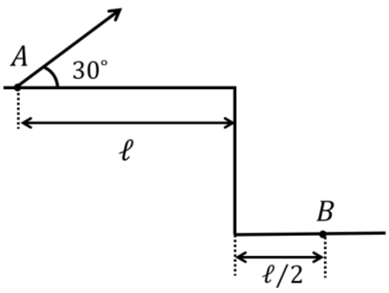
Региональная студенческая олимпиада по физике 2022

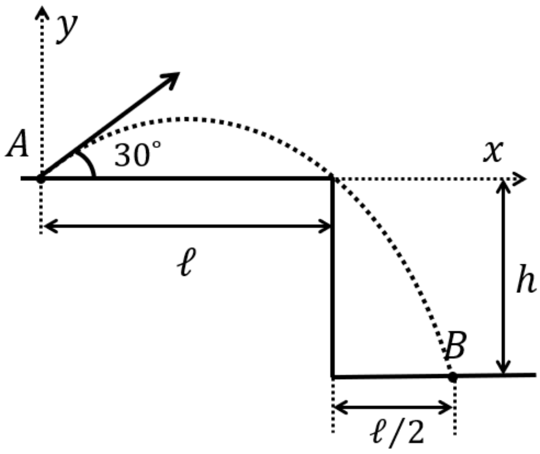
Задача 1

Антон стоит в точке A на расстоянии ℓ от края обрыва и бросает мяч под углом 30° к горизонту (см. рисунок). Минимальное расстояние от основания обрыва, на котором Ваня может поймать свободно летящий мяч в точке B равно $\ell/2$. С какой начальной скоростью брошен мяч? Каковы высота обрыва и время полета мяча? Сопротивлением воздуха и ростом мальчиков пренебречь.



Возможное решение:

Мяч полетит по параболической траектории, причём, чтобы Ваня мог поймать мяч на минимальном расстоянии от основания обрыва, траектория мяча должна «касаться» края обрыва, как показано на рисунке.



Дальность полета мяча до края обрыва определяется по известной формуле

$$\ell = \frac{v_0^2 sin2\alpha}{g} = \frac{\sqrt{3}v_0^2}{2g}, \qquad (1)$$

из которой можно найти начальную скорость мяча

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g\ell}{\sqrt{3}}}. \qquad (2)$$

Движение мяча вдоль горизонтальной оси является равномерным с постоянной скоростью $v_x = v_0 cos\alpha$, тогда время движения мяча можно найти как

$$t = \frac{\ell + \ell/2}{v_0 cos\alpha} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}\ell}{2g}}. \qquad (3)$$

Вдоль вертикальной оси мяч движется с постоянным ускорением g, направленным вниз, тогда соответствующее уравнение движения будет иметь вид

$$-h = v_0 sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (4)$$

Откуда находим высоту обрыва

$$h = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ell + \frac{3\sqrt{3}}{4}\ell = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell. \qquad (5)$$

Ответ: $v_0 = \sqrt{\frac{2g\ell}{\sqrt{3}}}$; $t = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}\ell}{2g}}$; $h = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell$.

Региональная студенческая олимпиада по физике 2022

Задача 2

Двумерный газ – это газ, частицы которого могут двигаться только в двух направлениях. Запишите выражение для функции распределения частиц по скоростям для идеального двумерного газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия. Определите в этой модели наиболее вероятную скорость движения частиц газа при $50^{\circ}\mathrm{C}$, если эти частицы – электроны.

Возможное решение:

Запишем распределение Максвелла по скоростям молекул для трехмерного случая:

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}, \quad (1)$$

здесь m_0 – масса молекулы газа, T – термодинамическая температура.

Формула для кинетической энергии $\varepsilon = \frac{m_0 v^2}{2}$, очевидно, в двумерном случае останется такой же, поэтому показатель экспоненты не изменится при переходе к двумерному случаю. Выражение $4\pi v^2$ в трехмерном случае определяет площадь сферы радиуса v в пространстве скоростей. В двумерном случае мы должны поставить вместо него длину окружности $2\pi v$ в пространстве скоростей. Константа $\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}$ в двумерном случае не в кубе, а в квадрате. Т.е. функция распределения для двумерного газа запишется в виде

$$g(v) = \frac{m_0 v}{kT} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}, \qquad (2).$$

Константу функции распределения можно также найти из условия нормировки:

$$\int_0^\infty g(v)dv = A\int_0^\infty v\, e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv = A\frac{kT}{m_0}\int_0^\infty e^{-t}dt = A\frac{kT}{m_0} = 1.$$

Тогда $A = \frac{m_0}{kT}$, и получаем функцию распределения, определяемую выражением (2).

Максимум функции распределения достигается при наиболее вероятной скорости $v_{\text{В}}$, т.е.

$$\frac{dg}{dv} = \frac{m_0}{kT}\left(1 - \frac{m_0}{kT}v_B^2\right) e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} = 0.$$

Выражение в скобках равно нулю, поэтому

$$v_B = \sqrt{\frac{kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot (50 + 273)}{9{,}11 \cdot 10^{-31}}} = 7 \cdot 10^4 \frac{\text{м}}{c}.$$

Ответ: $v_B = \sqrt{\frac{kT}{m_0}} = 7 \cdot 10^4 \frac{\text{м}}{c}.$

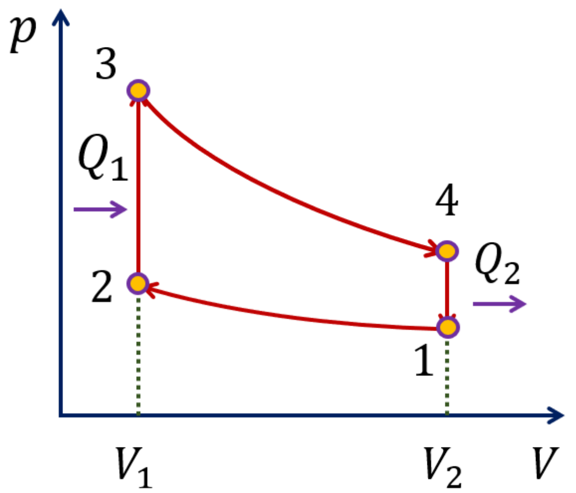
Региональная студенческая олимпиада по физике 2022

Задача 3

Цикл Отто – это термодинамический цикл, описывающий рабочий процесс двигателя внутреннего сгорания. Идеальный цикл Отто состоит из 4-х процессов: двух адиабатических и двух изохорных.

Во сколько раз изменяется объем двухатомного идеального газа постоянной массы в цикле Отто, если его КПД равен 35,5% ?

Возможное решение:



Построим график процессов цикла Отто в переменных (p, V). Передача тепла происходит только в изохорных процессах *2-3* и *4-1*:

$$Q_1 = \nu C_V (T_3 - T_2) > 0; \qquad (1)$$

$$Q_2 = \nu C_V (T_1 - T_4) < 0. \qquad (2)$$

Уравнение адиабатического процесса

$$T \cdot V^{\gamma-1} = const,$$

где γ – показатель адиабаты. Для двухатомного газа число степеней свободы молекулы $i = 5$, поэтому $\gamma = \frac{i+2}{i} = 1{,}4$. Таким образом, для адиабатических процессов выполняются уравнения

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = n^{\gamma-1}; \qquad \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = n^{\gamma-1}, \qquad \text{где } n = \frac{V_2}{V_1}. \qquad (3)$$

КПД цикла вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}. \qquad (4)$$

С учетом выражений (1) и (2) КПД цикла Отто:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{\nu C_V (T_3 - T_2) + \nu C_V (T_1 - T_4)}{\nu C_V (T_3 - T_2)} = \frac{T_3 - T_2 + T_1 - T_4}{T_3 - T_2}.$$

Заменим T_1 и T_4, используя уравнения (3):

$$\eta = \frac{T_3 - T_2 - (T_3 - T_2)/n^{\gamma-1}}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{n^{\gamma-1}}. \qquad (5)$$

Из (5) выразим n:

$$n = \sqrt[\gamma-1]{\frac{1}{1-\eta}} = 3.$$

Ответ: объем изменяется в три раза.

Региональная студенческая олимпиада по физике 2022

Задача 4

Флейта Пана, состоящая из 7 трубок, настроена на тональность *Ля-минор*. Известно, что:

1) частота стоячей звуковой волны, образующейся в трубке, обратно пропорциональна длине трубки;
2) тональность *Ля-минор* образована следующими нотами:

Нота	Ля	Си	До	Ре	Ми	Фа	Соль
Количество полутонов, на которые нота выше ноты Ля.	0	2	3	5	7	8	10

3) самая длинная трубка звучит с частотой *440 Гц*;
4) частоты нот, отличающихся на полутон, относятся друг к другу как $\sqrt[12]{2}$;
5) длина самой короткой трубки равна *7 см*.

Определите:

1) длину трубки с нотой *Си*;
2) частоту ноты *Ми*.

Возможное решение:

По условию частота звуковой волны ν обратно пропорциональна длине трубки ℓ, т.е.

$$\nu = \frac{c}{\ell}\text{, где } c - \text{константа.} \qquad (1)$$

Из зависимости (1) следует, что самая длинная трубка звучит на самой низкой частоте. Самая низкая частота (см. таблицу) – это частота ноты *Ля*, т.е. $\nu_1 = 440$ Гц.

Самая короткая трубка соответствует ноте *Соль*. Нота *Соль* выше ноты *Ля* на *10* полутонов. На каждый полутон частота ноты увеличивается в $\sqrt[12]{2}$ раз, тогда

$$\nu_7 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^{10}\nu_1 = 2^{5/6}\cdot 440 = 784\text{ Гц.}$$

Нота *Ми* выше ноты *Ля* на *7* полутонов, поэтому

$$\nu_5 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^{7}\nu_1 = 2^{7/12}\cdot 440 = 659\text{ Гц.}$$

Длина трубки с нотой *Си*:

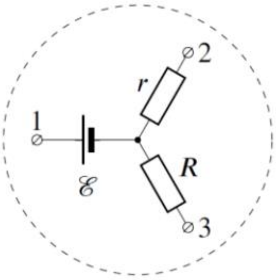
$$\ell_2 = \ell_7\frac{\nu_7}{\nu_2} = \ell_7\frac{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{10}\nu_1}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}\nu_1} = \ell_7 2^{2/3} = 7\text{ см}\cdot 2^{2/3} = 11{,}1\text{ см.}$$

Ответ: $\nu_5 = 659$ Гц; $\ell_2 = 11{,}1$ см.

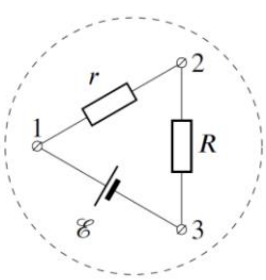
Региональная студенческая олимпиада по физике 2022

Задача 5 (экспериментальная задача)

Коробка содержит три вывода A, B и C. Известно, что внутри коробки содержится источник постоянного напряжения ε и два резистора R и r. Эти элементы соединены по одной из схем, указанных на рисунке.



или



«Звезда» «Треугольник»

Внутреннее сопротивление источника, пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлениями резисторов R и r. Определите:

1) по какой из схем («звезда» или «треугольник») соединены элементы;
2) соответствие между точками «1», «2», «3» и выводами A, B и C, считая, что $r < R$;
3) значение напряжения ε и сопротивления резисторов R и r.

Оборудование: коробка с выводами A, B и C, мультиметр со щупами.

Примечания:

1) Запрещается «закорачивать» выводы коробки A, B и C.
2) Мультиметр использовать только в режимах измерения постоянного напряжения (DCV) с пределом не менее *20 В* и постоянного тока (DCA) с пределом не менее *500 мкА*.
3) Считать внутреннее сопротивление мультиметра в режиме вольтметра неизвестным, а его микроамперметр идеальным.

Возможное решение:

Измерим напряжение между выводами A и B, A и C, B и C:

$$U_{AB} = 0{,}0\ B,\ \ U_{AC} = 18{,}5\ B,\ \ U_{BC} = 7{,}0\ B.$$

Если в коробке элементы соединены треугольником, то отсутствие напряжения между выводами A и B можно объяснить только малостью сопротивления r. С другой стороны, при малом r напряжения U_{AC} и U_{BC} должны быть практически одинаковы, что не наблюдается. Значит элементы в коробке соединены «звездой».

Поскольку напряжение $U_{AB} = 0{,}0\ B$, значит источник подключен к выходу C, то есть $C \leftrightarrow 1$. Так как $U_{AC} > U_{BC}$, то к выводу A подключено меньшее сопротивление r, а значит $A \leftrightarrow 2$. Соответственно $B \leftrightarrow 3$.

Далее, измерим токи в режиме микроамперметра:

$$I_{AB} = 0\ \text{мкА},\ \ I_{AC} = 360\ \text{мкА},\ \ I_{BC} = 10\ \text{мкА}.$$

По условию микроамперметр мультиметра является идеальным, тогда

$$\varepsilon = I_{AC} r = I_{BC} R, \qquad (1)$$

откуда получаем

$$\frac{R}{r} = \frac{I_{AC}}{I_{BC}} = 36. \qquad (2)$$

С учетом того, что вольтметр имеет внутреннее сопротивление R_V, запишем выражения

$$U_{AC} = \frac{\varepsilon R_V}{R_V + r}\,; \qquad U_{BC} = \frac{\varepsilon R_V}{R_V + R}\,. \qquad (3)$$

Исключая ε из выражений (3) и используя выражение (2), найдем $r = 0{,}049 R_V$. Подставим полученное значение в (3) и выразим ε:

$$\varepsilon = U_{AC}\left(1 + \frac{r}{R_V}\right) = 19{,}4\ B.$$

Из (1) следует, что

$$r = \frac{\varepsilon}{I_{AC}} = 54\ \text{кОм}; \quad R = \frac{\varepsilon}{I_{BC}} = 1{,}94\ \text{МОм}.$$

Ответ: элементы в коробке соединены по схеме «звезда»; точкам схемы «1», «2», «3» соответствуют выводы C, A, B; $\varepsilon = 19{,}4\ B$; $r = 54$ кОм; $R = 1{,}94$ МОм.