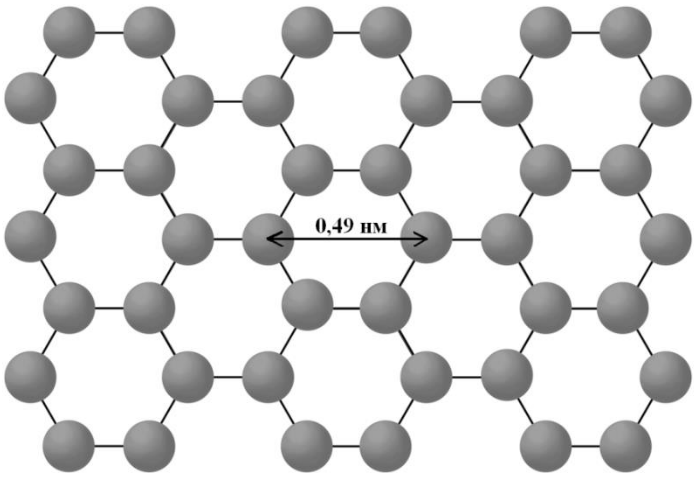
Задачи на региональную студенческую олимпиаду

1. Импульсный лазер со средней энергией лазерного излучения в импульсе $W = 25$ мкДж и расходимостью пучка $\varphi = 3$ мрад направлен на мишень, находящуюся на расстоянии $l = 84$ см от лазера и представляющую собой монослой атомов углерода (графен), осажденный на подложке кремния (см. рисунок). Рассчитайте максимально возможную энергию адгезии, приходящуюся на один атом углерода, если один лазерный импульс оставляет круглое пятно на мишени, и 41% энергии лазерного излучения передается атомам углерода.



2. Распределение свободных электронов по скоростям в металле задается распределением Ферми-Дирака:

$$dN = \frac{8\pi m_e^3 V}{h^3} \cdot \frac{v^2 dv}{exp\left(\frac{\varepsilon - \mu_0}{kT}\right) + 1},$$

где m_e – масса электрона, V – объем металла, h – постоянная Планка, dN – число электронов со скоростями в интервале $[v; v + dv]$, k – постоянная Больцмана, T – температура, $\varepsilon = \frac{m_e v^2}{2}$ – кинетическая энергия электронов, μ_0 – химический потенциал, определяемый выражением

$$\mu_0 = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3\rho}{\pi m_a}\right)^{2/3},$$

где ρ – плотность металла, m_a – масса его атома.

Определите среднюю скорость электронов в меди при температуре $3\,K$. Плотность меди равна $8{,}93\ \text{г}/\text{см}^3$.

3. Мальчик бросает палку под углом к горизонту, взявшись за ее конец. Движение палки происходит в вертикальной плоскости. Начальные модули скоростей концов палки равны 0 км/ч и 137 км/ч. Сколько полных оборотов сделает палка в полете, если пролетит по горизонтали 37 м? Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2, палку считать однородным стержнем длины $\frac{2}{3}$ м, сопротивлением воздуха пренебречь. Считать, что центр масс палки в начале и конце движения находится на одной высоте.

4. Рассчитайте момент инерции колеса деревянной самопрялки, относительно оси вращения (см. рис.1). Спицы колеса считать цилиндрами с диаметром основания 2 см. Плотность дерева во всех точках колеса считать одинаковой и равной 0,69 г/см^3. Внешний и внутренний диаметры обода колеса 60 см и 50 см. Толщина обода 3 см.

Рис. 1.

5. Лабораторная работа

Цель работы: исследовать зависимость ЭДС батарейки от температуры.

Приборы и материалы:

1) Две одинаковые батарейки (АА) с припаянными к полюсам проводами.
2) Термостойкий пакет.
3) Термостойкий стакан (200 мл).
4) Нитка (50 см).
5) Мультиметр с режимом милливольтметра.
6) Термометр для измерения температуры до 100°С.
7) Лист миллиметровой бумаги (А5) для построения графиков.
8) Горячая вода по требованию.

Задание: используя данное оборудование:

1) постройте график зависимости ЭДС батарейки от температуры;
2) определите по графику ЭДС батарейки при 0°С.
3) предложите функцию, описывающую зависимость ЭДС батарейки от температуры. Определите параметры предложенной функции.

6. Примечания: батарейки не должны непосредственно контактировать с водой и не должны быть мокрыми. Используйте термостойкий пакет. Вольтметр и милливольтметр мультиметра считать идеальными.

1. Импульсный лазер со средней энергией лазерного излучения в импульсе $W = 25$ мкДж и расходимостью пучка $\varphi = 3$ мрад направлен на мишень, находящуюся на расстоянии $l = 84$ см от лазера и представляющую собой монослой атомов углерода (графен), осажденный на подложке кремния (см. рисунок). Рассчитайте максимально возможную энергию адгезии, приходящуюся на один атом углерода, если один лазерный импульс оставляет круглое пятно на мишени, и 41% энергии лазерного излучения передается атомам углерода.

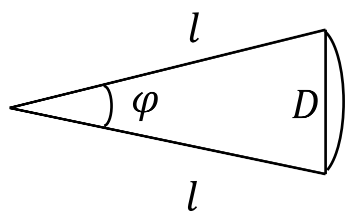
Дано:

$W = 25$ мкДж
$\varphi = 3$ мрад
$l = 84$ см
$a = 0{,}49$ нм
$\eta = 41\%$

$\varepsilon - ?$

Решение:

Диаметр пятна может быть вычислен по формуле (см. рисунок)



$$D = \varphi l,$$

а площадь пятна:

$$S = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Каждый атом принадлежит трем ячейкам, а каждая ячейка состоит из шести атомов, поэтому число атомов в два раза больше числа ячеек.

Площадь одной ячейки (правильного шестиугольника):

$$S_6 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{8}.$$

Количество атомов, попадающих в пятно, т.е. количество атомов, получивших энергию:

$$N = 2\frac{S}{S_6}.$$

Максимально возможная энергия адгезии, приходящаяся на один атом, равна энергии, полученной одним атомом:

$$\varepsilon = \frac{\eta W}{N} = \frac{3\sqrt{3}\eta W}{16\pi}\left(\frac{a}{\varphi l}\right)^2 = 0{,}4 \cdot 10^{-19}\text{Дж} = 0{,}25\ \text{эВ}.$$

<u>Ответ:</u> $\varepsilon = 0{,}4 \cdot 10^{-19}$Дж $= 0{,}25$ эВ.

2. Распределение свободных электронов по скоростям в металле задается распределением Ферми-Дирака:

$$dN = \frac{8\pi m_e^3 V}{h^3} \cdot \frac{v^2 dv}{exp\left(\frac{\varepsilon - \mu_0}{kT}\right) + 1},$$

где m_e – масса электрона, V – объем металла, h – постоянная Планка, dN – число электронов со скоростями в интервале $[v; v + dv]$, k – постоянная Больцмана, T – температура, $\varepsilon = \frac{m_e v^2}{2}$ – кинетическая энергия электронов, μ_0 – химический потенциал, определяемый выражением

$$\mu_0 = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3\rho}{\pi m_a}\right)^{2/3},$$

где ρ – плотность металла, m_a – масса его атома.

Определите среднюю скорость электронов в меди при температуре $3\,K$. Плотность меди равна $8{,}93\ \text{г/см}^3$.

Дано:	Решение:
$T = 3\,K$	Согласно условию задачи функция распределения электронов по скоростям имеет вид:
$\rho = 8{,}93\ \text{г/см}^3$	$$f(v) = \frac{dN}{dv} = \frac{8\pi m_e^3 V}{h^3} \cdot \frac{v^2}{exp\left(\frac{\varepsilon - \mu_0}{kT}\right) + 1}.$$
$\langle v \rangle - ?$	

Вычислим μ_0, учитывая, что $m_a = \frac{M_{Cu}}{N_A}$ и $M_{Cu} = 63{,}5\ \text{г/моль}$, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}$.

$$\mu_0 = \frac{h(6{,}625 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}}\left(\frac{3 \cdot 8{,}93 \cdot 10^3 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}}{3{,}14 \cdot 63{,}5 \cdot 10^{-3}}\right)^{2/3} \approx 11{,}26 \cdot 10^{-19}\text{Дж} \approx 7{,}04\ \text{эВ}.$$

С другой стороны при температуре 3 К $kT \approx 4{,}14 \cdot 10^{-23}$Дж $\approx 0{,}259$ мэВ, что в 27 тысяч раз меньше μ_0, поэтому можно допустить приближение

$$exp\left(\frac{\varepsilon - \mu_0}{kT}\right) \approx \begin{cases} 0, & \varepsilon < \mu_0 \\ \infty, & \varepsilon > \mu_0 \end{cases}.$$

Тогда

$$f(v) = \begin{cases} \dfrac{8\pi m_e^3 V}{h^3} v^2, & v < v_{max} \\ 0, & v > v_{max} \end{cases},$$

где v_{max} – максимальная скорость электронов, причем $\mu_0 = \frac{m_e v_{max}^2}{2}$.

Найдем среднюю скорость электронов:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty v f(v) dv = \frac{1}{N}\int_0^{v_{max}} v f(v) dv = \frac{8\pi m_e^3 V}{N h^3}\int_0^{v_{max}} v^3 dv = \frac{8\pi m_e^3 V}{N h^3}\frac{v_{max}^4}{4}.$$

Вычислим полное число электронов

$$N = \int_0^N dN = \int_0^\infty f(v) dv = \int_0^{v_{max}} f(v) dv = \frac{8\pi m_e^3 V}{h^3}\int_0^{v_{max}} v^2 dv = \frac{8\pi m_e^3 V}{N h^3}\frac{v_{max}^3}{3}.$$

Тогда

$$\langle v \rangle = \frac{3}{4} v_{max} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2\mu_0}{m_e}} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2 \cdot 11{,}26 \cdot 10^{-19}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}}} = 1{,}18 \cdot 10^6 \, \frac{\text{м}}{c} = 1180 \text{ км}/c.$$

Ответ: $\langle v \rangle = 1180$ км$/c$.

3. Мальчик бросает палку под углом к горизонту, взявшись за ее конец. Движение палки происходит в вертикальной плоскости. Начальные модули скоростей концов палки равны 0 км/ч и 137 км/ч. Сколько полных оборотов сделает палка в полете, если пролетит по горизонтали 37 м? Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2, палку считать однородным стержнем длины $\frac{2}{3}$ м, сопротивлением воздуха пренебречь. Считать, что центр масс палки в начале и конце движения находится на одной высоте.

Дано:
$\upsilon_{10} = 0$ км/ч
$\upsilon_{20} = 137$ км/ч
$l = \frac{2}{3}$ м
$L = 37$ м
$g = 9{,}8$ м/с^2

N - ?

Решение:
Движение палки можно представить как совокупность поступательного и вращательного движения. Скорость концов палки

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_c + \vec{\upsilon}_{вр},$$

где $\vec{\upsilon}_c$ – скорость центра масс. Центр масс палки находится в ее середине, т.к. палка однородна. $\vec{\upsilon}_{вр}$ – скорость вращения концов палки.

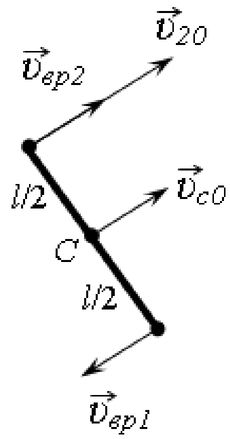


Рис. 1.

$$\vec{\upsilon}_{вр} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

где $\vec{r}$ – координата конца палки относительно ее центра масс.

$$\vec{r}_1 = -\vec{r}_2,$$

$$\vec{\upsilon}_{вр1} = -\vec{\upsilon}_{вр2},$$

$$\upsilon_{вр1} = \upsilon_{вр2} = \upsilon_{вр}$$

В начальный момент времени модуль скорости одного из концов палки равен нулю, т.е.

$\vec{\upsilon}_{10} = \vec{\upsilon}_{c0} + \vec{\upsilon}_{вр1} = 0$, откуда $\vec{\upsilon}_{c0} = -\vec{\upsilon}_{вр1}$.

$$\vec{\upsilon}_{20} = \vec{\upsilon}_{c0} + \vec{\upsilon}_{вр2} = \vec{\upsilon}_{c0} - \vec{\upsilon}_{вр1} = 2\vec{\upsilon}_{c0}$$

$$\upsilon_{c0} = \upsilon_{вр} = \frac{\upsilon_{20}}{2}$$

$$\upsilon_{вр} = \omega \frac{l}{2}$$

Вращение палки относительно центра масс равномерное, т.к. момент силы тяжести, действующей на палку, равен нулю.

$$\Delta\varphi = \omega \cdot t = \frac{2\upsilon_{вр}}{l} t = \frac{\upsilon_{20}}{l} t$$

Движение центра масс – это равноускоренное движение под действием силы тяжести. Расстояние, которое палка пролетела по горизонтали:

$$L = \upsilon_{c0x} \cdot t = \upsilon_{c0} \cos(\alpha) t$$

Время полета палки

$$t = \frac{2\upsilon_{0y}}{g} = \frac{2\upsilon_{c0} \sin\alpha}{g} = \frac{\upsilon_{20} \sin\alpha}{g}$$

Тогда

$$L = \frac{\upsilon_{c0}^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{\upsilon_{20}^2 \sin 2\alpha}{4g}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{4Lg}{\upsilon_{c0}^2} = \frac{4 \cdot 37 \cdot 9{,}8}{(137/3{,}6)^2} = 1,$$

Откуда получаем α = 45°.

$$\Delta\varphi = \frac{\upsilon_{20}^2 \sin\alpha}{g \cdot l} = \frac{3(137/3{,}6)^2 \sqrt{2}}{2 \cdot 9{,}8 \cdot 2} = 157 \text{ рад}$$

$$N = \left[\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\right] = 25 \text{ оборотов}$$

<u>Ответ:</u> N = 25 оборотов.

4. Рассчитайте момент инерции колеса деревянной самопрялки, относительно оси вращения (см. рис.1). Спицы колеса считать цилиндрами с диаметром основания 2 см. Плотность дерева во всех точках колеса считать одинаковой и равной 0,69 г/см^3. Внешний и внутренний диаметры обода колеса 60 см и 50 см. Толщина обода 3 см.

Дано:
ρ = 0,69 г/см^3
d = 2 см
h = 3 см
d_1 = 50 см
d_2 = 60 см

I - ?

Решение:
Самопрялка состоит из обода и 12 спиц. Момент инерции одной спицы

$$I_1 = \frac{m_c R_1^2}{3}$$

Масса спицы

$$m_c = \rho V_c = \frac{\pi d^2}{4} R_1 \rho$$

Рис. 1.

$$I_1 = \frac{\pi \rho d^2 R_1^3}{12}$$

Момент инерции спиц

$$I_{сп} = 12 I_1 = \pi \rho d^2 R_1^3 = \frac{\pi \rho d^2 d_1^3}{8}$$

Момент инерции обода:

$$I_{об} = I_{д2} - I_{д1} = \frac{m_{д2} d_2^2}{8} - \frac{m_{д1} d_1^2}{8} = \frac{\rho}{8}\left(V_{д2} d_2^2 - V_{д1} d_1^2\right),$$

где $I_{д1}$, $I_{д2}$ – моменты инерции однородных дисков с диаметрами d_1 и d_2.

$$V_{д1} = \frac{\pi d_1^2}{4} h, \quad V_{д2} = \frac{\pi d_2^2}{4} h.$$

$$I_{об} = \frac{\pi \rho h}{32}\left(d_2^4 - d_1^4\right),$$

$$I = \frac{\pi \rho}{8}\left(\frac{h\left(d_2^4 - d_1^4\right)}{4} + d^2 d_1^3\right) = 0{,}15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

<u>Ответ:</u> I = 0,15 кг·м^2.

5. Лабораторная работа

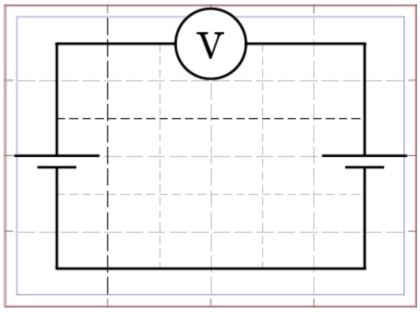
Цель работы: исследовать зависимость ЭДС батарейки от температуры.

Приборы и материалы:
1) Две одинаковые батарейки (АА) с припаянными к полюсам проводами.
2) Термостойкий пакет.
3) Термостойкий стакан (200 мл).
4) Нитка (50 см).
5) Мультиметр с режимом милливольтметра.
6) Термометр для измерения температуры до 100°С.
7) Лист миллиметровой бумаги (А5) для построения графиков.
8) Горячая вода по требованию.

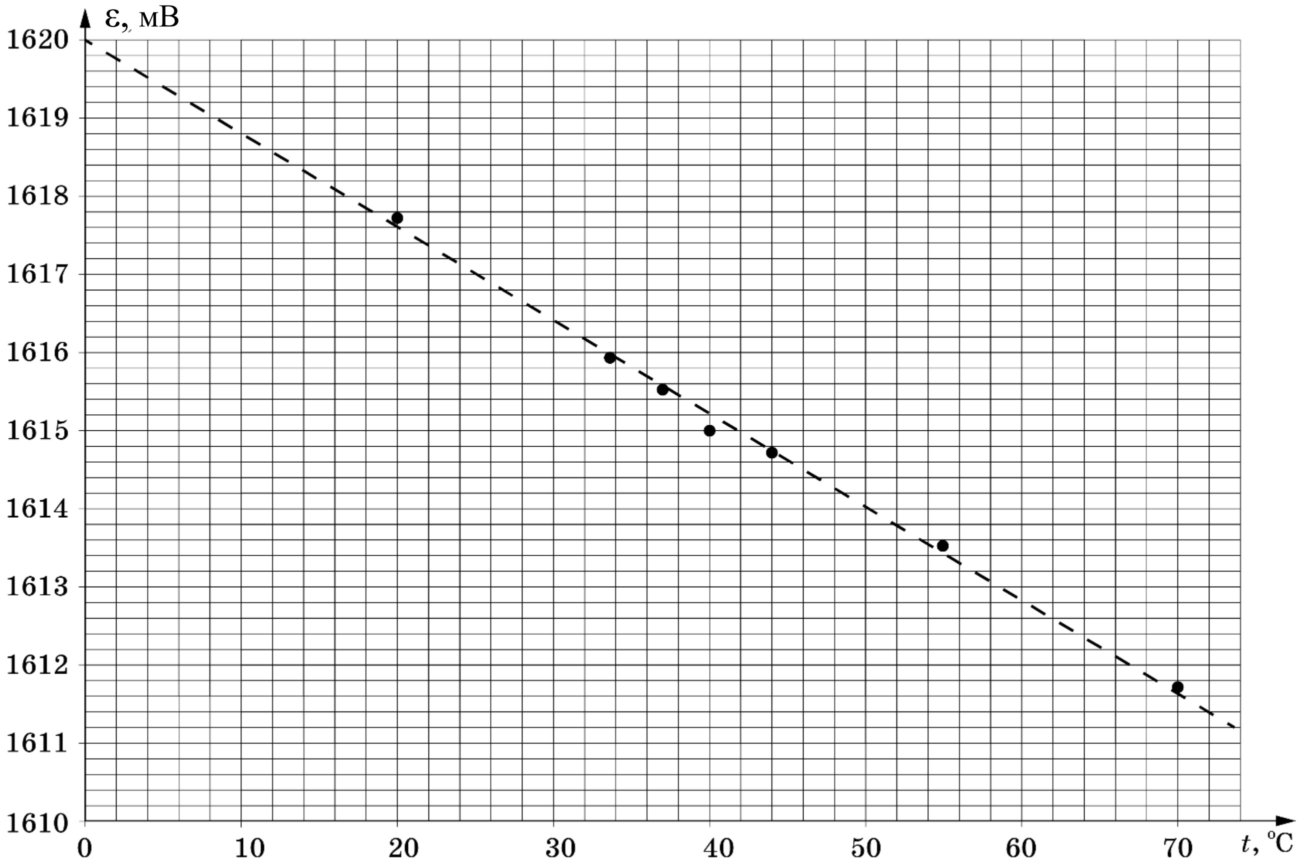
Задание: используя данное оборудование:
1) постройте график зависимости ЭДС батарейки от температуры;
2) определите по графику ЭДС батарейки при 0°С.
3) предложите функцию, описывающую зависимость ЭДС батарейки от температуры. Определите параметры предложенной функции.

Примечания: батарейки не должны непосредственно контактировать с водой и не должны быть мокрыми. Используйте термостойкий пакет. Вольтметр и милливольтметр мультиметра считать идеальными.

Возможный ход решения:



1) При нагревании батарейку нужно положить в пакет, чтобы избежать контакта с водой. Изменение напряжения очень мало, при нагревании до 70 градусов составляет около 5мВ. Поэтому нужно собрать дифференциальную схему с двумя батарейками, как показано на рисунке, и греть одну из них. Тогда мы сможем использовать вольтметр в диапазоне 200мВ и измерять десятые мВ.
2) Подключаем мультиметр к концам последовательно соединенных батареек. Батарейки соединяем «навстречу» друг другу, т.е. «+» к «+» или «-» к «-». Мультиметр переключаем в режим милливольтметра. При таком соединении, мультиметр будет показывать разность ЭДС батареек $\Delta\varepsilon$.
3) Помещаем одну из батареек в термостойкий пакет и опускаем в стакан с горячей водой. Температуру воды t измеряем термометром.
4) При охлаждении воды проводим измерение разности ЭДС батареек для 15-20 значений температуры. Вычисляем ЭДС батарейки по формуле $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon(t)$ для каждой температуры. Где ε_0 - ЭДС батарейки при комнатной температуре t_0, ее можно измерить мультиметром в режиме вольтметра на «холодной» батарейке.
5) Строим график зависимости $\varepsilon(t)$, для этого отмечаем точки на графике. Так как график получается линейный, проводим линейную аппроксимацию зависимости $\varepsilon(t)$. Экстраполируя график до значения температуры 0°С, находим соответствующее значение ЭДС.
6) Полученная зависимость $\varepsilon(t)$ описывается линейной функцией
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 - k(t - t_0).$$
Определяем параметр k линейной функции $\varepsilon(t)$ по формуле
$$k = \left|\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{t_2 - t_1}\right|,$$
где ε_2 и ε_1 – любые два значения ЭДС на графике при температурах t_2 и t_1.
7) Результаты измерений показаны на графике. Напряжение уменьшается при повышении температуры, т.е. $\Delta\varepsilon < 0$. Коэффициент наклона $k = 0{,}12$ мВ/°C.



Возможные критерии оценивания (%)

№	Критерий оценивания	Максимум
1	Выполнено измерение ЭДС батарейки при комнатной температуре ε_0	10 %
2	Идея использования дифференциальной схемы измерения $\Delta\varepsilon(t)$	30 %
3	Указано, что ЭДС уменьшается при увеличении температуры, или $\Delta\varepsilon(t) < 0$	10 %
4	Число снятых точек: 1) (15 или более) 20 % 2) (менее 15) 10 %	20 %
5	График $\Delta\varepsilon(t)$: 1) отложены единицы измерения по осям (5 %) 2) выбран рациональный масштаб по осям (5 %) 3) нанесены шкалы на оси (5 %) 4) соответствие нанесённых точек табличным значениям (5 %)	20 %
6	Коэффициент наклона попал в интервал [0,10; 0,14] мВ/°C 10 % интервал [0,07; 0,18] мВ/°C 5 %	10 %