Региональная студенческая олимпиада по физике 2021/2022 уч. года

Задача 1

В неподвижном автобусе к потолку подвешен на нити длиной l шарик малых размеров. Определите максимальную высоту подъема шарика h относительно его начального положения после того, как автобус поехал прямолинейно по ровной горизонтальной дороге с постоянным ускорением a. Ускорение свободного падения g.

Возможное решение:

По закону сложения ускорений ускорение свободного падения относительно системы отсчета, связанной с автобусом,

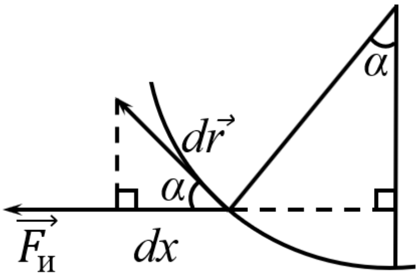
$$\vec{g}_1 = \vec{g} - \vec{a}.$$

Из рисунка видно, что модуль этого ускорения равен

$$g_1 = \sqrt{g^2 + a^2}, \quad (1)$$

а само ускорение образует с вертикалью угол α, причем

$$\text{tg}\alpha = \frac{a}{g} \quad (2)$$



Вычислим работу силы инерции (см. рисунок). Так как ускорение автобуса постоянное, то сила инерции постоянная.

$$A = \int \vec{F}_и d\vec{r} = F_и \int \cos\alpha\, dr = F_и \int_0^x dx = F_и x = m{\cdot}a{\cdot}x.$$

Приравнивая работу силы инерции к приращению потенциальной энергии в результате отклонения маятника, получим

$$m{\cdot}a{\cdot}x = m{\cdot}a{\cdot}l{\cdot}\sin\alpha_{max} = mgh = mgl(1 - \cos\alpha_{max})$$

где α_{max} – максимальный угол отклонения маятника. Подставим выражение для ускорения:

$$\text{tg}\alpha{\cdot}\sin\alpha_{max} = 1 - \cos\alpha_{max} = 2\sin^2\frac{\alpha_{max}}{2},$$

т.е.

$$\text{tg}\alpha = \text{tg}\frac{\alpha_{max}}{2},$$

следовательно, $\alpha_{max} = 2\alpha$. Тогда

$$h = l(1 - \cos 2\alpha) = 2l\sin^2\alpha \quad (3)$$

Используя формулу

$$\sin\alpha = \frac{\text{tg}\,\alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}}$$

получаем

$$h = 2l\frac{\text{tg}^2\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha}, \quad \text{где } \text{tg}\alpha = \frac{a}{g} \quad (4)$$

Отсюда получаем

$$h = 2l\frac{\left(\frac{a}{g}\right)^2}{1 + \left(\frac{a}{g}\right)^2}$$

$$h = 2l\frac{a^2}{g^2 + a^2} \quad (5)$$

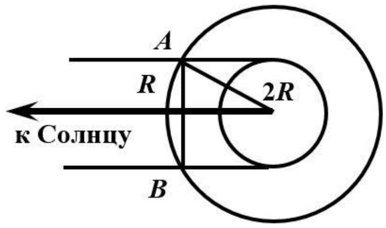
Ответ: шарик поднимется на высоту $h = 2l\frac{a^2}{g^2+a^2}$.

Региональная студенческая олимпиада по физике 2021/2022 уч. года

Задача 2

Определите среднюю скорость движения «тени» спутника по поверхности Земли, если плоскость его круговой орбиты находится в плоскости земного экватора и проходит на высоте h от поверхности Земли. Высота h равна радиусу Земли, первая космическая скорость для Земли равна v_1=7,9 км/с.

Возможное решение:



«Тень» спутника движется по поверхности Земли, когда спутник проходит по дуге AB. Угловая величина этой дуги может быть найдена из геометрических соображений:

$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 2\alpha = 2\arcsin\frac{R}{2R} = \frac{\pi}{3}$$

Таким образом, расстояние, равное длине дуги AB, спутник проходит за 1/6 периода своего обращения.

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{4\pi R}{v}$$

где R – радиус Земли, v – скорость спутника.

Скорость движения спутника находим из закона всемирного тяготения и второго закона Ньютона:

$$\frac{mv^2}{R+h} = \mathrm{G}\frac{M\,m}{(R+h)^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{GM}{2R}} = \frac{v_1}{\sqrt{2}}$$

где $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ – первая космическая скорость. Таким образом,

$$\mathrm{T} = \frac{4\sqrt{2}\pi\mathrm{R}}{v_1}.$$

Путь «тени» равен половине длины экватора: $S = \pi R$.

Средняя скорость «тени»

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{S}{\mathrm{T}/6} = \frac{6\pi R v_1}{4\sqrt{2}\pi R} = \frac{3v_1}{2\sqrt{2}} \approx 8{,}4 \text{ км/с}.$$

Ответ: Средняя скорость «тени» $v_{\text{ср}} = \frac{3v_1}{2\sqrt{2}} \approx 8{,}4$ км/с.

Региональная студенческая олимпиада по физике 2021/2022 уч. года

Задача 3

Найти отношение молярных теплоемкостей $\frac{C_M}{C_V}$ идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1{,}4$ в термодинамическом процессе, описываемом уравнением $TV = const$.

Дано:

$TV = const$

$\gamma = 1{,}4$

$\frac{C_M}{C_V} - ?$

Решение:

Молярная теплоемкость:

$$C_M = \frac{\delta Q}{\nu dT}.$$

Уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$PV = \nu RT.$$

Первое начало термодинамики:

$$\delta Q = \nu C_V dT + pdV.$$

Теплоемкость изохорного процесса:

$$C_V = \frac{iR}{2}$$

Показатель адиабаты:

$$\gamma = \frac{i+2}{i} \quad => \quad i = \frac{2}{\gamma - 1}.$$

Продифференцируем уравнение процесса $TV = const$:

$$TdV + VdT = 0 \quad => \quad \frac{dV}{dT} = -\frac{V}{T}.$$

Тогда

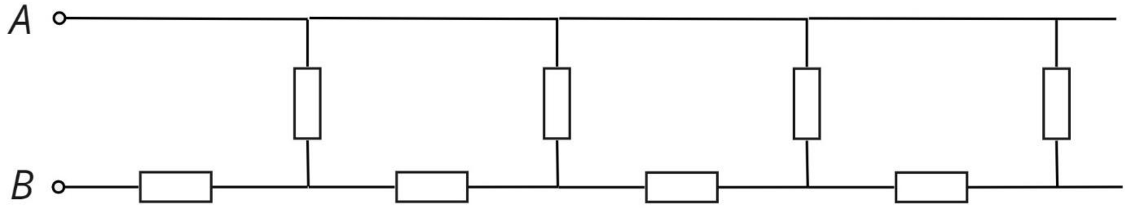
$$\frac{C_M}{C_V} = \frac{\nu C_V dT + pdV}{\nu C_V dT} = 1 + \frac{p}{\nu C_V}\frac{dV}{dT} = 1 - \frac{pV}{\nu C_V T} = 1 - \frac{R}{C_V} = 1 - \frac{2}{i} = 2 - \gamma.$$

Ответ: $\frac{C_M}{C_V} = 0{,}6$.

Региональная студенческая олимпиада по физике 2021/2022 уч. года

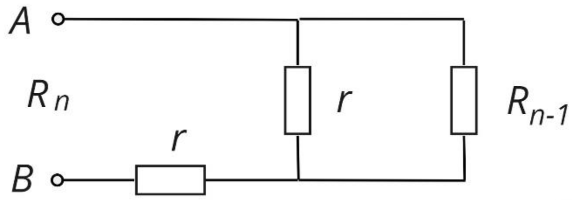
Задача 4

Найти сопротивление бесконечной электрической цепи между точками *A* и B, если каждое сопротивление равно r = 1 Ом.



Возможное решение:

Рассмотрим конечную цепочку из n звеньев.



Заметим, что при добавлении к цепочке из n – 1 звеньев одного звена слева, получается цепочка из n звеньев, сопротивление которой можно рассчитать по формуле:

$$R_n = r + \frac{rR_{n-1}}{r + R_{n-1}}.$$

Учитывая, что $R_1 = 2r$, получим последовательность:

$$2r, \frac{5}{3}r, \frac{13}{8}r, \frac{34}{21}r \cdots$$

Последовательность состоит из последовательности чисел, определяемой формулой:

$$\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2}, \qquad \Phi_1 = 1,\ \ \Phi_2 = 2.$$

Каждое следующее число является суммой двух предыдущих (числа Фибоначчи). Тогда

$$R_n = \frac{\Phi_{2n}}{\Phi_{2n-1}} r.$$

Рассчитаем сопротивление бесконечной цепочки сопротивлений, устремляя n к бесконечности.

$$R_\infty = r \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_{2n}}{\Phi_{2n-1}} = r \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_{2n-1} + \Phi_{2n-2}}{\Phi_{2n-1}} = r\left[1 + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_{2n-1}}{\Phi_{2n-2}}\right)^{-1}\right] = r\left(1 + \frac{r}{R_\infty}\right).$$

Решая квадратное уравнение, получим

$$R_\infty = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \approx 1{,}618\ r.$$

Ответ: $R_\infty = 1{,}618$ Ом.

Региональная студенческая олимпиада по физике 2021/2022 уч. года

Задача 5 (лабораторная работа)

Цель работы: ознакомится с явлением плавания тел. Определить массу тела и груза. Определить ошибку эксперимента с доверительной вероятностью $\alpha = 0{,}9$.

Приборы и принадлежности: пробирка (100 мл) с водой, карандаш с грузом, линейка, штангенциркуль.

Примечание: считать, что масса карандаша без груза распределена равномерно по его длине, и, что центр масс груза расположен на конце карандаша.

Возможный ход работы:

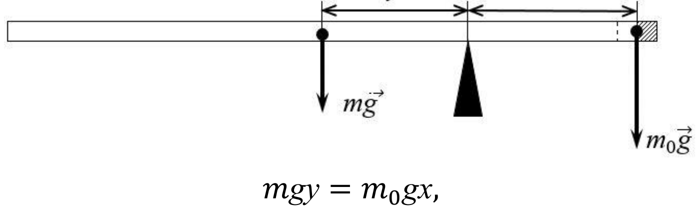
1) Поместим карандаш в пробирку с водой, добиваясь его вертикального положения. Измерим 5 раз длину выступающей из воды части карандаша l.
2) Определим среднее значение l.
$$\langle l \rangle = \frac{2{,}7 + 2{,}8 + 2{,}6 + 2{,}8 + 2{,}5}{5} = 2{,}68 \text{ см}.$$
3) Поместим карандаш на край стола, добиваясь его равновесия. Определим центр тяжести карандаша с грузом. Измерим расстояние от края карандаша, на котором расположен груз, до центра тяжести x.
4) Измерим линейкой длину карандаша L.
5) Сечение карандаша представляет собой правильный шестиугольник. Измерим штангенциркулем параметр d (расстояние между противолежащими сторонами шестиугольника, т.е. диаметр вписанной в шестиугольник окружности).
6) Вычислим площадь поперечного сечения карандаша S (площадь шестиугольника).
$$S = \frac{\sqrt{3}\, d^2}{2} = 41{,}2 \text{ мм}^2.$$
7) Определим объем V погруженной в воду части карандаша
$$V = S(L - \langle l \rangle) = 6{,}0 \text{ мл} = 6{,}0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Примечание: объем погруженной в воду части карандаша можно определить, проградуировав шкалу объема воды в пробирке выше 100 мл.

8) Запишем условие равновесия сил для карандаша, помещенного вертикально в воду
$$m\vec{g} + m_0\vec{g} + \vec{F_A} = 0,$$

где m, m_0 – массы груза и карандаша, $F_A = \rho g V$ - сила Архимеда, $\rho = 1$ г/мл – плотность воды. Тогда
$$m + m_0 = \rho V = 6{,}0 \text{ г}. \qquad (1)$$

9) Условие равновесия для карандаша с грузом (см. рисунок):



$$mgy = m_0 g x,$$

- где x, y – плечи силы тяжести для груза и карандаша, $y = \frac{L}{2} - x$. Тогда
$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{L}{2x} - 1\right). \qquad (2)$$

10) Из (1) и (2) получим
$$m = \frac{2x\rho V}{L} = 4{,}5 \text{ г},$$

$$m_0 = \rho V - m = \rho V\left(1 - \frac{2x}{L}\right) = 1{,}5 \text{ г.}$$

11) Представим результаты в виде таблицы.

№	l, см	$\langle l \rangle$, см	x, см	L, см	d, мм	S, мм^2	V, мл	$m_0 + m$, г	m, г	m_0, г
1	2,7	2,68	6,5	17,3	6,9	41,2	6,0	6,0	4,5	1,5
2	2,8									
3	2,6									
4	2,8									
5	2,5									

12) Определяющей погрешностью эксперимента является погрешность определения l. Рассчитаем эту погрешность для 5 опытов и доверительной вероятности $\alpha = 0{,}9$. Коэффициент Стьюдента для этого случая равен 2,13. Цена деления линейки 1 мм.

$$\Delta l_{\text{сл}} = 2{,}13\sqrt{\frac{0{,}02^2 + 0{,}12^2 + 0{,}08^2 + 0{,}12^2 + 0{,}18^2}{20}} = 0{,}124 \text{ см,}$$

$$\Delta l = \sqrt{(0{,}124)^2 + (0{,}05)^2} = 0{,}134 \text{ см.}$$

13) Массы карандаша и груза линейно зависят от l, поэтому их относительные погрешности равны относительной погрешности определения l.

$$\varepsilon_{m_0} = \varepsilon_m = \varepsilon_l = \frac{\Delta l}{\langle l \rangle} \cdot 100\% = 5{,}0\%.$$

14) Абсолютные погрешности определения масс карандаша и груза:

$$\Delta m = \frac{m\,\varepsilon_m}{100} = 0{,}2 \text{ г,}$$

$$\Delta m_0 = \frac{m_0\,\varepsilon_m}{100} = 0{,}1 \text{ г.}$$

Ответ: результаты измерения масс карандаша и груза:

$$\begin{cases} m = (4{,}5 \pm 0{,}2) \text{ г,} \\ \varepsilon_m = 5{,}0\%, \\ \alpha = 0{,}9. \end{cases} \qquad \begin{cases} m_0 = (1{,}5 \pm 0{,}1) \text{ г,} \\ \varepsilon_{m_0} = 5{,}0\%, \\ \alpha = 0{,}9. \end{cases}$$