Региональная студенческая олимпиада по физике 2023

Задача 1

Частица массы $m = 100$ г движется в плоскости по траектории, описываемой уравнениями движения (лемниската Бернулли):

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{a cos(\omega t)}{1 + sin^2(\omega t)} \\ y(t) = \dfrac{a sin(\omega t) cos(\omega t)}{1 + sin^2(\omega t)} \end{cases}$$

где a, ω – константы, t – время. Координаты начального положения частицы в метрах: $(\sqrt{2}; 0)$, причем, известно, что она возвратилась в начальное положение через время $T = 2\ c$.

Определите:

а) Константы a и ω.

б) Максимальную и минимальную скорость частицы, а также координаты точек, в которых они достигаются.

в) Максимальную центробежную силу инерции, действующую на частицу, если радиус кривизны лемнискаты Бернулли определяется как

$$R(x, y) = \frac{a^2}{3\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Решение:

Подставляя время $t = 0$ в уравнения движения, получим

$$\begin{cases} x(0) = a = \sqrt{2}\ \text{м}; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Из уравнений видно, что это положение повторится, когда $\omega t = 2\pi$. Откуда находим, что

$$\omega = {}^{2\pi}/_{T} = \pi\ \ {}^{\text{рад}}/_{\text{с}}.$$

Проекции скорости найдем, взяв соответствующие производные от функций координат:

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{a\omega\left(-sin(\omega t) - sin^3(\omega t) - 2 sin(\omega t) cos^2(\omega t)\right)}{\left(1 + sin^2(\omega t)\right)^2} = \dfrac{-a\omega sin(\omega t)\left(3 - sin^2(\omega t)\right)}{\left(1 + sin^2(\omega t)\right)^2} \\ v_y(t) = \dfrac{d}{dt}\left(x(t) sin(\omega t)\right) = \dfrac{-a\omega sin^2(\omega t)\left(3 - sin^2(\omega t)\right)}{\left(1 + sin^2(\omega t)\right)^2} + \dfrac{a\omega cos^2(\omega t)}{1 + sin^2(\omega t)} = \dfrac{a\omega\left(1 - 3 sin^2(\omega t)\right)}{\left(1 + sin^2(\omega t)\right)^2} \end{cases}$$

Тогда

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = a\omega \frac{\sqrt{9 sin^2(\omega t) - 6 sin^4(\omega t) + sin^6(\omega t) + 1 - 6 sin^2(\omega t) + 9 sin^4(\omega t)}}{\left(1 + sin^2(\omega t)\right)^2} =$$

$$= a\omega \frac{\sqrt{sin^6(\omega t) + 3 sin^4(\omega t) + 3 sin^2(\omega t) + 1}}{\left(1 + sin^2(\omega t)\right)^2} = a\omega \frac{\left(1 + sin^2(\omega t)\right)^{3/2}}{\left(1 + sin^2(\omega t)\right)^2} = \frac{a\omega}{\sqrt{1 + sin^2(\omega t)}}.$$

Исследуем функцию $\upsilon(t)$ на экстремум:

$$a_\tau(t)=\frac{d\upsilon}{dt}=-\frac{a\omega^2}{2}\frac{2sin(\omega t)cos(\omega t)}{\left(1+sin^2(\omega t)\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{a\omega^2}{2}\frac{sin(2\omega t)}{\left(1+sin^2(\omega t)\right)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

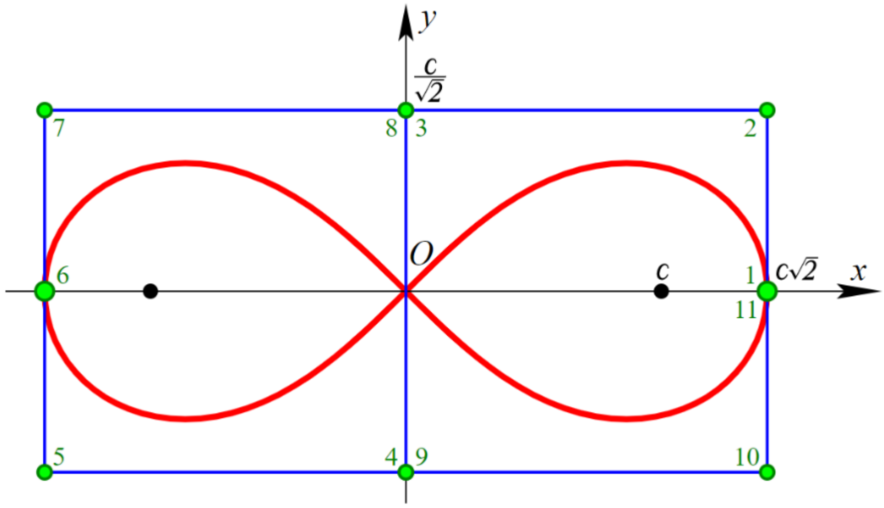
Скорость максимальна в моменты времени $t_n=\frac{\pi n}{\omega}=\frac{Tn}{2}, n=0,1,2,\ldots$ в точках $\left(\pm\sqrt{2};0\right)$.

Максимальная скорость $\upsilon_{max}=a\omega=\sqrt{2}\pi\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}}\approx 4{,}44\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}}$.

Скорость минимальна в моменты времени $t_m=\frac{\pi(2m+1)n}{2\omega}=\frac{T(2m+1)}{4}$, $m=0,1,2,\ldots$в точке $(0;0)$.

Минимальная скорость $\upsilon_{min}=a\omega/\sqrt{2}=\pi\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}}\approx 3{,}14\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}}$.

Построим график траектории:



Из рисунка видно, что радиус кривизны уменьшается при движении от начала координат и достигает минимума в точках $\left(\pm\sqrt{2};0\right)$. Это видно также из зависимости $\mathrm{R}(t)$:

$$R(t)=\frac{a^2}{3\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}}=\frac{a\sqrt{1+sin^2(\omega t)}}{3|cos(\omega t)|}.$$

$$R_{min}=R(t_n)=\frac{a\sqrt{1+sin^2(\omega t_n)}}{3|cos(\omega t_n)|}={}^{a}/_{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}\text{ м}\approx 0{,}47\text{ м}.$$

Ранее мы показали, что в этих точках скорость максимальна. Тогда нормальное ускорение частицы $a_n=\upsilon^2/R$ в этих точках максимально. Центробежная сила $F_{\text{цб}}=ma_n$ также максимальна в этих точках.

Определим максимальную центробежную силу инерции:

$$F_{\text{цб}max}=ma_{nmax}=\frac{m\upsilon_{max}^2}{R_{min}}=3ma\omega^2=3\cdot 0{,}1\cdot\sqrt{2}\cdot\pi^2\approx 4{,}19\text{ Н}.$$

Ответ: $a=\sqrt{2}$ м; $\omega=\frac{2\pi}{\omega}=\pi\ {}^{\text{рад}}/_{\text{с}}$; $\upsilon_{max}=a\omega\approx 4{,}44\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}}$ в точках $\left(\pm\sqrt{2};0\right)$; $\upsilon_{min}=a\omega/\sqrt{2}\approx 3{,}14\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}}$ в точке $(0;0)$; $F_{\text{цб}max}=3ma\omega^2\approx 4{,}19$ Н.

Задача 2

В термос с водой 100 °С опускают кусок льда при температуре 0 °С. При каком минимальном отношении масс льда и воды $x = \frac{m_л}{m_в}$ вода остынет до 0 °С? Найдите зависимость $t(x)$ и постройте её график, если t – температура равновесного термодинамического состояния, установившегося в термосе. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3\ \frac{Дж}{кг \cdot K}$. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5\ \frac{Дж}{кг}$. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Решение:

Составим уравнение теплового баланса:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0, \qquad (1)$$

где $Q_1 = \lambda m_л$ – количество теплоты, необходимое для плавления льда;

$Q_2 = c m_л (t - 0\ °\mathrm{C}) = c m_л t$ – количество теплоты, затрачиваемое на нагрев воды, полученной изо льда;

$Q_3 = c m_в (t - 100\ °\mathrm{C})$ – количество теплоты, выделяющееся при охлаждении воды.

$$\lambda m_л + c m_л t + c m_в (t - 100\ °\mathrm{C}) = 0. \qquad (2)$$

Преобразуем уравнение (2):

$$c(m_л + m_в)t + \lambda m_л - 100 c m_в = 0.$$

Поделим уравнение на $c m_в$ и введем переменную $x = \frac{m_л}{m_в}$:

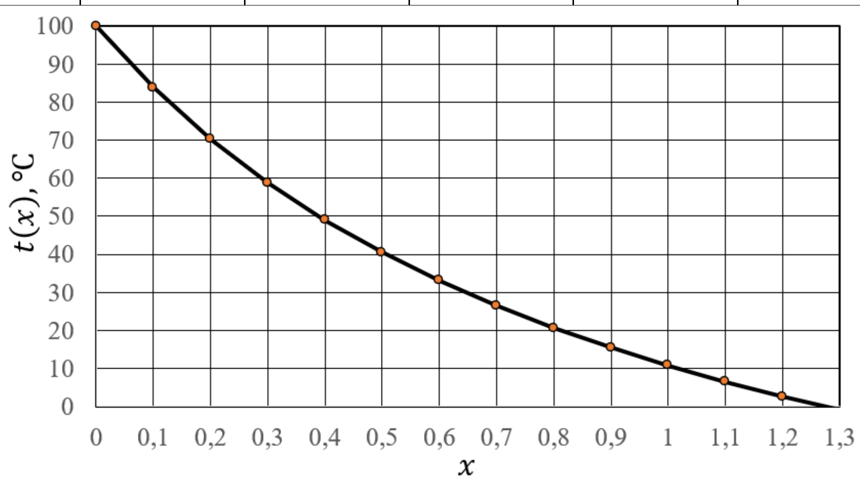
$$(x+1)t + \frac{\lambda}{c}x - 100 = 0.$$

Если $t = 0$, то $x = \frac{100c}{\lambda} = \frac{14}{11} = 1{,}27(27)$.

$$t(x) = \frac{100 - \frac{\lambda}{c}x}{1+x} = \frac{100 - \frac{\lambda}{c}x}{1+x}. \qquad (3)$$

Для построения графика сделаем расчет по формуле (3) для нескольких точек и построим таблицу.

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$t(x)$, °C	100	70	49	33	21	11	3



Ответ: $t(x) = \frac{100 - \frac{\lambda}{c}x}{1+x}$.

Задача 3

Электролитическая ванна заполнена водным раствором медного купороса $CuSO_4$. К электродам ванны подключают заряженный конденсатор емкости $C = 50$ мФ. Энергия электрического поля, заключенного внутри конденсатора $W = 10$ Дж. Определите массу двухвалентной меди, выделившейся на катоде при полной разрядке конденсатора.

Решение:

В растворе медного купороса в результате электролитической диссоциации молекул $CuSO_4$ будут образовываться ионы Cu^{2+} и SO_4^{2-}. При подключении заряженного конденсатора к электродам ванны положительно заряженный ион (катион) Cu^{2+} будет перемещаться к отрицательному электроду, где будет восстанавливаться до нейтрального атома меди массы m_{Cu}. Отрицательно заряженный ион (анион) SO_4^{2-} будет перемещаться к положительному электроду, где будет вступать в химическую реакцию с веществом электрода. При этом заряд отрицательной пластины конденсатора возрастет на величину $ze = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, а положительной на эту величину уменьшится. Исходя из пропорции, найдем массу меди, выделившуюся на катоде при полной разрядке конденсатора

$$m = \frac{q}{ze} m_{Cu}\,, \tag{1}$$

где q – заряд конденсатора (заряд положительно заряженной пластины), z – валентность меди. Энергия электрического поля, заключенного внутри конденсатора (энергия заряженного конденсатора) может быть рассчитана по формуле:

$$W = \frac{q^2}{2C}\,. \tag{2}$$

Массу атома меди выразим через молярную массу меди $M(Cu) = 63{,}5\ \text{г/моль}$ и число Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$:

$$m_{Cu} = \frac{M(Cu)}{N_A}. \tag{3}$$

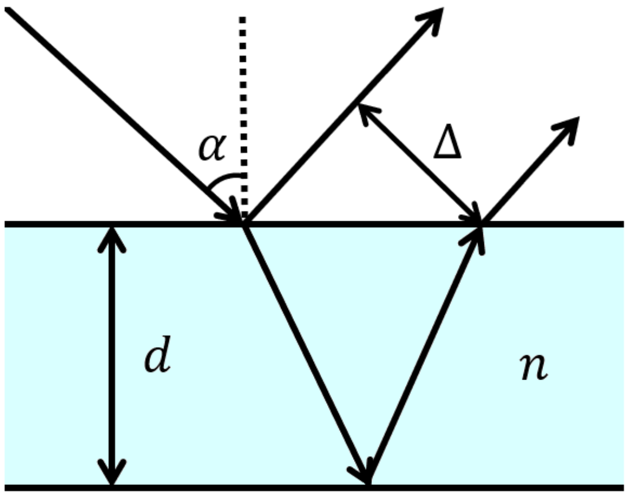
Из выражений (1), (2) и (3) получим:

$$m = \frac{M(Cu)\sqrt{2CW}}{zeN_A} = \frac{63{,}5 \cdot 10^{-3}\sqrt{2 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 10}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}} \approx 0{,}33\ \text{мг}. \tag{4}$$

Ответ: $m = \frac{M(Cu)\sqrt{2CW}}{zeN_A} \approx 0{,}33$ мг.

Задача 4

Луч падает под углом α на полупрозрачную плоскопараллельную пластинку и разделяется на два луча. Один луч отражается от внешней поверхности пластинки, а другой проходит внутрь пластинки, отражается от её внутренней поверхности и выходит наружу (см. рисунок). Определите:

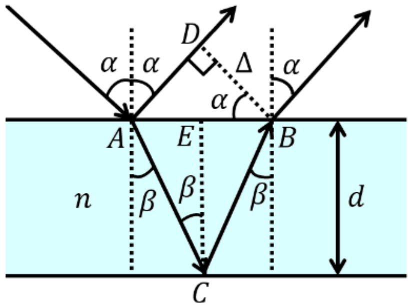


а) расстояние между лучами Δ, если толщина пластинки равна d и её показатель преломления относительно внешней среды равен n;

б) максимальное расстояние между лучами Δ_{max} для пластинки толщины d и показателем преломления $n = 1{,}25$.

Решение:

а) Обозначим угол преломления второго луча β. Согласно закону отражения, углы отражения лучей равны углам падения. Опустим перпендикуляры в точках падения лучей (точки A, B, C) и обозначим углы α и β (см. рисунок).



Запишем закон преломления для второго луча:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n. \qquad (1)$$

Закон преломления для второго луча при выходе из пластинки:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{1}{n}. \qquad (2)$$

Если сравнить выражения (1) и (2), то видно, что $\gamma = \alpha$, то есть второй луч после преломления выходит из пластинки под углом α и параллелен первому лучу.

Согласно чертежу (треугольник ABD), расстояние между лучами Δ равно:

$$\Delta = BD = AB \cdot \cos\alpha = 2 \cdot AE \cdot \cos\alpha. \qquad (3)$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ACE и определим отрезок AE:

$$AE = d \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{d \cdot \sin\beta}{\sqrt{1 - \sin^2\beta}}. \qquad (4)$$

Используя выражения (1), (3), (4), получим

$$\Delta = \frac{2d \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\beta}} = \frac{2d \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{n \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}}} = \frac{d \cdot \sin(2\alpha)}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}. \qquad (5)$$

б) Для нахождения максимального значения функции $\Delta(\alpha)$ в выражении (5), продифференцируем ее по α и приравняем производную к нулю:

$$\frac{d\Delta}{d\alpha} = 2d\left(\frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \dfrac{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}}{n^2 - \sin^2\alpha}\right) = 0. \qquad (6)$$

Выражение (6) равно нулю, когда выполняется

$$(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(n^2 - \sin^2\alpha) + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 0.$$

Раскрывая скобки и используя тригонометрическое тождество, получим

$$\sin^4\alpha - 2n^2\sin^2\alpha + n^2 = 0, \qquad (7)$$

откуда получим

$$\sin^2\alpha = \frac{2n^2 \pm \sqrt{4n^4 - 4n^2}}{2} = n^2\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right). \qquad (8)$$

Заметим, что $\sin^2\alpha \le 1$, поэтому в выражении (8) остается только нижний знак (“-”), тогда

$$\sin^2\alpha = n^2 - n\sqrt{n^2 - 1} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{5}{4}\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} = \frac{5}{8}\,. \qquad (9)$$

Используя (9), найдем: $\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{8}}$ и $\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{8}}$. Подставим полученные выражения в (5):

$$\Delta_{max} = \frac{2d \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} = \frac{2d \cdot \sqrt{\dfrac{5}{8}} \cdot \sqrt{\dfrac{3}{8}}}{\sqrt{\left(\dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{5}{8}}} = d. \qquad (10)$$

Ответ: а) $\Delta = \frac{d \cdot \sin(2\alpha)}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}$; б) $\Delta_{max} = d$.

Задача 5 (экспериментальная задача)

Цель работы: определить время скатывания шарика по алюминиевому уголку, расположенному под углом к горизонту. Рассчитать погрешность эксперимента и сравнить с теоретическим значением.

Приборы и принадлежности:

1) штатив для фиксации уголка;
2) алюминиевый уголок с отметкой длины 1 метр;
3) электронный секундомер;
4) миллиметровая линейка (30 см);
5) шарик.

При выполнении эксперимента рекомендуется:

1) путь, проходимый шариком по уголку L, выбрать равным 1 метру;
2) высоту центра масс шарика в начальном положении h выбрать равной 25 см;
3) для определения случайной ошибки эксперимента провести серию из 5 опытов, использовать значение доверительной вероятности $\alpha = 0{,}9$;
4) при выводе теоретической формулы для времени скатывания шарика пренебречь силами трения и проскальзыванием, шарик считать однородным.

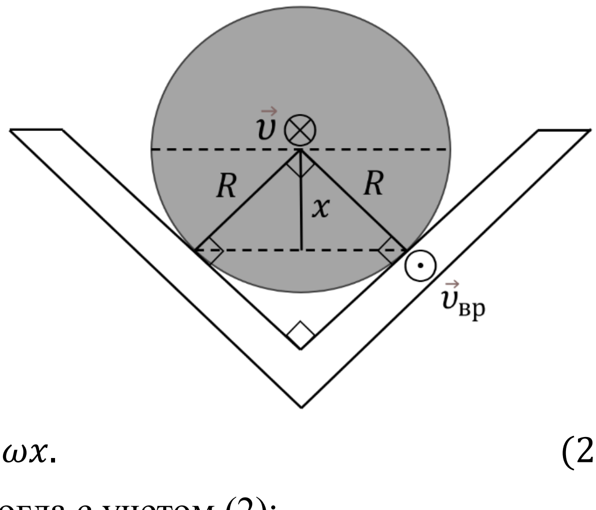
Выполнение работы:

Получим формулу для времени скатывания шарика. Поскольку силами трения можно пренебречь, выполняется закон сохранения механической энергии для начального и конечного положений шарика:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \tag{1}$$

где $I = \frac{2}{5}mR^2$ – момент инерции однородного шарика, R – его радиус, $\omega = v_{\text{вр}}/x$ – угловая скорость вращения шарика при движении без проскальзывания, v – скорость шарика в конце спуска, x – расстояние от точек опоры шарика до оси вращения.

При движении шарика по уголку он опирается на две точки (см. рисунок). Центр масс шарика движется поступательно со скоростью v. При движении без проскальзывания точки опоры остаются неподвижными, при этом для точек опоры скорость вращательного движения $v_{\text{вр}}$ равна скорости их поступательного движения v:



$$v = v_{\text{вр}} = \omega x. \tag{2}$$

Из рисунка видно, что расстояние $x = R/\sqrt{2}$, тогда с учетом (2):

$$\omega = \frac{\sqrt{2}v}{R}\,. \tag{3}$$

Подставляя выражение для момента инерции шарика и выражение (3) в (1), получим:

$$gh = \frac{v^2}{2} + \frac{2v^2}{5} = 0{,}9v^2. \tag{4}$$

Окончательно, из (4) выразим скорость шарика:

$$v = \sqrt{\frac{gh}{0{,}9}}. \tag{5}$$

При движении шарика на него действуют постоянные по направлению и величине силы, поэтому ускорение шарика будет постоянным. Запишем уравнения для равноускоренного движения с нулевой начальной скоростью:

$$\begin{cases} v = at; \\ L = \dfrac{at^2}{2}. \end{cases} \tag{6}$$

Исключая ускорение из системы уравнений (6), найдем время скатывания шарика:

$$t = \frac{2L}{v} = 2L\sqrt{\frac{0{,}9}{gh}}. \tag{7}$$

Для длины $L = 1$ м, высоты $h = 25$ см получим теоретическое время скатывания шарика:

$$t_{\text{теор}} = 2 \cdot 1\sqrt{\frac{0{,}9}{9{,}81 \cdot 0{,}25}} \approx 1{,}21 \text{ с.}$$

Эксперимент:

Проведем серию опытов, отпуская шарик с отметки 1 метр, на высоте 25 см, с нулевой начальной скоростью. В каждом опыте измерим время скатывания шарика. Результаты эксперимента внесем в таблицу.

№	L, м	h, см	t, с	$\langle t\rangle$, с
1	1	25	1,29	1,25
2			1,18	
3			1,26	
4			1,21	
5			1,30	

Вычислим случайную ошибку эксперимента для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}9$:

$$\Delta t_{\text{сл}} = t_{0{,}9;5} S_t = 2{,}13 \cdot \sqrt{\frac{0{,}04^2 + 0{,}07^2 + 0{,}01^2 + 0{,}04^2 + 0{,}05^2}{5 \cdot (5-1)}} \approx 0{,}05 \text{ с.}$$

Приборная погрешность секундомера равна его цене деления: $\Delta t_{\text{пр}} = 0{,}01$ с.

Абсолютная погрешность эксперимента равна: $\Delta t = \sqrt{t_{\text{сл}}^2 + t_{\text{пр}}^2} \approx 0{,}05$ с.

Относительная погрешность эксперимента равна: $\varepsilon_t = \frac{\Delta t}{\langle t\rangle} \cdot 100\% = 4\%$.

Запишем ответ: $\boldsymbol{t_{\text{эксп}} = (1{,}25 \pm 0{,}05)}$ с.

Теоретическое значение времени скатывания шарика $\boldsymbol{t_{\text{теор}} = 1{,}21}$ с входит в диапазон экспериментальных значений.