Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания

Омск 2005

Составитель Ревина И.В.

Методические указания предназначены для студентов машиностроительных специальностей (120100, 120200) при изучении дисциплины «Планирование эксперимента», УНИРС. Приведенные материалы также могут быть полезны при работе над курсовыми работами и дипломным проектом.

Редактор Т.А. Москвитина

Компьютерная верстка − А.В. Алёшина

ИД № 06039 от 12.10.2001

Свод. темплан 2005 г.
Подписано к печати 24.10.2005. Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 3,0.
Тираж 100 экз. Заказ 726.

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр. Мира, 11
Типография ОмГТУ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Принятие проектных решений в машиностроении и оценка их качества в основном осуществляется на основании данных эксперимента. А усложнение объектов испытания вызывает резкое повышение стоимости их исследования. Поэтому задача извлечения наибольшего объема информации об изучаемых процессах или устройствах при ограничениях по затратам является достаточно актуальной.

Измерение любой экспериментальной величины всегда осуществляется при воздействии некоторых помех, которые, несмотря на стремление исследователя свести их к минимуму, никогда не могут быть полностью устранены. Необходимость применения аппарата математической статистики при обработке результатов измерений, где случайная составляющая соизмерима с самими результатами, очевидна, и соответствующие методы обработки уже давно используются в экспериментальной практике.

Долгое время внимание математической статистики было обращено к совершенствованию методов обработки при заданном способе проведения эксперимента. Выбор самого эксперимента, т. е. как, где и когда проводить измерения, определялся в основном интуицией экспериментатора.

Усложнение эксперимента установок вызвало резкое повышение стоимости экспериментальных исследований. В связи с этим оказывается совершенно необходимым широкое применение методов, которые не только давали бы способ обработки экспериментальных данных, но и позволяли бы, оптимальным образом организовывать эксперимент.

Отметим, что планирование целесообразно лишь в тех случаях, когда экспериментатор четко представляет конечную цель проводимого исследования.

К настоящему времени можно выделить два основных направления в математической теории планирования экспериментов: планирование экстремальных экспериментов и планирование экспериментов по выяснению механизма явлений.

Планирование первого типа применяется в тех случаях, когда экспериментатора интересуют условия, при которых изучаемый процесс удовлетворяет некоторому критерию оптимальности. Например, при разработке новых технологических процессов критерий оптимальности состоит в требовании максимальности повысить производительность процесса. Планирование при этом заключается в поиске таких значений режимов процесса, при которых выполняется поставленное требование.

Нередко экспериментатору необходимо выяснить поведение исследуемого объекта в целом, т.е. выяснить механизм явления. Например, при изучении химико-технологического процесса может возникнуть необходимость выяснить зависимость выхода продукта реакции от температуры, давления, реагентов и т. д. На языке математики задача подобного рода формулируется следующим образом:

необходимо найти такую функцию, которая определяет связь между выходом продукта реакции и величинами, влияющими на ход реакции (температура, процентное содержание реагентов и т. д.), или более кратко: найти математическую модель данного процесса.

Таким образом, под выяснением механизма явления здесь, в отличие от обычного использования данного термина, подразумевается не прямое исследование взаимодействий на уровне элементарных частиц, молекул и т. п., а изучение феноменологической стороны явления. Иными словами, нам безразлично, например, каким образом взаимодействуют две молекулы, а важна лишь зависимость выхода какого-либо продукта от процентного содержания реагентов, которая соответствует этому взаимодействию и которая может непосредственно измеряться в данном эксперименте.

Получив математический вид зависимости некоторой величины от соответствующих факторов, мы тем самым получили информацию, на основе которой мы как специалисты данной отрасли науки, привлекая необходимый теоретический аппарат, можем сделать выводы о конкретном виде элементарных взаимодействий.

Более подробно рассмотрим процесс поиска математической модели, представленный на рис. 1.

Рис. 1. Процесс поиска математической модели

Блок 1 соответствует экспериментальному этапу работы, т.е. техническому осуществлению спланированных ранее опытов. Обычно проведению планируемых экспериментов предшествует некоторая работа, которая позволяет получить грубую информацию об исследуемом процессе, так как при полном отсутствии априорной информации планирование невозможно.

Следующим этапом работы (блок 2) является вычисление оценок искомых параметров, представление математической модели. После того как предложена модель (процесса, явления и т.д.), необходимо проверить, согласуется ли она с экспериментальными данными (блок 3). Если полученная модель (функция) достаточно хорошо удовлетворяет экспериментальным данным, то в зависимости от обстоятельств эксперимент либо прекращается, либо планируется дополнительный эксперимент по уточнению всей совокупности параметров или некоторой наиболее интересной для экспериментатора их группы (блок 4).

Если полученная модель (функция) не удовлетворяет экспериментальным данным, то возникает необходимость более тщательного анализа происходящих явлений. При отсутствии каких-либо доводов в пользу выдвижения новой модели следует обратиться к планированию уточняющего эксперимента. Если же имеются факты, которые говорят о возможности описания изучаемых явлений некоторой иной по сравнению с первоначальной моделью, то необходимо приступить к планированию эксперимента, который позволил бы выяснить, какая из этих моделей наилучшим образом описывает изучаемый объект (блок 6).

Таким образом, стратегию проведения эксперимента по выяснению математической модели при априорных сведениях, соответствующих уровню 3, можно представить в виде последовательности циклов 4 – 1 – 2 – 3 и 5 – 6 – 1 – 2 – 3 (см. рис.1). Порядок чередования этих циклов определяется результатами проверки согласия между моделью и данными (блок 3).

Методические указания состоят из 7 практических занятий, в каждом из которых рассмотрен определенный этап планирования эксперимента. Приложение содержит варианты задач. Работая с материалом практических занятий, студент может самостоятельно выбрать объект исследования, согласовав его с преподавателям или воспользоваться вариантами задач, представленными в приложении. Кроме того, для удобства расчетов в приложении содержатся справочные таблицы.

Практическая работа №1
ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Цель работы: приобрести знания, умения и навыки проведения дисперсионного анализа.

Общие положения

Во многих практических задачах на результаты исследования (отклик, выходную величину) часто оказывает влияние целый ряд факторов, действие которых нельзя оценить количественно. Однако исследователя интересует вопрос, насколько существенно влияние того или иного фактора. Пусть, например, какая-либо технологическая операция выполняется параллельно на нескольких станках. Для правильной организации дальнейших этапов технологического процесса необходимо знать, в какой мере однотипными являются средние размеры деталей, получаемых на параллельно работающих станках. При экспериментальных исследованиях, проводимых различными операторами на различном оборудовании, важно изучение влияния двух факторов на результат эксперимента – оператора и оборудования. Если к тому же данные исследования проводились в различное время (или в различных местах), то вводится еще один фактор – время (место) проведения эксперимента. Аналогичная задача возникает при исследовании партий изделий, получаемых от различных поставщиков, при выяснении влияния различных свойств сырья на качество продукции и т. д.

Для выявления степени влияния контролируемых факторов на отклик используют дисперсионный анализ. В зависимости от количества факторов, включенных в анализ, различают однофакторный, двухфакторный и многофакторный дисперсионный анализ.

Проведение дисперсионного анализа возможно, если:

1) выходная величина (отклик) в силу физических свойств зависит от N факторов (не имеющих количественного описания) и от их парных взаимодействий;

2) каждый фактор можно варьировать на нескольких (n) уровнях (эксперимент проводят несколько операторов, применяются различные методы измерения и т. д.);

3) каждую опытную ситуацию можно наблюдать несколько (m) раз, т. е. реализуется серия параллельных опытов;

4) выходная величина (отклик) в общем случае является случайной величиной, подчиняющейся нормальному закону распределения с одинаковыми дисперсиями во всех опытах.

Рассмотрим идеальный вариант – случайные воздействия отсутствуют и необходимо исследовать влияние только одного фактора.

Результаты всех измерений удобно представлять в виде таблицы, которую называют матрицей наблюдений (табл. 1).

Таблица 1

Таблица наблюдений

Номер уровня фактора	Уровень фактора	Наблюдения	Число дублирующих опытов*
1	X_1	$Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1j}, \dots, Y_{1m_1}$	m_1
2	X_2	$Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2j}, \dots, Y_{2m_2}$	m_2
3	X_3	$Y_{31}, Y_{32}, \dots, Y_{3j}, \dots, Y_{3m_3}$	m_3
i	X_i	$Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{ij}, \dots, Y_{im_i}$	m_i
n	X_n	$Y_{n1}, Y_{n2}, \dots, Y_{nj}, \dots, Y_{nm_n}$	m_n

Примечание: *в рассматриваемом примере считаем, что $m_i = const$.

Для каждой серии дублирующих опытов вычисляют дисперсии воспроизводимости $S^2_{воспрi}$:

$$S^2_{воспр_i} = \frac{1}{m_i - 1}\sum_{j=1}^{m_i}(Y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \qquad \bar{y}_i = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}, \qquad f = m - 1,$$

где Y_{ij} – текущее значение случайной величины; $\bar{y}_i$ – среднее арифметическое значение; f – число степеней свободы; m – число наблюдений (число дублирующих опытов).

Далее, суммируя полученные значения дисперсий, определяют величины $\sum_{i=1}^{n} S^2_{воспр_i}$.

В процессе измерений обычно имеют место резко выделяющиеся («дикие») измерения, вызывающие соответствующее резкое увеличение значения дисперсии воспроизводимости. Для ответа на вопрос, можно ли отбросить «дикие» измерения, осуществляется проверка однородности дисперсий с использованием критерия Кохрена:

$$G_{расч} = \frac{S^2_{\max}}{\sum_{i=1}^{n} S_{воспр_i}} < G_{табл},$$

где $G_{расч}$, $G_{табл}$ – расчетное (опытное) и табличное значения критерия Кохрена (табличные значения представлены в приложении); $S^2_{\max}$ – дисперсия «дикого» измерения.

Если $G_{расч} < G_{табл}$, то дисперсии однородны и «дикие» измерения отбрасывать нельзя. Если $G_{расч} > G_{табл}$, то «дикие» измерения отбрасываются и значения $\sum_{i=1}^{n} S^2_{воспр_i}$ рассчитываются без значения $S^2_{\max}$.

Пример

Пусть на восьми станках изготавливаются однотипные детали. Требуется установить, одинакова ли точность станков.

Для каждого станка проводили по три параллельных измерения размеров детали. Результаты наблюдений представлены в табл. 2.

X_1 – X_8 – факторы (станки), Y_1 –Y_2 – выходная величина (результаты измерений).

Таблица 2

Номер уровня (номер станка)	Уровень фактора	Параллельные значения, мм		
		Y_1	Y_2	Y_3
1	X_1	68,15	66,50	65,90
2	X_2	68,90	66,90	66,50
3	X_3	61,15	61,40	58,30
4	X_4	62,12	61,50	58,60
5	X_5	72,00	68,85	70,35
6	X_6	71,10	68,40	72,30
7	X_7	64,90	65,00	61,80
8	X_8	61,40	58,80	61,90

1. Вычисляем среднее арифметическое для каждого станка по результатам параллельных измерений:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij} .$$

Для первого станка $\bar{y}_1 = \frac{1}{3}(68{,}15 + 66{,}50 + 65{,}90) = 66{,}85$, аналогично вычисляем для других станков. Результаты расчетов записываем в табл. 3

2. Вычисляем дисперсию воспроизводимости параллельных измерений:

$$S^2_{воспр_i} = \frac{1}{m_i - 1}\sum_{j=1}^{m_i} (Y_{ij} - \bar{y}_i)^2 .$$

Для первого станка

$$S^2_{воспр_1} = \frac{1}{3-1}\left[(68{,}15-66{,}85)^2+(66{,}50-66{,}85)^2+(65{,}90-66{,}85)^2\right]=1{,}35.$$

Результаты расчетов заносим в табл. 3

Таблица 3

Номер уровня (номер станка)	Уровень фактора	Параллельные значения, мм			$\bar{y}_i$	$S^2_{воспр_i}$
		Y_1	Y_2	Y_3		
1	X_1	68,15	66,50	65,90	66,85	1,35
2	X_2	68,90	66,90	66,50	67,43	2,65
3	X_3	61,15	61,40	58,30	60,28	2,96
4	X_4	62,12	61,50	58,60	60,74	3,53
5	X_5	72,00	68,85	70,35	70,40	2,48
6	X_6	71,10	68,40	72,30	70,60	3,99
7	X_7	64,90	65,00	61,80	63,90	3,31
8	X_8	61,40	58,80	61,90	60,70	2,77

3. Вычисляем сумму дисперсии воспроизводимости для всех станков:

$$\sum_{i=1}^{8} S^2_{воспр_i} = 1{,}35+2{,}65+2{,}96+3{,}53+2{,}48+3{,}99+3{,}31+2{,}77 = 22{,}05.$$

4. Из табл. 3 видно, что для шестого станка измерения являются «дикими», так как значение его дисперсии гораздо больше остальных. Поэтому осуществляем проверку дисперсий с использованием критерия Кохрена.

$$G_{расч} = \frac{S^2_{\max}}{\sum_{i=1}^{n} S_{воспр_i}} < G_{табл},$$

$$G_{расч} = \frac{3{,}99}{22{,}05} = 0{,}18.$$

Табличное значение критерия Кохрена $G_{табл}$, найденное по таблице прил. 1 (при N = 8 (количество станков) $f = m - 1 = 3 - 1 = 2$), равно 0,5157. Так как выполняется условие $G_{расч} < G_{табл}$ (0,18 < 0,5157), то дисперсии однородны и шестое измерение отбрасывать нельзя.

Сравнение полученных значений дисперсий дает наглядное представление об одинаковой точности и однородности работы станков.

Методика выполнения работы

1. Определить цель исследования (точность станков, качество СОЖ и т.д.). Определить результаты исследования (отклик, выходную величину) и фактор.

2. Изменяя фактор, произвести сбор информации о результатах исследования.

3. Составить таблицу наблюдений (табл. 1).

4. Выполнить необходимые для однофакторного дисперсионного анализа расчеты.

5. Дать заключение по результатам исследования.

Задание

Получить у преподавателя задание на проведение работы или выбрать его самостоятельно, согласовав задание с преподавателем. Работу выполнить по предложенной методике.

Контрольные вопросы

1. Для какой цели применяют дисперсионный анализ?

2. Назовите этапы проведения дисперсионного анализа.

3. Какие рекомендации Вы можете дать по выполненному Вами исследованию?

Практическая работа №2
КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Цель работы: приобрести знания, умения и навыки проведения корреляционного анализа.

Общие положения

Одной из важных статистических задач является установление взаимосвязи между изучаемыми факторами (например, нужно выяснить, изменяются ли два признака самостоятельно, независимо друг от друга, или же изменение одного из них вызывает изменение другого).

Корреляционные связи – когда каждому значению переменной соответствует не одно, а несколько значений другой переменной.

Примерами корреляционной связи являются зависимости: между пределами прочности и текучести стали определенной марки, между погрешностью размера и погрешностью формы поверхности детали, обработанной определенным методом, между температурой испытания и ударной вязкостью стали, между усилием прижима ролика и шероховатостью накатанной детали. В первых двух примерах имеет место корреляционная связь между двумя откликами, а в третьем и четвертом – между фактором, который является случайной величиной в связи с погрешностью измерения, и откликом.

По характеру корреляционные связи могут быть прямолинейными и криволинейными.

Прямолинейной называется такая корреляционная связь, когда равным изменениям одной переменной соответствуют равные изменения другой переменной (рис. 2 *а, б*). В случае криволинейной корреляции равным изменениям одной переменной могут соответствовать любые изменения другой переменной (рис. 2 *в*).

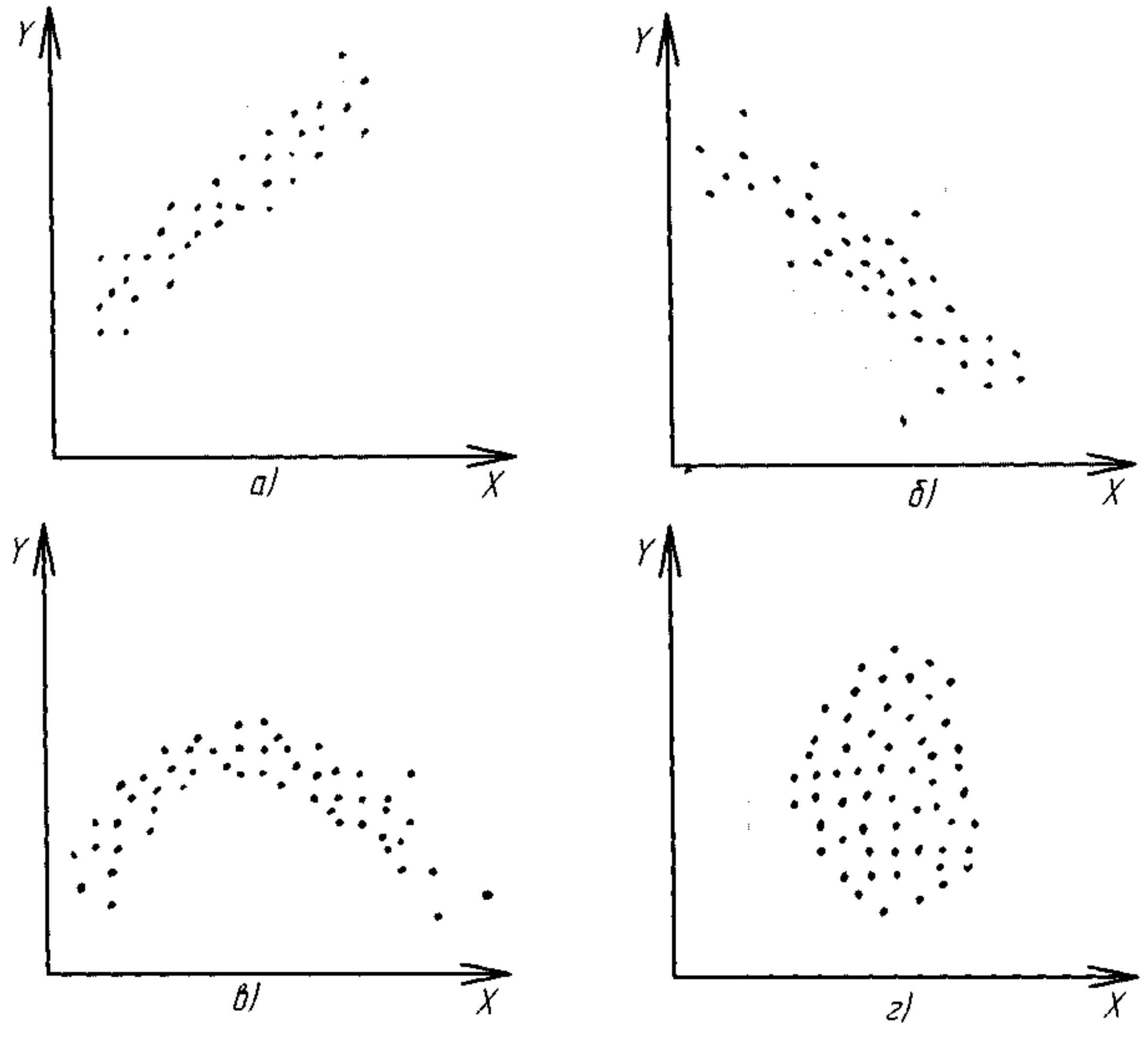

Рис. 2. Корреляционные зависимости (диаграммы рассеивания)

Под положительной корреляцией подразумевается такая корреляция, когда с увеличением одной переменной увеличивается другая переменная (рис. 2 *а*). При отрицательной корреляции с увеличением одной переменной другая, наоборот, убывает (рис. 2 *б*).

На рис. 2 *г* представлен случай, когда между переменными отсутствует связь (нет корреляции).

Для установления корреляционной связи между переменными X и Y результаты наблюдений представляют в виде корреляционной матрицы (табл. 4). Для этого значения X и Y разбиваются на ряд интервалов и определяются средние значения интервалов. В ячейки, образованные пересечением строк и столбцов, заносятся частоты попадания пар значений (X, Y) в соответствующие интервалы по X и Y. Например, частота 3, занесенная в ячейку пересечения первой строки и первого столбца, означает, что в интервал изменения X от 10 до 12 и в интервал изменения Y от 20 до 30 попало 3 наблюдавшихся значения.

В последней строке и в последнем столбце записаны суммарные частоты по соответствующим строке и столбцу.

Уже из обзора табл. 4 видно, что с возрастанием X возрастает и Y. Однако эту связь целесообразно выразить количественно и оценить статистически.

Эта оценка производятся следующим образом. Вычисляем частные средние значения для $\overline{X}$ по строкам. Для первой строки значению $\overline{Y}$ = 25 соответствуют значения $\overline{X}$ = 11 и 13 с частотами 3 и 2.

Частная средняя этих значений

$$\overline{X}_1 = \frac{11 \cdot 3 + 13 \cdot 2}{3 + 2} = 11{,}8.$$

Частная средняя для второй строки

$$\overline{X}_2 = \frac{13 \cdot 6 + 15 \cdot 4 + 25 \cdot 1}{6 + 4 + 1} = 14{,}8.$$

Результаты вычисления частных средних для всех строк запишем в табл. 5.

Таблица 4

Корреляционная матрица

X Y	10-12 11	12-14 13	14-16 15	16-18 17	18-20 19	20-22 21	22-24 23	24-26 25	26-28 27	28-30 29	30-32 31	32-34 33	m_x
20-30 25	3	2											5
30-40 35		6	4					1					11
40-50 45		1	13	5									19
50-60 55		1	2	4	8								15
60-70 65			1		4	4	2						11
70-80 75					2	6	6	1					15
80-90 85							1	5					6
90-100 95								1	4	1			6
100-110 105									2	4	1	1	8
110-120 115										1		1	2
120-130 125												1	1
m_y	3	10	20	9	14	10	9	8	6	6	1	3	

Таблица 5

Значения частных средних

$\overline{Y}_i$	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
$\overline{X}_i$	11,8	14,8	15,42	17,53	20,09	21,80	24,66	27,00	29,25	31,00	33,00

Основной задачей корреляционного анализа является определение тесноты линейной корреляционной связи, которую характеризует коэффициент корреляции r, вычисляемый по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{mS_X S_Y}, \qquad S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=m}^{m}(X_i - \overline{X})^2}{m-1}}, \qquad S_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=m}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2}{m-1}},$$

где S_X , S_Y – среднеквадратические отклонения; m = 11.

Если принять (табл. 4), что $\overline{Y}_i = Y_i$, $\overline{X}_i = X_i$, то

$$\overline{Y} = \frac{1}{11}(25+35+45+55+65+75+85+95+105+115+125) = 75;$$

$$\overline{X} = \frac{1}{11}(11{,}8+14{,}8+15{,}42+17{,}53+20{,}09+21{,}80+24{,}66+27{,}00+29{,}25+$$
$$+31{,}00+33{,}00) = 22{,}39.$$

Выполнив расчеты, получим r_{xy} = 0,80.

Значение коэффициента корреляции колеблется от -1 до +1. Знак плюс указывает на положительную связь, а знак минус – на отрицательную. Коэффициент корреляции, равный единице, указывает на функциональную зависимость между переменными. Коэффициент корреляции, равный нулю, указывает либо на отсутствие связи, либо на то, что она имеет криволинейный характер.

Принято считать, что если $r_{xy} \geq$ 0,7I, то связь между переменными тесная. Если r_{xy} < 0,50, то связь между изучаемыми переменными слабая.

Расчет коэффициента корреляции осуществлялся для выборочной совокупности. Поэтому возникает вопрос о достоверности коэффициента корреляции. Проверка коэффициента корреляции производится при помощи критерия Стьюдента. Расчетное (опытное) значение критерия

$$t_{расч} = r\sqrt{(m-2)/(1-r^2)}\ .$$

Критическое (табличное $t_{табл.}$) значение критерия определяем из таблицы прил. 2 по принятому уровню значимости и числу степеней свободы $f = m - 2$.

Если $|\ t_{расч}\ | < t_{табл.}$, то принимается гипотеза, что связь между переменными отсутствует, величины являются независимыми. В противном случае связь между двумя свойствами является доказанной.

В рассматриваемом примере $t_{расч} = 0{,}8\sqrt{(11-2)/(1-0{,}8^2)} = 2{,}96$. При числе степеней свободы $f = m - 2 = 11 - 2 = 9$ и уровне значимости 0,05 $t_{табл} = 2{,}26$ условие $|\ t_{расч}\ | < t_{табл}$ не выполняется. Поэтому имеются основания считать, что взаимосвязь между изучаемыми факторами существует.

Методика выполнения работы

1. Произвести сбор информации исследуемых параметров (X, Y).
2. Составить таблицу исходных данных параметров X и Y.
3. На миллиметровной бумаге построить координатную сетку и нанести точками исходные данные таблицы.
4. Выполнить необходимые расчеты.
5. Сделать заключения по результатам исследования.

Задание

Получить у преподавателя задание на проведение работы или выбрать его самостоятельно, согласовав задание с преподавателем. Работу выполнить по предложенной методике.

Контрольные вопросы

1. Для какой цели применяют диаграмму рассеивания?
2. Какие виды корреляционных зависимостей Вы знаете?
3. Как строится корреляционная матрица?
4. Какой величиной определяется теснота корреляционных связей?
5. Этапы выполнение корреляционного анализа.

Практическая работа №3
ПРОВЕРКА СЛУЧАЙНОСТИ И НЕЗАВИСИМОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В ВЫБОРКЕ

Цель работы: приобрести навыки в оценке независимости результатов измерений в выборке.

Общие положения

До статистической обработки результатов измерения отклика исследуемой величины необходимо убедиться в том, что они являются стохастически независимыми. Альтернативной гипотезой может быть предположение о наличии монотонного или циклического смещения (дрейфа) значения отклика, вызванного неконтролируемым фактором. Подобный случай может иметь место при анализе размеров деталей, обрабатываемых на настроенном станке, когда вследствие изнашивания инструмента или нагрева станка центр группирования размеров постепенно смещается при неизменной стандартной погрешности. Проверка случайности и независимости результатов измерений в выборке осуществляется с использованием критериев последовательных разностей τ.

Наблюдаемое (расчетное) значение критерия

$$\tau_{расч} = c^2/S^2,$$

где $c^2 = \dfrac{1}{2(m-1)}\sum_{i=1}^{m-1}(Y_{i+1}-Y_i)^2$; m – объем выборки; i – порядковый номер измерения отклика в выборке; S^2 – оценка дисперсии.

Табличное (критическое) $\tau_{табл}$ значение определяется из таблицы прил. 6 в зависимости от принятой доверительной вероятности Р и объема выборки m. Если $\tau_{расч} < \tau_{табл}$, то гипотеза о независимости и случайности измерений в выборке отвергается.

Пример

По результатам измерения деталей, обработанных на токарно-револьверном автомате (рис. 3), необходимо проверить наличие или отсутствие дрейфа размеров. Объем выборки m = 40.

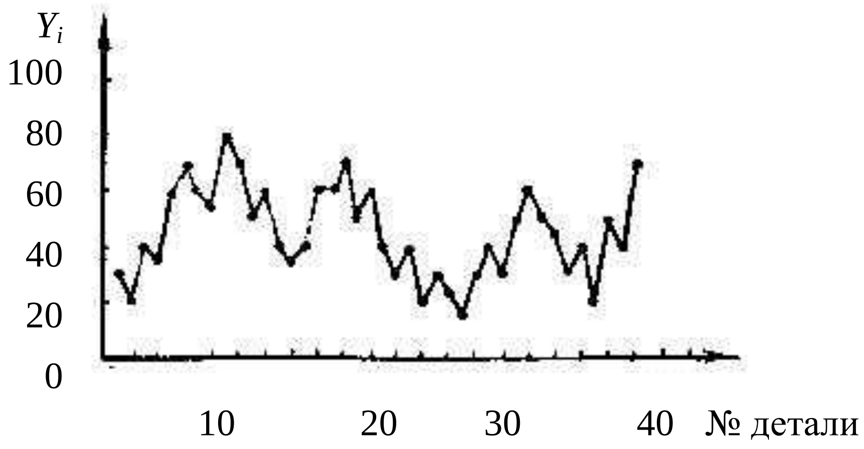

Рис. 3. Временнóй ряд (изменение размеров деталей, обрабатываемых на автомате)

$$\bar{y} = \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40} Y_i = 45 \text{ мкм},$$

$$S^2 = \frac{1}{40-1}\sum_{i=1}^{40} (Y_i - \bar{y})^2 = 267{,}95 \text{ мкм}^2,$$

$$c^2 = \frac{1}{2(40-1)}\sum_{i=1}^{39} (Y_{i+1} - Y_i)^2 = 114{,}74 \text{ мкм}^2,$$

$$\tau_{расч} = 114{,}74 / 267{,}95 = 0{,}428.$$

По таблице прил. 6 для m = 40 и Р = 0,95 получаем $\tau_{табл}$ = 0,742. Так как $\tau_{расч} < \tau_{табл}$ (0,428 < 0,742), гипотезу об отсутствии дрейфа следует отклонить. Следовательно, размер обрабатываемых деталей зависит от неучтенного фактора, вызвавшего циклическое смещение центра группирования размеров.

Методика выполнения работы

1. Выбрать объект исследования (в качестве объекта исследования рекомендуется выбрать объект, с которым предполагается работать в последующих практических работах).
2. Произвести необходимые измерения.
3. Выполнить необходимые расчеты.
4. Сделать заключения по результатам исследования.

Задание

Получить у преподавателя задание на проведение работы или выбрать его самостоятельно, согласовав задание с преподавателем. Работу выполнить по предложенной методике.

Контрольные вопросы

1. Зачем необходимо выполнять проверку случайности и независимости результатов измерений в выборке?

2. Этапы выполнения проверки случайности и независимости результатов измерений в выборке.

Практическая работа №4
ВЫБОР ФАКТОРОВ, УРОВНЕЙ ИХ ВАРЬИРОВАНИЯ И НУЛЕВОЙ ТОЧКИ

Цель работы: приобрести знания, умения и навыки по выбору факторов, их уровней варьирования, кодированию факторов.

Общие положения

Под фактором понимают величину, воздействующую на исследуемый процесс и принимающую в некоторый момент определенное значение. Фактор считается заданным, если указаны его название и область определения. В выбранной области определения он может иметь несколько значений, которые соответствуют числу его различных состояний. Выбранные для эксперимента количественные и качественные состояния фактора носят название уровней фактора.

В качестве факторов рекомендуется выбирать такие независимые переменные, которые соответствуют одному из разумных в рассматриваемом случае воздействий на объект исследований, могут быть измерены имеющимися средствами с достаточно высокой гарантированной точностью, являются управляемыми и однозначными, совместимы один с другим, не связаны между собой линейными корреляционными связями. Желательно, чтобы факторы оценивались количественно, хотя возможно применение факторов, характеризующихся только качественно.

В планировании эксперимента значения факторов, соответствующие определенным уровням их варьирования, выражаются в кодированных величинах.

Кодирование – это перевод натуральных значений уровней факторов в кодовые безразмерные величины с целью построения стандартной матрицы эксперимента.

Для факторов с непрерывной областью определения кодирование осуществляют по формуле

$$X_i = \frac{x_i - x_{io}}{\Delta x_i},$$

где X_i – кодовое значение *i-го* фактора; x_i – натуральное текущее значение *i-го* фактора; x_{i0} – начальный (нулевой) уровень фактора; Δx_i – интервал варьирования *i-го* фактора, который рассчитывается как

$$\Delta x_i = \frac{x_{i\max} - x_{i\min}}{2}.$$

После кодирования уровни факторов принимают значения -1, +1: +1 – верхний уровень; -1 – нижний уровень, 0 – нулевой уровень.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание – нижний уровни факторов. Другими словами, интервал варьирования – это расстояние на координатной оси между основным (нулевым) и верхним уровнем; между основным и нижним уровнем.

Если, например, два фактора совместны, то границы образуют на плоскости некоторый прямоугольник, называемый факторным пространством (рис. 4).

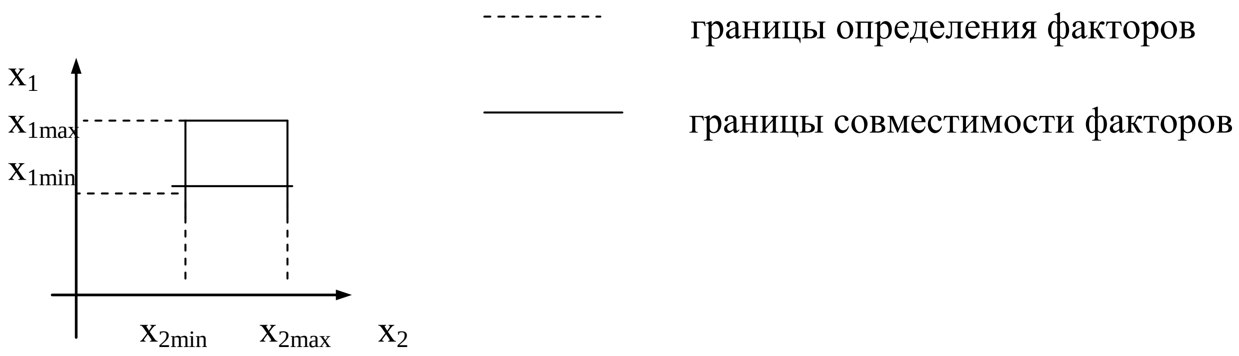

Рис. 4. Область определения факторов

После выбора факторов устанавливают нулевую точку и выбирают интервалы варьирования для установления верхних и нижних уровней факторов, которые в кодированном обозначении соответствуют +1 и -1.

Интервал варьирования фактора выбирают с учетом того, что значения факторов, соответствующие уровням +1 и -1, должны быть достаточно отличимы от значения, соответствующего нулевому уровню. Поэтому во всех случаях величина интервала варьирования должна быть больше удвоенной квадратичной ошибки фиксирования данного фактора.

Здесь необходимо учитывать, что чрезмерное увеличение интервалов варьирования может привести к снижению эффективности поиска оптимума, а малый интервал варьирования уменьшает область эксперимента, что замедляет поиск оптимума.

Выбор факторов завершается составлением списка всех факторов, которые заслуживают внимания. При этом указываются наименования и обозначения факторов, их интервалы и уровни варьирования, координаты нулевой точки. Перечисленные данные фиксируются в таблицах (например, табл. 6).

Таблица 6

Уровни факторов	Наименование и обозначение факторов		Кодированные значения факторов	
	τ – время, мин (X_1)	p – давление, кг/см^2 (X_2)	X_1	X_2
Интервал варьирования	10	2,5	1	1
Верхний уровень	30	7,5	+1	+1
Нижний уровень	10	2,5	-1	-1
Основной уровень	20	5	0	0

В натуральных значениях (рис. 5):

X_{1max} = 30 мин, X_{1min} = 10 мин, ΔX_3=(30 - 10)/2 = 10;
X_{2max} = 7,5 кг/см^2, X_{2min} = 2,5 кг/см^2, ΔX_2 = (7,5 - 2,5)/2=2,5.

Для кодированных значений (рис. 6):

$X_{1верх}$ = +1, $X_{1нижн}$ = -1, ΔX_1 = 1;
$X_{2верх}$ = +1, $X_{2нижн}$ = -1, ΔX_2 = 1.

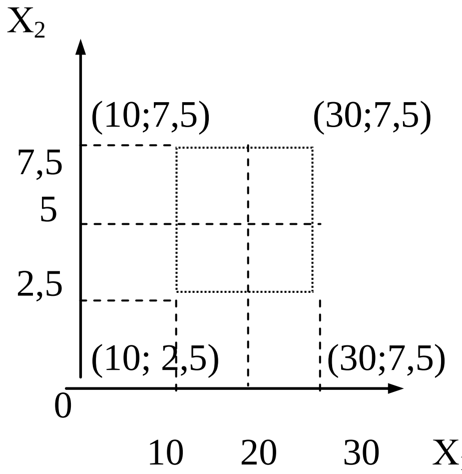

Рис. 5. Уровни факторов до кодирования

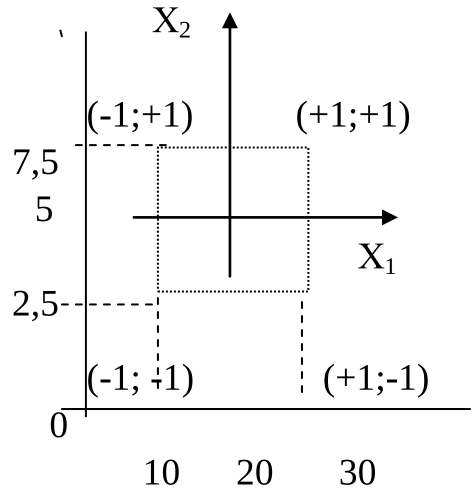

Рис. 6. Уровни факторов после кодирования

Методика выполнения работы

1. Выбрать объект исследования (машина, прибор, процесс и т.д.).
2. Определить факторы и дать их описание, характер влияния на исследуемый объект, методы и способы регулирования, измерения и т.д.
3. Выбрать нулевой уровень и интервалы варьирования.
4. Заполнить таблицу факторов.

Задание

Получить у преподавателя задание на проведение работы или выбрать его самостоятельно, согласовав задание с преподавателем. Работу выполнить по предложенной методике.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение факторов.
2. Для чего выполняют кодирование факторов?
3. Какие уровни факторов Вы знаете?
4. Что понимают под интервалом варьирования факторов?

Практическая работа №5
АПРИОРНОЕ РАНЖИРОВАНИЕ ФАКТОРОВ (ПСИХОЛОГИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ)

Цель работы: приобрести знания, умения и навыки априорного ранжирования факторов (психологический эксперимент).

Общие положения

Рассматриваются методы, которые применяют при обработке литературных данных на первой стадии экспериментальной работы в тех случаях, когда из большего числа факторов нужно выделить наиболее важные для дальнейшего изучения и отсеять остальные.

На стадии предварительного изучения объекта исследования при формализации априорных сведений иногда полезно проведение психологического эксперимента, заключающегося в объективной обработке данных, полученных в результате опроса специалистов или из исследований, опубликованных в литературе. Такой эксперимент позволяет более правильно спроектировать объект исследования, принять или отвергнуть некоторые предварительные гипотезы, дать сравнительную оценку влияния различных факторов на параметры оптимизации и тем самым правильно отобрать факторы для последующего активного эксперимента, обоснованно исключив некоторые из них из дальнейшего рассмотрения.

При решении подобных задач можно использовать метод априорного ранжирования факторов.

Особенность метода априорного ранжирования факторов заключается в том, что факторы, которые согласно априорной информации могут иметь существенное влияние, ранжируются в порядке убывания вносимого ими вклада. Вклад каждого фактора оценивается по величине ранга – места, которое отведено исследователем (специалистом при опросе, автором статьи и т.п.) данному фактору при ранжировании всех факторов с учетом их предполагаемого (количественно неизвестного) влияния на параметры оптимизации. При сборе мнений путем опроса специалистов каждому из них предлагается заполнить анкету, в которой перечислены факторы, их размерность и предполагаемые интервалы варьирования. Заполняя анкету, специалист определяет место факторов в ранжированном ряду. Одновременно он может включить дополнительные факторы или высказать мнение об изменении интервалов варьирования.

По результатам опроса вычисляется коэффициент конкордации *W*, определяющий степень согласованности мнения специалистов:

$$W = \frac{12S}{m^2(k^3 - k) - m\sum_{j=1}^{m} T_j},$$

где m – число опрошенных специалистов; k – число факторов;

$$T_j = \sum(t_j^3 - t_j),$$

где t_j – число одинаковых рангов в j- ранжировинии;

S – сумма квадратов отклонений:

$$S = \sum_{i=1}^{k}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} - L)^2,$$

где a_{ij} – ранг (порядковый номер при опросе) i-го фактора у j-го специалиста; L – среднее значение сумм рангов по каждому фактору:

$$L = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}}{k}.$$

Значения коэффициента конкордации изменяются в интервале от 0 до 1, и чем больше его значение, тем больше согласованность мнений специалистов.

После вычисления коэффициента конкордации определяют его значимость по χ^2-критерию, так как величина $m(k-1)W$ имеет χ^2-распределение с числом степеней свободы $f = k-1$. Расчетное значение $\chi^2_{расч}$ определяется по формуле

$$\chi^2_{расч} = \frac{12S}{mk(k+1) - \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{m} T_i}.$$

Гипотеза о наличии согласования между специалистами принимается, если $\chi^2_{расч} \geq \chi^2_{табл}$ ($\chi^2_{табл}$ выбирается из таблицы прил. 3 и зависит от числа степеней свободы и вероятности).

Оценив согласованность мнений всех специалистов, строят среднюю диаграмму рангов, откладывая по одной оси факторы, а по другой – соответствующие суммы рангов. Чем меньше сумма рангов данного фактора, тем выше его место в диаграмме. С помощью последней оценивается значимость факторов.

Пример

Проведен опрос четырех специалистов (m = 4) с помощью анкеты, содержащей 12 факторов (k = 12), которые нужно проранжировать с учетом степени их влияния на результаты опроса. Результаты опроса представлены в табл. 7.

Таблица 7

Таблица результатов опроса специалистов

Специалисты m	Факторы (k)											
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
1	8	10,5	10,5	10,5	1	2,5	2,5	10,5	5	4	7	6
2	8	9	10	11	1	6,5	6,5	12	2	3	4	5
3	6	7,5	7,5	11	2	4,5	4,5	12	1	3	9,5	9,5
4	7	4	8	10,5	2	10,5	10,5	10,5	1	3	5,5	5,5

Обработка результатов опроса осуществляется в следующей последовательности (результаты заносят в табл. 8).

1. Сначала определяем сумму рангов для каждого фактора:

$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ = 8 + 8 + 6 + 7=29 (например X_1. Для других факторов проводят аналогичные расчеты).

2. Вычисляем среднее значение суммы рангов:

$$L = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}}{k} = \frac{29+31+36+43+6+24+24+45+9+13+26+26}{12} = 26.$$

3. Находим разность между суммой рангов каждого из факторов и среднем значением суммы рангов:

$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} - L$ = 29 - 26=3 (для X_1); $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} - L$ =31 - 26=5 (для X_2).

4. Вычисляем квадрат разности: 3^2=9 (для X_1); 5^2=25 (для X_2).

5. Вычисляем сумму квадратов отклонений:

$$S = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} - L)^2 = 9+25+100+289+400+4+4+361+289+169+0+0 = 1650.$$

6. $T_j = \sum(t_j^3 - t_j)$, t_j – число одинаковых рангов в *j*-ом ранжировании.

Первый специалист оценку 10,5 поставил 4 раза, а оценку 2,5 – 2 раза, тогда $T_j = (4^3 - 4) + (2^3 - 2) = 60+6 = 66$.

Для второго специалиста: 6,5 – 2 раза, тогда $T_j = (2^3 - 2)=6$.

Для третьего специалиста: 7,5 – 2 раза, 4,5 – 2 раза, 9,5 – 2 раза, тогда $T_j = (2^3 – 2) + (2^3 – 2) + (2^3 – 2) = 18$.

Для четвертого специалиста: 10,5 – 4 раза, 5,5 – 2 раза, тогда $T_j = (4^3 – 4) + +(2^3 – 2) = 60+6 = 66$.

7. Находим сумму $\sum T_j = 66+6+18+66 = 156$.

8. Вычисляем коэффициент конкордации:

$$W = \frac{12S}{m^2(k^3-k) - m\sum_{j=1}^{m} T_j} = \frac{12 \cdot 1650}{4^2(12^3-12) - 4 \cdot 156} = 0{,}738.$$

9. Проверяем значимость коэффициента по χ^2-критерию:

$$\chi^2_{расч} = \frac{12S}{mk(k+1) - \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{m} T_i} = \frac{12 \cdot 1650}{4 \cdot 12 \cdot (12+1) - \frac{1}{(12+1)} \cdot 156} = 32{,}3;$$

$$f = k - 1 = 12 - 1 = 11.$$

По таблице прил. 3 при вероятности 0,95 (95%) и числе степеней свободы 11 находим , что $\chi^2_{табл} = 4{,}6$; $4{,}6 < 32{,}3$ (т.е. $\chi^2_{табл} < \chi^2_{расч}$). Поэтому можно с 95-процентной достоверностью утверждать о согласованности мнений специалистов. Это позволяет построить гистограмму результатов (рис. 7).

Таблица 8

Таблица результатов опроса специалистов

Специалисты m	Факторы (k)												T_j
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**X_8**	**X_9**	**X_{10}**	**X_{11}**	**X_{12}**	
1	8	10,5	10,5	10,5	1	2,5	2,5	10,5	5	4	7	6	66
2	8	9	10	11	1	6,5	6,5	12	2	3	4	5	6
3	6	7,5	7,5	11	2	4,5	4,5	12	1	3	9,5	9,5	18
4	7	4	8	10,5	2	10,5	10,5	10,5	1	3	5,5	5,5	66
$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$	**29**	**31**	**36**	**43**	**6**	**24**	**24**	**45**	**9**	**13**	**26**	**26**	**156**
$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} - L$	**3**	**5**	**10**	**17**	**-20**	**-2**	**-2**	**19**	**-17**	**-13**	**0**	**0**	
$(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} - L)^2$	**9**	**25**	**100**	**289**	**400**	**4**	**4**	**361**	**289**	**169**	**0**	**0**	$S =$ **1650**

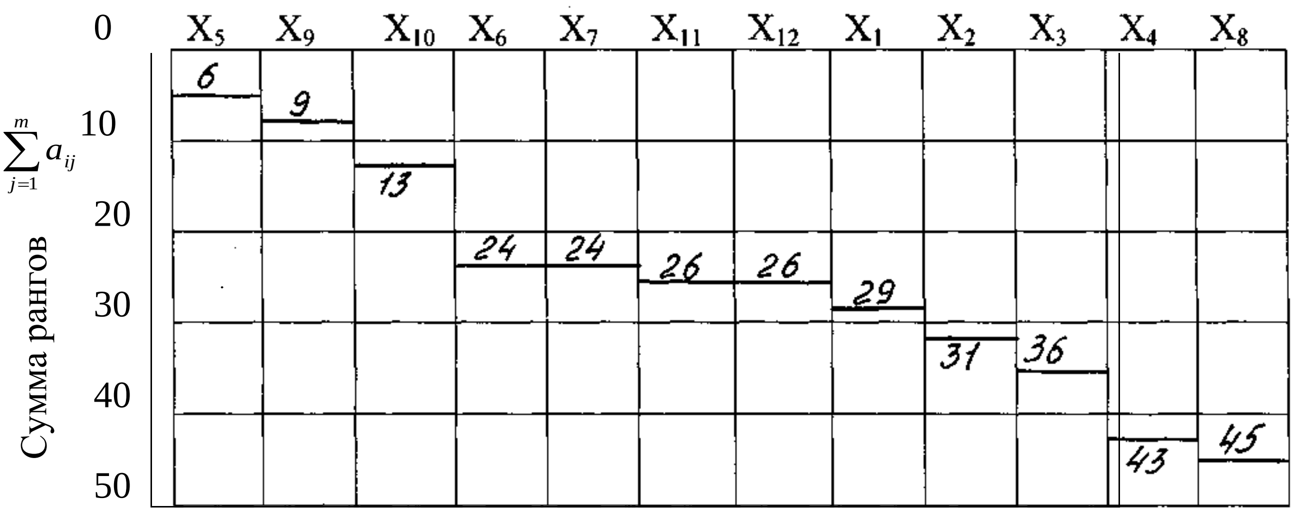

Рис. 7. Гистограмма результатов

Методика выполнения работы

1. Составить анкету для опроса специалистов, где исследуемые факторы взяты из практической работы № 4.

2. Заполнить анкету, привлекая в качестве специалистов студентов Вашей учебной группы.

3. Выполнить статистическую обработку результатов опроса.

Задание

Получить у преподавателя задание на проведение работы или выбрать его самостоятельно, согласовав задание с преподавателем. Работу выполнить по предложенной методике.

Контрольные вопросы

1. Для каких целей выполняют априорное ранжирование факторов?

2. В чем заключается процедура эксперимента при априорном ранжировании факторов?

3. Как строят диаграмму рангов?

4. Какие факторы исключают из дальнейшего рассмотрения после выполнения априорного ранжирования факторов?

Практическая работа №6
ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Цель работы: приобрести знания, умения и навыки по планированию полного факторного эксперимента.

Общие положения

Использование кодированной системы координат (практическая работа №4) позволяет очень компактно и наглядно записать порядок проведения эксперимента в виде матрицы (плана) экспериментов. Различают планы первого и второго порядка. В планах первого порядка влияющие факторы варьируются на двух уровнях, а в планах второго порядка – на трех уровнях.

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) – это эксперимент, в котором реализуются все возможные, неповторяющиеся комбинации уровней факторов.

Если число факторов равно k, а число уровней каждого из них равно S, то число комбинаций (опытов) $\boldsymbol{N}$ при ПФЭ будет $N = S^k$.

Тогда 2^k – это экспериментыс двумя уровнями варьирования факторов, 3^k – эксперименты с тремя уровнями варьирования факторов. Эксперименты при $S > 3$ встречаются очень редко в связи с резким ростом числа независимых опытов.

Полный факторный эксперимент $N = 2^k$ позволяет описать процесс математической моделью первого порядка вида

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i \neq j}^{k} b_{ij} x_i x_j \ .$$

План (матрица) первого порядка двухфакторного эксперимента строится следующим образом (табл. 9). Во втором столбце записывается фактор X_0, служащий для определения коэффициента регрессии. В третьем столбце записывается фактор X_1, поочередно варьируемый на верхнем (+1 или +) и нижнем (-1 или -) уровнях. Фактор X_2, записываемый в четвертом столбце, варьируется в первых двух опытах на верхнем и в последних двух – на нижнем уровнях. В этом плане имеется одно взаимодействие факторов X_1X_2, записываемое в пятом столбце (знаки в столбце взаимодействия получены перемножением по строкам знаков факторов X_1 и X_2). На рис. 8 представлена геометрическая интерпретация ПФЭ.

Таблица 9

Матрица планирования ПФЭ 2^2

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	y
1	+	+	+	+	y_1
2	+	-	+	-	y_2
3	+	+	-	-	y_3
4	+	-	-	+	y_4

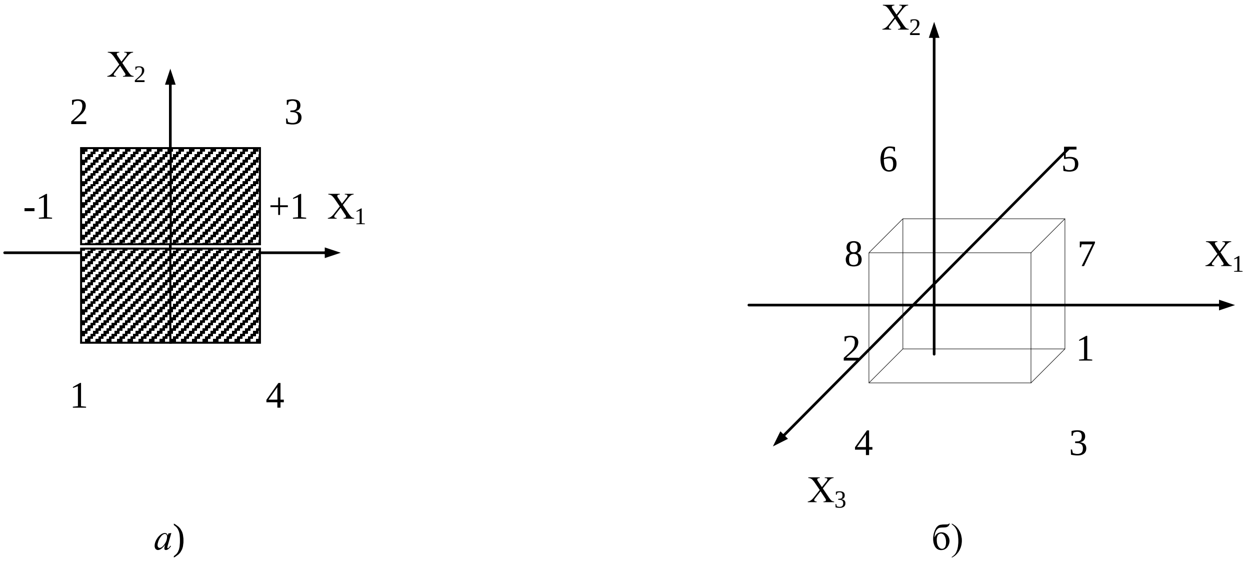

Рис. 8. Геометрическая интерпретация ПФЭ: *а)* – в двухмерном пространстве ($N = 2^2$); *б)* – в трехмерном пространстве ($N = 2^3$)

Построенный таким образом план обладает рядом свойств.

1. Содержит все комбинации (+) и (-), поэтому такие планы называются планами полного факторного эксперимента.

2. Благодаря переносу осей координат в цент эксперимента планы обладают свойствами ортогональности. Свойство оргогональности дает возможность избавиться от недостатков классического регрессионного анализа и позволяет значительно снизить вычислительные трудности, возникающие при расчете коэффициентов регрессии.

3. Переход к безразмерным переменным делает все факторы равноправными внутри изучаемой области. Все коэффициенты регрессии оказываются независимыми, и каждый коэффициент характеризует роль соответствующей переменной в процессе, что дает возможность на основании величин и знаков коэффициентов регрессии судить об их роли в процессе.

4. Благодаря ортогональности планов эксперимента коэффициенты регрессии вычисляются путем простого сложения значений отклика в соответствии со знаками столбца данного фактора:

$$b_{\mathrm{i}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_{ji} y_i}{N},$$

где X_i – знак фактора в соответствующем ему столбце.

Этапы планирования и реализации ПФЭ:

1) выбор параметров оптимизации, факторов и уровней их варьирования (2^k);

2) кодирование факторов;

3) составление план-матрицы (матрица планирования) эксперимента;

4) рандомизация опытов;

5) реализация плана эксперимента;

6) проверка однородности дисперсий параллельных опытов, их воспроизводимости;

7)расчет коэффициентов уравнения регрессии, их ошибок и значимости;

8) проверка адекватности модели.

Пункты 1–4 были рассмотрены выше. Рандомизация позволяет исключить влияние систематических ошибок, вызванных внешними условиями. Пусть про водится эксперимент 2^2. Матрица планирования представлена в табл. 9. Для реализации плана эксперимента необходимо выполнить четыре опыта. Например, первый и второй опыты ставим сегодня, а третий, четвертый − завтра, то различие в условиях эксперимента может вызвать систематическую ошибку, которая отразится на величине b_2, так как в первом и втором опытах фактор X_2 находится на верхнем уровне, а в третьем и четвертом опытах – на нижнем уровне.

Если в рассматриваемом примере 2^2 предполагается каждое значение параметра оптимизации (y) определить по двум параллельным опытам, то всего получается 8 опытов (4 · 2 = 8), тогда для определения порядка проведения опытов воспользуемся таблицей случайных чисел (прил. 4). Например, начиная с шестого столбца записываем числа с 1 до 8, отбрасывая больше 8, то можно получить следующую последовательность: 1; 3; 7, 4; 5; 6; 8; 2. Тогда можно составить таблицу проведения опытов (табл. 10).

Таблица 10

Номер опыта по матрице планирования	1	2	3	4
Случайный порядок реализаций опытов	1	3	7	4
	5	6	8	2

Пример

Исследовался процесс изменения температуры в узле трения. Ранее было выяснено, что на температуру в узлах трения без смазки влияют следующие факторы: удельная нагрузка p, скорость скольжения υ и первоначальная шероховатость трущейся шейки стального валика R_a.

Для оценки влияния указанных факторов и математического описания процесса трения использована модель первого порядка вида

$$\hat{y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3. \quad (1)$$

Рассматриваемый пример – полный факторный эксперимент типа 2^3. X_1, X_2, X_3 – факторы, а y – исследуемая величина (температура в узле трения).

Значения выбранных уровней варьируемых факторов даны в табл. 11.

Таблица 11

Уровень варьируемых факторов	Обозначение кодовое	p, кг/см ^{2}	υ , м/с	R_a, мкм
		X_1	X_2	X_3
Основной уровень	0	6,84	0,59	1,57
Интервал варьирования	Δx_i	4,00	0,31	0,92
Верхний уровень	+1	10,84	0,90	0,65
Нижний уровень	-1	2,84	0,28	2,50

Каждый опыт проводили трижды. Порядок постановки опытов определяли с помощью таблиц случайных чисел.

Матрица планирования эксперимента и результаты испытаний представлены в табл. 12.

Таблица 12

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	y_1	y_2	y_3	$\bar{y}_i$	$S^2_{воспр_i}$
1	+	-	-	-	+	+	+	-	57	60	55	57	6,5
2	+	+	-	-	-	-	+	+	57	55	52	54	7,0
3	+	-	+	-	-	+	-	+	80	85	90	85	25,0
4	+	+	+	-	+	-	-	-	120	125	130	125	25,0
5	+	-	-	+	+	-	-	+	50	55	45	50	25,0
6	+	+	-	+	-	+	-	-	54	55	60	56	10,5
7	+	-	+	+	-	-	+	-	55	50	60	55	25,0
8	+	+	+	+	+	+	+	+	98	105	115	106	73,0

1. Среднее значение параметра оптимизации по параллельным опытам определяем, например, для первого опыта:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij} = \frac{57+60+55}{3} = 57 .$$

Для всех остальных аналогично. Результаты заносим в табл. 12

2. Определяем дисперсию параллельных опытов, например, для первого опыта:

$$S^2_{воспр_i} = \frac{1}{m_i-1}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 = \frac{1}{3-1}\left[(57-57)^2+(60-57)^2+(55-57)^2\right] = 6{,}5 .$$

Для всех остальных аналогично. Результаты заносим в табл. 12.

3. Вычисляем сумму дисперсии воспроизводимости для всех опытов:

$$\sum_{i=1}^{8} S^2_{воспр_i} = 6{,}5+7{,}0+25{,}0+25{,}0+25{,}0+10{,}5+25{,}0+73{,}0 = 197{,}0 .$$

4. Из табл. 12 видно, что для восьмого опыта величина дисперсии гораздо больше остальных. Поэтому осуществляем проверку дисперсий с использованием критерия Кохрена $G_{расч} < G_{табл}$:

$$G_{расч} = \frac{S^2_{\max}}{\sum_{i=1}^{n} S_{воспр_i}} = \frac{73{,}0}{197} = 0{,}37 ,$$

Табличное значение критерия Кохрена $G_{табл}$, найденное по таблице прил. 1 (при N = 8 (количество опытов) $f = m - 1 = 3 - 1 = 2$), равно 0,5157. Так как выполняется условие $G_{расч} < G_{табл}$ (0,37 < 0,5157), то принимаем гипотезу об однородности дисперсий.

5. Вычисляем дисперсию воспроизводимости для всего эксперимента:

$$S^2_{восп} = S^2_{(y)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S^2_{воспр_i} = \frac{197{,}0}{8} = 24{,}62\,.$$

6. Вычисляем ошибку всего эксперимента:

$$S(y) = \sqrt{S^2_{(y)}} = \sqrt{24{,}62} \approx 4{,}96 \approx 5{,}0.$$

7. Рассчитываем коэффициенты уравнения (1):

$$b_i = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} X_{in}\bar{y}_i\,, \qquad b_0 = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} \bar{y}_i\,, \qquad b_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} X_{in}X_{jn}\bar{y}_i\,,$$

$$b_1 = \frac{-57+54-85+125-50+56-55+106}{8} = \frac{94}{8} = 11{,}75\,.$$

Аналогично рассчитываются коэффициенты b_2 и b_3.:

$$b_0 = \frac{57+54+85+125+50+56+55+106}{8} = \frac{588}{8} = 73{,}5,$$

$$b_{12} = \frac{57-54-85+125+50-56-55+106}{8} = \frac{88}{8} = 11.$$

и т. д.

После расчета всех коэффициентов уравнение (1) принимает вид

$$\hat{y} = 73{,}5 + 11{,}75\,X_1 + 19{,}1\,X_2 - 6{,}8X_3 + 11\,X_1X_2 + 2{,}5\,X_1X_3 - 5{,}4\,X_2X_3 + 0{,}3\,X_1X_2X_3. \quad (2)$$

8. Проверяем статистическую значимость коэффициентов.

Проверку проводим с помощью t-критерия. Для полного факторного эксперимента ошибки всех коэффициентов равны между собой и определяются следующим образом:

$$S(b_i) = \frac{S(y)}{\sqrt{Nm}} = \frac{5{,}0}{\sqrt{8\cdot 3}} = 1{,}02.$$

Далее определяем доверительный интервал длиной $2\Delta b_i$:

$$\Delta b_i = t_{табл} S(b_i) = 2{,}12 \cdot 1{,}02 = 2{,}16.$$

Табличное значение $t_{табл}$ выбираем по таблице прил. 2 для числа степеней свободы $f = N(m-1) = 8(3-1) = 16$ и по принятому уровню значимости 0,05, т.е. $t_{табл} = 2{,}12$. Таким образом все коэффициенты уравнения (2), кроме b_{123}, оказались статистически значимыми. После исключения статистически незначимого коэффициента b_{123} уравнение регрессии принимает вид

$$\hat{y} = 73{,}5 + 11{,}75\, X_1 + 19{,}1\, X_2 - 6{,}8X_3 + 11\, X_1X_2 + 2{,}5\, X_1X_3 - 5{,}4\, X_2X_3. \qquad (3)$$

9. Проверяем уравнение на адекватность.

Данная проверка проводится с целью доказательства пригодности полученного уравнения регрессии для описания экспериментальных данных с заданной точностью. Для этого оценивают отклонения вычисленных по уравнениям регрессии (3) значений функции оптимизации $\hat{y}$ от экспериментально установленных $\bar{y}$ (табл.12).

Для первого опыта уравнение регрессии (3) будет иметь вид (т.е вместо значений X_1, X_2, X_3 и т.д. выбираем + или – согласно 1 строке (1 опыту))

$$\hat{y}_1 = 73{,}5 + 11{,}75\cdot(-1) + 19{,}1\cdot(-1) - 6{,}8\cdot(-1) + 11\cdot(+1) + 2{,}5\cdot(+1) -$$
$$- 5{,}4\cdot(+1) = 57{,}6.$$

Аналогично рассчитываются значения для других опытов. Результаты расчетов представлены в табл. 13. Кроме этого в табл. 13 представлены результаты расчетов значений функции оптимизации $\hat{y}$ без учета коэффициента b_{13}.

Таблица 13

№ опыта	С учетом коэффициента		Без учета коэффициента
	$\bar{y}_i$	$\hat{y}_i$	$\hat{y}_i$
1	57	57,6	55,1
2	54	54,4	56,9
3	85	84,8	82,3
4	125	125,0	127,7
5	50	49,8	52,3
6	56	56,6	54,3
7	55	55,4	57,9
8	106	105,8	103,3

Для оценки отклонений используют критерий Фишера F-критерий.

Находят значения F- критерия Фишера (дисперсное отношение):

$$F_{расч} = \frac{S^2_{ад}}{S^2_{восп}} = \frac{S^2_{ад}}{S^2(y)} ,$$

где $S_{ад}^{2} = \dfrac{m_i}{N-l}\sum_{i=1}^{N}(\bar{y}_i - \hat{y})^2$ – дисперсия адекватности; m_i – число параллельных опытов в i-й сточке матрицы планирования; $\bar{y}_i$ – среднее арифметическое функции отклика (из m параллельных опытов); $\hat{y}$ – значение функции отклика, предсказанное по уравнению (3) в i-м опыте; l – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии; N – число независимых опытов.

С учетом коэффициента b_{13} величина дисперсии адекватности

$$S_{ад}^{2} = \frac{m_i}{N-l}\sum_{i=1}^{N}(\bar{y}_i - \hat{y})^2 = \frac{3}{8-7}\sum_{1}^{8}(57-57{,}6)^2 + (54 - 54{,}4)^2 + (85 - 84{,}8)^2 +$$
$$+ (125 - 125)^2 + (50 - 49{,}8)^2 + (56 - 56{,}6)^2 + (55 - 55{,}4)^2 + (106 - 105{,}8) = 1{,}77.$$

Без учета коэффициента b_{13} величина дисперсии адекватности:

$$S_{ад}^{2} = \frac{m_i}{N-l}\sum_{i=1}^{N}(\bar{y}_i - \hat{y})^2 = \frac{3}{8-6}\sum_{1}^{8}(57-55{,}1)^2 + (54 - 56{,}9)^2 + (85 - 82{,}3)^2 +$$
$$+ (125 - 127{,}7)^2 + (50 - 52{,}3)^2 + (56 - 54{,}3)^2 + (55 - 57{,}9)^2 + (106 - 103{,}3) = 75{,}135.$$

Гипотезу об адекватности уравнения (3) проверяли с учетом значимости коэффициента b_{13} и соответственно без его учета:

$$F_{1,расч} = \frac{S_{1ад}^{2}}{S^2(y)} = \frac{1{,}77}{24{,}62} = 0{,}072;$$

$$F_{2,расч} = \frac{S_{2ад}^{2}}{S^2(y)} = \frac{75{,}135}{24{,}5} = 3{,}06.$$

Для того чтобы воспользоваться таблицей F-критерия, необходимо определить число степеней свободы $f_{ад}$ и $f_{восп}$: $f_{ад} = N - l$. С учетом значимости коэффициента b_{13} $f_{ад} = 8 - 7 = 1$, без учета значимости коэффициента b_{13} $f_{ад} = 8 - 6 = 2$; $f_{восп} = N(m - 1) = 8(3 - 1) = 16$.

Исходя из найденных значений $f_{ад}$, $f_{восп}$ находим по таблице прил. 5 $F_{1,табл} = 4{,}49$, а $F_{2,табл} = 3{,}63$. Если $F_{расч} < F_{табл}$, то уравнение считают адекватным.

В рассматриваемом примера с учетом значимости коэффициента b_{13} $0{,}072 < 4{,}49$, а без учета значимости коэффициента b_{13} $3{,}06 < 3{,}63$. Поэтому для упрощения расчетов выбираем уравнение регрессии без учета значимости коэффициента b_{13} ($b_{13} = 0$):

$$\hat{y} = 73{,}5 + 11{,}75\,X_1 + 19{,}1\,X_2 - 6{,}8X_3 + 11\,X_1X_2 - 5{,}4\,X_2X_3\,. \qquad (4)$$

Для приведения уравнения (4) к виду с натуральными значениями факторов используют формулу кодирования, подставляя в уравнение (4) вместо кодовых натуральные значения факторов.

На основании полученных результатов и анализа уравнения (4) можно сделать следующие выводы.

1. С увеличением удельной нагрузки p и скорости скольжения υ температура в зоне трения возрастает (так как коэффициенты b_1 и b_2 при X_1 и X_2 положительные), причем наибольшее влияние оказывает скорость скольжения при выбранных условиях варьирования ($b_2 > b_1$).

2. С уменьшением шероховатости поверхности R_a снижается температура в зоне трения, так как b_3 отрицателен, но влияние этого фактора менее значительно, чем удельного давления и скорости скольжения ($b_3 < b_1 < b_2$).

3. Наряду с линейными эффектами значимыми оказались также и эффекты взаимодействия X_1X_2 и X_2X_3, причем эти взаимодействия противоположны по своему эффекту (они имеют противоположные знаки). Для снижения температуры в зоне трения необходимо стремиться при увеличенных нагрузках снижать скорость скольжения. Снижение шероховатости поверхности позволяет несколько повысить скорость скольжения.

Использование полного факторного эксперимента позволило не только оценить влияние факторов и их взаимодействий, но и наметить гипотезы по выяснению механизма процесса.

Методика выполнения работы

1. Пользуясь данными практических работ № 4 и 5 или выбрав объект исследования, выполнить необходимые расчеты по предложенной в работе последовательности.

2. По результатам расчетов сделать выводы.

Задание

Использовать данные практических работ № 4 и 5 или получить у преподавателя задание на проведение работы. Работу выполнить по предложенной методике.

Контрольные вопросы

1. Дать определение полному факторному эксперименту.

2. Назовите этапы планирования и реализации полного факторного эксперимента.

3. Для какой цели выполняют рандомизацию опытов?

4. Для чего осуществляют проверку статистической значимости коэффициентов уравнения регрессии.

5. Как влияет знак коэффициента регрессии на значение функции отклика?

6. Как осуществляют проверку уравнения на адекватность?

Практическая работа №7
ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ОТЫСКАНИИ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Цель работы: приобрести знания, умения и навыки планирования эксперимента при отыскании экстремальной области.

Общие положения

Одной из основных задач планирования эксперимента является задача поиска экстремума функции отклика. Эта задача возникает при оптимизации производственных и научно-технических процессов, осуществляемых для улучшения свойств изделий, изучения предельных возможностей приборов и устройств и т.д.

Поиск экстремума функции отклика происходит путем исследования поверхности отклика. Анализ результатов первой серии опытов позволяет выбрать направление движения в область оптимума по кратчайшему пути, проводя сравнительно небольшое число опытов. Для поиска оптимальных значений параметра оптимизации применяют следующие методы: градиентный, безградиентный и случайного поиска.

Наиболее широкое распространение получил градиентный метод. Преимущества указанного метода перед другими состоит в том, что он позволяет определить оптимум при минимальном числе опытов.

После планирования и реализации многофакторного эксперимента, проверки однородности дисперсий параллельных опытов, их воспроизводимости, расчета коэффициентов уравнения регрессии, их ошибок и значимости проверяют адекватность модели. Если модель адекватна, то переходят к следующему этапу – поиску оптимальной области методом градиента. Особенность метода градиента заключается в том, что движение к оптимальной области осуществляется в направлении градиента функции отклика, причем направление движения уточняется после каждого шага по результатам специально поставленных пробных опытов.

Градиентом функции называется вектор $gradY = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial Y}{\partial x_i} \vec{e}_i$, где $\frac{\partial Y}{\partial x_i}$ – частные производные функции отклика по i-му фактору; $\vec{e}_i$ – единичный вектор, направленный по оси i-го фактора.

Так как для линейной модели $\frac{\partial Y}{\partial x_i} = b_i$, то в задачах поиска градиентными методами $gradY = \sum_{i=1}^{k} b_i \vec{e}_i$.

Изменяя факторы пропорционально значениям b_i (с учетом знака), можно двигаться в направлении градиента. Этот путь к экстремуму является самым коротким и быстрым.

Для движения по градиенту необходимо рассчитать координаты проведения будущих опытов в факторном пространстве, задавшись параметром λ, который определяет величину шагов по осям факторов. При выборе λ следует учитывать возможность фиксирования факторов в некоторых случаях на дискретных, вполне определенных уровнях. Например, при наличии в станке зубчатой коробки скоростей и подач последние можно фиксировать только на определенных уровнях и изменять по закону геометрической прогрессии.

В общем случае шаг изменения координат (факторов) для движения по градиенту

$$\Delta h_{ij} = j\lambda\, b_i \Delta x_i, \tag{5}$$

где Δh_{ij} – изменение уровня i-го фактора (отсчет ведется от нулевого уровня) на j-м шаге; j – номер шага крутого восхождения (спуска); λ – параметр (0,2…, 4); b_i – параметр модели для i-го фактора; Δx_i – интервал варьирования i-го фактора.

Если фактор изменяется дискретно, то его изменение при движении по градиенту происходит путем последовательного перехода от одного уровня к другому или при очень коротких шагах можно переходить по четным уровням, пропуская нечетные. Тогда, обозначив номер этого фактора $i = 1$, из (5) получим

$$\lambda_j = h_{1j}/(jb_1\Delta x_1).$$

Если крутое восхождение оказалось эффективным и в результате его достигнут оптимум, то экспериментатор может закончить исследование или продолжить его с целью подробного изучения области оптимума. Если же в результате эффективного крутого восхождения оптимум не достигнут, то исследование следует продолжать с целью дальнейшего поиска оптимума. Для оценки ситуации необходимо принять за центр линейного плана нового эксперимента точку факторного пространства, соответствующую наилучшему результату крутого восхождения (движения по градиенту). Когда после реализации нового линейного плана выявилось, что линейная модель неадекватна, факт достижения оптимума является достаточно вероятным. Когда же новая модель (линейная) адекватна, следует повторить крутое восхождение по новому градиенту.

Пример

Необходимо определить оптимальные условия суперфинишной обработки цилиндрической детали охватывающей головкой с брусками марки 24АМ40СМ1К. В качестве параметра оптимизации выбрана производительность процесса, характеризуемая интенсивностью съема припуска Q (мкм/мин); в качестве влияющих факторов — частота колебаний брусков f (мин$^{-1}$); частота вращения детали n (об/мин); давление в гидроцилиндре, прижимающем бруски к детали, p (МПа); амплитуда осцилляции A (мм).

Исходный уровень факторов и интервалы их варьирования приведены в табл. 14.

Таблица 14

Уровень варьируемых факторов	Обозначение кодовое	f, мин$^{-1}$	n, об/мин	p, МПа	A, мм
		X_1	X_2	X_3	X_4
Основной уровень	0	885	25,75	2,25	3,5
Интервал варьирования	Δx_i	135	5,75	0,25	0,5
Верхний уровень	+1	1020	31,5	2,5	4
Нижний уровень	-1	750	20	2,0	3

Выполнив обработку результатов по методике, предложенной в практической работе №7, были получены следующие коэффициенты регрессии: $b_0 = 32$; $b_1 = -0,5$; $b_2 = 6$; $b_3 = 1,75$; $b_4 = 3,25$.

Оценка статистической значимости коэффициентов показала, что коэффициент $b_1 = - 0,5$ является статистически незначимым. Поэтому считаем, что фактор X_1 слабо влияет на исследуемый процесс и его можно из дальнейшего рассмотрения исключить, зафиксировав на нижнем уровне (так как $b_1 < 0$).

Математическая модель процесса будет иметь вид

$$\hat{y} = 32 + 6X_2 + 1,75X_3 + 3,25X_4.$$

Для поиска области экстремума двигаемся по градиенту в трехфакторном пространстве X_2; X_3; X_4 (т.е. n, p, A).

Станок для суперфинишной обработки имеет коробку скоростей, обеспечивающую следующий ряд частот вращения: 20, 25; 31; 5; 40; 50; 63; 80; 100; 125;

140; 160 об/мин. Так как из всех коэффициентов b_2 является наибольшим, следовательно фактор X_2 (n) в большей степени оказывает влияние на исследуемый процесс. Поэтому принято решение двигаться по этому фактору от основного уровня n_0 = 25 об/мин по следующим дискретным значениям: n_1 = 63; n_2 =100; n_3 = 125; n_4 =160. Тогда величины шагов будут следующие:

$\lambda_j = h_{1j}/(jb_1\Delta x_1)$, ($\Delta x_2$ = 5,75, см. табл. 14):

$$\lambda_1 = \frac{63-25}{1\cdot 6\cdot 5{,}75} = 1{,}1; \qquad \lambda_2 = \frac{100-25}{2\cdot 6\cdot 5{,}75} = 1;$$

$$\lambda_3 = \frac{125-25}{3\cdot 6\cdot 5{,}75} = 0{,}9; \qquad \lambda_4 = \frac{160-25}{4\cdot 6\cdot 5{,}75} = 0{,}98.$$

Координаты фактора давления (p) вычисляем по формуле

$X_{ij} = X_{i0} + j\lambda_j\, b_i\Delta x_i$., ($X_{30}$ = 2,25; Δx_3 = 0,25, см. табл. 14; $b_i = b_3$ = 1,75)

p_1 = 2,25 + 1 · 1,1 · 1,75 · 0,25 = 2,7 МПа;

p_2 = 2,25 + 2 · 1 · 1,75 · 0,25 = 3,1 МПа;

p_3 = 2,25 + 3 · 0,9 · 1,75 · 0,25 = 3,4 МПа;

p_4 = 2,25 + 4 · 0,98 · 1,75 · 0,25 = 3,9 МПа.

Так как максимально допустимое давление в гидроцилиндре составляет 3,5 МПа, то после третьего шага движение по этому фактору пришлось прекратить, зафиксировав его на самом высоком уровне.

Аналогично вычисляем координаты фактора – амплитуды осцилляции A.

$X_{ij} = X_{i0} + j\lambda_j\, b_i\Delta x_i$., ($X_{40}$ = 3,5; Δx_4 = 0,5, см. табл. 14; $b_i = b_4$ = 3,25)

A_1 = 3,5 + 1 · 1,1 · 3,25 · 0,5 = 5,3 мм.

Так как амплитуда осцилляции на данном станке не может превышать 4 мм, то на этом уровне она поддерживалась на всех шагах движения по градиенту. Координаты точек факторного пространства, в которых проводился последовательный поиск, и результаты эксперимента представлены в табл. 15.

Таблица 15

Номер точки j	f, мин$^{-1}$	n, об/мин	p, МПа	A, мм	Функция отклика Q, мкм/мин
1	750	63	2,7	4	76
2	750	100	3,1	4	125
3	750	125	3,5	4	120
4	750	160	3,5	4	57

Из таблицы видно, что первый и второй шаги восхождения были эффективными. Третий шаг был уже неэффективным, так как производительность станка уменьшилась. Для дополнительной проверки гипотезы о неэффективности дальнейшего продвижения в том же направлении был сделан четвертый шаг, который показал резкое уменьшение производительности. Таким образом, дальнейшее продвижение по градиенту после второго и третьего шагов не имеет смысла. Поэтому следует проанализировать создавшуюся ситуацию и принять решение о дальнейших опытах.

Методика выполнения работы

1. Пользуясь данными практической работы № 6 или выбрав объект исследования, выполнить необходимые расчеты по предложенной в работе последовательности.

2. По результатам расчетов сделать выводы.

Задание

Использовать данные практической работы № 6 или получить у преподавателя задание на проведение работы. Работу выполнить по предложенной методике.

Контрольные вопросы

1. Какие задачи помогает решать планирование эксперимента при отыскании экстремальной области?

2. В чем заключается особенность градиентного метода при движении к оптимальной области?

3. Назовите последовательность этапов выполнения планирования эксперимента при отыскании экстремальной области.

Приложение 1

Значения критерия Кохрена (G-критерий) при уровне значимости 0,05 (доверительной вероятности 0,95)

N \ f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7771	0,6771	0,6530	0,6333	0,6167	0,6025
4	0,9065	0,7679	0,7841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017	0,4884
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5665	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,4118
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384	0,3259	0,3154
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3040	0,2926	0,2829
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768	0,2659	0,2568
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439	0,2353
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020

Приложение 2

Значение критерия Стъюдента (t-критерия)

Число степеней свободы *f*	Уровни значимости				
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,66	63,62
2	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	2,02	2,57	3,37	4,08	6,85
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,36	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,75
25	1,71	2,06	2,48	2,79	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,71
27	1,70	2,05	2,47	2,77	3,69
28	1,70	2,05	2,47	2,76	3,67
29	1,70	2,04	2,46	2,76	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,65
40	1.68	2,02	2,42	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,37

Приложение 3

Значения критерия Пирсона (χ^2–критерия)

Число степеней свободы *f*	Вероятность						
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35
6	1,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,34
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,35
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3

Приложение 4

Фрагмент таблицы случайных чисел

56	66	25	32	38	64	70	26	27	67	77	40	04	34	63	98	99	89	31	16	12	90	50	28	96
88	40	52	02	29	82	69	34	50	21	74	00	91	27	52	98	72	03	45	65	30	89	71	45	91
87	63	88	23	62	51	07	69	59	02	89	49	14	98	53	41	92	36	07	76	85	37	84	37	47
32	25	21	15	08	82	34	57	57	35	22	03	33	48	84	37	37	29	38	37	89	76	25	09	69
44	61	88	23	13	01	59	47	64	04	99	59	96	20	30	87	31	33	69	45	58	48	00	83	48
94	44	08	67	79	41	61	41	15	60	11	88	83	24	82	24	07	78	61	89	42	58	88	22	16
13	24	40	09	00	65	46	38	61	12	90	62	41	11	59	85	18	42	61	29	88	76	04	21	80
78	27	84	05	99	85	75	67	80	05	57	05	71	70	31	31	99	99	06	96	53	99	25	13	63
42	39	30	02	34	99	46	68	45	15	19	74	15	50	17	44	80	13	86	38	40	45	82	13	44
04	52	43	96	38	13	83	80	72	34	20	84	56	19	49	59	14	85	42	99	71	16	34	33	79
82	85	77	30	16	69	32	46	46	30	84	20	68	72	98	94	62	63	59	44	00	89	06	15	87
38	48	84	88	24	58	46	48	60	06	90	08	83	83	98	40	90	88	25	26	85	74	55	80	85
91	19	05	68	22	58	04	63	21	16	23	38	25	43	32	98	94	65	35	35	16	91	07	12	43
54	81	87	21	31	40	46	17	62	63	99	71	14	12	64	51	68	50	60	78	22	69	51	98	37
65	43	75	12	91	20	36	25	57	92	33	65	95	48	75	00	06	65	25	90	16	29	34	14	43
49	98	71	31	80	59	57	32	43	07	85	06	64	75	27	29	17	06	11	30	78	70	97	87	21
03	98	68	89	39	71	87	32	14	99	42	10	25	37	30	08	27	75	43	97	54	20	69	93	50
56	04	21	34	92	89	81	52	15	12	84	11	12	66	87	48	21	06	86	08	35	39	52	28	09
48	09	36	95	20	82	95	36	53	89	92	68	50	88	17	37	92	02	23	43	63	24	69	80	90
23	97	10	96	57	74	07	95	26	44	93	08	43	30	41	86	45	74	33	78	84	33	38	76	73
43	97	55	45	98	35	68	45	96	80	46	36	99	96	33	60	20	73	30	79	17	19	03	47	28
40	05	08	50	79	89	58	19	86	48	27	98	99	24	08	94	19	15	81	29	82	14	35	88	03
66	97	10	69	02	25	36	43	71	76	00	67	56	12	69	07	89	55	63	31	50	72	20	33	36
15	62	38	72	92	03	76	09	30	75	77	80	04	24	54	67	60	10	79	26	21	60	03	48	14
77	21	15	14	47	55	24	22	20	55	36	93	67	69	37	72	22	43	46	32	56	15	75	25	12
18	87	05	09	96	46	14	72	41	46	12	67	46	72	08	59	06	17	49	12	73	28	23	59	48
08	58	53	63	13	07	04	48	71	39	07	46	96	40	20	86	79	11	81	74	11	15	23	17	45
16	07	79	57	61	42	19	68	15	12	60	21	59	12	07	04	99	88	22	39	75	16	69	13	84

Приложение 5

Значения критерия Фишера (F-критерия) при уровне значимости 0,05 (доверительной вероятности 0,95), f_1 – число степеней свободы большей дисперсии (*ад*), f_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии (*восп*)

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70
6	5,99	5,14	4,79	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03
7	5,90	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,31
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,12
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,04
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,98
70	3,98	3,13	3,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,01	1,97	1,93
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,88
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,83
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79

Приложение 6

Значения τ-критерия

Объем выборки (m)	Вероятность (P)		Объем выборки (m)	Вероятность (P)	
	0,95	0,99		0,95	0,99
4	0,390	0,256	19	0,642	0,510
5	0,410	0,269	20	0,650	0,520
6	0,445	0,281	25	0,676	0,542
7	0,468	0,307	30	0,704	0,508
8	0,491	0,331	35	0,725	0,611
9	0,514	0,354	40	0,742	0,636
10	0,531	0,376	45	0,757	0,658
11	0,548	0,397	50	0,769	0,674
12	0,564	0,414	66	0,789	0,702
13	0,578	0,431	70	0,804	0,724
14	0,591	0,447	80	0,817	0,741
15	0,603	0,461	90	0,827	0,756
16	0,614	0,475	100	0,836	0,767
17	0,624	0,487	110	0,843	0,778
18	0,633	0,499	120	0,850	0,788

Приложение 7

Варианты задач

Практическая работа №1

Вариант	Уровень фактора	Значения параллельных опытов				
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
1	X_1	0,72	0,60	0,65	0,32	0,80
	X_2	0,15	0,62	0,22	0,4	0,25
	X_3	0,45	0,30	0,50	0,58	0,48
	X_4	1,20	0,92	0,72	0,80	1,00
	X_5	0,58	0,98	0,70	1,00	0,48
2	X_1	98,50	79,54	96,23		
	X_2	107,67	111,98	130,12		
	X_3	119,09	102,23	87,56		
	X_4	72,80	64,70	88,60		
	X_5	87,45	99,34	101,67		
	X_6	120,67	134,78	130,07		
	X_7	130,76	125,04	124,99		
	X_8	64,80	79,53	98,05		
3	X_1	5,32	4,80	4,65		
	X_2	4,44	5,25	4,80		
	X_3	4,58	4,48	5,00		
	X_4	3,80	4,00	4,12		
	X_5	6,0	5,48	5,50		
	X_6	4,60	4,52	3,99		
	X_7	5,52	4,30	4,80		
4	X_1	28,15	26,50	25,90	25,28	27,00
	X_2	28,90	26,90	26,50	27,08	27,00
	X_3	21,15	21,40	18,30	17,00	21,30
	X_4	28,10	26,55	25,95	24,20	26,08
	X_5	28,80	26,70	27,60	26,08	27,05
5	X1	8,15	7,99	6,46	8,22	
	X2	9,25	9,12	5,99	8,96	
	X3	7,99	9,95	6,99	9,12	
	X4	8,65	8,97	7,00	8,75	
	X5	8,30	8,95	7,10	8,99	
	X6	8,99	8,60	6,95	9,15	

Практическая работа №2

Вариант	Значения параметров										
1	$\bar{X}_i$	7,2	14,0	18,0	23,4	28,8	34,2	40,0	45,0	50,4	57,0
	$\bar{Y}_i$	128,9	132,3	135,7	139,1	142,5	145,9	149,3	152,7	161,5	166,0
2	$\bar{X}_i$	7,2	8,7	10,2	11,7	13,2	14,7	16,2	17,7		
	$\bar{Y}_i$	37,04	43,34	49,64	55,94	62,24	68,54	74,84	81,14		
3	$\bar{X}_i$	21,24	19,44	17,64	15,84	14,04	12,24	10,44	8,64	5,5	
	$\bar{Y}_i$	37,2	85,9	121,4	160,7	2,12,9	268,5	333,0	389,7	469,5	
4	$\bar{X}_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\bar{Y}_i$	1	1,5	3	4,5	7	5	4	3,5	2	1,5
5	$\bar{X}_i$	6,2	9,7	12,2	13,7	14,2	15,7	16,2	17,7	19,8	
	$\bar{Y}_i$	24,6	33,6	35,8	38,4	39,1	40,5	41,6	42,0	43,0	

Практическая работа №5

Вариант	Специалисты m	Факторы (k)									
		X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**X_8**	**X_9**	**X_{10}**
1	1	8	10,5	10,5	10,5	1	2,5	2,5	10,5	5	4
	2	8	9	10	11	1	6,5	6,5	12	2	3
	3	6	7,5	7,5	11	2	4,5	4,5	12	1	3
	4	7	4	8	10,5	2	10,5	10,5	10,5	1	3
2	1	10	8	7,5	8	8	9	11	3	8,5	10
	2	12	11	10	9,5	8	4	12	12	7	11
	3	4	5	3	5	1	11	4,5	3,5	4	5
	4	6	7	6,5	5,5	6	12	6	5,5	5,5	4
	5	1	2	3	4	1	1	12	1,5	4	3

3	1	5	9	8,5	8	9	6	9	7	10	6,5
	2	3	2,5	4	3,5	8	2	4,5	3	5	2,5
	3	10	9	2	9,5	8,5	3	8,5	8,5	7	8
	4	2	2,5	3	1	1	2	3	2,5	10	4
	5	10	8	7	9,5	9	2	9,5	8,5	8	8
	6	3	2,5	3	7	2	2	2,5	5,5	3,5	4
4	1	12	12	10	6	7,5	9,5	10,5	11,5	8.5	10
	2	10	8	7,5	11	6	8,5	10	5	9,5	12
	3	6	7,5	3	1	7	9	6,5	12	5	4
	4	2	3,5	7	5	10	6	5,5	4,5	8	7
	5	6	4	5,5	7	2	4,5	6	3	6,5	2
5	1	11	8	4	8	8	9	9	3	2	
	2	12	11	10	4	8	6	10	11	5	
	3	5	10	3	7	1	10	2,5	3,5	6	
	4	7	11	6,5	5,5	8	12	6	5,5	2,5	
	5	1	12	3	10	1	7	12	8	4	

Практические работы №6,7

Вариант 1

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	y_1	y_2	y_3
1	+	-	-	-	-	68	62	71
2	+	+	-	-	-	71	78	75
3	+	-	+	-	-	77	79	85
4	+	+	+	-	-	100	115	120
5	+	-	-	+	-	69	55	60
6	+	+	-	+	-	71	75	65
7	+	-	+	+	-	69	630	60
8	+	+	+	+	-	79	85	90
9	+	-	-	-	+	78	70	68
10	+	+	-	-	+	80	85	90
11	+	-	+	-	+	79	60	63
12	+	+	+	-	+	60	55	59
13	+	-	-	+	+	77	80	83
14	+	+	-	+	+	79	83	80
15	+	-	+	+	+	66	70	69
16	+	+	+	+	+	75	77	85

Вариант 2

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	y_1	y_2	y_3
1	+	-	-	-	67	60	70
2	+	+	-	-	70	75	72
3	+	-	+	-	75	79	80
4	+	+	+	-	100	115	120
5	+	-	-	+	69	55	60
6	+	+	-	+	71	75	65
7	+	-	+	+	69	630	60
8	+	+	+	+	79	85	90

Вариант 3

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	y_1	y_2	y_3
1	+	-	-	-	-	211	223	219
2	+	+	-	-	-	200	224	216
3	+	-	+	-	-	208	222	217
4	+	+	+	-	-	210	215	210
5	+	-	-	+	-	199	208	214
6	+	+	-	+	-	196	210	212
7	+	-	+	+	-	201	202	217
8	+	+	+	+	-	215	210	220
9	+	-	-	-	+	213	208	206
10	+	+	-	-	+	208	199	210
11	+	-	+	-	+	197	210	220
12	+	+	+	-	+	202	208	212
13	+	-	-	+	+	200	219	199
14	+	+	-	+	+	197	223	189
15	+	-	+	+	+	199	225	200
16	+	+	+	+	+	204	210	214

Вариант 4

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	y_1	y_2	y_3
1	+	-	-	-	1,54	1,76	1,70
2	+	+	-	-	1.67	1,59	1,40
3	+	-	+	-	1,45	1,70	1,75
4	+	+	+	-	1,49	1,60	1,65
5	+	-	-	+	1,58	1,67	1,44
6	+	+	-	+	1,65	1,55	1,71
7	+	-	+	+	1,55	1,80	1,69
8	+	+	+	+	1,45	1,87	1,67

Вариант 5

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	y_1	y_2	y_3
1	+	-	-	-	23	24	25
2	+	+	-	-	19	17	20
3	+	-	+	-	22	19	18
4	+	+	+	-	23	23	25
5	+	-	-	+	16	17	19
6	+	+	-	+	19	25	20
7	+	-	+	+	20	19	19
8	+	+	+	+	24	25	17

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976. – 268 с.

2. Володарский Е.Т., Малиновский Б.Н., Туз Ю.М. Планирование и организация измерительного эксперимента. – Киев: Вища школа, 1987. – 280 с.

3. Горский В.Г., Адлер Ю.П., Талалай А.М. Планирование промышленных экспериментов. – М.: Металлургия, 1978. – 112 с.

4. Зажигаев Л.С., Кашьян А.А., Романиков Ю.И. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента. – М.: Атомиздат, 1978. – 232 с.

5. Моргунов А.П., Ревина И.В. Планирование и обработка результатов эксперимента: Учеб. Пособие. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2005. – 4304 с.

6. Спиридонов А.А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов. – М.: Машиностроение, 1981. – 184 с.

7. Ящерицын П.И., Махаринский Е.И. Планирование эксперимента в машиностроении. – Минск: Вышэйшая школа, 1985. – 286 с.