$ и $H$ – размеры предмета и изображения.

$$H_A = F, \quad H_B = \frac{F \cdot 3F}{\frac{3}{2}F} = 2F, \quad H_C = 0. \qquad (6)$$

Найдем площадь треугольника A'B'C', опуская перпендикуляр из точки B' на главную оптическую ось линзы (точка H'). Тогда площадь треугольника A'B'C':

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} A'C' \cdot C'H' = \frac{1}{2} \cdot H_A \cdot (f_B - f_C) = \frac{F^2}{2}, \qquad (7)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{F^2}{4}, \qquad (8)$$

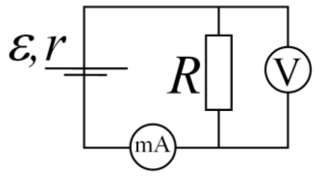
**Ответ:** $S_{A'B'C'} = \frac{F^2}{2}$ **, $S_{A'B'C'}$ в два раза больше $S_{ABC}$.**

**5. Лабораторная работа.**

<u>Цель работы:</u> определить ЭДС источника постоянного тока с неизвестным внутренним сопротивлением, используя электрическую цепь, показанную на рисунке.

<u>Оборудование:</u>

1) Генератор постоянного тока с неизвестными ЭДС и внутренним сопротивлением (блок ГН1).
2) Вольтметр – считать идеальным (блок АВ1).
3) Милиамперметр – считать идеальным (блок АВ1).
4) Резистор с переменным сопротивлением (стенд С3-ЭМО1)
5) Соединительные провода.




<u>Ход работы:</u>

**<u>Первый способ.</u>**

1. Измеряем значения тока и напряжения при двух различных сопротивлениях резистора.

| № | *I*, mA | *U*, B |
|---|---|---|
| **1** | 7,96 | 12,03 |
| **2** | 18,45 | 4,81 |

2. Из закона Ома для замкнутой цепи получаем:

$$\begin{cases} \varepsilon = U_1 + I_1 r \\ \varepsilon = U_2 + I_2 r \end{cases}. \qquad (1)$$

3. Тогда из (1) получаем

$$\varepsilon = \frac{I_2 U_1 - I_1 U_2}{I_2 - I_1}. \qquad (2)$$

4. **<u>Ответ: $\varepsilon$ = 17,51 В</u>**

**<u>Второй способ.</u>**

1. Измеряя значения тока и напряжения при различных сопротивлениях резистора, находим значение напряжения, соответствующее максимальному значению их произведения (максимальной мощности): $U_m$ = 8,73 В.
2. Определяем ЭДС по формуле:

$$\varepsilon = 2U_m \qquad (3)$$

3. **<u>Ответ: ε = 17,46 В</u>**

**Вывод формулы (3):**

По определению,

$$P = IU = I^2U.$$

Закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r},$$

откуда

$$P = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}.$$

Найдём максимум функции $P(R)$.

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\varepsilon^2 (r-R)}{(R+r)^3}$$

При $R = r$ функция $P(R)$ имеет экстремум, так как $\frac{dP}{dR} = 0$. Это максимум, так как

$$\left.\frac{d^2P}{dR^2}\right|_{R=r} = -\frac{\varepsilon^2}{8r} < 0.$$

Поэтому

$$P_{\max} = P(R=r) = \frac{\varepsilon^2}{4r}.$$

Тогда

$$\varepsilon = 2\sqrt{P_{\max} \cdot r}.$$

Учитывая, что $P_{\max} = \frac{U_m^2}{R}$ и $R = r$, получим формулу (3): $\varepsilon = 2U_{m}$.