Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

"Омский государственный технический университет"

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ   
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ   
ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ**

Конспект лекций ч. 1

Омск

2015

Составитель: Масягин В.Б., к.т.н., доцент, профессор каф. «Технология машиностроения» ОмГТУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

[Часть 1. Введение в математическое моделирование с применением информационных технологий 5](#_Toc414264537)

[Предисловие 5](#_Toc414264538)

[1. ВВЕДЕНИЕ В ИНЖЕНЕРНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ 11](#_Toc414264539)

[1.1. Техника и общество 11](#_Toc414264540)

[1.2. Новые проблемы, стоящие перед инженерами 12](#_Toc414264541)

[1.3. Связь техники с другими видами деятельности человека 14](#_Toc414264542)

[1.4. Задача предмета «инженерное проектирование» 16](#_Toc414264543)

[1.5. Процесс инженерного проектирования 16](#_Toc414264544)

[1.6. Метод инженерного анализа 20](#_Toc414264545)

[1.7. Качества, необходимые инженеру-проектировщику 25](#_Toc414264546)

[1.8. Сравнение изобретательства и инженерного анализа 26](#_Toc414264547)

[1.9. Вопросы для самопроверки 27](#_Toc414264548)

[2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 28](#_Toc414264549)

[2.1. Введение 28](#_Toc414264550)

[2.2.. Моделирование и технический прогресс 29](#_Toc414264551)

[2.3. Понятие математической модели и математического моделирования 31](#_Toc414264552)

[2.3.1. Свойства моделей 36](#_Toc414264553)

[2.3.2. Цели моделирования 38](#_Toc414264554)

[2.4. Классификация математических моделей 39](#_Toc414264555)

[2.4.1. Классификация математических моделей в зависимости от сложности объекта моделирования 39](#_Toc414264556)

[2.4.2. Классификация математических моделей в зависимости от оператора модели 40](#_Toc414264557)

[2.4.3. Классификация математических моделей в зависимости от параметров модели 42](#_Toc414264558)

[2.4.4. Классификация математических моделей в зависимости от целей моделирования 45](#_Toc414264559)

[2.4.5. Классификация математических моделей в зависимости от методов реализации 47](#_Toc414264560)

[2.4.6. Вопросы для самопроверки 49](#_Toc414264561)

[2.5. Этапы построения математической модели 50](#_Toc414264562)

[2.5.1. Обследование объекта моделирования 52](#_Toc414264563)

[2.5.2. Концептуальная постановка задачи моделирования 54](#_Toc414264564)

[2.5.3. Математическая постановка задачи моделирования 55](#_Toc414264565)

[2.5.5. Выбор и обоснование выбора метода решения задачи 58](#_Toc414264566)

[2.5.6. Реализация математической модели в виде программы для ЭВМ 61](#_Toc414264567)

[2.5.7. Проверка адекватности модели 64](#_Toc414264568)

[2.5.8. Практическое использование построенной модели и анализ результатов моделирования 66](#_Toc414264569)

[2.5.9. Вопросы для самопроверки 67](#_Toc414264570)

[3. Структурные модели 68](#_Toc414264571)

[3.1. Что такое структурная модель? 69](#_Toc414264572)

[3.2. Способы построения структурных моделей 76](#_Toc414264573)

[3.3. Вопросы для самопроверки 82](#_Toc414264574)

[4. Моделирование в условиях неопределенности 83](#_Toc414264575)

[4.1. Причины появления неопределенностей и их виды 84](#_Toc414264576)

[4.2. Вопросы для самопроверки 89](#_Toc414264577)

[5. Линейные и нелинейные модели 89](#_Toc414264578)

[5.1. О законе Гука и границах линейности 89](#_Toc414264579)

[5.2. Поля, сплошные среды и уравнения математической физики. Линейные уравнения и принцип суперпозиции 91](#_Toc414264580)

[5.3. О фракталах и их применении 92](#_Toc414264581)

[6. Моделирование с использованием имитационно подхода 95](#_Toc414264582)

[6.1. Особенности моделей, использующих имитационный подход 96](#_Toc414264583)

[6.2. Вопросы для самопроверки 101](#_Toc414264584)

[7. Математические модели исследования операций 101](#_Toc414264585)

[7.1. Предмет и задачи исследования операций 102](#_Toc414264586)

[7.2. Принципы, методы и средства исследования операций 110](#_Toc414264587)

[7.3. Этапы операционного исследования 112](#_Toc414264588)

[7.4. Математические модели исследования операций 114](#_Toc414264589)

[7.5. Вопросы для самопроверки 117](#_Toc414264590)

[Литературные источники. 118](#_Toc414264591)

# Часть 1. Введение в математическое моделирование с применением информационных технологий

## Предисловие

**Взаимодействие математики и техники.** Технические науки развиваются в тесном взаимодействии и сотрудничестве с математикой. Это проявляется, с одной стороны, в использовании математического аппарата для решения научно-технических задач. С другой стороны, инженерная практика в значительной мере ориентирует и стимулирует развитие самой математики. В результате взаимодействия математики и техники возникают и успешно развиваются новые прикладные науки.

Одним из наиболее эффективных результатов взаимодействия математики и техники явилось создание современных компьютеров и информационных технологий. Развитие информационных технологий позволяет привести в действие более мощные ресурсы математики и усиливает ее роль как непосредственной производительной силы общества, способствуя тем самым прогрессу самой математики.

**Современная математика.** Наиболее характерной чертой современной математики является чрезвычайно высокая степень обобщения и абстракции. Традиционное определение математики как науки о пространственных формах и количественных отношениях уже не соответствует современному положению вещей, оно приобретает более глубокое и широкое содержание. Предмет современной математики составляют совокупности объектов самого общего вида и любые *возможные отношения* между ними.

Математика развивается как единая наука с присущими ей методами. Но в зависимости от точки зрения на ее предмет математику подразделяют на *чистую* и *прикладную* математику. *Чистая математика* отвлекается от конкретной природы объектов и сосредоточивает свое внимание на отношениях в чистом виде. *Прикладная математика* включает математические теории, проблемно-ориентированные на изучение явлений природы и общества.

Между чистой и прикладной математикой невозможно провести четкую грань, чисто математическая теория при определенных условиях может получить эмпирическую интерпретацию и стать основой для прикладной теории. В то же время теория, зародившаяся в недрах прикладных наук, может заслужить право на обобщение до уровня чисто математической теории.

3. **Проектирование**. Инженерное дело характеризуется чрезвычайно широкой сферой приложения: производственной, конструкторской, исследовательской или административной деятельностью.

Наряду с расширением сферы приложения инженерного дела, усиливается его специализация. Вследствие развития производства и прикладных наук происходит расщепление традиционных специальностей, появляются новые.

Будучи специалистом в узкой области, инженер должен быть подготовлен к сотрудничеству и взаимопониманию с представителями других областей науки и техники, что совершенно необходимо в условиях современного производства, при разработке сложных технических проектов или проведении научных исследований. Ясно, что такая подготовка может быть достигнута только на прочном фундаменте естественных и математических наук.

Не смотря на большое разнообразие конкретных форм инженерной деятельности, центральное место в ней занимают процессы *обработки данных* и *приятия решений.*

Принятие решений при *проектировании* основывается на анализе технических условий путем расщепления сложной задачи на более простые, использовании научно-технического опыта при теоретической и экспериментальной проверке выдвигаемых гипотез, всестороннем учете возможностей и ограничений технологии, экономических, социальных и психологических факторов.

Участие в *научных исследованиях* возлагает на инженера принятие решений, направленных на обеспечение надежного функционирования технических средств и получение достоверных данных об исследуемых объектах. Инженеры участвуют также в планировании эксперимента, обработке данных и оформлении научных результатов.

Процессы *обработки данных* и *принятия решений* требуют привлечения математических методов и вычислительных средств, уровень которых зависит от сложности решаемых задач. Разумеется, успех дела в значительной мере определяется личными качествами инженера, его профессиональной и теоретической подготовкой. Важнейшую роль в этом отношении играет умение инженера выбрать соответствующий его задаче математический аппарат и наиболее эффективно использовать его для получения требуемого результата.

**Математический аппарат проектирования.** К математическому аппарату можно отнести все то из математики, что используется при проектировании. В каждой конкретной области основу математического аппарата составляют математические теории, интерпретированные на совокупности объектов из данной области. Для математика интерпретация идет от теории к реальным системам, иллюстрирующим практичность теории и представляющим интерес как область ее приложения. При проектировании исходной является реальная система, при проектировании или исследовании которой необходимо найти и использовать подходящую или, как говорят, *адекватную* математическую теорию. После эмпирической интерпретации адекватная математическая теория приспосабливается к решению задач данной конкретной области и развивается как прикладная.

Для поиска и понимания математических теорий необходимо, прежде всего, знать *язык математики.* Без этого невозможно ни чтение математической литературы, ни общение с математиками. Более того, язык математики все больше проникает в прикладные области и широко используется в специальной литературе, т. е. в значительной мере становится и языком инженера.

Необходимым этапом на пути к адекватной теории является идеализация реальной системы в соответствии с поставленной задачей исследования или проектирования. Свойства идеализированной системы абстрагируются и отождествляются со свойствами математических объектов, в результате чего приходим к *математической модели* системы.

Замена реальной системы соответствующей моделью позволяет использовать для ее исследования *методы* адекватной математической теории. В рамках прикладной теории эти методы получают дальнейшее развитие в соответствии с характером решаемых задач и интерпретируются в терминах реальных объектов.

Итак, *математический аппарат проектировщика можно определить как взаимосвязанную совокупность языка, моделей и методов математики, ориентированную на решение инженерных задач.*

**Математические модели.** Реальные объекты обладают бесконечным множеством свойств и характеризуются бесконечным множеством связей как внутри самого объекта, так и вне его. Переход к соответствующим моделям является наиболее сложным и ответственным этапом применения математического аппарата в инженерном деле. Существует ряд общих требований, которые обычно предъявляются к математической модели: достаточная *точность*, предельная *простота* и *стандартная* форма.

Обеспечить достаточную *точность* модели – это значит учесть при идеализации реального объекта все существенные свойства и связи, отвлекаясь от второстепенных, несущественных свойств и связей.

Представляя реальный объект с достаточной точностью, математическая модель в то же время должна быть по возможности *проще*, так как дальнейшая работа со сложной моделью не только затруднительна, но может оказаться и практически невозможной.

При моделировании реальных объектов целесообразно ориентироваться на математические модели *стандартного* вида, которые обеспечены соответствующим аппаратом. Моделирование компонентов системы само по себе может представлять серьезные трудности, однако эта задача всегда проще, чем рассмотрение системы в целом. Кроме того, несмотря на огромное разнообразие систем, набор различных компонентов весьма ограничен, и их модели, полученные один раз в стандартной форме, могут затем многократно использоваться при моделировании сложных систем.

В общем случае модели компонентов характеризуются нелинейными зависимостями. Однако многие задачи допускают их *линеаризацию.* Если параметры компонентов можно считать не зависящими от времени, то система представляется *стационарной моделью* в виде дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Параметры системы и приложенные к ней воздействия можно рассматривать как детерминированные или случайные величины, что приводит соответственно к *детерминированным* или *стохастическим моделям.* Выбор той или иной модели зависит от характера протекающих процессов и поставленной задачи исследования.

Реальные физические процессы протекают в непрерывно изменяющемся времени, которое является аргументом соответствующих им функций. При этом математические модели, типичными представителями которых являются дифференциальные уравнения, также называют *непрерывными.* Однако во многих случаях целесообразно рассматривать состояние системы только для последовательности дискретных значений независимой переменной, отвлекаясь от характера происходящих процессов в промежутках между этими значениями. Этот подход обслуживают различные типы *дискретных моделей.*

Для представления математических моделей широко используется аппарат теории множеств, матриц и графов. Соответственно различают *теоретико-множественные, матричные* и *топологические модели.*

**Математические методы.** После того как математическая модель построена, дальнейшая работа состоит в применении соответствующих *математических методов* с целью получения необходимых характеристик данной модели, а значит, и исследуемого реального объекта. Большое разнообразие математических методов можно свести к трем основным видам: *аналитическим, графическим и численным.*

*Аналитические* методы позволяют провести исследование в общем виде, независимо от численных значений параметров системы. Аналитические зависимости позволяют использовать эффективные методы оптимизации и получить соотношения, характеризующие поведение системы при изменении ее параметров. При подстановке в аналитические выражения численных значений можно контролировать точность вычислений. Однако аналитические методы применимы только для простейших моделей. Из-за громоздкости аналитических выражений или невозможности их получения значение аналитических методов в инженерной практике сильно ограничивается. В то же время аналитическая форма является основной при изложении и развитии математического аппарата в общем виде.

*Графические методы* обладают наглядностью и успешно используются как для иллюстрации аналитических методов, так и непосредственно в инженерных расчетах. Они особенно удобны, если не требуется высокая точность или если интерес представляет качественная картина происходящих процессов. Графические методы ограничены возможностями построений на плоскости или в трехмерном пространстве, вследствие чего они применимы только для простых моделей. Особое место занимают методы теории графов.

Наиболее общими являются *численные методы.* Схема вычислений задается формулой или алгоритмом. В зависимости от характера вычислительного процесса численные методы подразделяются на *прямые* и *итерационные*.

В настоящее время разработано огромное количество вычислительных процедур, обслуживающих различные задачи исследования математических моделей при проектировании, организации производства и научных исследований.

**Использование информационных технологий***.*В современных условиях большое значение приобретает применение развитого математического аппарата в сочетании с высокопроизводительной вычислительной техникой и информационными технологиями.

Возрастающая роль математического моделирования в инженерном деле обусловлена характерными особенностями развития техники. Это, прежде всего, усложнение технических проектов, жесткие технико-экономические условия, требования высокого качества и надежности в условиях массового производства, сжатые сроки проектирования и освоения новых изделий. В то же время математическое моделирование опирается на большой парк вычислительных машин, отличающихся принципом действия и уровнем специализации, производительностью и объемом памяти, способами программирования и организацией связей с внешними устройствами.

Многие инженерные задачи могут решаться на машинах с помощью стандартных методов и программ. В таких случаях инженеру достаточно быть осведомленным о возможностях, которые могут быть предоставлены в его распоряжение, однако рано или поздно возникнет необходимость написания программ для решения специальных задач и инженер должен быть подготовлен к этому.

В сложном процессе проектирования математическое моделирование сочетается с экспериментами над реальными объектами. Эксперимент служит источником исходных данных и критерием правильности выбранной модели. В то же время само моделирование является как бы экспериментом в чистом виде, в котором представлены наиболее существенные свойства и связи исследуемых объектов.

**Математическое образование инженера***.*Значение математического образования в подготовке инженеров за последние десятилетия сильно возросло. Совершенствованием содержания и методики преподавания высшей математики в вузах постоянно занимаются крупнейшие ученые и педагоги. Однако существующее положение вещей оставляет желать много лучшего.

Вузовский курс высшей математики в значительной мере дополняется при изучении специальных инженерных дисциплин, в которых излагается необходимый математический аппарат. По существу изучение математики в вузах на различных уровнях продолжается в течение всего периода учебы студентов. Большую роль в математической подготовке инженеров играют спецкурсы и учебные пособия по тем разделам, которые не нашли должного отражения в основном курсе высшей математики.

Под влиянием требований все более усложняющейся инженерной практики изучение математики в вузах с каждым годом совершенствуется и углубляется. Постепенно видоизменяются учебные программы, пересматриваются традиционные методы преподавания, изменяется отношение ко многим классическим разделам, которым приходится потесниться, чтобы освободить место и время для важнейших разделов современной математики. Но как бы ни были совершенны программы и учебники, каким бы мастерством ни владели преподаватели, сколько бы ни отводилось для математических дисциплин часов в учебных планах, невозможно изучить впрок все то, что потребуется из математики для будущей инженерной деятельности. Математическое образование инженера не заканчивается в вузе, более того, оно не заканчивается никогда.

Само прогнозирование развития математического аппарата инженера – дело чрезвычайно трудное. Опыт показывает, что многие математические теории, которые не имеют сегодня непосредственного приложения в технике, завтра могут оказаться необходимыми для решения новых инженерных задач и послужить основой для дальнейшего расширения и обогащения математического аппарата инженера.

Следует учитывать также и психологические аспекты математического образования. Ясно, что интерес к изучению какого-либо раздела математики существенно зависит от того, заготавливаются ли знания впрок или же они требуются для решения конкретной прикладной задачи. В последнем случае овладение знаниями, навыками и умением проходит значительно эффективнее и глубже, так как процесс обучения подогревается острой практической потребностью.

# 1. ВВЕДЕНИЕ В ИНЖЕНЕРНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

## 1.1. Техника и общество

Рассмотрим кратко ту роль, которую техника играет в различных странах мира. В США, европейских странах, Японии и других странах техническое развитие достигло высокого уровня. Успехи этих передовых стран очевидны. По широким автомагистралям и большим мостам мчатся надежные и быстрые грузовики и легковые автомобили. Курсируют поезда. В море полно кораблей, а в воздухе – самолетов. Фабрики и заводы выпускают все больше и больше товаров при непрерывно сокращающемся числе занятых на них рабочих. Тракторы обрабатывают землю. Уборка урожая механизирована. Быстродействующие системы связи и вычислительные машины обслуживают торговлю, промышленность, науку и правительственные органы.

Теперь посмотрим на районы, не развитые в техническом отношении. Это Африка, часть Индии, Средний Восток, Центральная Америка, многие районы Южной Америки. Сельское хозяйство опирается здесь преимущественно на ручной труд и использование домашних животных. Промышленное производство неэффективно и ведется примитивными методами. Транспорт и связь работают медленно и ненадежно. Бедность здесь – обычное явление.

В чем же причина такого различия? Разрыв между странами, развитыми в техническом отношении, и более бедными странами обусловлен процессом, получившим название промышленной революции. Хотя во многих отношениях этот процесс был мучительным, он позволил снять с плеч человека огромное бремя тяжелого физического труда. Он позволил ряду стран достигнуть такого уровня, когда один человек может производить сельскохозяйственную продукцию, достаточную, чтобы прокормить многих, в то время как труд другого обеспечивает большое число людей промышленными товарами. В результате у всех сократилась продолжительность рабочего дня, и при этом производится все больше и больше вещей, которые ранее считались предметами роскоши.

Нет необходимости затевать дискуссию относительно того, какая из многих областей успешной деятельности человека – техника, наука, медицина, право и т. д.– в наибольшей степени способствовала удаче промышленной революции. Совершенно очевидно, что развитие техники было одной из составных и неотъемлемых частей этого процесса. Кроме того, столь же очевидно и то, что в настоящее время современное общество весьма сильно зависит от своих инженеров и техников. За истекшие годы инженеры решили большое число проблем, связанных с индустриализацией, и эти достижения получили широкое распространение. Но, что еще более важно, стало обычным, что экономика передовых стран получает от инженеров все больше и больше новых решений. Общество полагается не только на прежние решения, осуществление которых продолжается, но и постоянно требует от своих инженеров новых творческих идей. Экономическое благосостояние окажется под угрозой, если инженеры прекратят поиски новых, лучших способов изготовления вещей.

В настоящее время в передовых странах происходит новая революция, называемая автоматизацией. Если промышленная революция в значительной мере освободила человека от бремени тяжелого труда, то новая революция направлена на уменьшение бремени однообразной работы. Автоматизация облегчает также умственный труд, так как большие быстродействующие вычислительные машины избавляют человека от бесконечных вычислений. По мере развития новой революции автоматизация распространяется на все более тонкие виды умственной деятельности. Влияние автоматизации начинает ощущаться даже в такой области, как обучение, где очень сильно индивидуальное начало. Совершенно очевидно, что, как и в ходе промышленной революции, основной революционизирующей силой является техника. Деятельность инженеров сыграла исключительно важную роль в прошлом и продолжает играть значительную роль в жизни современного человека. Инженеры берут на себя важные обязательства перед будущим и уже сейчас намечают его контуры.

## 1.2. Новые проблемы, стоящие перед инженерами

Не представляет труда проследить в общих чертах ту многообразную роль, которую играла техника в ходе промышленной революции и играет теперь в ходе автоматизации. Вначале были нужны инженеры-строители, чтобы проложить первые шоссейные и железные дороги, соорудить мосты, построить города и порты. В наших технических учебных заведениях прежде всего появились инженерно-строительные факультеты, и в течение многих лет они были самыми крупными. Затем в процессе перехода от простейшего аграрного общества к комплексному индустриальному все в большей и большей степени стала ощущаться нужда в инженерах-механиках, способных создавать машины, строить и эксплуатировать фабрики и заводы, а также в специалистах по энергоснабжению и конструированию новых изделий. Как и следовало ожидать, в высших учебных заведениях появились механические факультеты, а в относительном выражении численность студентов на инженерно-строительных факультетах сократилась. В настоящее время в связи с потребностью в более совершенных средствах управления и автоматизации вследствие резкого усложнения средств связи, а также благодаря появлению большого числа новых материалов и научных открытий увеличился спрос на инженеров электротехнических специальностей. Все это снова нашло отражение в увеличении численности студентов на электротехнических факультетах. Заглядывая в недалекое будущее, можно предсказать, что численность инженеров всех специальностей, по-видимому, стабилизируется: будут усиленно развиваться физические науки и математика, а также комплексы социальных и биологических дисциплин. В свете *потребностей* развивающегося общества все эти изменения кажутся вполне естественными. Однако фактическое развитие отстает от потребностей.

Рассмотрим теперь нужды передовых стран. В настоящее время важной проблемой является не то, как строить мосты через большие реки, а то, каким образом бороться с загрязнением рек. Важной проблемой является не то, как строить большие города, а то, как уничтожить трущобы. Важной проблемой является не то, как изобрести новые виды оружия, а то, каким образом избежать применения того оружия, которое имеется. Когда было необходимо преодолевать определенные физические рубежи, строить города, совершать промышленную революцию, перед инженерами стояли ясные и определенные цели. Однако сейчас инженеры находят мало удовлетворения в том, чтобы производить все больше и больше прекрасных вещей для людей, умирающих от ожирения.

Все же высокие цели продолжают существовать и в наши дни; мы, инженеры, должны только захотеть их увидеть. Взять хотя бы такой пример. Две трети населения земного шара испытывает острую нехватку *продовольствия.* С течением времени ввиду роста численности населения Земли нехватка продовольствия станет, безусловно, еще более острой. Необходимы высокопроизводительные недорогие компактные системы производства продуктов питания. *Водоснабжение* представляет собой проблему, как для передовых, так и для развивающихся стран. Во многих районах требуется все больше и больше пресной воды. Жизненно важной проблемой является во многих крупных промышленных центрах всех стран мира борьба с загрязнением воздуха. Исключительно важную роль в обеспечении работоспособности разрабатываемых сложных систем играют *транспорт* и *связь. Организация отдыха* (по мере увеличения досуга у трудящихся) и наличие большого числа лиц *пожилого возраста* (в результате увеличения продолжительности жизни) в перспективе также могут превратиться в серьезные социальные проблемы, для разрешения которых потребуется использование технических достижений.

Перед техникой по-прежнему стоит высокая цель, но она выдвигает новые требования к людям, избравшим технику своей специальностью. В наше время для достижения этой цели требуется в значительно большей мере знать и принимать во внимание социальные, политические и экономические аспекты решаемых проблем. Так, при решении проблем, связанных с загрязнением воздуха и воды, приходится иметь дело с предприятиями, загрязняющими воду и воздух, общественностью, протестующей против этих явлений, и правительственными органами, ответственными за принятие и выполнение соответствующих законов. Решение проблем, связанных с современными средствами сообщения, может привести к переселению тысяч людей или оказать какое-либо иное влияние на их жизнь. Аналогичные утверждения можно сделать и относительно большинства задач, решаемых техникой в настоящее время.

Сравнительно недавно возникло еще одно обстоятельство, которое ставит перед инженерами новые проблемы. Развитие науки и резкое увеличение числа научных открытий требуют от инженеров знания фундаментальных наук, которые не были важны для них ранее. Следует напомнить, что тесная связь науки и техники возникла не так давно. Исторически техника развивалась из ремесел. Первые инженеры были преимущественно мастеровыми и ремесленниками, слабо знакомыми с наукой. Однако в наши дни инженер должен владеть большим объемом научных знаний. В самом деле, фундаментальные науки составляют основу инженерного образования. Поэтому в настоящее время инженер сталкивается с необходимостью знать современные научные достижения и уметь применять их для решения практических вопросов.

Хотя новые сложные проблемы, стоящие перед инженерами, в значительно большей мере, чем когда бы то ни было ранее, требуют учета социальных и политических факторов и хотя для принятия решений в гораздо большей мере, чем когда бы то ни было прежде, необходимы научные знания, все же нужно сказать, что важнейшие задачи инженера по-прежнему связаны с проектированием и разработкой техники. Принимая решение, можно использовать научные знания, и необходимо учитывать социальные и политические факторы, однако этими решениями будут проекты новых вещей или процессов.

## 1.3. Связь техники с другими видами деятельности человека

Существует несколько видов созидательной деятельности человека в обществе, развитом в научно-техническом отношении. На рис. 1.1 в одном направлении показана связь техники с наукой, с одной стороны, и с производством – с другой. Как уже указывалось ранее, в настоящее время инженеры обязаны знать, понимать и использовать данные основных физических и математических научных дисциплин. В то же время в своих проектах инженеры должны учитывать возможности производства, так как то, что нельзя построить, не обладает никакой полезностью.

Кроме науки и производства, инженер в функционально-эстетическом плане связан с искусством и ремеслами. Полезная вещь редко выглядит безобразной и не только потому, что мы в нашей жизни стремимся окружить себя красивыми вещами, но и потому, что мы редко терпим в течение длительного времени недостаточно привлекательные вещи. Первая действующая модель нового полезного предмета может быть ужасной с эстетической точки зрения, однако можно с уверенностью сказать, что при первой же переделке большое внимание будет уделено ее красоте.

Еще в одном плане деятельность инженера связана с экономикой, социологией и политикой. Связь с экономикой очевидна. Ни одно правительство или фирма не в состоянии позволить себе сделать все, что оно в данный момент захочет. Необходимо наличие экономических ресурсов, и инженер-проектировщик, если он собирается принимать какие-либо важные решения, должен знать экономические возможности, как в масштабах своего отдела, так и в масштабе фирмы, страны и всего мира в целом. В данном случае знание этого вопроса означает нечто большее, чем умение чеканить фразы о важности прибыли и достоинствах «свободного» предпринимательства, и предполагает понимание и таких факторов, как издержки капиталистического предпринимательства для общества (например, загрязнение рек) и учет людских и других ресурсов, благодаря которым общество становится богатым, а экономика – эффективной.

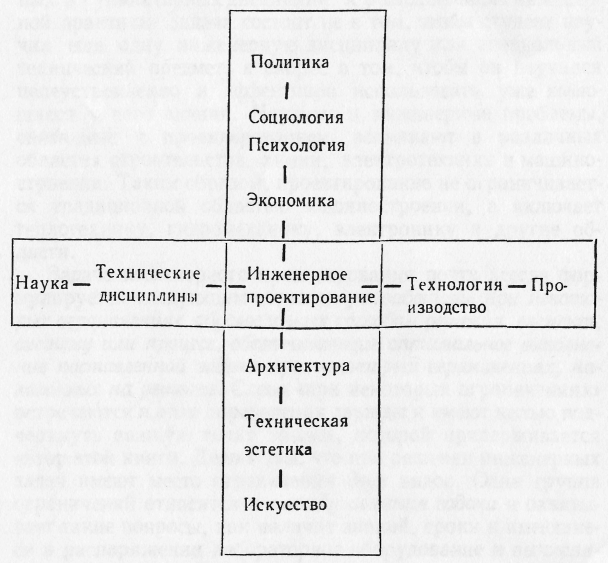


Рис. 1.1. Связь инженерного проектирования с другими видами деятельности человека

Поскольку с техникой связана самая разнообразная деятельность человека, тот, кто начинает учиться в техническом вузе, сталкивается с широчайшим кругом вопросов, какие только можно себе вообразить. Он должен иметь хорошую подготовку в области физики и химии, технических дисциплин и математики. Он должен быть знаком с различными средствами производства, знать экономику и другие общественные науки в той мере, в какой они связаны с его инженерной деятельностью. Кроме того, инженер является человеком, живущим в обществе, поэтому его образование должно включать изучение гуманитарных наук. Наконец, его образование должно включать изучение *методов и приемов целенаправленного использования своих знаний.* Именно последние вопросы изучаются в курсах лекций по инженерному проектированию.

Программа подготовки инженеров отражает широкий круг проблем, связанных с техникой. Необходимо изучить гуманитарные и общественные науки, в том числе экономику. Необходимо изучить теоретические дисциплины, современные научные достижения, технические дисциплины и математику. Обычно студентам технических специальностей читают также курсы лекций по технологии и организации производства и, разумеется, лекции по инженерному проектированию.

### 1.4. Задача предмета «инженерное проектирование»

Задача этого предмета состоит в том, чтобы помочь студентам научиться применять свои знания, приобретенные ими при изучении теоретических, технических, общественных и гуманитарных дисциплин, к решению задач инженерной практики. Задача состоит не в том, чтобы студент изучил еще одну инженерную дисциплину или специальный технический предмет, а скорее в том, чтобы он научился целеустремленно и эффективно использовать уже имеющиеся у него знания. Научные и инженерные проблемы, связанные с проектированием, возникают в различных областях строительства, химии, электротехники и машиностроения. Таким образом, проектирование не ограничивается традиционной областью машиностроения, а включает теплотехнику, гидромеханику, электронику и другие области.

Задача инженерного проектирования почти всегда формулируется следующим образом: *разработать при некоторых ограничениях, обусловленных способом решения, элемент, систему или процесс, обеспечивающие оптимальное выполнение поставленной задачи при некоторых ограничениях, налагаемых на решение.* Слова «при некоторых ограничениях» встречаются в этом определении дважды и имеют целью подчеркнуть важную особенность инженерного проектирования. Дело в том, что при решении инженерных задач имеют место ограничения *двух* видов. Одна группа ограничений относится к *методу решения задачи* и охватывает такие вопросы, как наличие знаний, сроки и имеющиеся в распоряжении лабораторное оборудование и вычислительная техника. Другая группа ограничений относится к самому *решению задачи* и связана с действием таких факторов, как естественные (физические) ограничения, издержки, наличие материалов, оборудования или производственного мастерства. Одна из целей изучаемой дисциплины состоит в том, чтобы помочь студентам приобрести определенные навыки и взгляды, которые повысят возможности успешного решения инженерных задач с учетом ограничений обоих видов.

При этом студенту нужно осознать, что *понимание и изучение процесса решения, связанного с проектированием и анализом (и его успехов, и неудач), повысят вероятность успеха в будущем.*

## 1.5. Процесс инженерного проектирования

Первым этапом инженерного проектирования является изучение и уяснение цели или задачи. Цель может определяться заданием или вытекать из характера работы (например, разработка патентуемого изделия или проектирование верстака для домашней мастерской). В любом случае первым этапом процесса инженерного проектирования является четкое определение цели, которая должна быть достигнута, или требования, которое должно быть удовлетворено. На рис. 1.2 этот этап называется уяснением цели.

Вторым этапом процесса инженерного проектирования является описание более конкретной задачи, которая должна быть решена для достижения общей цели. Если, например, общей целью является получение пресной воды из моря, то возможным путем решения нашей задачи будет создание ядерной энергетической установки для опреснения морской воды методом испарения. Другим путем решения этой же задачи может быть также создание установки для химического опреснения воды или солнечной установки. Заметим, что выбор пути решения задачи предполагает *принятие решения.*



Рис. 1.2. Блок-схема процесса инженерного проектирования

На следующем этапе инженерного проектирования обычно требуется, чтобы инженер-проектировщик получил некоторую идею – новую или старую, по-новому примененную к решению его задачи. Ему нужно сформулировать способ решения или составить общее представление о задаче. Иногда для этого требуется огромное творческое воображение, искусство и изобретательность. Иногда это просто шаблонное применение известного принципа или его пересмотренного варианта. В значительной мере качество решения определяется *качеством* идеи или принципа, использованного на данном этапе. В определенном смысле этот этап представляет собой основу процесса проектирования. На рис. 1.2 он назван формированием идеи.

Как только идея или способ решения задачи найдены (т. е. произошло принятие еще одного решения), инженер должен проанализировать принятую идею. Инженерный анализ требует четкого определения задачи или вопроса, который должен решаться. Он требует построения модели (на бумаге или в лабораторных условиях), которая будет настолько простой, что ее можно будет проанализировать за приемлемое время, и в то же время настолько сложной, что полученные на ней результаты будут достаточно содержательны. Инженерный анализ этой модели должен основываться на применении физических принципов (использовании результатов научных или технических дисциплин) и нахождении численных результатов. Сюда входят также проверка, оценка, обобщение и оптимизация результатов. В данном конспекте процессу инженерного анализа отводится большое место, поскольку он имеет важное значение для всего процесса инженерного проектирования в целом.

Если в результате анализа получены благоприятные результаты, то инженер должен переработать свое решение с учетом производственных возможностей. Мы называем этот этап *конкретизацией решения,* и возникающие здесь вопросы будут связаны с тем, «как сделать эту вещь?», а не с тем, «как она будет работать?» После этого разрабатываемое изделие будет запущено в производство и затем его начнут распределять, продавать и использовать.

Заметим, что на рис. 1.2, где схематически показан весь процесс инженерного проектирования, мы использовали двунаправленные стрелки. Это должно показать, что в действительности процесс инженерного проектирования не состоит непосредственно из одних переходов от этапа к этапу. При решении любой задачи может потребоваться многократное повторение любого из этапов, и в значительной мере движение будет происходить как вперед, так и назад. Редко задача оказывается столь простой, а инженеру-проектировщику сопутствует такая удача, что идея, пришедшая первой, позволит разработать изделие, которое

1. работает,
2. работает хорошо,
3. работает в оптимальном режиме,
4. может быть изготовлено с небольшими издержками,
5. может иметь сбыт,
6. просто в обслуживании и т. д.

На рис. 1.3 показан другой подход к процессу проектирования. На этой схеме задача инженерного проектирования состоит в отыскании системы или элемента, который будет давать определенный выход (результат) при заданном воздействии на его вход. Как показано на этой схеме, другие виды деятельности – науку и анализ – также можно описать аналогичным образом. Задача науки состоит в открытии законов, а задача анализа – в определении воздействия на входе системы для получения заданного выхода или определения выхода по заданному входному воздействию – все зависит от обстоятельств. Вследствие того что анализ связан главным образом с такими случаями, когда задан выход, задача нахождения воздействия на входе при требуемом выходе называется *инверсным анализом.*

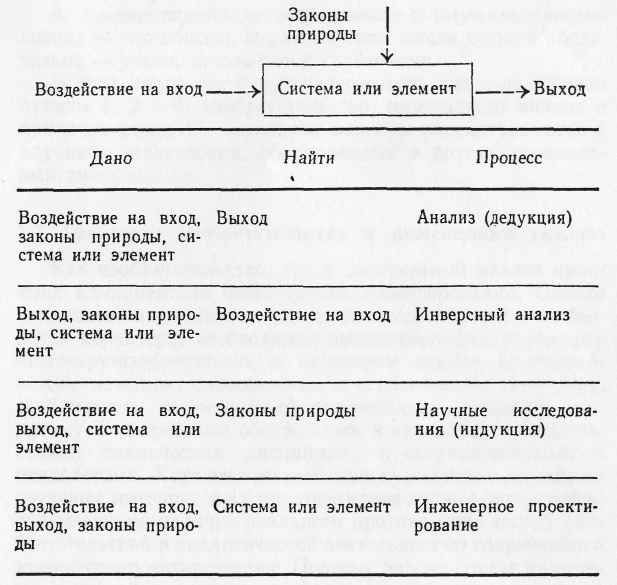


Рис. 1.3. Другой вариант схемы процесса инженерного проектирования

Это краткое схематическое представление служит наглядной иллюстрацией основного различия между инженерным проектированием и другими видами научно-технической деятельности.

## 1.6. Метод инженерного анализа

Нельзя найти такую методику, которая будет одинаково пригодной во всех случаях. Чтобы избранная методика дала эффект, ею нужно пользоваться гибко, как руководством к действию, а не смотреть на нее догматически как на ритуал. Методика может привлечь внимание к важным или сложным вопросам, вызывающим затруднения у многих инженеров. Она может служить средством самопроверки, своего рода тихой гаванью при шторме или исходным пунктом для дальнейшего движения. Не ждите, однако, что можно получить стандартную формулу для решения ваших задач. Ее не существует. На каждом шагу необходимо мыслить четко, ясно, напряженно, творчески. Нужно знать свой вопрос и понимать его. Методика решения задачи – средство, мобилизующее ваши знания, но не заменяющее их. На рис. 1.4 схематически показаны основные этапы решения инженерных задач.



Рис. 1.4. Схема процесса инженерного анализа

*Определение задачи, ее конкретизация*. Хотя совершенно очевидно, что это самый первый этап, однако именно здесь совершается много ошибок. Задача, сведенная к конкретному вопросу, позволяет выразить получаемое решение через величины, которые можно затем вычислить или измерить. Другими словами, нужно ставить такой вопрос, на который можно получить количественный ответ. Это не всегда легко сделать. Для этого нужно перейти от реальной физической ситуации к задаче, выраженной в форме конкретного вопроса. Например, недостаточно поставить вопрос: будет ли система работать? Такой вопрос не является конкретным. Вместо этого нужно ставить вопросы такого характера: какова выходная мощность силовой установки, если к ее входу подводится 5000 *кДж/сек?* Для подготовки рабочих условий задачи и их конкретизации необходимы определенный навык, понимание вопроса и умение рассуждать. Обычно каждый из нас может поставить вопрос в общем виде (например, будет ли система работать? будет ли температура слишком высокой? быстро ли будет затухать вибрация?).

Однако для решения задач инженерными методами, прежде всего, необходимо определить, что в действительности означает такое обобщение. Какая именно температура является «слишком» высокой? Что в секундах означает «скоро»? Инженер, занимающийся инженерным анализом, должен начинать работу с определения задачи, для которой можно будет получить *количественное решение.*

*Построение модели и принятие допущений*. Следующим этапом процесса решения задачи, также причиняющим много неприятностей, является построение модели. Модель представляет собой идеализированное приближение к реальной ситуации. Построение хорошей аналитической модели предполагает принятие допущений, учитывающих относительную важность различных элементов задачи. Очень часто студенты спрашивают у профессоров, а молодые инженеры – у более опытных коллег: «Как вы узнали, что нужно было принять именно это допущение?». Иногда такие вопросы возникают в связи с отсутствием опыта, что приводит к принятию неудовлетворительных допущений. Во многих же случаях у студента или молодого инженера просто нет возможности принять допущения из-за неумения обдуманно построить аналитическую модель ситуации. Впрочем, когда им подсказывают сделать это, в большинстве случаев молодые инженеры принимают допущения довольно верно. Однако когда они работают в одиночку, то сказывается отсутствие руководителя или более опытного инженера, который смог бы направить их мысль по правильному пути. Если с самого начала строят достаточно простую модель реальной ситуации, то в этом случае внимание сразу же будет привлечено к тем критическим аспектам, которые требуют принятия допущений. На рис. 1.5 схематически показан процесс построения модели при инженерном анализе.

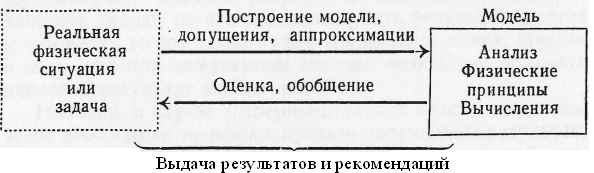


Рис. 1.5. Схема процесса инженерного анализа

При решении задач используются не только аналитические модели. Многие задачи быстрее и легче решить путем построения экспериментальной модели. Не обязательно, чтобы эксперимент в точности дублировал реальную физическую ситуацию, поскольку это все-таки модель, и тем не менее он может дать требуемые результаты.

Во многих задачах требуется строить комбинированные (аналитические и экспериментальные) модели. Часто бывает необходимо получать отдельные экспериментальные результаты, которые в виде соответствующих числовых значений нужно затем вводить в теоретические выражения. В то же время теоретические исследования могут подсказать, какого рода эксперименты наиболее целесообразны.

Построение модели – это процесс абстрагирования. Модель – это не реальность, а плод воображения инженера. Вся хитрость при построении модели состоит в том, что для получения решения модель должна быть достаточно простой, и в то же время она должна отражать существо задачи, чтобы найденные с ее помощью результаты имели смысл.

Применение физических принципов и накопление данных. После построения аналитической модели можно воспользоваться знаниями и методами научных и технических дисциплин. Модель можно проанализировать, используя первый закон Ньютона, уравнение количества движения или какой-либо иной подходящий в данном случае физический принцип. Студенты получают большую практику по применению физических принципов при изучении предметов по своей специальности. Одно хорошее правило, на которое не всегда обращают внимание, гласит: «При решении любой задачи всегда используйте *наиболее общий принцип.* Специальные и сложные методы или уравнения используйте лишь в тех случаях, когда вы абсолютно уверены, что они применимы и когда ничто более простое не подходит».

Следующим этапом после построения экспериментальной модели является накопление данных. В ходе лабораторных занятий можно приобрести необходимую для этого практику. Нужно научиться выполнять эту работу быстро и без больших затрат. Напомним, что при решении задач всегда имеют место ограничения, обусловливаемые такими факторами, как время, деньги, оборудование и т. д.

*Вычисления*. После применения теории и записи уравнений задача сводится к нахождению числовых результатов. Если это можно сделать аналитическими методами – прекрасно. Решайте задачу таким способом. Однако, когда это невозможно (а это при решении новых задач случается весьма часто), все равно *нужно* получить числовой результат за приемлемое время и при допустимых затратах. В таких случаях очень удобны графические методы. Распространенные в настоящее время вычислительные машины делают численный анализ вполне обычной операцией. Современные инженеры должны разрабатывать аппаратуру, позволяющую получать числовые результаты. Если мощные математические методы не позволяют получить результат (иногда это бывает), то все равно нужно продолжать поиск. Имейте в виду, что при инженерном анализе *необходимо* получить числовой результат любым способом.

Наконец, в случае экспериментальной модели на данном этапе необходимо проанализировать полученный результат. Для этого часто требуется выполнить статистический анализ или анализ размерности,

*Проверки*. Проверки нужно проводить на каждом этапе, а не только в конце работы. Обычно выполняются проверки двух видов: математические проверки и проверки, которые мы производим, исходя из физического смысла. Некоторые математические проверки, например арифметическая проверка, проверка правильности записи формул и т. д., общеизвестны, и обычно каждый из вас выполняет их. Проверка размерности по своему характеру также является математической, однако большинство студентов применяют ее далеко не в полной мере. *Каждое уравнение должно быть правильным с точки зрения размерности.* Кроме того, должны удовлетворяться граничные условия. Проверка их является хорошим способом обнаружения как принципиальных ошибок, так и ошибок, допущенных по невнимательности.

Проверка модели или выражения, исходя из физического смысла, очень важна, но она также очень редко используется студентами. Верны ли полученные уравнения? Если одна величина возрастает, то ведут ли себя остальные величины так, как это ожидалось? Очень хорошей проверкой, основывающейся на физическом смысле, является проверка пределов. Если какая-либо величина приближается к некоторому пределу (нулю, бесконечности или некоторой другой величине), то ведет ли себя уравнение так, как это ожидалось? Существуют ли другие существенные величины, которые не входят в уравнение? Все ли существенные факторы рассмотрены? Наконец, имеют ли вообще смысл полученные числовые результаты? Был, например, случай, когда один студент заявил, что *игрушечная* ракета может подняться на высоту 2200 *м.*

Проверки играют важную роль. Они позволяют сэкономить много времени и денег, а также избежать затруднений в процессе работы. В одной фирме среди инженеров ходит поговорка: «Никогда не хватает времени сделать правильно сразу, но всегда есть время для переделок». Оставляйте всегда немного времени для проверок. Всегда дешевле сразу же сделать правильно, чем потом переделывать заново.

По этому поводу следует высказать еще одно замечание. Бумага стоит дешево. Ошибки же обходятся дорого. Расходуйте побольше бумаги, пишите только на одной стороне листа. Будьте аккуратны.

*Оценка и обобщение*. При изучении технических дисциплин такие этапы, как формулировка задачи и построение модели, рассматриваются редко. Совершенно правильно, что при изучении этих предметов все внимание концентрируют на применении физических принципов и выполнении вычислений. За этапом вычислений следуют еще два этапа, которые также редко рассматривают при изучении технических дисциплин, это оценка и обобщение. Теперь, когда нами получен некоторый числовой результат, его нужно оценить. Кроме того, нужно установить, можно ли сделать обобщения, которые дадут нечто большее, чем просто решение конкретной задачи. Это важные этапы, и если их не выполнить, то может оказаться, что решение задачи было получено напрасно. В примерах, которые приводятся в этой и последующих главах, подробно рассматриваются оценка и обобщение результатов.

*Оптимизация*. Оценка результатов может предусматривать оптимизацию либо оптимизация может быть составной частью анализа вычислений. Как и проверка, оптимизация пронизывает весь процесс разработки, инженерного анализа и принятия решений.

Инженерный анализ был представлен здесь в виде последовательности этапов. В действительности же такая картина встречается довольно редко. Имеет место непрерывный итеративный процесс. Планы могут изменяться. Может потребоваться многократное решение одной и той же задачи, прежде чем будет получен удовлетворительный результат. Отметим еще раз, что на процесс решения задачи налагаются ограничения, обусловленные такими факторами, как время, деньги, оборудование и квалификация специалистов. Вообще говоря, оптимизация при этих и других возможных ограничениях является не только желательным, но и необходимым этапом процесса решения задачи, которую осуществляют с целью получения результата с требуемой точностью. Нельзя получить «правильного» решения любой задачи, если не ясна цель и не известны ограничения. Таким образом, чтобы хорошо решать задачи, нужно понимание необходимости оптимизации.

*Представление и выдача результатов и рекомендаций*. Когда результаты получены, работа еще не закончена. Полученные результаты нужно сообщить другим лицам. Часто бывает необходимо составить рекомендации. Их также нужно сообщить другим лицам. Выдача этой информации – еще один процесс, который необходимо оптимизировать. Чтобы повысить его эффективность, нужно исходить из конкретных условий (ограничений), а также принимать во внимание характер информации, которая должна быть выдана. При изложении результатов важную роль играют грамматика и правописание. Грамматические ошибки и неграмотное построение речи приводят к тому, что читатель или слушатель теряет доверие к автору письменного или устного сообщения. Кроме того, грамотная и ясная речь значительно повышает вес высказываемых идей. И это сказано не ради красного словца! Точно так же, как идею нельзя считать творческой, пока она не претворена в жизнь, так и от рекомендаций мало проку, пока они не приняты. Для успешной работы инженеру крайне необходимо умело подавать информацию о полученных результатах.

Часто бывает необходимо составить подробный отчет на сотню страниц, который хранится на тот случай, если когда-либо кто-либо пожелает заново пересмотреть разработанную конструкцию или найти иное применение уже выполненной работе. Однако информация, передаваемая в качестве основы для принятия решений, обычно должна быть более краткой. Известен случай руководителя, который настаивал на том, чтобы отчет не превышал одной страницы. Этот руководитель отказывался читать отчет даже на двух страницах. Он требовал, чтобы инженеры сообщали ему только существо полученных ими результатов и выработанных рекомендаций. Если его интересовали детали, он задавал вопросы. Другой руководитель вообще не принимал отчетов в письменном виде. Он требовал краткого устного изложения сделанных рекомендаций. После этого он выслушивал объяснения инженера по поводу каждого высказываемого им возражения.

Итак, вопрос сводится к следующему. Инженер должен уметь излагать существо полученных им результатов и выработанных рекомендаций в такой форме, чтобы читающий или слушающий мог быстро и легко понять его. Составлять и писать такие короткие отчеты очень трудно – значительно труднее, чем излагать все подряд.

Первым этапом инженерного анализа является уяснение задачи, а последним – выдача информации о полученном решении. Оба эти этапа, так же как и один из промежуточных, связанный с применением физических принципов, являются инженерными по своему характеру.

## 1.7. Качества, необходимые инженеру-проектировщику

Какими же навыками и знаниями должен обладать инженер, чтобы добиться успеха? Это, разумеется, все те качества, которыми обычно обладают люди, достигающие успеха: энергичность, упорство, стремление к совершенствованию, личное обаяние, творческая фантазия и т. п. Это также мастерство и знания, которые теснее связаны с инженерным образованием и которые можно приобрести в процессе обучения. Это, наконец, следующие качества, помогающие успешно решать инженерные задачи:

*Изобретательность,* т. е. умение выдумывать или изобретать ценные, полезные идеи или принципы, лежащие в основе вещей или процессов, предназначенных для достижения поставленных целей.

*Умение проводить инженерный анализ* – способность анализировать данный элемент, систему или процесс, используя технические или научные принципы с целью быстрого получения правильных решений.

*Технические знания* – доскональное знание и глубокое освоение конкретной инженерной специальности.

*Широкая специализация* – способность компетентно и уверенно разбираться в основных проблемах или идеях научных дисциплин, лежащих за пределами данной узкой специальности.

*Математическая подготовка* – умение в случае необходимости при решении задачи применять мощный математический аппарат и вычислительные методы.

*Умение принимать решения* в условиях неопределенности, но при полном и всестороннем учете всех существенных факторов.

*Знание технологии производства* – понимание возможностей и ограничений как прежних, так и новых технологических процессов.

*Умение передавать информацию о полученных результатах* – способность выражать свои мысли четко и убедительно – устно, письменно и графически.

В этом конспекте нас будут интересовать главным образом пункт 2 и 5: инженерный анализ и математическое мастерство. Остальные вопросы рассматриваются в научных, технических, общественных и других специальных дисциплинах.

## 1.8. Сравнение изобретательства и инженерного анализа

Как изобретательство, так и инженерный анализ являются компонентами инженерного проектирования. Однако есть основания полагать, что навыки, способности и особенности характера, необходимые высококвалифицированному инженеру-изобретателю, в некотором смысле противоположны навыкам, способностям и особенностям характера, необходимым высококвалифицированному инженеру-аналитику. Эта проблема обсуждалась и изучалась преподавателями технических дисциплин, предпринимателями и психологами. Хотя этот вопрос еще нуждается в серьезном изучении, имеющиеся в настоящее время данные определенно указывают на наличие реального противоречия между изобретательской и аналитической деятельностью современного инженера-проектировщика. Поэтому важно, чтобы инженеры знали об этом противоречии и предпринимали шаги к его разрешению.

Рассмотрим снова задачу инженерного проектирования и этапы ее решения. Задача состоит в том, чтобы разработать при некоторых ограничениях, обусловленных способом решения, элемент, систему или процесс с учетом некоторых ограничений, налагаемых на само решение. Хотя решение этой задачи состоит из нескольких конкретных этапов, отображенных на рис. 1.2, обычно бывает необходимо решить два основных вопроса: 1) прежде всего инженер должен предложить метод, схему или идею, которые, по его мнению, отвечают поставленным требованиям; 2) затем он должен количественно проанализировать свой метод, схему или идею, с тем, чтобы убедиться, что они удовлетворяют поставленным требованиям при заданных ограничениях. Первый из этих обобщенных этапов является творческим, исследовательским, новаторским. Он требует широких знаний и опыта, умения связать между собой разнообразные элементы и непредвзятого подхода, позволяющего сделать выбор нужного решения при наличии многих вариантов и в случае необходимости отказаться от некоторых из них. В то же время на этапе инженерного анализа требуются глубокие специальные знания, умение выделять и запоминать отдельные факты и владение математическим аппаратом, позволяющие прийти к единственно правильному решению. Эти два этапа совершенно различны по своему характеру, и нетрудно представить себе, что люди, умело справляющиеся с задачей первого этапа, вообще говоря, совсем не обязательно будут хорошо справляться с задачей второго этапа.

Разрешение этого противоречия нужно искать не в том, чтобы постоянно быть полуизобретателем-полуаналитиком. Это мало что даст. Скорее всего, разрешение этого противоречия нужно искать в том, чтобы научиться хорошо выполнять и то, и другое, и уметь полностью переключаться с одного этапа на другой в соответствии с обстановкой.

Нужно изучать специальные технические дисциплины и овладевать мастерством анализа. Распространенная в настоящее время система обучения определенно сдерживает развитие у студентов творческих способностей. Разрешению указанного противоречия способствует также изучение всего, что известно об изобретательстве и творчестве. Понимание различия в характере инженерного анализа и изобретательства позволит серьезному инженеру без особого труда переходить от анализа к изобретательской деятельности и обратно; почти единственное, что здесь требуется,– это умение переключаться с одного вида деятельности на другой. Почти вся работа студентов во время обучения в вузе носит аналитический характер. Однако и изобретательство является важным компонентом инженерного проектирования.

## 1.9. Вопросы для самопроверки

Исследуйте ваш учебный план и посмотрите, в какой мере он удовлетворяет разнообразным требованиям к подготовке инженеров.

Считаете ли вы, что понимание процесса инженерного проектирования позволит вам стать более квалифицированным инженером-проектировщиком? Почему? Можете ли вы найти какие-либо аналогии в других областях? Правильно ли считать, что художник только пишет картины, музыкант только играет, писатель только пишет повести, исследователь только занимается научно-исследовательской работой и т. д.?

Дайте критическую оценку описания и схемы процесса инженерного проектирования и анализа. Не было ли что-нибудь опущено? Нельзя ли это сделать лучше?

Дайте критическую оценку описания и краткого перечня качеств, необходимых инженеру-проектировщику. Не было ли что-нибудь опущено? Нельзя ли это сделать лучше?

Какова природа противоречия между изобретательством и инженерным анализом? Каково ваше мнение о высказанном в этой главе предложении относительно его разрешения? Можете ли вы дать иные или дополни тельные предложения?

Не видите ли вы какого-либо естественного противоречия между качествами, необходимыми инженерам для принятия решений, и качествами, необходимыми для изобретательства или инженерного анализа? Обсудите этот вопрос.

# 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

## 2.1. Введение

Понятие «математическое моделирование» в последние 2-3 десятилетия является едва ли не самым распространенным в научной литературе, по крайней мере в естественнонаучной и технической. Сегодня трудно представить себе проектную или конструкторскую организацию, не использующую в своей практике в той или иной мере математические модели. Все более распространенным и эффективным становится применение математического моделирования в научных исследованиях. Интенсивно разрабатываются математические модели в экономике, управлении, истории, биологии и многих других областях знаний. Подавляющее большинство известных авторам диссертационных работ по специальностям естественнонаучных и инженерно-технических направлений связано с разработкой и использованием соответствующих математических моделей. В последние 10-15 лет эта тенденция получает все более широкое распространение при подготовке дипломных работ выпускников вузов. Математическое моделирование используется в учебной работе учащихся физико-математических школ и лицеев.

Можно констатировать, что математическое моделирование в последние десятилетия оформилось в отдельную междисциплинарную область знаний с присущими ей объектами, подходами и методами исследования. В связи с этим все более актуальной становится задача целенаправленной подготовки специалистов-«матмодельеров» в вузах различного профиля, в рамках различных направлений и специальностей. Реализация образовательного процесса по подготовке специалистов-«матмодельеров», естественно, требует наличия соответствующего методического обеспечения. За последние годы издано немало прекрасных монографий, статей, научно-популярных брошюр, пособий. К их числу в первую очередь следует отнести работы отечественных ученых: А.А. Самарского, Н.Н. Моисеева и многих других, трудами которых математическое моделирование и превратилось в самостоятельную область знаний. Как правило, в работах этого направления основное внимание уделяется методам исследования собственно математических моделей, качественному анализу решений, новым эффектам в исследуемых процессах и явлениях.

Следует отметить, что в настоящее время в значительной части учебников и учебных пособий по различным дисциплинам включаются некоторые понятия, методы и примеры применения математического моделирования. Здесь обычно используется некоторый набор базовых моделей данной дисциплины или смежных с ней: из этих «кубиков» в дальнейшем строится модель анализируемого процесса. При этом, как правило, базовые модели принимаются в качестве данности, не обсуждается правомерность их использования, область применимости, степень адекватности описания. «За кадром» в большинстве случаев остается и собственно процесс создания математической модели, процесс перехода от «языка природы» к «языку математики».

Понятно, что указанные обстоятельства обусловлены сложившимися в различных областях традициями, спецификой дисциплин, личными склонностями авторов. В то же время, несмотря на то, что создание любой новой модели - процесс творческий, близкий к искусству, существуют достаточно общие подходы, методы, «инструменты», пригодные для различных предметных областей. Именно этому кругу вопросов – технологии создания математических моделей – будет уделено наибольшее внимание.

Целесообразно начинать работу в области математического моделирования именно с простейших моделей, не отягченных математическими сложностями. Будущий специалист, избравший этот не самый легкий путь применения математических моделей, должен обладать широкими и глубокими знаниями не только во многих разделах «чистой» и «прикладной» математики и информатики, но и аналогичными познаниями в относящихся к объекту моделирования технических дисциплинах. Только доскональное знание объекта моделирования, соответствующей предметной области, а также возможность говорить на одном языке со специалистами-«заказчиками» модели позволяет надеяться на успешную реализацию того или иного проекта по созданию математической модели процесса или явления. По крайней мере, такими качествами должен обладать «постановщик» задачи построения той или иной модели. Надо сказать, что модели сложных процессов и явлений, как правило, разрабатываются коллективами научных сотрудников различных специальностей, «постановщик» обычно является руководителем коллектива. Именно в подобных специалистах ощущается острый (и резко возрастающий) дефицит, а, следовательно, подготовке специалистов данного профиля необходимо уделять повышенное внимание.

## 2.2.. Моделирование и технический прогресс

На пути реализации в технике наиболее перспективных научных открытий и разработок обычно стоят препятствия, связанные с отсутствием или ограниченными возможностями конструкционных или функциональных материалов и с недостаточностью достигнутого технологического уровня. Поэтому процесс реализации научных и технических идей – это процесс

поиска разумного компромисса между желаемым и возможным, что доказывает история развития таких быстро прогрессирующих технических отраслей, как ядерная энергетика, ракетно-космическая техника, ведущие отрасли приборостроения и вычислительная техника.

При создании технических устройств и систем различного назначения обычно рассматривают несколько возможных вариантов проектных решений, ведущих к намеченной цели. Эти варианты принято называть *альтернативами.* Учет противоречивых требований и поиск компромисса в решении комплекса возникающих при этом взаимосвязанных проблем предполагают наличие достаточно полной и достоверной количественной информации об основных параметрах, которые характеризуют возможные для выбора альтернативы.

В складывавшейся десятилетиями последовательности основных этапов разработки технических устройств в большинстве отраслей машиностроения и приборостроения некоторый начальный объем необходимой информации формировался путем так называемых проектировочных расчетов, степень достоверности которых должна была обеспечивать лишь довольно грубый отбор альтернатив. Основная часть необходимой для принятия окончательного решения количественной информации (как по степени подробности, так и по уровню достоверности) формировалась на стадии экспериментальной отработки технических устройств. По мере их усложнения и Удорожания, а также удлинения стадии их экспериментальной отработки значимость проектировочных расчетов стала расти, возникла необходимость в повышении достоверности таких расчетов, обеспечивающей более обоснованный отбор альтернатив на начальной стадии проектирования и формулировку количественных критериев для структурной и параметрической оптимизации.

Развитие сверхзвуковой авиации, возникновение ракетно-космической техники, ядерной энергетики и ряда других быстро развивающихся наукоемких отраслей современного машиностроения и приборостроения привели к дальнейшему усложнению разрабатываемых и эксплуатируемых технических устройств и систем. Их экспериментальная отработка стала требовать все больших затрат времени и материальных ресурсов, а в ряде случаев ее проведение в полном объеме превратилось в проблему, не имеющую приемлемого решения.

В этих условиях существенно увеличилось значение расчетно-теоретического анализа характеристик таких устройств и систем. Этому способствовал и прорыв в совершенствовании вычислительной техники, приведший к появлению современных ЭВМ с большим объемом памяти и высокой скоростью выполнения арифметических операций. В результате возникла материальная база для становления и быстрого развития *математического моделирования* и появились реальные предпосылки для использования *вычислительного эксперимента* не только в качестве расчетно-теоретического сопровождения на стадии отработки технического устройства, но и при его проектировании, подборе и оптимизации его эксплуатационных режимов, анализе его надежности и прогнозировании отказов и аварийных ситуаций, а также при оценке возможностей форсирования характеристик и модернизации технического устройства.

Так, вычислительный эксперимент позволил снизить затраты на проведение натурных аэродинамических испытаний созданного в США аэробуса и добиться уменьшения аэродинамического сопротивления на 20 % по сравнению с существовавшими аналогами. Известны примеры математического моделирования условий, возникающих при автомобильных авариях и более крупных техногенных катастрофах. На основе *математической модели* биосферы Земли составлен прогноз последствий ядерных взрывов при возможном военном конфликте, приводящих к так называемой „ядерной зиме".

Отметим, что определенные предпосылки к широкому применению математического моделирования и вычислительного эксперимента в технике были созданы благодаря разработке методов аналогового моделирования. Основу большинства этих методов составляло использование электрических моделей-аналогов для исследования процессов в механических, тепловых и гидравлических системах. Явления считают математически аналогичными, если их описывают одинаковые по форме уравнения. Математическая аналогия между процессами в электрических цепях и другими физическими явлениями позволяет создать моделирующие установки, которые, по существу, являются специализированными аналоговыми вычислительными машинами (АВМ). Так, на основе *электротепловой аналогии* были разработаны и изготовлены многочисленные установки для моделирования процессов теплопроводности и теплообмена применительно к различным элементам конструкций и технологического оборудования в машиностроении, энергетике, металлургии, химической промышленности и других отраслях техники. Но, несмотря на простоту проведения вычислительного эксперимента и достаточную для инженерной практики точность получаемых результатов, со временем АВМ были вытеснены более универсальными и производительными ЭВМ. Тем не менее, и сейчас при разработке *математических моделей* наряду с электротепловой аналогией используют *электромеханическую* и *электрогидравлическую аналогии* в методических целях для построения *эквивалентных схем* проектируемых и исследуемых *технических* объектов.

В настоящее время математическое моделирование и вычислительный эксперимент с использованием ЭВМ стали составными частями общих подходов, характерных для современных информационных технологий. Принципиально важно то, что математическое моделирование позволило объединить Формальное и неформальное мышление и естественным образом сочетать способность ЭВМ во много раз быстрее, точнее и лучше человека делать формальные, арифметические операции, отслеживать логические цепочки с удивительными свойствами человеческого интеллекта — интуицией, способностью к ассоциациям и т.д.. Не менее важно и то, что современные средства отображения информации дают возможность вести с ЭВМ диалог — анализировать альтернативы, проверять предположения, экспериментировать с *математической моделью*.

Практическая реализация возможностей математического моделирования и вычислительного эксперимента существенно повышает эффективность инженерных разработок особенно при создании принципиально новых, не имеющих прототипов машин и приборов, материалов и технологий, что позволяет сократить затраты времени и средств на использование в технике передовых достижений физики, химии, механики и других фундаментальных наук. Отмеченные возможности математического моделирования и вычислительного эксперимента еще далеко не исчерпаны, представляются достаточно перспективными и поэтому заслуживают детального рассмотрения.

## 2.3. Понятие математической модели и математического моделирования

Понятия модели и моделирования наиболее распространены в сфере обучения, научных исследованиях, проектно-конструкторских работах, в серийном техническом производстве. В каждой из этих областей моделирование имеет свои особенности. Далее моделирование будет рассматриваться главным образом применительно к проектированию. Чаще всего термин «модель» используют для обозначения:

устройства, воспроизводящего строение или действие какого-либо другого устройства (уменьшенное, увеличенное или в натуральную величину);

аналога (чертежа, графика, плана, схемы, описания и т.д.) какого-либо явления, процесса или предмета.

К недостаткам термина «модель» следует отнести его многозначность. В словарях можно найти до восьми различных значений данного термина, из которых в научной литературе наиболее распространены два:

модель как аналог реального объекта;

модель как образец будущего изделия.

Важную роль при разработке моделей играют *гипотезы*, т.е. определенные предсказания, предположительные суждения о причинно-следственных связях явлений, основанные на некотором количестве опытных данных, наблюдений, догадок. Формулирование и проверка правильности гипотез основывается, как правило, на аналогиях.

*Аналогия* – это представление о каком-либо частном сходстве двух объектов, причем такое сходство может быть как существенным, так и несущественным. Существенность сходства или различия двух объектов условна и зависит от уровня абстрагирования, определяемого конечной целью исследования. Уровень абстрагирования зависит от набора учитываемых параметров объекта исследования. Например, при изучении механических свойств в качестве объектов исследования могут быть выделены материалы из дерева, металла, пластмассы и т.д. В свою очередь материалы из дерева можно подразделить по видам древесины на лиственные и хвойные, лиственные – на «березу», «тополь», «ясень» и т.д.

В данном примере степень абстрагирования снижается при добавлении учитываемых параметров. Следует заметить, что уровень абстрагирования данного объекта всегда устанавливается по отношению к другим объектам.

Гипотезы и аналогии, в определенной мере отражающие реальный, объективно существующий мир, должны обладать наглядностью или сводиться к удобным для исследования логическим схемам. Именно подобные логические схемы, упрощающие рассуждения и логические построения, а также позволяющие проводить эксперименты, приводящие к пониманию явлений природы, называют моделями. Другими словами, *модель –* это объект-заменитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых интересующих исследователя свойств оригинала.

*Под моделью понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты. Процесс построения и использования модели называется моделированием.*

Представленное определение является достаточно общим и может трактоваться по-разному. В частности, любое знание можно рассматривать как некоторую идеальную модель природного объекта или явления. В свою очередь, любой искусственный (т.е. созданный человеком) объект или процесс есть материальная модель, построенная на основе соответствующих знаний (идеальных моделей). В этом смысле можно говорить о трех реальностях или трех сферах (что близко к мыслям, высказанным В.И.Вернадским еще в 1922 г.), в которых живет человек.

Первой реальностью является живая и неживая природа, законы развития которой не зависят от человека. Поэтому природные объекты и явления нельзя рассматривать как модели по отношению к человеку. Однако познание и использование человеком природных объектов возможно только через их модели, которые в результате изучения самих объектов также изменяются.

Объекты природы находят свое отражение во второй реальности, или ноосфере, включающей знания, накопленные всем человечеством и практически мало зависящие от конкретного человека. Данная реальность, состоящая из идеальных моделей, зависит от эволюции человечества и изменяется в процессе познания, пополняясь новыми и изменяя старые модели. Можно сказать, что процесс познания в любой области знаний представляет собой непрерывное совершенствование существующих и построение новых моделей исследуемых объектов. Этот ряд моделей (с оптимистической точки зрения) бесконечен.

Наконец, третья реальность, или *техносфера,* которая может рассматриваться как отражение второй реальности, включает все материальные модели, созданные человеком.

В контексте данных рассуждений и приведенного выше определения модели можно сделать вывод о том, что человек в своей жизни в основном занимается знакомством с уже разработанными ранее моделями и созданием на их основе новых идеальных или материальных моделей. Поэтому понятие «*человек моделирующий»* можно считать тождественным понятию *«человек разумный».*

Отмеченная выше неоднозначность термина «модель», огромное число типов моделирования и их быстрое развитие затрудняют в настоящее время построение логически законченной, удовлетворяющей всех классификации моделей. Любая подобная классификация условна в силу того, что она отражает, с одной стороны, пристрастия авторов, а с другой - ограниченность их знаний в конечном числе областей научного познания. Данную классификацию следует рассматривать как попытку построения некоторого инструмента или модели для исследования свойств и характеристик самого процесса моделирования.

Как было отмечено ранее, моделирование относится к общенаучным методам познания. Использование моделирования на эмпирическом и теоретическом уровнях исследования приводит к делению (условному) моделей на материальные и идеальные.

*Материальное моделирование –* это моделирование, при котором исследование объекта выполняется с использованием его материального аналога, воспроизводящего основные физические, геометрические, динамические и функциональные характеристики данного объекта. К таким моделям, например, можно отнести использование макетов в архитектуре, моделей и экспериментальных образцов при создании различных транспортных средств.

*Идеальное моделирование* отличается от материального тем, что оно основано не на материализованной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мыслимой и всегда носит теоретический характер.

*Математическое моделирование – это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов.*

В качестве примера математического моделирования приведем классическую механику точки И. Ньютона, с помощью которой можно описать движение любого материального объекта, размеры которого малы по сравнению с характерными расстояниями, проходимыми телом. Фактически все современные разделы физики посвящены построению и исследованию математических моделей различных физических объектов и явлений. Так, физики-«ядерщики» до проведения экспериментов выполняют серьезные исследования с применением математических моделей. При этом на основании результатов теоретического моделирования разрабатывается и уточняется методика натурных экспериментов, выясняется, какие эффекты, где и когда следует ожидать, когда и что регистрировать. Такой подход позволяет значительно снизить затраты на проведение эксперимента, повысить его эффективность. Аналогичные замечания можно сделать по другим современным дисциплинам.

Как правило, значительные успехи в биологии и химии в последнее время были связаны с разработкой и исследованием математических моделей для биологических систем и химических процессов. В настоящее время широким фронтом идут работы по созданию математических моделей в экологии, экономике и социологии. Нельзя переоценить использование математических моделей в медицине и промышленности. Появилась возможность на научной (т.е. логически обоснованной) основе подходить ко многим экологическим и медицинским проблемам: имплантации и замене различных органов, прогнозированию развития эпидемий, обоснованной разработке планов ликвидации последствий крупных аварий и катастроф. Очень часто методы математического моделирования являются единственно возможными. Например, всестороннее математическое моделирование и «проигрывание» различных вариантов на ЭВМ позволило в кратчайшие сроки (1–2 недели) обоснованно спланировать и приступить к реализации плана ликвидации последствий Чернобыльской катастрофы. Уникальные результаты были получены по проекту «Гея», связанному с математическим моделированием последствий ядерной войны. Было выяснено, что в результате сильного запыления атмосферы возможно значительное глобальное похолодание («ядерная зима») и связанное с этим вымирание практически всего живого. Подобных примеров эффективного использования математических моделей можно привести очень много. В настоящее время это один из самых результативных и наиболее часто применяемых методов научного исследования.

Следует отметить, в сравнении с натурным экспериментом определенные преимущества математического моделирования:

экономичность (в частности, сбережение ресурсов реальной системы);

возможность моделирования гипотетических, т.е. не реализованных в природе объектов (прежде всего на разных эта? пах проектирования);

возможность реализации режимов, опасных или трудновоспроизводимых в натуре (критический режим ядерного реактора, работа системы противоракетной обороны);

возможность изменения масштаба времени;

простота многоаспектного анализа;

большая прогностическая сила вследствие возможности вы явления общих закономерностей;

универсальность технического и программного обеспечения проводимой работы (ЭВМ, системы программирования и пакеты прикладных программ широкого назначения).

Пример определения математической модели, характерный для «чистой» математики - под математической моделью понимается «класс абстрактных и символьных математических объектов, таких, как числа или векторы, и отношения между ними». Под математическим отношением понимается «гипотетическое правило, связывающее два или более символических объекта». Вводятся абстрактное и конструктивное определения математической модели. При абстрактном определении новая модель задается «непротиворечивым набором правил (определяющих аксиом), вводящих операции, которыми можно пользоваться, и устанавливающих общие отношения между их результатами. Конструктивное определение вводит новую математическую модель, пользуясь уже известными математическими понятиями (например, определение сложения и умножения матриц в терминах сложения и умножения чисел)».

Излишний формализм, оперирование абстрактными понятиями можно считать, с одной стороны, недостатком приведенного определения «чистых» математиков. С другой стороны, абстрактность понятий повышает общность определения модели, делает его применимым к моделям самых разных по природе, не похожих объектов и явлений. Кроме того, несомненными достоинствами этого определения является его строгость и логичность.

Для «прикладных» математиков характерна меньшая оторванность от реальной жизни, поскольку математические соотношения связывают не просто абстрактные математические объекты, а вполне конкретные параметры реальных физических, химических, биологических или социальных явлений или процессов. Желательно иметь определение математической модели, сохраняющее строгость и логичность последнего в «чистой» математике и, в то же время, пригодное для классификации существующих и создаваемых моделей, сравнения их между собой. Вариант подобного определения можно сформулировать в следующих выражениях.

Любая математическая модель, предназначенная для научных исследований, позволяет по заданным исходным данным найти значения интересующих исследователя параметров моделируемого объекта или явления. Поэтому можно предположить, что суть любой подобной модели заключается в отображении некоторого заданного множества значений входных параметров вмножество значений и выходных параметров*.* Данное обстоятельство позволяет рассматривать математическую модель как некоторый математический оператор и сформулировать следующее определение.

Под *математической моделью* будем понимать любой оператор*,* позволяющий по соответствующим значениям входных параметров установить выходные значения параметров объекта моделирования.

В зависимости от природы моделируемого объекта элементами множеств могут являться любые математические объекты (числа, векторы, тензоры, функции, множества и т.п.).

Понятие оператора в приведенном определении может трактоваться достаточно широко. Это может быть как некоторая функция, связывающая входные и выходные значения, так и отображение, представляющее символическую запись системы алгебраических, дифференциальных, интегро-дифференциальных или интегральных уравнений. Наконец, это может быть некоторый алгоритм, совокупность правил или таблиц, обеспечивающих нахождение (или Установление) выходных параметров по заданным исходным значениям.

Определение математической модели через понятие оператора является более конструктивным с точки зрения построения классификации таких моделей, поскольку включает в себя все многообразие имеющихся в настоящее время математических моделей.

С развитием вычислительной техники большое распространение получили *информационные модели,* представляющие, по существу, автоматизированные справочники, реализованные с помощью систем управления базами данных. Получая на входе некоторый запрос на поиск требуемой информации, подобные модели позволяют найти всю имеющуюся в базе данных информацию по интересующему вопросу. Однако такие модели не могут генерировать новое знание, отсутствующее в базе данных. Можно сказать, что это модели с нулевым потенциалом. В то же время в сочетании даже с весьма простыми математическими моделями (например, с применением регрессионного анализа) информационные модели могут привести к открытию новых закономерностей, позволить прогнозировать развитие исследуемых процессов.

### 2.3.1. Свойства моделей

В настоящее время нет предпосылок к выделению «самых элементарных» и «неделимых» кирпичиков мироздания. Поэтому можно утверждать, что любой объект исследования является бесконечно сложным и характеризуется бесконечным числом параметров. При построении модели исследователь всегда исходит из поставленных *целей,* учитывает только наиболее существенные для их достижения факторы. Поэтому любая модель нетождественна объекту-оригиналу и, следовательно, *неполна,* поскольку при ее построении исследователь учитывал лишь важнейшие с его точки зрения факторы. Другие факторы, несмотря на свое относительно малое влияние на поведение объекта по сравнению с выбранными факторами, в совокупности все же могут приводить к значительным различиям между объектом и его моделью. «Полная» модель, очевидно, будет полностью тождественна оригиналу.

Если результаты моделирования удовлетворяют исследователя и могут служить основой для прогнозирования поведения или свойств исследуемого объекта, то говорят, что модель *адекватна* объекту. При этом адекватность модели зависит от целей моделирования и принятых критериев. Учитывая заложенную при создании неполноту модели, можно утверждать, что идеально адекватная модель принципиально невозможна.

В качестве одной из характеристик модели может выступать *простота* (или *сложность) модели.* Очевидно, что из двух моделей, позволяющих достичь желаемой цели и получить требуемые результаты с заданной точностью, предпочтение должно быть отдано более простой. При этом адекватность и простота модели далеко не всегда являются противоречивыми требованиями. Учитывая бесконечную сложность любого объекта исследования, можно предположить существование бесконечной последовательности его моделей, различающихся по степени полноты, адекватности и простоты.

В качестве еще одного свойства модели можно рассматривать *потенциальность модели*, или предсказательность с позиций возможности получения новых знаний об исследуемом объекте. Эти «дерзость», «собственный ум» моделей – есть проявление множества внутренних связей, осознать совместное действие (синергетические эффекты) которых их создатели зачастую не в состоянии (по крайней мере – на стадии разработки). Именно свойство потенциальности (иногда называемое *богатством модели)* позволяет модели выступать в качестве самостоятельного объекта исследования.

В проектировании модели, не обладающие определенной «предсказательностью», едва ли могут считаться удовлетворительными.

Известно немало случаев, когда изучение или использование моделей позволило сделать открытия. В качестве примера можно привести открытие планеты Нептун, положение которой было предсказано французским астрономом Лаверье на основании расчетов, выполненных с использованием закона всемирного тяготения (т.е. модели) и данных о движении планеты Уран. В наше время только на основании результатов теоретического моделирования открыт высокотемпературный Т-слой в плазме (подтвержден экспериментально), использование которого позволяет значительно повысить коэффициент полезного действия магнито-гидродинамических генераторов, которые в настоящее время рассматриваются как перспективные устройства для получения электрической энергии.

### 2.3.2. Цели моделирования

Хорошо построенная модель, как правило, доступнее, информативнее и удобнее для исследователя, нежели реальный объект.

Рассмотрим основные цели, преследуемые при моделировании при проектировании. Самым важным и наиболее распространенным предназначением моделей является их применение при изучении и прогнозировании поведения сложных процессов и явлений. Следует учитывать, что некоторые объекты и явления вообще не могут быть изучены непосредственным образом. Недопустимы, например, широкомасштабные «натурные» эксперименты с экономикой страны или со здоровьем ее населения (хотя и те, и другие с определенной периодичностью ставятся и реализуются). Принципиально неосуществимы эксперименты с прошлым какого-либо государства или народа*.* Невозможно (по крайней мере, в настоящее время) провести эксперимент по прямому исследованию структуры звезд. Многие эксперименты неосуществимы в силу своей дороговизны или рискованности для человека и/или среды его обитания.

Как правило, в настоящее время всесторонние предварительные исследования различных моделей явления предшествуют проведению любых сложных экспериментов. Более того, эксперименты на моделях с применением ЭВМ позволяют разработать план натурных экспериментов, выяснить требуемые характеристики измерительной аппаратуры, наметить сроки проведения наблюдений, а также оценить стоимость такого эксперимента.

Другое, не менее важное, предназначение моделей состоит в том, что с их помощью выявляются наиболее существенные факторы, формирующие те или иные свойства объекта, поскольку сама модель отражает лишь некоторые основные характеристики исходного объекта, учет которых необходим при исследовании того или иного процесса или явления. Например, исследуя движение массивного тела в атмосфере вблизи поверхности Земли, на основании известных экспериментальных данных и предварительного физического анализа можно выяснить, что ускорение существенно зависит от массы и геометрической формы этого тела (в частности, от величины поперечного к направлению движения сечения объекта), в определенной степени – от шероховатости поверхности, но не зависит от цвета поверхности. При рассмотрении движения того же тела в верхних слоях атмосферы, где сопротивлением воздуха можно пренебречь, несущественными становятся и форма, и шероховатость поверхности.

Конечно, модель любого реального процесса или явления «беднее» его самого как объективно существующего (процесса, явления). В то же время хорошая модель «богаче» того, что понимается под реальностью, поскольку в сложных системах понять всю совокупность связей «разом» человек (или группа людей), как правило, не в состоянии. Модель же позволяет «играть» с ней: включать или отключать те или иные связи, менять их для того, чтобы понять важность для поведения системы в целом.

Модель позволяет научиться правильно управлять объектом путем апробирования различных вариантов управления. Использовать для этого реальный объект часто бывает рискованно или просто невозможно. Например, получить первые навыки в управлении современным самолетом безопаснее, быстрее и дешевле на тренажере (т.е. модели), чем подвергать себя и дорогую машину риску.

Если свойства объекта с течением времени меняются, то особое значение приобретает задача прогнозирования состояний такого объекта под действием различных факторов. Например, при проектировании и эксплуатации любого сложного технического устройства желательно уметь прогнозировать изменение надежности функционирования как отдельных подсистем, так и всего устройства в целом.

Итак, модель нужна для того, чтобы:

1) понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, внутренние связи, основные свойства, законы развития, саморазвития и взаимодействия с окружающей средой;

2) научиться управлять объектом или процессом, определять наилучшие способы управления при заданных целях и критериях;

3) прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

## 2.4. Классификация математических моделей

Бурное развитие методов математического моделирования и многообразие областей их использования привело к появлению огромного количества моделей самого разного типа. В связи с этим возникает необходимость в определенном упорядочивании, классификации существующих и появляющихся математических моделей. Учитывая большое число возможных классификационных признаков и субъективность их выбора, появление все новых классов моделей, следует отметить условность и незавершенность рассматриваемой ниже классификации.

Представляется возможным подразделить математические модели на различные классы в зависимости от:

сложности объекта моделирования;

оператора модели (подмодели);

входных и выходных параметров;

способа исследования модели;

цели моделирования.

### 2.4.1. Классификация математических моделей в зависимости от сложности объекта моделирования

В качестве объекта моделирования может выступать как некоторое материальное тело или конструкция, так и природный, технологический или социальный процесс либо явление. Все объекты моделирования можно разделить на две группы: простые и объекты-системы. В первом случае при моделировании не рассматривается внутреннее строение объекта, не выделяются составляющие его элементы или подпроцессы. В качестве примера подобного объекта можно привести материальную точку в классической механике.

*Система* есть совокупность взаимосвязанных элементов, в определенном смысле обособленная от окружающей среды и взаимодействующая с ней как целое.

Для сложных систем характерно наличие большого числа взаимно связанных, взаимодействующих между собой элементов.

Поведение системы быстро усложняется с ростом числа ее элементов системы. Данное обстоятельство, с одной стороны, говорит о сложности систем и многовариантности их поведения. С другой стороны, следует ожидать наличия больших трудностей, возникающих при изучении и моделировании систем.

Конечно, деление объектов исследования на «простые» и «сложные» условно. Поскольку для любых известных процессов, явлений, материальных тел невозможно выделить их «элементарные кирпичики», «атомы», то любой объект исследования можно считать бесконечно сложным. Упрощение его строения при разработке модели выполняется в результате отбрасывания малозначимых, несущественных для достижения поставленных на данный момент целей исследования связей между составляющими объект элементами. При изменении целей исследования или повышении требований к точности и глубине модели приходится, как правило, пересматривать уровень детализации объекта.

Модели объектов-систем, учитывающие свойства и поведение отдельных элементов, а также взаимосвязи между ними, называются *структурными.*

Среди структурных динамических систем выделяют в отдельный подкласс *имитационные* системы, состоящие из конечного числа элементов, каждый из которых имеет конечное число состояний. Число связей между элементами также предполагается конечным. Моделирование взаимодействий элементов внутри системы осуществляется с помощью некоторого алгоритма, реализуемого обычно с использованием ЭВМ. Для моделирования на ЭВМ реального времени вводится понятие системного времени, в качестве моделей отдельных элементов могут быть использованы модели любого типа.

Как правило, взаимодействие внешней среды со сложной системой полностью проследить не удается, что приводит к неопределенности внешних воздействий и, как следствие, неоднозначности в поведении самой системы. Наличие подобной неопределенности является характерной особенностью сложных систем.

### 2.4.2. Классификация математических моделей в зависимости от оператора модели

Любая математическая модель может рассматриваться как некоторый оператор*,* который является алгоритмом или определяется совокупностью уравнений - алгебраических, обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), систем ОДУ (СОДУ), дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), интегродифференциальных уравнений (ИДУ) и др.

Если оператор обеспечивает линейную зависимость выходных параметров от значений входных параметров*,* то математическая модель называется *линейной*. Линейные модели более просты для анализа. Например, из свойства линейности следует свойство суперпозиции решений.

Предельные значения для линейных моделей достигаются, как правило, на границах областей допустимых значений входных параметров.

Исторически первыми стали разрабатываться и исследоваться именно линейные математические модели. Область применения подобных моделей очень широка. Она охватывает классическую механику, электродинамику, аналитическую химию и биологию. Методы их построения, разрабатывавшиеся в течение столетий, обладают большой общностью и эффективностью.

Линейное поведение свойственно относительно простым объектам. Системам, как правило, присуще нелинейное многовариантное поведение.

В настоящее время все чаще возникает потребность не только в повышении точности моделирования, но и в создании качественно новых моделей, учитывающих нелинейность поведения реальных объектов исследования. Анализ подобных моделей намного сложнее, чем линейных, причем разработка методики и общих подходов к исследованию в настоящее время далека от завершения. Являясь более богатым и сложным, мир нелинейных моделей представляется для современной науки более перспективным в плане открытия новых закономерностей и описания сложных явлений. Например, такие явления, как солитоны и хаос, нельзя с достаточной степенью адекватности описать в рамках традиционных линейных моделей. Методы исследования нелинейных моделей в настоящее время быстро прогрессируют, складываясь в новые научные направления. К таким относительно новым направлениям можно отнести, например, синергетику – науку о сложных самоорганизующихся системах.

В зависимости от вида оператора математические модели можно разделить на *простые* и *сложные.*

В случае, когда оператор модели является алгебраическим выражением, отражающим функциональную зависимость выходных параметров от входных*,* модель будем называть *простой.*

Простые модели чаще всего являются результатом обобщения и анализа экспериментальных данных, полученных в результате наблюдений за исследуемым объектом или явлением. На основании анализа таких данных выдвигается гипотеза о возможной функциональной связи входных и выходных параметров. После этого гипотеза проверяется на имеющемся экспериментальном материале, уточняется степень ее адекватности, т.е. степень соответствия результатов моделирования, полученных с применением данной гипотезы, имеющимся знаниям об исследуемом объекте. Если результаты проверки неудовлетворительны, то принятая гипотеза отвергается и заменяется новой. Процесс повторяется до получения желаемой степени соответствия результатов эксперимента и модели.

В качестве примеров простых моделей можно привести многие законы физики (закон всемирного тяготения, закон Ома, закон Гука, закон трения Амонтона–Кулона), а также все эмпирические, т.е. полученные из опыта, алгебраические зависимости между входными и выходными параметрами. Так, в теории резания металлов очень часто используются соотношения, ставящие время и стоимость обработки детали на станке в зависимость от скоростей ее вращения (скорости резания) и осевого перемещения (скорости подачи) резца.

Модель, включающая системы дифференциальных и интегральных соотношений, уже не может быть отнесена к простым, так как для своего исследования требует применения довольно сложных математических методов. Однако в двух случаях она может быть сведена к простым:

1. если полученная для подобной модели система математических соотношений может быть разрешена аналитически;
2. если результаты вычислительных экспериментов со сложной моделью аппроксимированы некоторой алгебраической зависимостью. В настоящее время известно достаточно большое число под ходов и методов аппроксимации (например, метод наименьших квадратов или метод планирования экспериментов).

На практике довольно часто возникают ситуации, когда удовлетворительное описание свойств и поведения объекта моделирования (как правило, сложной системы) не удается выполнить с помощью математических соотношений. Однако в большинстве случаев удается построить некоторый имитатор поведения и свойств такого объекта с помощью алгоритма, который можно считать оператором модели.

Например, если в результате наблюдения за объектом получена таблица соответствия между входными выходными значениями параметров, то определить оператор*,* позволяющий получить «выход» по заданному «входу», зачастую бывает проще с помощью алгоритма.

### 2.4.3. Классификация математических моделей в зависимости от параметров модели

По своей природе характеристики объекта могут быть как качественными, так и количественными. Введение тех или иных количественных характеристик объекта моделирования возможно при наличии эталона сравнения. Например, для характеристики размеров тела используется эталонный образец - метр. Для количественной характеристики вводятся числа, выражающие отношения между данным параметром и эталоном. Кроме того, количественные значения параметра могут выражаться дискретными или непрерывными величинами. Качественные характеристики находятся, например методом экспертных оценок. В зависимости от вида используемых множеств параметров модели могут подразделяться на *качественные* и *количественные, дискретные* и *непрерывные,* а также *смешанные.*

При построении моделей реальных объектов и явлений очень часто приходится сталкиваться с недостатком информации. Как правило, для любого исследуемого объекта распределение свойств, параметры воздействия и начальное состояние известны с той или иной степенью неопределенности. Это связано с множеством трудно учитываемых факторов, ограниченностью числа используемых параметров модели, конечной точностью экспериментальных измерений. При построении модели возможны следующие варианты описания неопределенности параметров:

1. *детерминированное -* значения всех параметров модели определяются детерминированными величинами (т.е. каждому пара метру соответствует конкретное целое, вещественное или комплексное число либо соответствующая функция). Данный способ соответствует полной определенности параметров;
2. *стохастическое -* значения всех или отдельных параметров модели определяются случайными величинами, заданными плотностями вероятности. В литературе наиболее полно исследованы случаи нормального (гауссова) и показательного распределения случайных величин;
3. *случайное –* значения всех или отдельных параметров моде ли устанавливаются случайными величинами, заданными оценка ми плотностей вероятности, полученными в результате обработки ограниченной экспериментальной выборки данных параметров. Эта форма описания тесно связана с предыдущей. Однако в рассматриваемом случае получаемые результаты моделирования будут существенным образом зависеть от точности оценок моментов и плотностей вероятности случайных параметров, от постулируемых законов распределения и объема выборок;
4. *интервальное -* значения всех или отдельных параметров модели описываются интервальными величинами, заданными интервалом, образованным минимальным и максимально возможными значениями параметра;
5. *нечеткое –* значения всех или отдельных параметров модели описываются функциями принадлежности соответствующему не четкому множеству. Такая форма используется, когда информация о параметрах модели задается экспертом на естественном языке, а следовательно, в «нечетких» (с позиции математики) терминах типа «много больше пяти», «около нуля».

В теории игр встречается еще один вид неопределенности параметров модели, называемый *игровой неопределенностью.* В данном пособии указанный вид неопределенности не рассматривается.

Разделение моделей на *одномерные, двухмерные* и *трехмерные* применимо для таких моделей, в число параметров которых входят координаты пространства, и связано с особенностями реализации этих моделей, равно как и с резким увеличением их сложности при возрастании размерности (с «проклятием размерности» по образному выражению Р. Беллмана). Как правило, увеличение размерности модели приводит к росту числа используемых математических соотношений. Особенно сложны в реализации трехмерные модели, требующие высокопроизводительной вычислительной техники с большим объемом оперативной и дисковой памяти. Реализация таких моделей стала возможной лишь с появлением вычислительных машин третьего поколения и потребовала создания специальных вычислительных методов и приемов.

Как правило, эффективная реализация трехмерных моделей возможна лишь на многопроцессорных вычислительных комплексах с использованием языков параллельных вычислений. Среди характерных вычислительных трудностей, с которыми сталкиваются при создании моделей в трехмерной постановке, можно отметить необходимость хранения и решения систем уравнений большой размерности (10 тысяч уравнений и более), проблемы подготовки исходной информации и ее проверки, наглядное отображение полученных результатов. При разработке модели стараются (если это возможно) понизить размерность. Однако необоснованное понижение размерности модели может существенно исказить результаты моделирования. Например, если для исследования движения брошенного мяча в вертикальной плоскости использование двухмерной модели может быть оправдано, то для исследования движения бумеранга такую модель строить бесполезно.

Из всей совокупности параметров при разработке различных моделей отдельно следует рассмотреть учет времени. Как и координаты, время относится к независимым переменным, от которых могут зависеть остальные параметры модели. В различных ситуациях объект исследования может по разному испытывать влияние времени. Обычно чем меньше масштаб объекта, тем существеннее зависимость его параметров от времени. Если сравнивать скорости изменения различных объектов по отношению к масштабам, характерным для Земли, то можно отметить, что для галактик время заметных изменений измеряется миллионами лет, а для элементарных частиц – миллионными долями секунды. Учитывая, что весь окружающий нас материальный мир состоит из постоянно изменяющихся и взаимодействующих элементарных частиц и полей, то все без исключения объекты исследования следует считать изменяющимися во времени.

Любой объект стремится перейти в некоторое равновесное состояние как с окружающей его средой, так и между отдельными элментами самого объекта. Нарушение этого равновесия приводит к изменениям различных параметров объекта и его переходу в новое равновесное состояние.

При построении модели важным является сравнение времени существенных изменений внешних воздействий и характерных времен перехода объекта в новое равновесное состояние с окружающей средой, а также времени релаксации, определяющего установление равновесия между отдельными элементами внутри объекта. Если скорости изменения внешних воздействий на объект моделирования существенно меньше скорости релаксации, то явной зависимостью от времени в модели можно пренебречь. В этом случае говорят о *квазистатическом процессе.*

Например, если скорость появления микротрещин в элементах конструкции моста, связанная с сезонными колебаниями температуры и переменностью нагрузок, невелика, то расчет его максимальной несущей способности можно проводить в рамках статической модели. Срок службы моста в этом случае можно определить с помощью квазистатической модели, использующей зависимость прочностных свойств материала моста от суммарного числа циклов нагружения до разрушения.

Совокупность значений параметров модели в некоторый момент времени или на данной стадии называется *состоянием объекта.*

Если скорости изменения внешних воздействий и параметров состояния изучаемого объекта достаточно велики (по сравнению со скоростями релаксации), то учет времени необходим. В этом случае объект исследования рассматривают в рамках *динамического процесса.*

Условие движения отдельных элементов исследуемого объекта не является обязательным условием включения времени в число параметров модели. Для примера рассмотрим течение жидкости в длинной трубе постоянного сечения. Эксперименты показывают, что на достаточно большом удалении от входа в трубу частицы жидкости движутся параллельно оси трубы.

При этом если условия на входе не изменяются и скорость течения невелика (ламинарный режим течения), то профиль скоростей частиц в данном сечении трубы с течением времениостается неизменным. В этом случае в каждой фиксированной точке исследуемого пространства значения параметров модели не зависят от времени.

Подобные процессы называют *стационарными.* Как правило, стационарные модели применяются для описания различных потоков (жидкости, газа, тепла) в случае постоянства условий на входе и выходе потока. Для таких процессов время может быть исключено из числа независимых переменных.

Если в качестве одной из существенных независимых переменных модели необходимо использовать время (или его аналог), то модель называется *нестационарной.* Примером нестационарной модели является модель движения жидкости в трубе, но вытекающей

Заметим, что для значительной части реальных процессов стационарные режимы являются наиболее предпочтительным. После их определения (с применением той или иной математической модели) проверяется устойчивость стационарного режим (решения), что во многих случаях требует постановки и решения нестационарной задачи для возмущений стационарного решения. В ряде случаев, когда определение стационарных режимов из аналитического решения или некоторых эвристических соображений затруднено, их поиск осуществляется методом установления соответствующей нестационарной задачи (т.е. ищется решение нестационарной задачи, асимптотически стремящееся к стационарному). Следует отметить, что этим методом довольно часто пользуются при решении стационарных задач численными методами, поскольку методы решения нестационарных задач часто оказываются существенно эффективнее, чем стационарных.

### 2.4.4. Классификация математических моделей в зависимости от целей моделирования

Целью *дескриптивных моделей* является установление законов изменения параметров модели. В качестве примера такой модели можно привести модель движения материальной точки под действием приложенных сил, использующая второй закон Ньютона. Задавая положение и скорость точки в начальный момент времени (входные параметры), массу (собственный параметр) и закон изменения прикладываемых сил (внешние воздействия), можно определить скорость и координаты материальной точки в любой момент времени (выходные параметры). Полученная модель описывает зависимость выходных параметров от входных. Поэтому дескриптивные модели являются реализацией описательных и объяснительных содержательных моделей на формальном уровне моделирования.

Другой пример дескриптивной модели - модель движения ракеты после старта с поверхности Земли. В качестве параметров модели в Данном случае могут выступать начальное положение и начальная скорость ракеты (входные), ее начальная масса, импульс двигателя, режим его работы (собственные параметры), закон изменения сил притяжения и сил сопротивления атмосферы (внешние воздействия). Выходными параметрами будут положение и скорость центра масс ракеты и ее ориентация в пространстве в произвольный момент времени.

*Оптимизационные модели* предназначены для определения оптимальных (наилучших) с точки зрения некоторого критерия параметров моделируемого объекта или же для поиска оптимального (наилучшего) режима управления некоторым процессом. Часть параметров модели относят к параметрам управления, изменяя которые можно получать различные варианты наборов значений выходных параметров. Как правило, данные модели строятся с использованием одной или нескольких дескриптивных моделей и включают некоторый критерий, позволяющий сравнивать различные варианты наборов значений выходных параметров между собой с целью выбора наилучшего. На область значений входных параметров могут быть наложены ограничения в виде равенств и неравенств, связанные с особенностями рассматриваемого объекта или процесса. Целью оптимизационных моделей является поиск таких допустимых параметров управления, при которых критерий выбора достигает своего «наилучшего значения».

Примером оптимизационной модели может служить моделирование процесса запуска ракеты с поверхности Земли с целью подъема ее на заданную высоту за минимальное время при ограничениях на величину импульса двигателя, время его работы, начальную и конечную массу ракеты. Математические соотношения дескриптивной модели движения ракеты выступают в данном случае в виде ограничений типа равенств.

Отметим, что для большинства реальных процессов, конструкций требуется определение оптимальных параметров сразу по нескольким критериям, т.е. мы имеем дело с так называемыми многокритериальными задачами оптимизации. При этом нередкими являются ситуации противоречивости критериев; например, при оптимизации конструкции рамы грузового автомобиля можно потребовать максимальной жесткости, минимальной массы и минимальной стоимости. Для решения подобных задач используются специальные методы и алгоритмы.

*Управленческие модели* применяются для принятия эффективных управленческих решений в различных областях целенаправленной деятельности человека. В общем случае принятие решений является процессом, по своей сложности сравнимым с процессом мышления в целом. Однако на практике под принятием решений обычно понимается выбор некоторых альтернатив из заданного их множества, а общий процесс принятия решений представляется как последовательность таких выборов альтернатив. Например, на предприятии освободилась должность главного инженера, и задача директора состоит в выборе из имеющегося множества кандидатов на эту должность одного, отвечающего заданным требованиям. Сложность задачи заключается в наличии неопределенности как по исходной информации (неполные данные о кандидатах) и характеру воздействия внешних условий (случайное: выбранный кандидат заболел или отказался; игровое: министерство против выбранной кандидатуры), так и по целям (противоречивые требования к выбираемой кандидатуре: должен быть хорошим специалистом и администратором, опытен, энергичен, молод и пр.). Поэтому в отличие от оптимизационных моделей, где критерий выбора считается определенным и искомое решение устанавливается из условий его экстремальности, в управленческих моделях необходимо введение специфических критериев оптимальности, которые позволяют сравнивать альтернативы при различных неопределенностях задачи.

Поскольку оптимальность принятого решения даже в одной и той же ситуации может пониматься по-разному, вид критерия оптимальности в управленческих моделях заранее не фиксируется. Именно в этом состоит основная особенность данных моделей.

Методы формирования критериев оптимальности в зависимости от вида неопределенности рассматриваются в теории выбора и принятия решений, которая базируется на теории игр и исследовании операций.

### 2.4.5. Классификация математических моделей в зависимости от методов реализации

Метод реализации модели относят к *аналитическим,* если он позволяет получить выходные параметры в виде *аналитических выражений,* т.е. выражений, в которых используется не более чем счетная совокупность арифметических операций и переходов к пределу.

Частным случаем аналитических выражений являются *алгебраические выражения,* в которых используется конечное или счетное число арифметических операций, операций возведения в целочисленную степень и извлечения корня.

Учитывая различное число членов ряда, можно вычислять значение функции с различной степенью точности. Например, учет первых шести членов ряда в разложении показательной функции обеспечивает точность в 10-4, а первых десяти – 10-8. Таким образом, значение функции при каждом значении аргумента в этом случае определяется приближенно. Модели, использующие подобны прием, называются *приближенными.*

Аналитические методы реализации модели являются более ценными в том плане, что позволяют с меньшими вычислительными затратами изучить свойства объекта моделирования, применяя традиционные хорошо развитые математические методы анализа аналитических функций. Существенно, что применение аналитических методов возможно без использования ЭВМ (за исключением случаев, когда аналитическое решение определяется в рядах и для его доведения до числа требуются трудоемкие вычисления с применением ЭВМ). Кроме того, знание аналитического выражения для искомых параметров позволяет исследовать фундаментальные свойства объекта, его качественное поведение, строить новые гипотезы о его внутренней структуре. Следует отметить, что возможности аналитических методов существенно зависят от уровня развития соответствующих разделов математики.

В настоящее время мощный всплеск интереса к аналитическим методам при реализации моделей связан с появлением пакетов математических вычислений. Спектр решаемых данными пакетами задач очень велик и постоянно расширяется (элементарная математика, символьные операции с полиномами, производными и интегралами, с векторами и матрицами, задачи теории поля и векторного анализа, метод конечных элементов и т.п.). Применение подобных программных средств не только упрощает процедуру получения аналитического решения, но и облегчает последующий анализ полученного решения с применением различного рода визуализаторов.

К сожалению, существующие в настоящее время математические методы позволяют получить аналитические решения только для относительно несложных математических моделей в узком диапазоне значений параметров. В большинстве случаев при исследовании моделей приходится использовать алгоритмические подходы, позволяющие получить лишь приближенные значения искомых параметров.

При *численном подходе* совокупность математических соотношений модели заменяется конечномерным аналогом. Это чаще всего достигается дискретизацией исходных соотношений, т.е. переходом от функций непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента. После дискретизации исходной задачи выполняется построение вычислительного алгоритма, т.е. последовательности арифметических и логических действий, выполняемых на ЭВМ и позволяющих за конечное число шагов получить решение дискретной задачи. Найденное решение дискретной задачи принимается за приближенное решение исходной математической задачи.

Степень приближения определяемых с помощью численного метода искомых параметров модели зависит как от *погрешностей самого метода,* связанных с заменой исходной модели ее дискретным аналогом, так и от *ошибок округления,* возникающих при выполнении любых расчетов на ЭВМ в связи с конечной точностью представления чисел в ее памяти. Основным требованием к вычислительному алгоритму является необходимость получения решения исходной задачи с заданной *точностью* за конечное число шагов.

К настоящему времени круг вопросов, связанных с разработкой и использованием численных методов, а также с построением на их основе вычислительных алгоритмов, выделился в самостоятельный быстро развивающийся и обширный раздел - *вычислительную математику.*

Если при численном подходе дискретизации подвергалась полученная система математических соотношений, то при *имитационном подходе* на отдельные элементы разбивается сам объект исследования. В этом случае система математических соотношений для объекта-системы в целом не записывается, а заменяется некоторым алгоритмом, моделирующим ее поведение и учитывающим взаимодействие друг с другом моделей отдельных элементов системы. Модели отдельных элементов могут быть как аналитическими, так и алгоритмическими.

Алгоритмические модели, использующие как численный, так и имитационный подход, не позволяют получить решения задач в аналитической форме, что затрудняет и усложняет процесс анализа результатов моделирования. Так как применение моделей данного типа возможно лишь при наличии вычислительной техники, то их эффективность зависит от мощности и быстродействия ЭВМ. Несомненным достоинством алгоритмических моделей является отсутствие принципиальных ограничений на сложность модели, что позволяет применять их для исследования систем произвольной сложности.

Использование математической модели, построенной алгоритмическими методами, аналогично проведению экспериментов с реальным объектом, только вместо реального эксперимента с объектом проводится *вычислительный эксперимент с* его моделью. Задаваясь конкретным набором значений исходных параметров модели, в результате вычислительного эксперимента находим конкретный набор приближенных значений искомых параметров. Для исследования поведения объекта при новом наборе исходных данных необходимо проведение нового вычислительного эксперимента.

### 2.4.6. Вопросы для самопроверки

Что такое модель и моделирование? Цели моделирования?

В каких областях человеческой деятельности применяются модели?

Можно ли отнести мифологию к моделированию? Почему?

Какие типы моделей используются в изучаемых вами дисциплинах (включая дисциплины вузовского курса)?

Какие существуют типы моделирования?

В чем отличие моделирования натурного от мысленного?

Назовите характерные особенности аналоговых моделей.

Что такое когнитивная модель?

Какие модели называют содержательными?

Назовите разновидности содержательных моделей.

Чем концептуальная модель отличается от содержательной?

Что такое формальная модель?

Какое моделирование называется математическим?

Какие примеры математических моделей вам известны?

Сформулируйте достоинства математических моделей.

Приведите и проанализируйте различные примеры определений математических моделей.

Что может выступать в качестве оператора при математическом моделировании?

Почему информационные модели нельзя считать разновидностью математических?

По каким классификационным признакам можно разделять математические модели?

Чем простые модели отличаются от сложных?

В чем заключается сложность моделирования систем?

Какие типы моделей можно выделить по виду оператора моделирования?

Чем отличаются линейные и нелинейные модели?

Какие типы моделей выделяются по виду параметров моделирования?

Чем характерна дескриптивная модель?

Для каких целей служит оптимизационная модель?

Чем отличаются стационарные и нестационарные модели?

Как влияет размерность на сложность модели? Почему?

Перечислите способы описания неопределенности параметров модели.

Назовите основные методы реализации моделей, перечислите их достоинства и недостатки.

## 2.5. Этапы построения математической модели

Процесс создания математических моделей трудоемок, длителен и связан с использованием труда различных специалистов достаточно высокого уровня, обладающих хорошей подготовкой как в предметной области, связанной с объектом моделирования, так и в области прикладной математики, современных численных методов, программирования, знающих возможности и особенности современной вычислительной техники. Отличительной особенностьюматематических моделей, создаваемых в настоящее время, является их комплексность, связанная со сложностью моделируемых объектов. Например, при моделировании процессов деформирования различных конструкций под действием приложенной нагрузки приходится учитывать не только происходящие при деформировании процессы массопереноса, но и теплоперенос, а также связанные с этими процессами изменения структуры и свойств материала.

В некоторых случаях необходимо учитывать влияние различных видов излучения, воздействия гравитационных и электромагнитных полей, предыстории деформирования. Кроме того, для современных моделей характерно представление объекта моделирования в виде более или менее сложной системы взаимодействующих элементов.

Все отмеченные выше особенности приводят к усложнению модели и необходимости совместного использования нескольких теорий (нередко – из разных областей знания), применения современных вычислительных методов и вычислительной техники для получения и анализа результатов моделирования.

Внедрение вычислительной техники во все сферы человеческой деятельности привело к повсеместному использованию математических моделей. Заметим, что ЭВМ - это только «железо», а «умным» и полезным его делают программы, которые в большинстве случаев являются реализациями алгоритмов соответствующих математических моделей. Поэтому необходимо создание большого количества разнообразных математических моделей с широкими возможностями, отвечающих различным, зачастую противоречивым, требованиям. В случае сложных объектов удовлетворить всем предъявляемым требованиям в одной модели обычно невозможно. Приходится создавать целый спектр моделей одного и того же объекта (в некоторых случаях - иерархическую совокупность «вложенных» одна в другую моделей), каждая из которых наиболее эффективно решает возложенные на нее задачи. Например, в конструкторской и технологической практике, как правило, применяется широкий спектр моделей – от простых расчетных формул (часть, из которых представляет собой аппроксимацию экспериментальных данных) на первоначальной стадии до весьма сложных моделей, приближающихся к исследовательским, - на завершающей стадии разработки конструкции или технологического процесса.

Модели, ориентированные на исследовательские цели, способны представлять объект в широком диапазоне исходных параметров с удовлетворительной точностью. При этом практически нет ограничений по сложности подобной модели, а также времени, затрачиваемом на получение результатов.

Исследовательские модели могут быть ориентированы как на количественные, так и на качественные результаты. К моделям, используемым в автоматизированных системах управления (АСУ), в отличие от исследовательских, предъявляются достаточно жесткие ограничения относительно времени, затрачиваемого на получение результатов, а также точности самих результатов.

Необходимость массового построения моделей требует разработки некоторой совокупности правил и подходов, которые позволили бы снизить затраты на разработку моделей и уменьшить вероятность появления трудно устранимых впоследствии ошибок. Подобную совокупность правил можно было бы назвать *технологией создания математических моделей.*

Процесс построения любой математической модели можно представить последовательностью этапов, представленных на рис. 2.1.

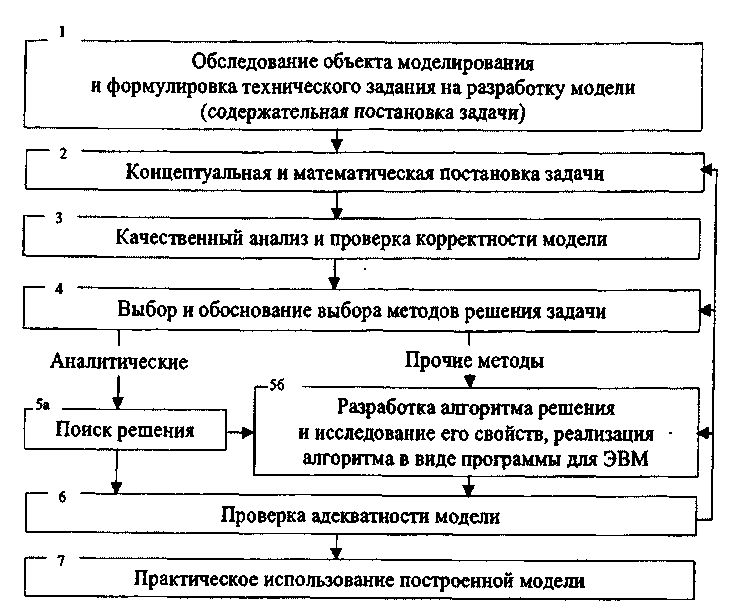


Рис. 2.1. *Этапы построения математической модели*

### 2.5.1. Обследование объекта моделирования

Математические модели, особенно использующие численные методы и вычислительную технику, требуют для своего построения значительных интеллектуальных, финансовых и временных затрат. Поэтому решение о разработке новой модели принимается лишь в случае отсутствия иных, более простых путей решения возникших проблем (например, модификации одной из существующих моделей). Необходимость в новой модели может появиться в связи с проведением научных исследований (особенно – на стыке различных областей знания), выполнением проектных и конструкторских работ на производстве, созданием систем автоматического управления, планирования и контроля. Человека или организацию, заинтересованных в разработке новой математической модели, для краткости будем называть *заказчиком.* После принятия решения о необходимости построения новой математической модели заказчик ищет *исполнителя* своего заказа. В качестве исполнителя, как правило, может выступать рабочая группа, включающая специалистов разного профиля: прикладных математиков, специалистов, хорошо знающих особенности объекта моделирования, программистов.

Итак, если решение о создании модели принято и рабочая группа сформирована, то можно приступать к этапу обследования объекта моделирования. Основной целью данного этапа является подготовка содержательной постановки задачи моделирования.

*Перечень сформулированных в содержательной (словесной) форме основных вопросов об объекте моделирования, интересующих заказчика, составляет содержательную постановку задачи моделирования.*

Подготовка списка вопросов, на которые должна ответить новая модель, зачастую является самостоятельной проблемой, требующей для своего решения специалистов со специфическими знаниями и способностями. Они должны не только хорошо разбираться в предметной области моделирования, знать возможности современной вычислительной математики и техники, но и быть достаточно коммуникабельными, т.е. уметь общаться с людьми, «разговорить» практиков, хорошо «чувствующих» объект моделирования, нюансы его поведения. Подобных специалистов в настоящее время называют *постановщиками задач.*

На основании анализа всей собранной информации постановщик задачи должен сформулировать такие требования к будущей модели, которые, с одной стороны, удовлетворяли бы заказчика, а с другой – позволяли бы реализовать модель в заданные сроки и в рамках выделенных материальных средств.

Специалисты-постановщики должны обладать способностью из большого объема слабо формализованной разнообразной информации об объекте моделирования, из различных нечетко высказанных и сформулированных пожеланий и требований заказчика к будущей модели выделить то главное, что может быть действительно реализовано. Из перечисленных требований, предъявляемых к постановщикам задач, видно, насколько велика возложенная на них ответственность и насколько могут быть тяжелы допущенные ими ошибки и просчеты. Неправильная оценка срока и стоимости реализации требуемой модели может привести к неудаче всего проекта, к напрасной потере времени и средств.

Специалисты, предрасположенные к работе в качестве постановщиков задач, особенно ценятся и являются, без преувеличения, золотым фондом научных коллективов. По этому поводу Г.Биркгоф отмечает, что прикладники-математики, *«способные к глубокому общению с другими учеными и инженерами и знакомые с мощью и ограничениями цифровых машин, ... призваны стать вождями завтрашнего математического мира, но их будет крайне трудно найти и развить»*. С учетом данного высказывания, а также имея в виду конечную цель деятельности рабочей группы – построение математической модели, - представляется целесообразным рекомендовать в качестве руководителя группы именно прикладника-математика.

Этап обследования проводится членами рабочей группы под руководством постановщиков задач и включает следующие работы:

тщательное обследование собственно объекта моделирования с целью выявления основных факторов, механизмов, влияющих на его поведение, определения соответствующих параметров, позволяющих описывать моделируемый объект;

сбор и проверка имеющихся экспериментальных данных об объектах-аналогах, проведение при необходимости дополни тельных экспериментов;

аналитический обзор литературных источников, анализ и сравнение между собой построенных ранее моделей данного объекта (или подобных рассматриваемому объекту);

анализ и обобщение всего накопленного материала, разработка общего плана создания математической модели.

На основе собранной информации об объекте моделирования постановщики совместно с заказчиком формулируют содержательную постановку задачи моделирования, которая, как правило, не бывает окончательной и может уточняться и конкретизироваться в процессе разработки модели. Однако, с учетом изложенного выше, все последующие уточнения и изменения содержательной постановки должны носить частный, не принципиальный характер. Если объектом моделирования является технологический процесс, машина, конструкция или деталь, то содержательную постановку задачи моделирования очень часто называют технической постановкой задачи.

Весь собранный в результате обследования материал о накопленных к данному моменту знаниях об объекте, содержательная постановка задачи моделирования, дополнительные требования к реализации модели и представлению результатов оформляются в виде *технического задания на проектирование и разработку модели.*

Техническое задание является итоговым документом, заканчивающим этап обследования, который, как уже отмечалось, является очень важным и ответственным. Чем более полную информацию удастся собрать об объекте на этапе обследования, тем более четко можно выполнить содержательную постановку задачи, более полно учесть накопленный опыт и знания, избежать многих сложностей на последующих этапах разработки модели. Особенно строго необходимо формулировать требования к будущей модели. Неконкретные и нечеткие требования могут серьезно затруднить процесс сдачи модели заказчику, вызвать бесконечные доработки и улучшения. В целом этап проработки технического задания может составлять до 30% времени, отпущенного на создание всей модели, и даже более – с учетом возможного уточнения и переформулировки.

Понимая огромную важность рассматриваемого этапа, техническое задание следует подвергать внутренней (внутри организации) и внешней экспертизе независимыми экспертами, не участвующими в его разработке. Обязательным условием на этапе разработки технического задания является участие в его обсуждении всех членов рабочей группы.

### 2.5.2. Концептуальная постановка задачи моделирования

В отличие от содержательной концептуальная постановка задачи моделирования, как правило, формулируется членами рабочей группы без привлечения представителей заказчика, на основании разработанного на предыдущем этапе технического задания, с использованием имеющихся знаний об объекте моделирования и требований к будущей модели.

Анализ и совместное обсуждение членами рабочей группы всей имеющейся информации об объекте моделирования позволяет сформировать содержательную модель объекта, являющуюся синтезом когнитивных моделей, сложившихся у каждого из членов рабочей группы. На основании содержательной модели разрабатывается *концептуальная,* или «естественнонаучная» (физическая, химическая, биологическая и т.д.), постановка задачи моделирования, служащая основой для *концептуальной модели объекта.*

*Концептуальная постановка задачи моделирования – это сформулированный в терминах конкретных дисциплин (физики, химии, биологии и т.д.) перечень основных вопросов, интересующих заказчика, а также совокупность гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования.*

Наибольшие трудности при формулировке концептуальной постановки приходится преодолевать в моделях, находящихся на «стыке» различных дисциплин. Различия традиций, понятий и языков, используемых для описания одних и тех же объектов, являются очень серьезными препятствиями, возникающими при создании «междисциплинарных» моделей. Например, такие понятия как «прибыль» и «баланс» вызывают совершенно разные ассоциации у экономиста и математика-прикладника.

Можно сказать, что когнитивные модели, стоящие за этими понятиями, у этих двух специалистов совершенно различны. Если экономист, говоря о прибыли и балансе, связывает с этими понятиями конкретное производство, цену и себестоимость продукции, то для математика данные понятия выглядят более формально – как результаты решения некоторых математических уравнений. При этом практически невозможно научить математика мыслить как экономиста, а экономиста – как математика. И тот, и другой способ восприятия имеет свои достоинства и недостатки. Экономист никогда не сделает ошибок, которые может допустить математик, обращаясь с параметрами модели формально, без должных знаний в рассматриваемой предметной области. В то же время, используя формальные преобразования математических соотношений, математик может получить решения, которые очень сложно получить экономисту, пользующемуся своими подходами и методами (обычно более простыми с точки зрения математики). Поэтому эффективность деятельности рабочей группы в большой степени зависит от способности ее членов поставить себя на место специалиста другого профиля, изучить его точку зрения (т.е. особенности его когнитивной модели) и найти некоторый компромисс, учитывающий все ценное.

Выше отмечалось, что концептуальная модель строится как некоторая идеализированная модель объекта, записанная в терминах конкретных (например, естественнонаучных) дисциплин. Для этого формулируется совокупность гипотез о поведении объекта, его взаимодействии с окружающей средой, изменении внутренних параметров. Как правило, эти гипотезы правдоподобны в том смысле, что для их обоснования могут быть приведены некоторые теоретические доводы и использованы экспериментальные данные, основанные на собранной ранее информации об объекте. В выборе и обосновании принимаемых гипотез в значительной степени проявляется искусство, опыт и знания, накопленные членами рабочей группы. Согласно принятым гипотезам определяется множество параметров, описывающих состояние объекта, а также перечень законов, управляющих изменением и взаимосвязью этих параметров между собой.

### 2.5.3. Математическая постановка задачи моделирования

Законченная концептуальная постановка позволяет сформулировать математическую постановку задачи моделирования, включающую совокупность различных математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования.

*Математическая постановка задачи моделирования – это совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования.*

Как было отмечено выше, совокупность математических соотношений определяет вид оператора модели. Наиболее простым будет оператор модели в случае, если он представлен системой алгебраических уравнений. Подобные модели можно назвать моделями *аппроксимационного типа,* так как для их получения часто используют различные методы аппроксимации имеющихся экспериментальных данных о поведении выходных параметров объекта

моделирования в зависимости от входных параметров и воздействий внешней среды, а также от значений внутренних параметров объекта.

Однако область применения моделей подобного типа ограничена. Для создания математических моделей сложных систем и процессов, применимых для широкого класса реальных задач требуется, как уже отмечалось выше, привлечение большого объема знаний, накопленных в рассматриваемой дисциплине (а в некоторых случаях и в смежных областях). В большинстве дисциплин (особенно естественнонаучных) эти знания сконцентрированы в аксиомах, законах, теоремах, имеющих четкую математическую формулировку.

Следует отметить, что во многих областях знаний (механике, физике, биологии и т.д.) принято выделять законы, справедливые для всех объектов исследования данной области знаний, и соотношения, описывающие поведение отдельных объектов или их совокупностей. К числу первых в физике и механике относятся, например, уравнения баланса массы, количества движения, энергии и т.д., справедливые при определенных условиях для любых материальных тел, независимо от их конкретного строения, структуры, состояния, химического состава. Уравнения этого класса подтверждены огромным количеством экспериментов, хорошо изучены и в силу этого применяются в соответствующих математических моделях как данность. Соотношения второго класса в физике и механике называют *определяющими,* или *физическими* уравнениями, или *уравнениями состояния.* Они устанавливают особенности поведения материальных объектов или их совокупностей (например, жидкостей, газов, упругих или пластических сред и т.д.) при воздействиях различных внешних факторов.

В качестве классических примеров определяющих соотношений можно привести закон Гука в теории упругости или уравнение Клапейрона для идеальных газов. Очевидно, определяющие соотношения должны отражать реальное атомно-молекулярное строение исследуемых материальных объектов.

Соотношения второго класса гораздо менее изучены, а в ряде случаев их приходится устанавливать самому исследователю (особенно при анализе объектов, состоящих из новых материалов). Необходимо отметить, что определяющие соотношения – это основной элемент, «сердцевина» любой математической модели физико-механических процессов. Именно ошибки в выборе или установлении определяющих соотношений приводят к количественно (а в некоторых случаях и качественно) неверным результатам моделирования.

Совокупность математических соотношений указанных двух классов определяет оператор модели. В большинстве случаев оператор модели включает в себя систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) и/или интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ). Для обеспечения корректности постановки задачи к системе ОДУ или ДУЧП добавляются начальные и/или граничные условия, которые, в свою очередь, могут быть алгебраическими или дифференциальными соотношениями различного порядка.

Можно выделить несколько наиболее распространенных типов задач для систем ОДУ или ДУЧП:

*задача Коши, или задача с начальными условиями,* в которой по заданным в начальный момент времени переменным (начальным условиям) определяются значения этих искомых переменных для любого момента времени;

*начально-граничная, или краевая, задача,* когда условия на искомую функцию выходного параметра задаются в начальный момент времени для всей пространственной области и на границе последней в каждый момент времени (на исследуемом интервале);

*задачи на собственные значения,* в формулировку которых входят неопределенные параметры, определяемые из условия качественного изменения поведения системы (например, потеря устойчивости состояния равновесия или стационарно го движения, появление периодического режима, резонанс и т.д.).

Для контроля правильности полученной системы математических соотношений требуется проведение ряда обязательных проверок.

*Контроль размерностей,* включающий правило, согласно которому приравниваться и складываться могут только вели чины одинаковой размерности. При переходе к вычислениям данная проверка сочетается с контролем использования одной и той же системы единиц для значений всех параметров.

*Контроль порядков,* состоящий из грубой оценки сравнительных порядков складываемых величин и исключением мало значимых параметров.

*Контроль характера зависимостей* заключается в проверке того, что направление и скорость изменения выходных параметров модели, вытекающие из выписанных математических соотношений, такие, как это следует непосредственно из «физического» смысла изучаемой модели.

*Контроль экстремальных ситуаций* – проверка того, какой вид принимают математические соотношения, а также результаты моделирования, если параметры модели или их комбинации приближаются к предельно допустимым для них значениям, чаще всего к нулю или бесконечности. В подобных экстремальных ситуациях модель часто упрощается, математические соотношения приобретают более наглядный смысл, упрощается их проверка. Например, в задачах механики де формируемого твердого тела деформация материала в исследуемой области в изотермических условиях возможна лишь при приложении нагрузок, отсутствие же нагрузок должно приводить к отсутствию деформаций.

*Контроль граничных условий,* включающий проверку того, что граничные условия действительно наложены, что они использованы в процессе построения искомого решения и что значения выходных параметров модели на самом деле удовлетворяют данным условиям.

*Контроль физического смысла –* проверка физического или иного, в зависимости от характера задачи, смысла исходных и промежуточных соотношений, появляющихся по мере конструирования модели.

*Контроль математической замкнутости,* состоящий в проверке того, что выписанная система математических соотношений дает возможность, притом однозначно, решить поставленную математическую задачу. Например, если задача свелась к отысканию *п* неизвестных из некоторой системы алгебраических или трансцендентных уравнений, то контроль замкнутости состоит в проверке того факта, что число независимых уравнений должно быть *п.* Если их меньше *п,* то надо установить недостающие уравнения, а если их больше *п,* то либо уравнения зависимы, либо при их составлении допущена ошибка. Однако если уравнения получаются из эксперимента или в результате наблюдений, то возможна постановка задачи, при которой число уравнений превышает *п,* но сами уравнения удовлетворяются лишь приближенно, а решение ищется, например, по методу наименьших квадратов. Неравенств среди условий также может быть любое число, как это бывает, например, в задачах линейного программирования.

Свойство математической замкнутости системы математических соотношений тесно связано с введенным Ж. Адамаром понятием корректно поставленной математической задачи, т.е. задачи, для которой решение существует, оно *единственно* и *непрерывно* зависит от исходных данных. В данном случае решение считается непрерывным, если малому изменению исходных данных соответствует достаточно малое изменение решения.

Понятие корректности задачи имеет большое значение в прикладной математике. Например, численные методы решения оправдано применять лишь к корректно поставленным задачам. При этом далеко не все задачи, возникающие на практике, можно считать корректными (например, так называемые обратные задачи). Доказательство корректности конкретной математической задачи - достаточно сложная проблема, она решена только для некоторого класса математически поставленных задач. Проверка математической замкнутости является менее сложной по сравнению с проверкой корректности математической постановки. В настоящее время активно исследуются свойства некорректных задач, разрабатываются методы их решения. Аналогично понятию «корректно поставленная задача» можно ввести понятие «корректная математическая модель».

Математическая модель является *корректной,* если для нее осуществлен и получен положительный результат всех контрольных проверок: размерности, порядков, характера зависимостей, экстремальных ситуаций, граничных условий, физического смысла и математической замкнутости.

Существование и единственность решения задачи Коши доказана математиками. Поэтому данную математическую модель можно считать корректной.

Математическая постановка задачи еще более абстрактна, чем концептуальная, так как сводит исходную задачу к чисто математической (например, к задаче Коши), методы решения которой достаточно хорошо разработаны. Умение свести исходную проблему к известному классу математических задач и обосновать правомочность такого сведения требует высокой квалификации математика-прикладника и особенно высоко ценится в исследовательских коллективах.

### 2.5.5. Выбор и обоснование выбора метода решения задачи

При использовании разработанных математических моделей, как правило, требуется найти зависимость некоторых неизвестных заранее параметров объекта моделирования (например, координат и скорости центра масс тела, точности броска), удовлетворяющих определенной системе уравнений. Таким образом, поиск решения задачи сводится к отысканию некоторых зависимостей искомых величин от исходных параметров модели. Как уже было отмечено выше, все методы решения задач, составляющих «ядро» математических моделей, можно подразделить на аналитические и алгоритмические.

Следует отметить, что при использовании аналитических решений для получения результатов «в числах» также часто требуется разработка соответствующих алгоритмов, реализуемых на ЭВМ. Однако исходное решение при этом представляет собой аналитическое выражение (или их совокупность). Решения же, основанные на алгоритмических методах, принципиально не сводимы к точным аналитическим решениям рассматриваемой задачи.

Выбор того или иного метода исследования в значительной степени зависит от квалификации и опыта членов рабочей группы. Как уже было отмечено, аналитические методы более удобны для последующего анализа результатов, но применимы лишь для относительно простых моделей. В случае, если математическая задача (хотя бы и в упрощенной постановке) допускает аналитическое решение, последнее, без сомнения, предпочтительнее численного.

Алгоритмические методы сводятся к некоторому алгоритму, реализующему вычислительный эксперимент с использованием ЭВМ. Точность моделирования в подобном эксперименте существенно зависит от выбранного метода и его параметров (например, шага интегрирования). Алгоритмические методы, как правило, более трудоемки в реализации, требуют от членов рабочей группы хорошего знания методов вычислительной математики, обширной библиотеки специального программного обеспечения и мощной вычислительной техники. Современные модели на базе алгоритмических методов разрабатываются в исследовательских организациях, которые зарекомендовали себя как авторитетные научные школы в соответствующей области знания.

Как отмечалось ранее, приближенные и численные методы исследования поставленных математических задач относятся к обширному разделу – современной вычислительной математике. Численные методы применимы лишь для корректных математических задач, что существенно ограничивает использование их в математическом моделировании.

Общим для всех численных методов является сведение математической задачи к конечномерной. Это чаще всего достигается дискретизацией исходной задачи, т.е. переходом от функции непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента. Например, траектория центра тяжести баскетбольного мяча определяется не как непрерывная функция времени, а как табличная (дискретная) функция координат от времени, т.е. определяющая значения координат лишь для конечного числа моментов времени. Полученное решение дискретной задачи принимается за приближенное решение исходной математической задачи.

Применение любого численного метода неминуемо приводит к погрешности результатов решения задачи. Выделяют три основных составляющих возникающей погрешности при численном решении исходной задачи:

*неустранимая погрешность,* связанная с неточным заданием исходных данных (начальные и граничные условия, коэффициенты и правые части уравнений);

*погрешность метода,* связанная с переходом к дискретному аналогу исходной задачи (например, заменяя производную разностным аналогом);

*ошибка округления,* связанная с конечной разрядностью чисел, представляемых в ЭВМ.

Естественным требованием для конкретного вычислительного алгоритма является согласованность в порядках величин перечисленных трех видов погрешностей.

Численный, или приближенный, метод реализуется всегда в виде вычислительного алгоритма. Поэтому все требования, предъявляемые к алгоритму, применимы и к вычислительному алгоритму. Прежде всего, алгоритм должен быть реализуем – обеспечивать решение задачи за допустимое машинное время. Важной характеристикой алгоритма является его точность, т.е. возможность получения решения исходной задачи с заданной точностью за конечное число действий. Очевидно, чем меньше е, тем больше затрачиваемое машинное время. Для очень малых значений е время вычислений может быть недопустимо большим. Поэтому на практике добиваются некоторого компромисса между точностью и затрачиваемым машинным временем. Очевидно, что для каждой задачи, алгоритма и типа ЭВМ имеется свое характерное значение достигаемой точности.

Время работы алгоритма зависит от числа действий, необходимых для достижения заданной точности. Для любой математической задачи, как правило, можно предложить несколько алгоритмов, позволяющих получить решение с заданной точностью, но за разное число действий. Алгоритмы, включающие меньшее число действий для достижения одинаковой точности, будем называть более *экономичными,* или более *эффективными.*

В процессе работы вычислительного алгоритма на каждом акте вычислений возникает некоторая погрешность. При этом от действия к действию она может возрастать или не возрастать (а в некоторых случаях даже уменьшаться). Если погрешность в процессе вычислений неограниченно возрастает, то такой алгоритм называется *неустойчивым,* или *расходящимся.* В противном случае алгоритм называется *устойчивым,* или *сходящимся.*

Выше уже отмечалось, что вычислительная математика объединяет огромный пласт разнообразных, быстро развивающихся численных и приближенных методов, поэтому практически невозможно привести их законченную классификацию. Стремление получить более точные, эффективные и устойчивые вычислительные алгоритмы приводит к появлению многочисленных модификаций, учитывающих специфические особенности конкретной математической задачи или даже особенности моделируемых объектов.

Можно выделить следующие группы численных методов по объектам, к которым они применяются:

интерполяция и численное дифференцирование;

численное интегрирование;

определение корней линейных и нелинейных уравнений;

решение систем линейных уравнений (подразделяют на прямые и итерационные методы);

решение систем нелинейных уравнений;

решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;

решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений;

решение уравнений в частных производных;

решение интегральных уравнений.

Огромное разнообразие численных методов в значительной степени затрудняет выбор того или иного метода в каждом конкретном случае. Поскольку для реализации одной и той же модели можно использовать несколько альтернативных алгоритмических методов, то выбор конкретного метода производится с учетом того,

какой из них больше подходит для данной модели с точки зрения обеспечения эффективности, устойчивости и точности результатов, а также более освоен и знаком членам рабочей группы. Освоение нового метода, как правило, очень трудоемко и связано с большими временными и финансовыми затратами. При этом основные затраты связаны с разработкой и отладкой необходимого программного обеспечения для соответствующего класса ЭВМ, обеспечивающего реализацию данного метода.

Следует отметить, что вычислительная математика в определенном смысле являет собой более искусство, нежели науку (в понимании последней как области культуры, базирующейся на формальной логике). Очень часто эффективность применяемых методов, разработанных программ определяется нарабатываемыми годами и десятками лет интуитивными приемами, не обоснованными с математических позиций. В связи с этим эффективность одного и того же метода может весьма существенно отличаться при его применении различными исследователями.

### 2.5.6. Реализация математической модели в виде программы для ЭВМ

При создании различных программных комплексов, используемых для решения разнообразных исследовательских, проектно-конструкторских и управленческих задач, в настоящее время, основой, как правило, служат математические модели. В связи с этим возникает необходимость реализации модели в виде программы для ЭВМ. Процесс разработки надежного и эффективного программного обеспечения является не менее сложным, чем все предыдущие этапы создания математической модели. Успешное решение данной задачи возможно лишь при уверенном владении современными алгоритмическими языками и технологиями программирования, знании возможностей вычислительной техники, имеющегося программного обеспечения, особенностей реализации на ЭВМ методов вычислительной математики, наличии опыта решения подобных задач.

Процесс создания программного обеспечения можно разбить на ряд этапов:

составление технического задания на разработку пакета про грамм программного обеспечения;

проектирование структуры программного комплекса;

кодирование алгоритма;

тестирование и отладка;

сопровождение и эксплуатация.

Техническое задание на разработку программного обеспечения оформляют в виде *спецификации.* Примерная форма спецификации включает следующие семь разделов:

1. *Название задачи –* дается краткое определение решаемой за дачи, название программного комплекса, указывается система программирования для его реализации и требования к аппаратному обеспечению (компьютеру, внешним устройствам и т.д.).
2. *Описание –* подробно излагается математическая постановка задачи, описываются применяемая математическая модель для задач вычислительного характера, метод обработки входных данных для задач не вычислительного (логического) характера и т.д.
3. *Управление режимами работы программы* – формируются основные требования к способу взаимодействия пользователя с программой (интерфейс «пользователь-компьютер»).
4. *Входные данные –* описываются входные данные, указываются пределы, в которых они могут изменяться, значения, которые они не могут принимать, и т.д.
5. *Выходные данные –* описываются выходные данные, указывается, в каком виде они должны быть представлены (в числовом, графическом или текстовом), приводятся сведения о точности и объеме выходных данных, способах их сохранения и т.д.
6. *Ошибки* - перечисляются возможные ошибки пользователя при работе с программой (например, ошибки при вводе входных данных), указываются способы диагностики (в данном случае под диагностикой понимается выявление, обнаружение ошибок при работе программного комплекса) и защиты от этих ошибок на этапе проектирования, а также возможная реакция пользователя при совершении им ошибочных действий и реакция программного комплекса (компьютера) на эти действия.
7. *Тестовые задачи* – приводятся один или несколько тестовых примеров, на которых в простейших случаях проводится отладка и тестирование программного комплекса.

На этапе проектирования формируется общая структура программного комплекса. Вся программа разбивается на программные модули. Для каждого программного модуля формулируются требования по реализуемым функциям и разрабатывается алгоритм, выполняющий эти функции. Определяется схема взаимодействия программных модулей, называемая схемой потоков данных программного комплекса. Разрабатывается план и задаются исходные данные для тестирования отдельных модулей и программного комплекса в целом.

Большинство программ, реализующих математические модели, состоят из трех основных частей:

препроцессора (подготовка и проверка исходных данных модели);

процессора (решение задачи, реализация вычислительного эксперимента);

постпроцессора (отображение полученных результатов).

Лишь для относительно простых случаев эти три составные части могут быть оформлены в виде одной программы. При решении современных задач по моделированию поведения жидкостей, газов и твердых тел каждая из частей может включать в себя целый комплекс программ. Например, постпроцессор должен уметь представлять информацию не только в табличном, но и графическом виде (диаграммы, графики зависимости от различных параметров, отображение скалярных, векторных (тензорных) полей и т.п.). Возможности пре- и постпроцессора наиболее широко реализуются в современных системах автоматизированного проектирования (САПР), где они в значительной степени могут сократить время на получение данных и оценку результатов моделирования.

Как правило, создание современных математических моделей в какой-либо области и доведение их до программных комплексов требует значительных временных затрат (минимум 3–5 лет). Требуется время не только на освоение методик и подходов к моделированию в исследуемой области, но и на наработку библиотек программ по решению возникающих математических задач, по подготовке исходных данных и отображению получаемых результатов. Качественные, надежные, обладающие дружественным интерфейсом, легко модифицируемые и хорошо сопровождаемые программные комплексы можно создавать лишь при наличии хорошо продуманной стратегии развития программного обеспечения, обеспечивающей его модульность и совместимость по входным и выходным параметрам.

Большое значение следует придавать освоению современных технологий программирования: структурной, абстрактной, объектно-ориентированной и визуальной. Назначение любой технологии - это в первую очередь повышение надежности программного обеспечения и увеличение производительности труда программиста. Причем чем серьезней и объемней программный проект, тем большее значение приобретают вопросы использования современных технологий программирования. Пренебрежение данными вопросами может привести к значительным временным издержкам и снижению надежности программного комплекса.

Важнейшим фактором, определяющим надежность и малые сроки создания программного комплекса для решения конкретного класса задач, является наличие развитой библиотеки совместимых между собой программных модулей. Программа получается более надежной и создается за меньшие сроки при максимальном использовании стандартных программных элементов. Для эффективной разработки программного обеспечения в области математического моделирования необходимо обратить внимание на создание следующих стандартных библиотек программ:

приближенные и численные методы (процессоры);

средства подготовки исходных данных (препроцессоры);

средства визуализации и представления результатов (постпроцессоры).

Разработка таких общих библиотек программ возможна лишь при стандартизации потоков передачи данных между препроцессором, процессором и постпроцессором. В простейшем случае речь может идти об унификации форматов передаваемых файлов.

### 2.5.7. Проверка адекватности модели

Под *адекватностью* математической модели будет пониматься степень соответствия результатов, полученных по разработанной модели, данным эксперимента или тестовой задачи. Прежде чем переходить к проверке адекватности модели, необходимо убедиться в правильном комплексном функционировании всех алгоритмов и программ модели, выполнить независимое тестирование и отладку всех отдельных алгоритмов (например, используемых программных модулей, реализующих используемый численный метод).

Проверка адекватности модели преследует две цели:

1. убедиться в справедливости совокупности гипотез, сформулированных на этапах концептуальной и математической постановок. Переходить к проверке гипотез следует лишь после проверки использованных методов решения, комплексной отладки и устранения всех ошибок и конфликтов, связанных с программным обеспечением;
2. установить, что точность полученных результатов соответствует точности, оговоренной в техническом задании.

Проверка разработанной математической модели выполняется путем сравнения с имеющимися экспериментальными данными о реальном объекте или с результатами других, созданных ранее и хорошо себя зарекомендовавших моделей. В первом случае говорят о проверке путем сравнения с экспериментом, во втором – о сравнении с результатами решения тестовой задачи.

Решение вопроса о точности моделирования зависит от требований, предъявляемых к модели, и ее назначения. При этом должна учитываться точность получения экспериментальных результатов или особенности постановок тестовых задач. В моделях, предназначенных для выполнения оценочных и прикидочных расчетов, удовлетворительной считается точность 10–15%. В моделях, используемых в управляющих и контролирующих системах, требуемая точность может быть 1–2% и даже более.

Как правило, различают качественное и количественное совпадение результатов сравнения. При качественном сравнении требуется лишь совпадение некоторых характерных особенностей в распределении исследуемых параметров (например, наличие экстремальных точек, положительное или отрицательное значение параметра, его возрастание или убывание и т.д.). Фактически при качественном сравнении оценивается совпадение лишь вида функции распределения параметров (убывающая или возрастающая, с одним экстремумом или с несколькими). Вопрос о количественном сравнении можно ставить лишь после удовлетворительного ответа на вопрос о качественном соответствии результатов. При количественном сравнении большое значение следует придавать точности исходных данных для моделирования и соответствующих им значений сравниваемых параметров.

Неадекватность результатов моделирования возможна, по крайней мере, по трем причинам:

а) значения задаваемых параметров модели не соответствуют допустимой области этих параметров, определяемой принятой системой гипотез;

б) принятая система гипотез верна, но константы и параметры в использованных определяющих соотношениях установлены не точно.

в) неверна исходная совокупность гипотез.

Все три случая требуют дополнительного исследования как моделируемого объекта (с целью накопления новой дополнительной информации о его поведении), так и исследования самой модели (с целью уточнения границ ее применимости).

В данном случае не анализируется влияние выбранного численного метода на точность получаемого решения, а значит, и на адекватность модели. Вопрос о сходимости алгоритма и устойчивости получаемого выбранным численным методом решения, а также накопление погрешностей, связанных с ошибками округления при использовании ЭВМ, здесь не рассматривается.

При возникновении проблем, связанных с адекватностью модели, ее корректировку требуется начинать с последовательного анализа всех возможных причин, приведших к расхождению результатов моделирования и результатов эксперимента. В первую очередь требуется исследовать модель и оценить степень ее адекватности при различных значениях варьируемых параметров (начальных и граничных условиях, параметров, характеризующих свойства объектов моделирования). Если модель неадекватна в интересующей исследователя области параметров, то можно попытаться уточнить значения констант и исходных параметров модели. Если же и в этом случае нет положительных результатов, то единственной возможностью улучшения модели остается изменение принятой системы гипотез. Данное решение фактически означает возвращение ко второму этапу процесса разработки модели и может повлечь не только серьезное изменение математической постановки задачи, но и методов ее решения (например, переход от аналитических к численным), полной переработки программного обеспечения и нового цикла проверки модели на адекватность. Поэтому решение об изменении принятой системы гипотез должно быть всесторонне взвешено и приниматься только в том случае, если исчерпаны все прочие возможности по улучшению адекватности модели.

Надлежит предостеречь начинающих исследователей от попыток «перепрыгнуть» рассмотренный этап моделирования, от желания быстрее перейти к решению «настоящей задачи». Как показывает собственный опыт авторов, подобный образ действий приводит к огромным временным издержкам (не говоря уже о психологических). Особенно опасной является ситуация, в которой при решении реальной задачи с использованием не проверенной должным образом модели получаются правдоподобные результаты. Для других условий модель может дать качественно неверные результаты, но истоки ошибок разработчики будут искать уже не в модели.

### 2.5.8. Практическое использование построенной модели и анализ результатов моделирования

Дескриптивные модели, рассмотренные выше, предназначены для описания исследуемых параметров некоторого явления или процесса, а также для изучения закономерностей изменения этих параметров. Эти модели могут использоваться:

для изучения свойств и особенностей поведения исследуемого объекта при различных сочетаниях исходных данных и разных режимах;

как моделирующие блоки в различных САПР и автоматизированных системах управления (АСУ);

при построении оптимизационных моделей и моделей - имитаторов сложных систем и комплексов.

Модели, разрабатываемые для исследовательских целей, как правило, не доводятся до уровня программных комплексов, предназначенных для передачи сторонним пользователям. Время их существования чаще всего ограничено временем выполнения исследовательских работ по соответствующему направлению. Эти модели отличает поисковый характер, применение новых вычислительных процедур и алгоритмов, неразвитый программный интерфейс.

Модели и построенные на их основе программные комплексы, предназначенные для последующей передачи сторонним пользователям или коммерческого распространения, имеют развитый дружественный интерфейс, мощные пре- и постпроцессоры. Данные модели обычно строятся на апробированных и хорошо себя зарекомендовавших постановках и вычислительных процедурах. Программные комплексы имеют подробные и качественно составленные описания и руководства для пользователя; по всем неясным вопросам фирма-производитель проводит консультации. Однако следует помнить, что такие коммерческие модели предназначены только для решения четко оговоренного класса задач. Как правило, они не могут быть модернизированы и усовершенствованы. Так, пользователь не имеет возможности самостоятельно расширять библиотеку используемых численных методов или изменять систему исходных гипотез.

Независимо от области применения созданной модели группа разработчиков обязана провести качественный и количественный анализ результатов моделирования.

Работая с моделью, разработчики становятся специалистами в области, связанной с объектом моделирования. Они достаточно хорошо представляют свойства объекта, могут предсказать и объяснить его поведение. Поэтому всесторонний анализ результатов моделирования позволяет:

выполнить модификацию рассматриваемого объекта, найти его оптимальные характеристики или, по крайней мере, лучшим образом учесть его поведение и свойства;

обозначить область применения модели, что особенно важно в случае использования моделей для систем автоматического управления;

проверить обоснованность гипотез, принятых на этапе математической постановки, оценить возможность упрощения модели с целью повышения ее эффективности при сохранении требуемой точности;

показать, в каком направлении следует развивать модель в дальнейшем.

### 2.5.9. Вопросы для самопроверки

Кто участвует в разработке содержательной постановки задачи?

На основании какой информации выполняется формулировка концептуальной постановки задачи моделирования?

Какие функции выполняет постановщик задач?

Какая из постановок задачи (содержательная, концептуальная или математическая) является самой абстрактной?

Что включает понятие корректности математической задачи?

Каким условиям должна удовлетворять корректная модель?

К каким математическим задачам можно применять численные методы?

Назовите три составляющие погрешности численных методов.

Какие цели преследует проверка адекватности модели?

Перечислите причины возможной неадекватности модели.

Для решения каких задач может быть использована математическая модель?

Выполните содержательную, концептуальную и математическую постановки для математической модели, описывающей взлет космического аппарата с Луны.

Выполните содержательную, концептуальную и математическую постановки для математической модели, описывающей посадку спутника в атмосфере Земли.

Выполните содержательную, концептуальную и математическую постановки для математической модели, описывающей движение шарика в сферической ямке. Выберите и реализуйте метод решения полученной математической задачи. Исследуйте траектории шарика в зависимости от начальных условий.

Выполните содержательную, концептуальную и математическую постановки для математической модели, описывающей движение срубленного дерева.

Выполните содержательную, концептуальную и математическую постановки для математической модели, описывающей движение заряженной частицы в магнитном поле.

Космический аппарат совершает движение по орбите вокруг Земли и может быть виден некоторым наблюдателем, находящимся на ее поверхности в точке с заданными координатами. Выполните содержательную, концептуальную и математическую постановки для математической модели, описывающей движение космического аппарата по небосводу Земли с точки зрения наблюдателя.

Выполните содержательную, концептуальную и математическую постановки для математической модели, описывающей движение лыжника, выполняющего прыжок с трамплина.

Выполните содержательную, концептуальную и математическую постановки для математической модели, описывающей процесс нагревания и закипания чайника.

Разработайте математическую модель какого-либо процесса в интересующей вас области знаний, опишите особенности каждого из этапов моделирования, сравните их с этапами построения математической модели предыдущего задания.

## 3. Структурные модели

Важно отметить, что при установлении различных связей между элементами могут возникать новые свойства построенной модели, которыми не обладает каждый из элементов в отдельности. Эти так называемые «системные» свойства модели, появляющиеся при объединении отдельных элементов в одно целое, играют важную роль в моделировании сложных систем, так как позволяют исследовать новые качества объекта с помощью вычислительного эксперимента. Поэтому важно знать общие правила построения структурных моделей, которые приводятся в данной главе и иллюстрируются на нескольких примерах, взятых из различных областей целенаправленной деятельности человека.

Как было отмечено выше, одним из важных этапов математического моделирования является переход от содержательной (технической) и концептуальной постановок задачи к математической, т.е. переход с технического языка (или – «языка природы») описания исследуемого объекта к языку математических формул и уравнений. Однако на практике такой переход бывает совсем не просто осуществить. В некоторых случаях это связано со сложностью самого исследуемого объекта, в других – с отсутствием необходимой информации об объекте или соответствующего математического аппарата. Поэтому часто возникает необходимость «разбить» поставленную задачу на несколько более простых подзадач, которые имеют известные решения или которые можно решить с помощью апробированных методов.

Для этой цели удобно использовать методы структурного моделирования, позволяющие еще на стадии постановки упростить решаемую задачу путем исследования внутренней структуры рассматриваемого объекта, изучения свойств отдельных элементов объекта и связей между ними. При этом следует отметить, что важное значение имеет способ разбиения исследуемого объекта на отдельные элементы и установление связей между ними, которые зависят от целей моделирования. Очевидно, что такое разбиение неоднозначно. Чем сложнее исходная задача, тем больше элементов необходимо вводить в рассмотрение и учитывать огромное количество связей между ними. Это обычно приводит к многоуровневым структурным схемам древовидной формы с различной иерархией элементов, которую необходимо учитывать при математическом моделировании. При этом структурные схемы, связи подсистем и их элементов несложно изобразить графически, что делает анализируемые объекты более понятными, «прозрачными».

### 3.1. Что такое структурная модель?

Очень часто для достижения практических целей возникает необходимость рассматривать исследуемый объект как совокупность отдельных элементов, связанных (взаимодействующих) между собой некоторым образом, в то же время взаимодействующих с окружающим миром как нечто целое. В этом случае исследуемый объект удобно представить в виде системы, а при его моделировании использовать методы *системного анализа.*

Напомним основные понятия системного анализа, которые будут использоваться в дальнейшем. Одним из основополагающих понятий системного анализа является понятие искусственной системы, которую определим следующим образом.

*Система есть совокупность взаимосвязанных элементов, выделенных из среды и взаимодействующих с окружающей средой как целое для достижения поставленной цели.*

Следует отметить, что важным признаком для выделения системы из среды является возможность определения взаимодействия этой системы с окружением независимо от поведения ее отдельных элементов (именно это подразумевается под словами «взаимодействующая ... как целое»). Выделяет систему из среды исследователь, который отделяет ее элементы от среды в соответствии с поставленной целью. Под средой здесь понимается совокупность всех объектов, изменение свойств которых влияет на систему, а также тех объектов, чьи свойства изменяются в результате поведения системы.

Из приведенных определений видно, насколько важна роль исследователя – он формулирует цели, выделяет систему и определяет среду. При этом сам может отнести себя к среде и строить изолированные системы, включить себя в систему и строить ее с учетом своего влияния на ее функционирование (адаптивные системы), а также выделить себя и из системы, и из среды, рассматривая систему как открытую или развивающуюся. В принципе исследователя можно не рассматривать как элемент системы или среды, но, дополнительное введение исследователя помогает при построении систем и их классификации. Для описания систем в системном анализе рассматриваются четыре основные модели. Если внутреннее строение системы неизвестно (или не интересует исследователя), то применяется модель «черного ящика». В этой модели системы отсутствуют (или не используются в явной форме) сведения о внутреннем содержании «ящика» (поэтому он и называется «черным»), а только задаются входные и выходные связи со средой. Обычно это сводится к заданию двух множеств входных и выходных параметров, но никаких соотношений между ними не задается. Примером модели «черного ящика» может служить экспериментальное исследование некоторого сложного объекта, когда экспериментатор, изменяя входные пара метры объекта, получает на выходе различные его характеристики. Очевидно, что исследование внутреннего устройства системы невозможно с помощью модели «черного ящика»; применение последней можно считать оправданным лишь на самых ранних этапах исследования нового объекта. Для этого необходимы более развитые модели. Одной из таких моделей является модель состава системы, описывающая, из каких элементов и подсистем состоит данная система. При этом *элементами* системы называются те ее части, которые полагаются неделимыми; части, состоящие более чем из одного элемента, называются *подсистемами.* Например, если в качестве системы рассмотреть автомобиль, то ее подсистемой можно считать систему управления, а элементами последней – руль, педали и т.д.

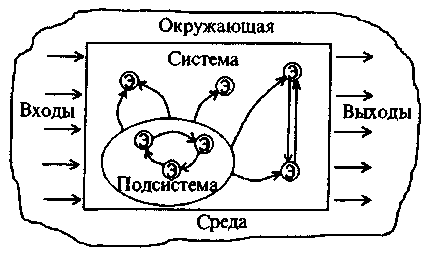
Сложность построения модели состава системы состоит в ее неоднозначности. Это можно объяснить следующим образом. Во-первых, понятие «элементарности» можно определять по-разному. Во-вторых, модель состава (как и любая другая модель) является целевой и для отличающихся целей один и тот же объект может потребовать различного разбиения на части. В-третьих, всякое разбиение целого на части является относительным. Например, тормозную подсистему автомобиля можно отнести как к ходовой части, так и к подсистеме управления.

В большинстве случаев модели состава системы оказывается недостаточно для ее описания. Мало знать состав системы, кроме этого необходимо установить связи между отдельными элементами, которые называются *отношениями.* Совокупность необходимых и достаточных для достижения цели отношений между элементами называется *моделью структуры системы.* Основной сложностью при описании структуры (списка отношений) является обоснование конечного числа связей, наиболее существенных по отношению к рассматриваемой цели. Например, при моделировании механической системы, движущейся в околоземном пространстве, обычно не учитываются силы взаимного притяжения отдельных материальных точек (элементов), но учитывается сила притяжения к Земле (отношения).

Следует отметить, что структура системы является абстрактной моделью, так как рассматривает только связи (отношения) между элементами, а не сами элементы (понятно, что на практике говорить об отношениях без элементов просто не имеет смысла). Однако в некоторых случаях модель структуры теоретически может быть исследована отдельно, если, например, отношения заданы в виде математических формул или уравнений.

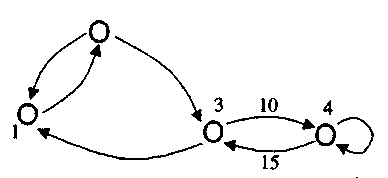
Теперь, имея три формальные модели системы - «черного ящика», состава и структуры - и объединив их, можно получить еще одну модель, которую называют *структурной схемой* системы, или моделью «белого ящика». Данная модель включает все элементы системы, все связи между элементами внутри системы и связи системы (или ее отдельных элементов) с окружающей средой (входы и выходы системы), как изображено на рис. 3.1. Заметим, что под «всеми» элементами и связями понимаются, конечно, значимые с точки зрения цели и задач разрабатываемой модели.

Следует отметить, что структурная схема системы является формальной моделью, отделенной от содержательного наполнения. Это позволяет рассматривать ее как особый математический объект и исследовать его свойства. Такой объект называется *графом.* Он состоит из обозначений элементов произвольной природы, называемых вершинами, и обозначений связей между ними, называемых *ребрами.*



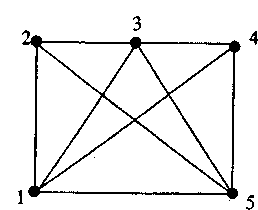
**Рис. 3.1.** *Структурная схема системы*

На рис. 3.2 приведен пример графа, у которого вершины обозначены в виде кружочков, а ребра - в виде линий. Стрелки указывают на несимметричность некоторых связей. Такой граф называется *ориентированным.* Каждая пара вершин может быть соединена с любым числом ребер. Чтобы ввести другие различия между ребрами, кроме несимметричности, им приписывают различные веса. Такие графы называются *взвешенными.* В качестве весов могут выступать различные характеристики графа, например длина ребра, число каналов электросети, тип покрытия в сети автомобильных дорог и т.д.



**Рис.** 3.2. *Пример графа*

В настоящее время для графов разработана целая теория, имеющая многочисленные приложения. Графы могут изображать любые структуры. Некоторые графы получили специальные названия: линейные, древовидные (иерархические), сетевые, матричные и т.д. Пример сетевого графа приведен на рис. 4.3.



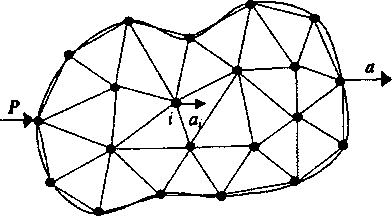
**Рис** 3.3. *Сетевой граф*

Как отмечено выше, граф (структурная схема) является формальной моделью, которую необходимо наполнить конкретным содержанием. Только после этого структурная схема становится *структурной моделью* исследуемого объекта. Например, если в качестве вершин графа, изображенного на рис. 3.3, считать цилиндрические шарниры, а ребер - прямолинейные стержни, то получим структурную модель стержневой конструкции, широко применяемую при моделировании в строительной механике. Если же в качестве вершин рассматривать узлы связи, а за ребра принять линии связи, то получим структурную модель сети электросвязи.

Таким образом, можно дать следующее определение структурной модели.

*Структурная модель системы – это совокупность конкретных элементов данной системы, необходимых и достаточных отношений между этими элементами и связей между системой и окружающей средой.*

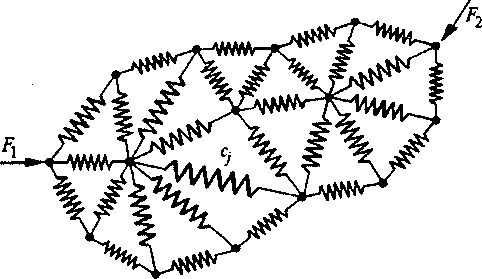
Рассмотрим пример построения структурной модели, поясняющий это определение. Пусть требуется построить структурную модель абсолютно твердого тела, совершающего поступательное движение под действием приложенной силы (рис. 3.4). Напомним, что абсолютно твердое тело при движении не изменяет форму и размеры. Поэтому такое тело можно представить как совокупность материальных точек (элементов), соединенных прямолинейными невесомыми недеформируемыми стержнями.



**Рис. 3.4.** *Структурная модель абсолютно твердого тела при поступательном движении*

Сила *Р* выступает в качестве воздействия внешней среды на тело, а откликом на это воздействие (выходным параметром) служит ускорение тела *а* (или любой его точки вследствие их равенства при поступательном движении).

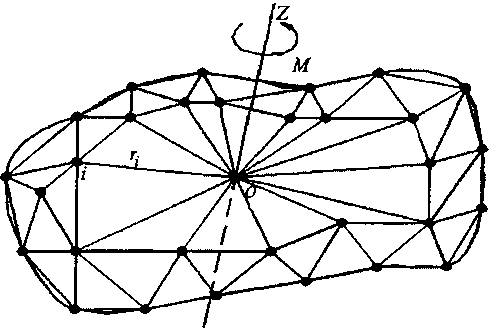
Таким образом, для того чтобы данная структурная модель правильно описывала поступательное движение тела, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие недеформируемых стержней в качестве связей между элементами (материальными точками) могут выступать пружинки с различными упругими свойствами (рис. 3.5).



**Рис. 3.5.** *Структурная модель упругого тела*

Из последнего соотношения следует, что число элементов и их распределение внутри тела не имеют значения. Другое дело, когда необходимо описать вращательное движение твердого тела вокруг некоторой заданной оси под действием приложенного момента сил. В этом случае распределение элементов внутри объема тела должно быть таким, чтобы выполнялось условие равенства моментов инерции реального тела и его структурной модели относительно заданной оси*.*

Из этого равенства вытекают необходимые и достаточные условия на отношения между элементами данной структурной модели (длины и ориентации стержней, массы материальных точек), что хорошо видно из рис. 3.6.



**Рис.** 3.6. *Структурная модель вращающегося тела*

Еще больше усложнится структурная модель в случае описания движения деформируемого, например упругого, тела.

В этой структурной модели для получения необходимых и достаточных отношений между элементами кроме распределения масс по объему тела необходимо учесть распределение жесткостей пружинок, чтобы совокупность последних описывала упругие свойства реального тела.

Из этого примера видно, что структурное моделирование позволяет описывать поведение довольно сложных систем. При этом чем сложнее система, тем структурное моделирование становится все более эффективным (а в некоторых случаях – просто необходимым). Например, при описании поступательного движения твердого тела структурная модель, в принципе, не нужна, так как в этом случае тело можно представить в виде одной материальной точки, масса которой равна массе тела. В других рассмотренных выше примерах структурная модель помогает описать поведение достаточно сложных механических систем с помощью взаимодействующих простейших элементов. Для некоторых механических систем структурное моделирование является едва ли не единственным способом описания их поведения. Это относится, например, к моделированию поведения структурно-неоднородных материалов (композитов, полимеров, керамик и т.д.).

Следует отметить, что той информации, которая содержится в структурной схеме системы, очень часто бывает недостаточно для исследования. Поэтому графы надо рассматривать как вспомогательный инструмент при моделировании. Главным же при структурном моделировании является установление конкретных функциональных связей между входными, внутренними и выходными параметрами. Поэтому без достаточно широкого арсенала методов математического моделирования здесь также не обойтись. В большинстве случаев приходится составлять уравнения, описывающие поведение каждого элемента структуры с учетом взаимодействия всех элементов. Это приводит к необходимости решения систем уравнений с большим числом переменных. Однако с появлением современной вычислительной техники такие подходы к моделированию сложных систем становятся все более распространенными. В заключение данного параграфа кратко остановимся на классификации структурных моделей и примерах их применения.

Структурные модели бывают четырех видов: пространственные, временные, физические и иерархические.

*Пространственные структуры* обычно используют для описания геометрии исследуемого объекта и расположения в пространстве его отдельных элементов. Такие структуры хорошо описываются с помощью сетевых и матричных графов, вершины которых указывают места расположения элементов, а ребра – расстояния между ними или другие условия соединения. Пример пространственной структурной модели – структурная схема телефонной сети некоторого населенного пункта, в которой вершинами являются узлы связи, а ребрами - линии связи с указанием, например, числа каналов связи. Другим примером пространственной структуры может служить конечно-элементная сетка, с помощью которой описывается геометрия исследуемого объекта при его, например, прочностном расчете методом конечных элементов.

*Временные структурные модели* широко используются в сетевом и календарном планировании, а также в теории массового обслуживания. Во временных структурах в качестве элементов выступают этапы происходящего процесса или состояния системы в некоторый момент времени. Отношениями здесь служат условия перехода от одного этапа к другому или из одного состояния системы в другое. Например, на производстве широко применяют так называемые сетевые графики (технологические карты). Они представляют собой графы, вершинами которых служат необходимые производственные операции, а с помощью ребер указывается последовательность и длительность этих операции. При моделировании систем массового обслуживания удобно применять структурную схему «гибели и размножения», которая представляет собой линейный граф (последовательный набор состояний системы, вытянутый в одну цепочку). Считается, что система обслуживает случайный поток заявок, поступающих в нее. Тогда отношениями между элементами системы (ее состояниями в различные моменты времени) служат условия поступления новой заявки, которые можно характеризовать, например, интенсивностью соответствующих случайных потоков событий.

*Физические структурные модели* применяются для описания сложных физических свойств исследуемого объекта с помощью простых структурных элементов. Пример моделирования упругих свойств тела был приведен выше.

Для моделирования управляемых систем широко применяются *иерархические структурные схемы,* предполагающие наличие нескольких уровней обработки информации и принятия решений. Основная задача иерархической структуры - распределение функций обработки информации и принятия решений между отдельными элементами. На рис. 3.7 приведен пример двухуровневой веерной иерархической структуры управления системой. В данной системе существует один привилегированный элемент, который имеет возможность управлять остальными элементами. Этот привилегированный элемент обычно называется *центром* (Ц), а остальные элементы – *производителями* (П)*.*

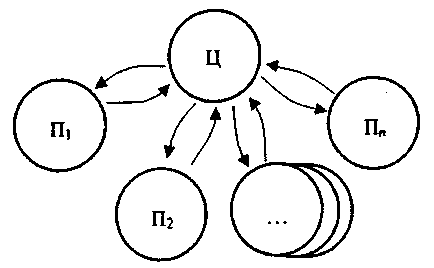


Рис. 3.7. Двухступенчатая веерная структурная схема

Отношениями в этой модели служат условия обмена информацией, денежными и материальными ресурсами между центром и производителями. Следует отметить, что в приведенной структурной схеме отношения между производителями (горизонтальные связи) отсутствуют. Неравноправие элементов системы проявляется в том, что центр назначает правила формирования воздействий на производителей и тем самым имеет возможность направлять в нужное для него русло действия нижних элементов. Данную схему несложно обобщить до многоуровневой веерной структуры, которая широко используется в экономике.

В заключение можно отметить следующее. Как было показано, структурные модели нашли широкое применение в различных областях целенаправленной деятельности человека. В некоторых случаях они помогают построить модель исследуемой системы или процесса, а иногда являются единственно эффективным инструментом при моделировании. Однако остается вопрос: «Как правильно строить структурные модели?» Постараемся дать на него ответ.

### 3.2. Способы построения структурных моделей

При структурном моделировании широко применяются методы *анализа* и *синтеза. С* помощью методов анализа производится разделение рассматриваемого объекта на части и исследование каждой из этих частей в отдельности. Методы синтеза, наоборот, служат для соединения частей в целое. Следует отметить, что при структурном моделировании методы анализа и синтеза необходимо применять совместно. Важно не просто разбить целое на отдельные элементы, но и соединить эти элементы таким образом, чтобы они снова образовали единое целое. С этой точки зрения синтез является завершающим этапом анализа, так как только после этого этапа можно объяснить целое через его части – в виде структуры целого. Это связано с тем, что при анализе теряются важные свойства объекта как целого (разобранный автомобиль не поедет), так и отдельных его элементов (оторванный руль «не рулит»). Поэтому, как отмечал один из ведущих специалистов по системному анализу Р. Акофф, результатом анализа является лишь вскрытие структуры системы, знание о том, как система работает, но не понимание того, почему и зачем она это делает. Только после синтеза можно объяснить поведение системы, рассматривая каждый элемент и его роль через призму всей системы.

Таким образом, анализ и синтез нельзя рассматривать как отдельные методы. Они дополняют друг друга и при структурном моделировании должны применяться совместно. Только в этом случае построенная структурная модель будет отражать основные свойства исследуемого объекта согласно поставленным целям.

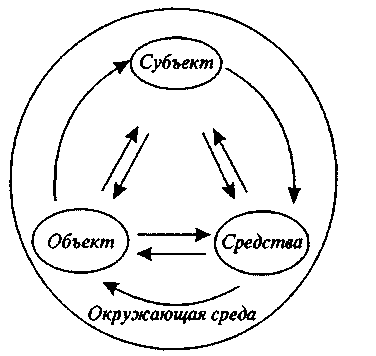
Теперь рассмотрим методы анализа и синтеза более подробно. Начнем с методов анализа, которые нашли широкое применение в науке и практике. В математике давно с успехом применяются такие аналитические методы, как разложение функций в ряды, спектральный анализ, дифференциальное и интегральное исчисление; в физике – методы молекулярной динамики; на производстве – конвейерная технология изготовления.

Как было отмечено выше, основной операцией при анализе является разделение целого на части. В дальнейшем эту операцию будем называть *декомпозицией* и понимать под ней метод разложения системы на отдельные элементы. В результате декомпозиции исходная система распадается на подсистемы, задача – на подзадачи и т.д. При необходимости операция декомпозиции может повторяться несколько раз, что приводит к древовидным структурам системы.

Основной проблемой при декомпозиции является ее неоднозначность. Понятно, что одну и ту же систему можно разбить на различные подсистемы в зависимости как от опыта исследователя, так и от применяемой методики анализа. Поэтому в системном анализе существуют специальные критерии для обоснования процесса декомпозиции. Одним из таких критериев является полнота декомпозиции, которая в свою очередь связана с полнотой модели системы, взятой в качестве исходной при декомпозиции.

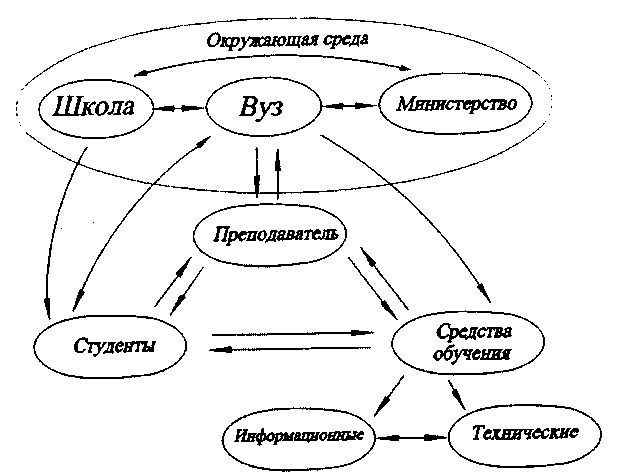
Как было указано выше, в системном анализе рассматриваются только четыре формальные модели системы: «черного ящика», состава, структуры и «белого ящика». Очевидно, что для декомпозиции подходят только последние три модели, которые позволяют рассматривать систему через взаимодействие ее отдельных элементов. Поэтому одной из проблем системного анализа является накопление наборов полных формальных моделей (полнота здесь рассматривается относительно поставленной цели) для различных исследуемых систем, получивших в теории искусственного интеллекта название *фреймов*.

Известны фреймы для некоторых информационных, организационных и социальных систем. Однако построение и обоснование фреймов для произвольной системы остается сложной задачей, от решения которой во многом зависит успех декомпозиции. Рассмотрим, например, педагогический процесс в высшем учебном заведении (вузе). Фреймом при декомпозиции в данном случае может служить формальная модель деятельности человека, предложенная еще К. Марксом в «Капитале» для анализа процесса труда (рис. 3.8). В качестве элементов здесь выделены: субъект деятельности, объект, на который направлена деятельность, и средства, используемые в процессе деятельности, а также все возможные связи между ними и окружающей средой. Используя эту формальную модель, можно построить модель педагогического процесса в вузе, вариант которой изображен на рис. 3.9. Здесь субъектом выступает преподаватель вуза, объектами – студенты, а средствами – методические, информационные и технические средства обучения (учебные программы изучаемых предметов, методические и учебные пособия, лабораторная база и т.д.). Окружающая среда описывается с помощью трех элементов: школы, вуза и министерства, которые оказывают существенное влияние на организацию учебного процесса (понятно, что число элементов, входящих в приведенную структурную модель, может быть гораздо больше).



**Рис 3.8.** *Полная формальная модель деятельности человека*

Однако при декомпозиции необходимо учитывать и другой критерий - простоту, который требует сокращения размеров древовидной структуры. Таким образом, при декомпозиции должен быть принят некий компромисс между полнотой и простотой, который может быть достигнут в том случае, если в структурную модель включаются только элементы, существенные по отношению к цели анализа.



**Рис 3.9.** *Формальная модель педагогического процесса в вузе*

Число уровней декомпозиции (уровней древовидной структуры) выбирается из следующих соображений. Декомпозиция по каждой из ветвей древовидной структуры ведется до тех пор, пока не приведет к получению элементов системы, не требующих дальнейшего разложения. Такие составляющие называются *элементарными.* Отметим, что понятие элементарности составляющей системы должно быть конкретизировано в каждом рассматриваемом случае отдельно. При этом могут быть использованы как формализованные (с помощью критериев), так и неформализованные (с помощью экспертов) способы. Например, в некоторых случаях многомерную задачу механики сплошной среды удается разложить на последовательность одномерных задач, имеющих простое (аналитическое) решение. Тогда каждую из этих одномерных задач можно считать элементарной частью исходной системы.

Часть системы, которую нельзя считать элементарной на основании выбранных критериев, подлежит дальнейшей декомпозиции. При этом могут использоваться различные фреймы. Если исследователь «перебрал» все фреймы, но не достиг элементарности на какой-либо ветви древовидной структуры, то вводятся новые элементы в модель, взятую в качестве основания, и декомпозиция продолжается по ним.

Следует отметить, что в результате декомпозиции будет реализован лишь первый этап структурного моделирования, а именно - этап анализа. После этого этапа удается разделить исследуемую систему на отдельные элементы (или исходную задачу - на более простые подзадачи). Однако, как было отмечено выше, на поведение каждого элемента нужно смотреть с точки зрения целей всей системы. Другими словами, полученная совокупность элементов кроме внешней целостности (т.е. определенной обособленности от окружающей среды) должна обладать и внутренней целостностью.

Внешняя целостность хорошо описывается моделью «черного ящика», а внутренняя - связана с моделью структуры системы, т.е. установлением отношений между элементами. Для этого используется операция *агрегирования -* объединение нескольких элементов в единое целое. Результатом агрегирования является система, которую называют *агрегатом.* Свойства агрегата не являются только совокупностью свойств его отдельных элементов. Агрегат может обладать такими свойствами, которых нет ни у одного из его элементов, взятых в отдельности. Другими словами, объединение элементов в систему влечет появление нового качества, которое не могло появиться без этого объединения. Такое «внезапное» появление новых качеств у агрегата получило название *эмерджентности* (от англ. – внезапно возникающий). Следует отметить, что новые свойства возникают благодаря конкретным связям между элементами. Другие связи могут дать другие новые свойства агрегата.

Хорошей иллюстрацией свойства эмерджентности является пример, предложенный М. Арбибом. Пусть имеется некоторый цифровой автомат 5, увеличивающий на 1 любое целое число, поступающее на его вход. При последовательном соединении двух автоматов в цепочку это свойство не изменяется. Если же соединить два таких автомата последовательно в кольцо (рис. 3.10), то в полученном агрегате обнаружится новое свойство: он генерирует возрастающие последовательности на выходах А и В, причем одна последовательность состоит из четных, а другая – из нечетных чисел. Другим ярким подтверждением свойства эмерджентности может служить пример из материаловедения. Известно, что тип кристаллической решетки (способ соединения атомов) определяет твердость материала. При этом твердость получаемого агрегата, состоящего из одинаковых элементов, может различаться в десятки тысяч раз (графит и алмаз).

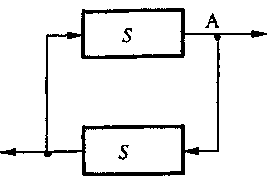
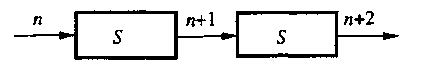


Рис. **3.10.** *Пример вычислительного агрегата*

Возникновение качественно новых свойств при агрегировании есть частное, но яркое проявление одного из законов диалектики - закона перехода количества в качество. При этом считается, что чем больше свойства агрегата отличаются от свойств его элементов, тем выше организованность системы. Кибернетик У. Эшби доказал, что у системы тем больше возможностей в выборе поведения, чем сильнее степень согласованности поведения ее элементов. Высшая степень проявления согласованности поведения элементов системы – самоорганизация системы, изучением которой занимается относительно молодая междисциплинарная область знаний – *синергетика*.

Таким образом, как следует из вышеизложенного, при агрегировании большое значение имеет установление связей между элементами, т.е. выбор модели структуры. Значит, в самом общем виде агрегирование можно определить как установление отношений на заданном множестве элементов. Такое установление отношений может быть проведено различными способами: построением математических зависимостей, структурированием, статистической обработкой, классификацией и т.п. В результате получаются различные агрегаты, основными из которых являются следующие: конфигуратор, классификатор, оператор, статистик и структура. Рассмотрим эти агрегаты более подробно.

*Конфигуратором* называется такой агрегат, который состоит из качественно различных языков описания исследуемого объекта и обладает тем свойством, что число этих языков минимально, но необходимо для выполнения заданной цели. Следует отметить, что конфигуратор является содержательной моделью высшего возможного уровня. Перечислив языки, на которых будет вестись описание системы, мы тем самым определяем тип системы и ее основные свойства.

Например, в радиотехнике для описания одного и того же прибора используется следующий конфигуратор: блок-схема, принципиальная схема и монтажная схема. Этот конфигуратор полностью описывает рабочие характеристики прибора. Однако если кроме цели производства радиоаппаратуры ставится цель ее сбыта, то в конфигуратор необходимо добавить язык рекламы (маркетинг, дизайн, цена и т.п.).

В инженерной графике для описания поверхности любого трехмерного тела в качестве конфигуратора используются совокупность трех ортогональных проекций. Число их нельзя уменьшить и нецелесообразно увеличивать.

А какой конфигуратор применяется при математическом моделировании? Выбор языка зависит от вида модели. Понятно, что основной язык для математической модели – язык математических формул. Однако, как было отмечено выше, важными этапами математического моделирования являются содержательная и концептуальная постановки задачи. На этапе содержательной постановки осуществляется словесная постановка задачи на том языке, на котором она формулируется заказчиком. На этапе концептуальной постановки выполняется запись задачи на языке тех областей знаний, которые используются при моделировании рассматриваемого объекта. Поэтому конфигуратором в данном случае можно считать содержательную, концептуальную и математическую постановки задачи.

В качестве *классификатора* выступает агрегат, устанавливающий отношения эквивалентности между элементами системы, т.е. описывающий условия образования классов.

Следующим типом агрегата является *оператор,* который ставит в соответствие некоторому набору отдельных элементов один элемент.

Наиболее распространенный в математическом моделировании вид оператора – *функция.* Этот вид оператора появляется, если агрегируемые элементы измеряются в числовых шкалах. В таком случае можно задать отношение на множестве элементов в виде числовой функции многих переменных, которая и является агрегатом.

Приведенный вид функции - один из простейших. В общем случае области определения и значений функции могут относится к более сложным пространствам и множествам. Конкретное задание функции связано с построением математической модели рассматриваемой системы. Поэтому на выбор функции накладываются ограничения, вытекающие из содержательной постановки задачи, т.е. этот выбор не является свободным. В тех же (достаточно редких) случаях, когда оператор-функция является вполне адекватной математической моделью всей системы, свобода выбора функции, агрегирующей набор внутренних переменных, вообще отсутствует. Такой случай имеет место, например, когда закономерности природы удается с достаточной степенью адекватности отобразить безразмерными степенными одночленами физических размерных величин. При этом можно утверждать, что если удалось построить безразмерный степенной одночлен из размерных физических величин, образующих конфигуратор определенного явления, то установлен физический закон данного явления. Это легко можно показать на примере второго закона Ньютона, описывающего поступательное движение твердого тела.

К сожалению, построить функциональную зависимость, адекватно описывающую поведение сложной системы, очень трудно, а иногда практически невозможно. Гораздо проще установить функциональные зависимости между отдельными элементами системы. В этом случае оператор будет представлять собой некоторую (часто нелинейную) систему уравнений. Как правило, внутренними переменными системы являются не числа, а функции одного или нескольких аргументов. Тогда выходными параметрами могут выступать также функции, или функционалы.

При математическом моделировании сложных систем построить оператор бывает совсем не просто. Это связано со многими причинами. Основной из этих причин можно считать недостаток информации о характере и механизмах взаимодействия между отдельными элементами системы. Например, эти взаимодействия могут носить случайный характер, закон которого нам неизвестен. В этом случае говорят, что моделирование ведется в условиях неопределенности, а оператор/может быть найден только с некоторой ограниченной точностью, например с точностью до конечного числа параметров.

Обычно считается, что параметры носят случайный характер или могут быть определены в ходе самого моделирования с помощью методов идентификации. В этом случае используются системы с обратной связью. Назовем оператор, который задается с помощью алгоритма, реализующего некоторый набор правил, *имитатором.*

Отдельно при агрегировании рассматривается ситуация, когда все параметры, описывающие поведение элементов системы, являются случайными величинами. В этом случае вводится понятие *агрегата-статистика,* определяющего отношения на множестве случайных параметров системы. Для его построения используются функции выборочных значений случайных величин, в качестве которых широко используются функции распределения вероятностей или плотности распределения вероятностей случайных событий.

На практике используются достаточные и оптимальные статистики. Достаточными статистиками называются такие агрегаты, которые извлекают всю полезную информацию об интересующем нас параметре из совокупности наблюдений. Например, для систем, результат деятельности которых нас интересует только в среднем, достаточным статистиком может служить математическое ожидание выходной случайной величины. Однако на практике достаточные статистики применяются редко, так как при таком агрегировании потери информации неизбежны. Чаще применяются оптимальные статистики – такие агрегаты, которые позволяют свести потери информации к минимуму. Например, математическое ожидание и дисперсия случайной величины в совокупности являются оптимальным статистиком для многих технических систем.

Последним из рассматриваемых видов агрегатов, но не последним по частоте применения при структурном моделировании является структура системы, т.е. агрегат, устанавливающий типы связей между отдельными элементами системы. Наиболее широко подобный вид агрегирования применяется при моделировании технических, информационных и организационных систем. Например, в материаловедении в качестве структуры материала используются разные модели кристаллических решеток, устанавливающие типы связи между атомами и симметрийные свойства кристалла. В информационных системах применяется структура в виде первичной сети, указывающей направление и интенсивность передачи информации. В организационных системах структура описывает иерархию в процессе принятия решений и распределение власти и ответственности (ответственность за принятые решения).

После рассмотрения основных подходов к построению структурных моделей перейдем к примерам, иллюстрирующим эффективность этих подходов при моделировании различных систем и процессов.

### 3.3. Вопросы для самопроверки

Что такое искусственная система? В каком случае совокупность от дельных элементов будет системой, а в каком - нет? Приведите примеры.

Когда на практике можно применять модель «черного ящика»? Какие основные недостатки имеет данная модель?

В чем сложность построения модели «белого ящика»? Какие виды неопределенностей вы знаете?

Что такое структурная схема системы? Чем отличается граф от сети?

В чем заключается основная особенность иерархических структурных схем? Где применяются иерархические структуры?

Почему синтез считают завершающим этапом анализа?

Что такое фрейм? Является он формальной или содержательной структурной моделью?

Сформулируйте условия окончания декомпозиции системы.

Что такое агрегат? Может ли агрегат обладать новыми свойствами по сравнению с теми, которыми обладают составляющие его элементы?

Какой агрегат называется оператором? Переменные и параметры оператора. Какие виды неопределенности оператора вы знаете?

Постройте структурную модель системы управления, которая реализована в вашем учебном заведении.

Постройте структурную модель спортивной команды (например, хоккейной или футбольной).

Постройте структурную модель автомобиля.

Постройте структурную модель солнечной системы.

Постройте агрегат-классификатор численных методов решения систем алгебраических уравнений.

Постройте одномерную структурную модель упрочняющегося упругопластического тела, для которого задана диаграмма приведенного вида. Постройте определяющие соотношения, соответствующие вашей структурной модели.

## 4. Моделирование в условиях неопределенности

Развитие современных технологий во всех сферах деятельности человека и разработка соответствующих моделей приводят к необходимости учета максимально возможного количества информации об исследуемом объекте. При этом вопросы моделирования сложных процессов и явлений чаще всего формулируются и обсуждаются на профессиональном языке (искусственном или подмножестве естественного), отражающем специфику области исследования. Следствием этого является использование в процессе моделирования качественных элементов: описаний, понятий и отношений с неопределенными или нечеткими границами, высказываний с многозначной шкалой истинности и т.д.

В тех случаях, когда информация существенно неопределенная, задание строгих границ «волевым» порядком или искусственное введение однозначности означает не что иное, как огрубление исходных данных, и может приводить к получению пусть четкого, но неверного результата. Исследование и учет однозначности (определенности) или неоднозначности (неопределенности) всех параметров и отношений, описывающих исследуемое явление, представляет собой необходимый и важнейший элемент математического моделирования.

Известные закономерности, описывающие процессы и явления объективного мира, можно условно разделить на две группы: *однозначно определенные (детерминированные)* и *находящиеся в условиях неопределенности.*

К первой группе относят те закономерности, которые по заданным с определенной точностью характеристикам воздействий позволяют установить вполне определенный (детерминированный) отклик (реакцию) исследуемого объекта. Например, материальное тело падает с некоторой высоты. При заданной точности определения начальных условий и действующих на тело внешних сил можно однозначно, с определенной точностью установить его скорость при соприкосновении с Землей, время полета и т.д. С математической точки зрения эти закономерности описываются на основе аксиом традиционной математикой с использованием вполне определенных величин.

Вторая группа закономерностей описывает случайные события (такие, которые при заданном комплексе условий могут протекать по-разному при одних и тех же условиях). Например, при бросании игрального кубика нельзя заранее однозначно сказать, какая цифра выпадет. Если попытаться учесть природу этих закономерностей как явлений, находящихся в условиях неопределенности, то надо иметь в виду, что описание этой неопределенности может быть разным в зависимости от количества и качества имеющейся информации.

Часто граница, отделяющая случайное событие от неслучайного, очень размытая. Одна из концепций случайности (которая преобладала до начала XX столетия) состояла в том, что если при описании исследуемого объекта предусмотреть все связанные с ним «детали», то никакой случайности не будет. Однако в настоящее время принято придерживаться другой концепции. Вернемся к примеру с падением материального тела. При полете последнего необходимо учитывать температуру окружающей среды, скорость ветра, положение относительно поверхности Земли и другие факторы, которые имеют неоднозначный характер и могут, в свою очередь, влиять друг на друга. Поэтому в «чистом виде» однозначно определенных процессов (явлений), наверное, нет, т.е. при описании достаточно сложных процессов закономерности всегда носят стохастический характер.

### 4.1. Причины появления неопределенностей и их виды

При решении задач математического моделирования (задачи проектирования, описания различных технологических процессов, выбора оптимальных параметров и т.д.) уже на стадии концептуальной постановки необходимо задуматься над тем, насколько однозначно определены параметры, в терминах которых осуществляется математическое описание объекта моделирования. На этом этапе необходимо определить для каждого параметра, можно ли считать его однозначно определенным или ему присуща некоторая неопределенность. Причем неопределенными могут быть не только параметры, но и связи между ними. Неопределенность понимается в том смысле, что соответствующие характеристики рассматриваемой системы находятся в условиях приближения и неполноты информации. Эта неопределенность может быть связана, с одной стороны, с тем, что параметры могут изменяться случайным образом, а с другой стороны, с тем, что они могут адаптироваться (изменяться, устанавливаться) в процессе функционирования исследуемой системы.

К наиболее значимым причинам появления неопределенности можно отнести следующие:

показатели системы практически всегда зависят от большого количества различных факторов, причем часть из них может быть даже неизвестна исследователю;

при построении модели обычно ограничиваются отбором наиболее существенных (по мнению субъекта или в силу объективных обстоятельств) переменных, что, конечно, приводит к огрублению модели;

математические погрешности, возникающие при линеаризации модели или использовании разложения в ряд при ограничении на число членов ряда; ошибки измерений и по грешности при проведении эксперимента и т.п.

В общем случае все причины возникновения неопределенности можно разбить на две основные группы: *субъективные* и *объективные.* Субъективные причины обусловлены некоторыми частными, нерегулярно повторяющимися явлениями, поэтому их достаточно сложно учесть при решении прикладных задач. Объективные причины чаще всего связаны с физическими особенностями исследуемого явления.

Например, если рассматривать задачу исследования некоторого технологического процесса, то к субъективным причинам можно отнести квалификацию работников, проводящих и регламентирующих исследуемый процесс, их навыки, реакцию, время адаптации и т.д. К объективным причинам появления неопределенности для такого типа задач можно отнести:

физико-механические свойства поставляемых материалов (в частности, предел текучести, модуль Юнга, коэффициенты теплопроводности, теплоемкости, теплоотдачи и т.д.);

анизотропию свойств;

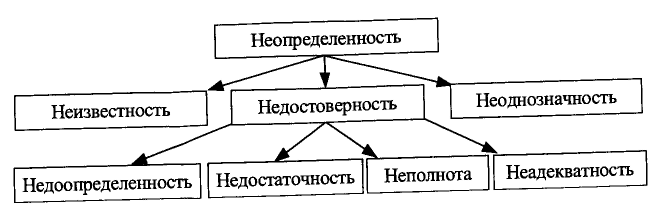
поля остаточных напряжений;

геометрические характеристики заготовок (форма и размеры);

характер износа инструмента и т.д.

В свою очередь каждая из указанных объективных причин появления неопределенности может быть обусловлена целым рядом предпосылок. Так, неоднородность свойств материала, с одной стороны, определяется как неоднородность по объему, обусловленная особенностями технологического процесса (отливки, прокат, армированные и порошковые композиты и прочие), а с другой – как неоднородность партий поставляемых заготовок. При решении прикладных задач для устранения неопределенностей обычно вводится предположение о принятии в качестве физико-механических характеристик некоторых предельных или средних значений (из возможных диапазонов). На наш взгляд, подобное предположение является весьма спорным в силу нелинейности исследуемых процессов и сложного характера взаимодействия отдельных частей объекта между собой. Поэтому возникает необходимость учета распределения соответствующей неопределенной величины.

В зависимости от полноты описания неопределенность можно разбить на три основные группы: неизвестность, недостоверность и неоднозначность. Рассмотрим группы описания неопределенности более подробно (рис. 4.1).



**Рис. 4.1.** *Виды описания неопределенности*

*Неизвестность –* это начальная стадия описания неопределенности, при которой информация полностью отсутствует.

*Недостоверность –* это вторая стадия описания неопределенности, которая для различных стадий сбора информации может

классифицироваться как неполнота, недостаточность, недоопреде-ленность и неадекватность. *Неполнота* характеризуется тем, что собрана не вся возможная информация; *недостаточность –* собрана не вся необходимая информация. *Недоопределенность –* для некоторых элементов определены не их точные описания, а лишь множества, которым эти описания принадлежат; *неадекватность –* ряд элементов исследуемого объекта описан по аналогии с уже имеющимися описаниями подобных элементов, т.е. имеет место так называемое «замещающее» описание, которое не всегда удовлетворяет целям исследования.

Дальнейший анализ неопределенности, учет новых факторов, определяющих исследуемое явление, может привести либо к устранению неопределенности (все элементы описаны однозначно), либо к неоднозначности.

*Неоднозначность –* это конечная (по полноте возможного описания) степень неопределенности, когда вся возможная информация собрана, но полностью необходимое описание не получилось. Причины возникновения неоднозначности могут быть лингвистические и физические (рис. 4.2).

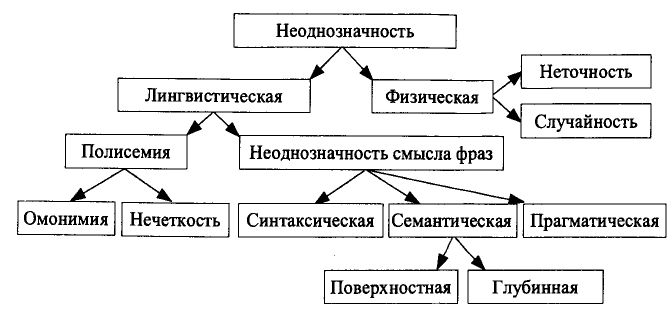


Рис. 4.2. *Причины возникновения неоднозначности*

*Физическая неопределенность* связана либо с наличием нескольких возможностей, каждая из которых *случайным* образом может стать реальностью, либо с *неточностью* вычислений или измерений. Таким образом, физическая неопределенность связана или с *физической сущностью* исследуемого явления, или с его *измеряемыми* проявлениями.

*Лингвистическая неопределенность* связана с использованием некоторого естественного языка. Она порождается, с одной стороны, множественностью значений слов (понятий и отношений) – *полисемией* (греч. – многозначность), с другой – *неоднозначностью смысла фраз.*

Можно выделить два вида полисемии: омонимию и нечеткость.

*Омонимия* (греч. одноименность) характеризуется тем, что одним и тем же словом можно характеризовать различные физические объекты. Например: коса – это вид побережья, инструмент или прическа. Если же объекты описания сходны по сути, но описывают некоторое множество понятий, то ситуацию относят к *нечеткости.* Например, понятие *несколько шагов.* Это может быть два шага, три шага, четыре шага и т. д.

Рассматривая источники неоднозначности смысла фраз, можно выделить синтаксическую, семантическую и прагматическую неоднозначность. При *синтаксической* неопределенности уточнение синтаксиса позволяет понять смысл фразы. Пример: *«казнить нельзя помиловать» – «казнить, нельзя помиловать»* или *«казнить нельзя, помиловать». Семантическая* неопределенность бывает поверхностная и глубинная. В первом случае отдельные слова понятны, но неясен смысл фразы *(«голубые зеленые мысли яростно спят»),* во втором случае непонятны и все отдельные слова *(«глокая куздра штеко будланула бокра и курдячит бокренка»). Прагматическая* неопределенность связана с совместным проявлением синтаксической и семантической неопределенностей. Она чаще всего проявляется при работе с незнакомыми объектами и, возможно, в незнакомой (например, языковой) среде.

Как уже отмечалось, на стадии концептуальной постановки задачи необходим детальный анализ степени неопределенности всех характеристик системы и связей между ними. При переходе к математической постановке задачи перед исследователем встают непростые вопросы: каким типом переменных описать те или иные параметры и как описать связь между этими параметрами?

Если цели исследования предполагают однозначное описание явления (процесса) или если параметры системы и связи между ними определены единственно возможным образом, то в этом случае применяется четкое описание, т.е. все характеристики считаются детерминированными и связи между соответствующими четкими переменными – однозначными. В противном случае в зависимости от целей исследования и требуемой полноты описания можно использовать различные математические подходы представления неопределенностей. Отметим, что усложнение модели (например, иерархичность) также может привести к необходимости использования других типов описания переменных, характеризующих исследуемое явление.

Математически неопределенность может быть описана стохастически, статистически, с позиций теории нечетких множеств, а также интервально (рис. 4.3). Отмеченные формы описания перечислены по возрастанию степени неопределенности. Рассмотрим физический смысл этих неопределенностей.

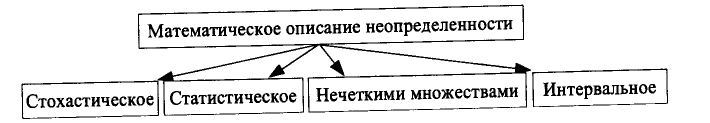


Рис. 4.3. *Формы описания неопределенности*

*Стохастическое описание* используется тогда, когда неопределенные параметры имеют вероятностный (случайный) характер.

При этом необходимо, чтобы был определен закон распределения таких случайных параметров. Стохастическим описанием занимается теория вероятностей и теория случайных процессов.

*Статистическое описание* является, по существу, частным случаем стохастического описания. Эту форму описания применяют, когда заданы только выборочные оценки каких-либо характеристик случайной величины или наборы значений некоторых случайных параметров. Статистическим описанием занимается математическая статистика.

При описании с позиций *нечетких множеств* неопределенный параметр задается некоторым множеством возможных его значений, характеризующихся той или иной степенью принадлежности (с помощью так называемой *функции принадлежности)* объекту, описываемому этим нечетким множеством. Функция принадлежности может принимать значения от 1 (полная принадлежность) до 0 (полная непринадлежность). Интерпретацией функции принадлежности является *субъективная мера* того, насколько полно элемент (параметр) соответствует понятию, смысл которого описывается нечетким множеством. Этим описанием занимается теория нечетких множеств.

*Интервальное описание* можно использовать, когда неопределенные параметры заданы только диапазонами возможных значений (верхней и нижней границами), причем параметр может принимать любое значение внутри интервала и ему нельзя приписать никакой вероятностной меры. Интервальное описание является предметом исследования интервальной математики.

Следует отметить, что зависимость математического подхода к описанию переменных от полноты имеющейся информации весьма условна. Так, при численной реализации тех или иных алгоритмов моделей на ЭВМ даже для детерминированных переменных (неявным образом) используется аппарат интервальных вычислений, так как расчеты на ЭВМ ведутся с интервальными величинами. Поэтому считать, что интервальное описание переменных «менее определенное», чем стохастическое, наверное, нельзя. Однако с этим утверждением можно согласиться, если интервальное описание вводится уже на стадии концептуальной и математической постановок задач.

Многообразие форм описания неопределенностей приводит к различным особенностям постановки и решения соответствующих задач.

### 4.2. Вопросы для самопроверки

Сформулируйте основные причины появления неопределенностей. Какие из них являются субъективными, а какие – объективными?

Как различается неопределенность в зависимости от полноты и качества описания?

Какие основные причины возникновения неоднозначности вы знаете?

Приведите примеры лингвистических и физических неоднозначностей.

Как описывается неопределенность математически?

Приведите примеры математического описания неопределенностей для различных физических явлений.

## 5. Линейные и нелинейные модели

Вплоть до относительно недавнего времени (30–40-е годы XXвека) в качестве объектов исследования практически безраздельно господствовали линейные процессы и явления (точнее, процессы и явления, описываемые линейными операторными уравнениями). Вероятно, обусловлено это было инструментарием, доступным научным сотрудникам тех времен, главными из которых являлись аналитические методы.

Аналитические методы, без сомнения, и в настоящее время являются одними из самых эффективных и притягательных для исследователей, однако круг доступных им задач весьма узок. Особенно больших усилий требуют аналитические решения нелинейных задач, которые все чаще возникают в различных научных областях, в технике и технологиях. Большинство нелинейных задач требуют для своего решения применения численных методов и мощных ЭВМ, доступ к которым ученые получили в 50–60-е годы XX века.

Следует отметить, что в ряде случаев проведение численных экспериментов позволяет исследователям «догадаться» о возможном виде аналитического решения, подсказывает направление поиска, подход, метод установления последнего. Кроме того, в последние годы весьма быстрыми темпами развиваются аналитические пакеты.

На примерах будет показано, что могут и что не могут описать линейные модели явлений и процессов, происходящих в нашем, в общем-то, нелинейном мире. Для того чтобы распознать признаки линейности или нелинейности изучаемого явления, ученый должен владеть культурой (набором «штампов») нелинейной науки, с некоторыми понятиями и идеями. Процедуре построения моделей уделяется меньше внимания, чем характерным признакам, сопровождающим линейные и нелинейные явления.

### 5.1. О законе Гука и границах линейности

С одной из первых линейных моделей – законом Гука мы знакомимся, только начиная изучать физику. Этот закон в виде анаграммы был помещен Робертом Гуком на свободном месте в конце его работы о гелиоскопе в 1676 г. Двумя годами позже в трактате «О восстановительной способности или об упругости» анаграмма была им расшифрована – «какова сила, таково растяжение». Гук отмечал, что он впервые открыл этот закон еще в 1660 г., но от опубликования его удержало стремление защитить свое изобретение спиральных часовых пружин. Для их конструирования Гук использовал факт независимости частоты колебаний от их амплитуды, вытекающий из линейности связи.

Упругость в современном понимании означает существование однозначной монотонно возрастающей функции, связывающей напряжение и деформацию.

Функция эта в общем случае – нелинейная. Нелинейными упругими свойствами обладают, например, высокоэластичные резины. Резиновый шнур можно растянуть в десять раз, а затем отпустить, после чего он восстановит свою длину. При таких больших степенях деформации не следует ожидать линейности связи. Гук изучал длинные металлические проволоки, которые подвергал малым деформациям, и обнаружить нелинейность реакции не удалось.

Открытие Гуком упругого закона вызвало весьма большой интерес научного сообщества; опыты Гука демонстрировались самому королю Англии Карлу II. Поспешно обобщая свои результаты, Гук заявлял: «Линейную зависимость можно наблюдать не только в этих телах, но и любых других упругих материалах, будь то металл, дерево, камни, спекшаяся глина, волос, шелк, кость, сухожилия, стекло и тому подобное».

Тем не менее не все ученые того времени разделяли оптимизм по поводу универсальности линейного закона. В 1687 г. Яков Бернулли провел опыты со скрипичной струной, изготовленной из кетгута, показавшие нелинейность реакции. Готфрид Вильгельм Лейбниц, прочтя трактат Гука, в письме Христиану Гюйгенсу в 1691 г. высказал осторожное недоверие линейному закону и попросил его прислать эксперименты, которые тот проводил по этому предмету. Гюйгенс признался, что он согласен с результатами Гука, но только если пружины будут растянуты незначительно. И только в 1849 г. Британская королевская комиссия, назначенная для исследования применения железа для железнодорожных сооружений, «отменила» линейный закон в пользу параболической зависимости

Заключение комиссии основывалось на почти двадцатилетнем детальном изучении данных экспериментальных исследований на образцах из железа.

И все же факт, что при достаточно малых деформациях между последними и напряжениями в металлах была обнаружена линейная зависимость, привел к господству идей *линейной* теории упругости в течение почти трех столетий. Исключительное значение результатов этой теории подчеркивал Джеймс Фредерик Белл: «Если бы в 17 веке для твердых тел наблюдались исключительно нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями, то большинство достижений в физике и технике, имевших место за прошедшие 200 лет, задержалось бы на несколько столетий». Механики-естествоиспытатели получили возможность продвигаться вперед, развивая линейную теорию упругости, а вслед за ней и математический аппарат, пригодный для построения моделей многих других явлений и процессов.

Из этой истории мы можем видеть, что линейная модель упругости занимает только определенную нишу в теории упругости. Этот факт в естествознании - достаточно общий. Как правило, любая линейная теория справедлива в ограниченных пространственных и временных рамках и при малой интенсивности воздействий на изучаемую систему. Например, архитектор без ущерба для своего дела может не принимать во внимание кривизну земной поверхности, поскольку размеры рассматриваемого им участка малы по сравнению с радиусом Земли. Точно так же конструктор авиационной или космической техники в своей работе вполне сможет обойтись ньютоновской классической механикой, не прибегая к теории относительности, поскольку последняя «вступает в силу» при скоростях, соизмеримых со скоростью света. При меньших скоростях v нелинейностью в основных законах можно пренебречь.

Если же мы изучаем явление, не являющееся линейным в интересующих нас рамках, то, взяв в качестве первого приближения линейную модель, мы можем не получить даже качественного его описания. Нелинейность в таких явлениях принципиальна.

### 5.2. Поля, сплошные среды и уравнения математической физики. Линейные уравнения и принцип суперпозиции

Ранее мы говорили о линейной *функции.* Более богатые модели дают нам уравнения математической физики, которые также могут быть линейными или нелинейными. Можно сказать, что *математическая физика –* это наука, изучающая математические модели физических явлений. Уравнения математической физики – это чаще всего дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие процессы в пространстве и времени. Таким образом, искомые функции должны иметь не менее двух аргументов; дифференциальные уравнения для функции одного аргумента относятся к классу обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем случае мы рассматриваем процесс в области (возможно, неограниченной) трехмерного евклидова пространства, т.е. на такой области определено физическое поле, которое изменяется со временем. Одно из первых уравнений этого типа появилось благодаря Пьеру Симону Лапласу.

Лаплас с недоверием относился к закону Всемирного тяготения Ньютона: как планеты, находясь на колоссальных дистанциях, могут действовать друг на друга? Лапласу казалась реальнее концепция контактной передачи усилия (короткодействие) от одной планеты к другой, посредством эфира. Введя в рассмотрение эту субстанцию, поле, заполняющую трехмерное пространство, он получил для нее уравнение, которое сейчас называют *уравнением Лапласа.* Концепция эфира не подтвердилась, но оказалось, что это уравнение описывает многие стационарные процессы в сплошных средах: равновесие линейно-упругого тела, потенциальное течение вязкой жидкости, стационарные распределения электрического и температурного полей в теле и т.д.

Скажем несколько слов о модели *сплошной среды.* Обычно рассматриваемые нами поля определены в области геометрического пространства. Поле при этом оказывается как бы внешним, удобным для наблюдения и непрерывно заполняющим область математическим объектом. Механики имеют дело с полем материала, вложенного в это пространство, причем на этом материале обычно рассматриваются и другие поля (например, температурное). Физики работают, например, с электромагнитным или гравитационным полями, для которых «механический носитель» не требуется. Необходимо различать внешнее пространство и поле, поскольку последнее изменяется во времени (движется, течет, деформируется) относительно внешнего пространства, с которым (будем считать) жестко связана система отсчета наблюдателя. Оказывается, что реальные материальные среды вовсе не непрерывно заполняют пространство: при рассмотрении их вблизи они оказываются разрывными, состоящими из расположенных в пространстве зерен, гранул, молекул, атомов. Следовательно, и измеряемые на них физические поля с точки зрения внешнего геометрического континуума также не могут считаться непрерывными. Какую бы среду и на каких бы масштабах мы не рассматривали, объем, в котором сосредоточено собственно само вещество, оказывается много меньше объема тела. Но, несмотря на то, что все тела «состоят из пустоты», в практически малых объемах всегда оказывается огромное число частиц. Поэтому мы можем «размазать материю», т.е. полагать материальную среду и поле на ней непрерывными на масштабах, много больших по сравнению с характерными масштабами строения среды и осцилляции поля на ней. Применяя аппарат обычного дифференциального исчисления, мы должны осознавать, что работаем с уже осредненными полями (конечно, осредненное поле далеко не всегда полностью характеризует нам исходное поле). В механике модель сплошной среды применяют к газам, жидкостям и твердым телам.

### 5.3. О фракталах и их применении

Фракталы окружают нас повсюду. Изрезанные береговые линии, изломанные поверхности горных хребтов, причудливые очертания облаков, раскидистые ветви деревьев, разветвленные сети кровеносных сосудов и нейронов, вспененные потоки бурных рек – все это фракталы. Одни фракталы, типа облаков и горных потоков, постоянно изменяются, другие, подобные деревьям и нейронным сетям, сохраняют свою форму неизменной.

Язык фрактальной геометрии природы оставался непонятым вплоть до появления в 1983 г. книги Мандельброта «Фрактальная геометрия природы». До этого времени естествоиспытатели говорили на языке геометрии Евклида. Идеально регулярные образы – прямая и плоскость, треугольники и пирамиды, окружность и сфера – составляли основу этого языка и всей научной картины мира. Эту мысль в 1623 г. сформулировал Галилео Галилей: «Философия природы написана в величайшей книге – я разумею Вселенную, - которая всегда открыта перед нашими глазами, но понять ее сможет лишь тот, кто сначала выучит язык и постигнет письмена, которыми она начертана. А написана эта книга на языке математики, и письмена ее - треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без коих нельзя понять по-человечески их слова; без них тщетное кружение в темном лабиринте».

Потребовалось еще 350 лет, прежде чем естествознание обрело качественно новый язык фрактальной геометрии. Вот что об этом пишет первооткрыватель фрактальной геометрии Бенуа Мандельброт: «Почему геометрию называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака – это не сферы, горы – это не конусы, линии берега – это не окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой.... Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно.

Существование этих структур бросает нам вызов в виде трудной задачи изучения тех форм, которые Евклид отбросил как бесформенные, – задачи исследования морфологии аморфного. Математики, однако, пренебрегли этим вызовом и предпочли все больше и больше отдаляться от природы, изобретая теории, которые не соответствуют ничему из того, что можно увидеть или почувствовать».

Широчайшее распространение фрактальных структур объясняется их разномасштабностью и самоподобием: и большие, и малые масштабы фрактальных структур имеют одинаковый закон построения. Форма фрактальной структуры, разглядываемая в микроскоп с любым увеличением, видится одной и той же. Это геометрическое подобие и есть основной принцип роста всего живого, который называют также иерархическим принципом организации (законы ветвления самой тонкой веточки дерева абсолютно те же, что и для всех его ветвей, и для всего ствола в целом).

Задать фрактальную структуру – значит задать не застывшую, неизменную форму, а принцип роста, закон изменения формы. Как правило, алгоритм построения формы гораздо проще, чем Полученная с его помощью форма. Фрактал дает компактный способ описания самых замысловатых форм. Итак, «фрактал не есть конечная форма (фрактал никто никогда не видел, так же как число), а есть закон построения этой формы. Фрактал аккумулирует в себе идею роста».

Осознание этой идеи привело к тому, что понятие фрактала стало широко использоваться в научных исследованиях, и было обнаружено большое число задач, в которых фрактальная структура и размерность служат основными характеристиками системы. Например, в турбулентности теория фракталов теснейшим образом связана с теорией масштабной инвариантности Колмогорова. Скорость турбулентного потока (как функция пространственных переменных и времени) – фрактал, аналогичный броуновской кривой, только с иными локальными свойствами.

Е. Федер в основу своей книги положил исследование явлений, имеющих место при вытеснении нефти водой в пористой среде; эти явления приводят к тому, что нефть оказывается запертой в водяных ловушках, что ведет к ее потерям. Если вязкость вытесняемой жидкости больше вязкости вытесняющей, то фронт вытеснения неустойчив и образуются так называемые «вязкие пальцы», имеющие фрактальную структуру.

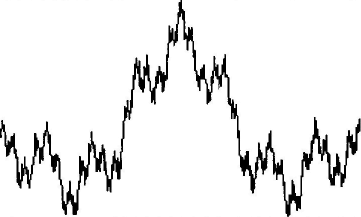


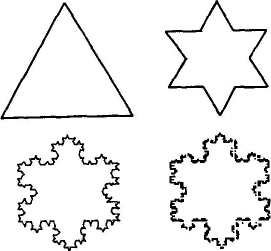
Рис. 5.1. Функция Вейерштрасса

На рис. 5.1 представлена фрактальная кривая, являющаяся графиком так называемой функции Вейерштрасса. Эта функция непрерывна, всюду не дифференцируемая (каждая точка этой прямой – точка излома, производная в которой не существует). Она задается бесконечной суммой тригонометрических функций, обладает сложной изломанной структурой и является самоподобной: форма функции остается неизменной при растяжении вдоль оси абсцисс и вдоль оси ординат. Впервые подобные функции появились в XIX веке, однако они были отвергнуты математиками как «некрасивые». Их не только не хотели изучать – о них не хотели даже говорить. В самом деле, если любая сколь угодно малая часть функции Вейерштрасса повторяет всю функцию в целом, то чему же равна длина ее графика? Очевидно, бесконечности. Вопрос о длине фрактальной линии остался в XIX веке без ответа.

Еще раз столкнулись с подобной проблемой во второй половине XX века при измерении длины береговой линии Англии. Эта задача была поручена известному английскому физику Л. Ричардсону. Для ее решения Ричардсон на карте заменил истинную береговую линию замкнутой ломанной, составленной из отрезков прямой длины, вершины которой располагались на побережье. Длина ломанной принималась за приближенное значение длины береговой линии, соответствующее выбранной длине элемента ломаной. Далее, переходя к пределу, ожидали получить истинное значение длины побережья. Из математики известно, что предел длины ломанной для непрерывно дифференцируемой функции не зависит ни от длины элемента ломанной, ни от способа построения ломанной и равен длине графика функции.

Однако береговая линия Англии, в отличие от линий, описываемых гладкими функциями, оказалась настолько изрезанной вплоть до самых малых масштабов карты, что с уменьшением звеньев длина ломанной не стремится к конечному пределу, а становится бесконечно большой. Ричардсону удалось установить характер стремления к бесконечности, который выражался степенной функцией.

Примером более упорядоченной фрактальной кривой может служить фрактал, открытый в 1904 г. немецким математиком Хельгой фон Кох. Алгоритм построения его очень прост: рассматривается равносторонний треугольник со сторонами единичной длины; каждый прямолинейный элемент делится на три части, на средней части строится меньший равносторонний треугольник и его основание отбрасывается. Предфракталы - фигуры, полученные за четыре первых шага, изображены на рис. 5.2.



**Рис. 5.2.** *Построение снежинки Кох*

Можно вычислить периметр этой фигуры. Длина кривой стремится к бесконечности. Множество точек, полученное как предел бесконечного числа итераций процедуры Кох, не являются кривой, для которой длина - удобная мера. Это уже не линия - «длина без ширины», а нечто большее, некая «толстая линия».

Термин *фрактал* (от лат. *–* изломанный, дробный) ввел в употребление в 1975 г. американский математик Б. Мандельброт, сотрудник исследовательского центра имени Томаса Дж. Уотсона корпорации IВМ. Фракталами Мандельброт назвал структуры, обладающие двумя признаками: изломанностью и самоподобием (любая часть структуры подобна всему целому). Самоподобный понимается не только в классическом смысле как «линейно увеличенный или уменьшенный», но и в смысле «похожий». Кроме того, эти структуры характеризуются параметром, называемым фрактальной размерностью.

## 6. Моделирование с использованием имитационно подхода

Развитие моделей, использующих имитационный подход, связано с необходимостью исследования очень сложных систем, встречающихся на практике. Аналитические и численные методы, позволяющие провести наиболее полное исследование математической модели объекта, применимы далеко не для всех систем. При построении аналитических моделей многих сложных систем исследователю зачастую приходится идти на серьезные упрощения, чтобы получить представление о некоторых общих свойствах моделируемой системы, например оценить устойчивость стационарного состояния системы. Моделируемая система может оказаться настолько сложной, а поведение ее так многообразно и непредсказуемо, что принятая система гипотез будет способна привести не только к существенным количественным, но и качественным отличиям результатов моделирования от поведения системы в реальных условиях. При этом повысить степень адекватности модели будет нельзя по многим причинам: вследствие неразвитости существующих аналитических и численных методов, невозможности построения аналитического описания поведения отдельных элементов системы или взаимодействия между элементами и т.д. Ситуации, когда исследователю рекомендуется применять модели, имитирующие поведение реального объекта, следующие:

1) если не существует законченной постановки задачи исследования и идет процесс познания объекта моделирования или отдельных его элементов;

1. если аналитические методы имеются, но математические процедуры трудно реализуемы, сложны и трудоемки;
2. когда кроме оценки влияния параметров сложной системы желательно осуществить наблюдение за поведением отдельных компонентов этой системы в течение определенного периода времени;
3. когда имитационный подход оказывается единственным способом исследования сложной системы из-за невозможности наблюдения явлений в реальной обстановке;
4. когда необходимо контролировать протекание процессов в сложной системе путем замедления или ускорения явлений в ходе имитации;
5. при подготовке специалистов и освоении новой техники, когда имитатор обеспечивает возможность приобретения необходимых навыков в эксплуатации новой техники;
6. когда изучаются новые ситуации в сложных системах, о которых мало что известно. В этом случае имитация служит для предварительной проверки новых стратегий и правил принятия решений перед проведением экспериментов на реальной системе;
7. когда основное значение имеет последовательность событий в проектируемой сложной системе и модель используется для предсказания узких мест в функционировании системы и других трудностей, связанных с добавлением в систему новых элементов.

Имитационный подход, в частности, оправдан, если вопросы, на которые должна ответить модель, относятся не к выяснению фундаментальных законов и причин, определяющих динамику реальной системы, а к анализу поведения системы, как правило, выполняемому сугубо в практических целях.

### 6.1. Особенности моделей, использующих имитационный подход

Суть подхода, используемого при разработке имитаторов, состоит в том, что процесс функционирования сложной системы представляется в виде определенного алгоритма, реализуемого на ЭВМ. Для систем, состоящих из множества элементов, приходится строить модель не только всей системы, но и модели отдельных элементов. Как и для аналитического подхода, разработка имитатора ведется с использованием некоторой совокупности гипотез. Изменение даже одной гипотезы для одного из элементов системы может привести к необходимости пересмотра всей модели системы и поиску новых методов исследования (именно поэтому аналитические и численные подходы к моделированию сложных систем применяют после длительного и всестороннего изучения поведения как всей системы, так и отдельных ее элементов). Имитационный подход позволяет *«максимально использовать всю имеющуюся в распоряжении исследователя информацию о системе»*.

Например, пусть требуется построить модель популяции живых существ с учетом взаимодействия с конкурирующими видами, хищниками и окружающей природой. Объектом моделирования в данном случае является сложная система, состоящая из живых существ разного вида, взаимодействующих друг с другом. При некоторых ограничениях можно описать изменение численности животных с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако биологи, наблюдающие за реальной биосистемой, могут описать поведение отдельных особей только в виде совокупности правил и приближенно контролировать общую численность различных животных. Использовать эти наблюдения для определения констант, входящих в систему уравнений, достаточно сложно. В то же время построить алгоритм, реализующий указанную таблицу правил поведения одной особи, гораздо проще. Если известны правила взаимодействия с особями другого вида и с окружающей природой, то несложно разработать алгоритм, имитирующий поведение всей системы. Если в процессе дальнейшего наблюдения за реальной биосистемой будут уточняться или изменяться некоторые правила поведения или взаимодействия особей, то их учет можно выполнить, изменив соответствующий алгоритм, без существенной модификации всей модели. Таким образом, на самом раннем этапе исследований реальной системы можно получить ее рабочую модель, которая будет достаточно легко совершенствоваться по мере накопления экспериментального материала.

Имитаторы, как правило, используются для моделирования сложных динамических систем. При этом приходится моделировать не только структуру системы, но и время ее функционирования. При моделировании обычно используются три представления времени:

*реальное время* моделируемой системы;

*модельное время,* по которому организуется синхронизация событий в системе;

*машинное время* имитации, отражающее затраты ресурсов времени ЭВМ на организацию имитации.

Для сложных систем возможна ситуация, когда различные события в различных компонентах происходят одновременно с точки зрения реального времени. Однако подавляющее большинство существующих современных вычислительных устройств не поддерживают распараллеливание вычислений. Поэтому возникает необходимость введения модельного времени, с помощью которого реализуется *квазипараллельная работа* компонент имитатора. Приставка «квази» в данном случае вводится для подчеркивания последовательного характера обработки событий в имитаторе, одновременно возникающих в разных компонентах реальной системы. В отличие от реального времени модельное изменяется не непрерывно, а пошагово. При этом величина шага по времени может быть фиксированной или переменной. При фиксированном шаге изменение модельного времени происходит всегда на одну и ту же величину. В случае переменного шага его величина соответствует интервалу времени между соседними событиями в системе. На практике большее распространение получил способ переменного шага.

Еще одной особенностью имитационного подхода является относительная простота учета стохастической неопределенности исходных параметров моделирования. Метод Монте-Карло достаточно хорошо подходит для моделирования параметров имитатора. Использование преобразования случайных величин позволяет получать распределения случайных параметров, соответствующие практически любому закону распределения случайных величин. Работа с имитатором представляет собой вычислительный эксперимент, осуществляемый на ЭВМ, который во многом сродни эксперименту с реальной системой. В связи с такой особенностью имитатор обычно дает ответы на вопросы лишь в статистическом смысле, что следует признать неизбежным при работе со сложными системами и более соответствующим поведению реальных объектов.

Построение имитатора можно представить как технологический процесс, многие этапы которого аналогичны этапам, рассмотренным выше, однако имеются и определенные отличия. Всего в этом случае можно выделить восемь технологических этапов:

1. *Содержательное описание объекта моделирования:* формулируются основные вопросы о поведении сложной системы, ответы на которые требуется получить; определяется объект имитации; устанавливаются границы и ограничения моделирования; выбираются показатели для сравнения эффективности вариантов системы.
2. *Концептуальная модель системы:* на основе содержательно го описания определяется общий замысел модели, выдвигаются основные гипотезы, фиксируются сделанные допущения. Концептуальная модель сложной системы представляет собой упрощенное алгоритмическое отображение реальной системы. Сложная система расчленяется на конечное число частей (деком позиция системы), сохраняя при этом связи, обеспечивающие их взаимодействие. Полученные части при необходимости вновь расчленяются до тех пор, пока не получатся элементы, удобные для математического или алгоритмического описания. В результате этого сложная система представляется в виде многоуровневой «конструкции» взаимосвязанных элементов, объединенных в подсистемы (подмодели) различных уровней. При этом стремятся к тому, чтобы получаемые подмодели отвечали реально существующим фрагментам системы.

В состав концептуальной модели входят: уточненное описание объекта моделирования, свободное от всего того, что не представляет интереса для имитации поведения системы; список параметров и переменных моделирования; критерии эффективности функционирования вариантов системы; список используемых методов обработки результатов имитации и перечисление способов представления результатов моделирования.

3. *Формальное описание объекта моделирования:* построение исследователем формального представления алгоритмов поведения компонентов сложной системы и отражение вопросов взаимодействия компонентов между собой. Для составления формального описания используется один из трех видов формализации: аппроксимация явлений функциональными зависимостями, алгоритмическое описание процессов в системе и смешанное представление. После составления формального описания выполняют проверку правильности функционирования имитатора, используя классические модели, достоверность которых доказана. При этом выясняют следующие вопросы: позволяет ли имитатор решить поставленные задачи моделирования, насколько полна предложенная схема модели и отражает ли она фактическую последовательность развития процессов в реальной системе. На этом же этапе выполняется выбор вычислительных средств, которые обеспечили бы исследователю легкость программирования, минимальные затраты на моделирование, доступность выбранной ЭВМ, быстрое получение результатов.

1. *Конструирование имитатора:* преобразование формального описания в описание имитатора. Данный этап, как правило, вводится для сложных систем, которые нельзя представить в виде агрегативной схемы или системы массового обслуживания. Здесь же прорабатываются вопросы, связанные с синхронизацией частей компонентов модели в модельном времени, организацией сбора статистики, заданием начальных условий моделирования, планированием процесса имитации отдельных вариантов системы, проверкой условий окончания моделирования, обработкой результатов имитации.
2. *Программирование и отладка модели,* этот этап практически не отличается от соответствующего этапа, рассмотренного для аналитических и численных моделей. Отладочный процесс обязательно включает как независимую отладку отдельных компонентов, так и комплексную отладку программы для всей модели. Данный этап предполагает разработку технической документации на программную реализацию модели.
3. *Испытание и исследование модели:* проверка правильности алгоритма моделирования исследуемого объекта в ходе имитации его поведения; определение степени адекватности модели и объекта исследования. Под адекватностью программной реализации имитатора понимают степень совпадения с заданной точностью векторов характеристик поведения объекта и модели. При отсутствии адекватности проводят *калибровку* модели, т.е. уточняют алгоритмы как отдельных компонентов, так и взаимодействия компонентов. Эта операция может включать и уточнение формально го описания компонентов.

*Исследование свойств* имитатора предполагает оценку точности и устойчивости результатов имитации явлений, а также определение чувствительности значений критериев качества к изменению параметров модели.

Под *точностью имитации* явления понимают оценку влияния стохастических элементов на функционирование модели сложной системы.

*Устойчивость результатов моделирования* характеризуется сходимостью контролируемых параметров к определенным величинам при увеличении времени моделирования варианта сложной системы, что обычно наблюдается на практике в системах с конечным числом состояний.

*Стационарность режима моделирования* характеризует некоторое установившееся равновесие процессов в модели системы, при котором дальнейшее увеличение времени моделирования не приводит к получению новой информации.

*Чувствительность модели* определяется величиной максимального приращения значений выбранного критерия качества, вычисляемого по статистикам моделирования, при последовательном изменении параметров моделирования на всем диапазоне.

Следует отметить, что без оценки точности, устойчивости и чувствительности имитатора нельзя рассчитывать на доверие к нему со стороны как разработчика, так и заказчика.

1. *Эксплуатация имитатора.* Этап начинается с составления плана экспериментов, позволяющего исследователю получить максимум информации при минимальных затратах на проведение вычислений и обработку результатов. При этом необходимо вы полнить обязательное статистическое обоснование плана экспериментов. Планирование эксперимента представляет собой процедуру выбора минимального числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с заданной точностью. После составления плана экспериментов приступают к их реализации. Итогом работы являются результаты экспериментов на модели.
2. *Анализ результатов моделирования:* всесторонний анализ полученных результатов с целью получения рекомендаций по проектированию системы или ее модификации. На результаты анализа и их интерпретацию существенное влияние может оказывать способ представления данных на ЭВМ. Так, использование средств компьютерной графики и мультипликации может оказать существенную помощь на данном этапе.

Успех или неудача проведения имитационных экспериментов с моделями сложных систем существенным образом зависит от инструментальных средств, используемых для моделирования, т.е. от набора аппаратно-программных средств, представляемых пользователю-разработчику или пользователю-исследователю имитатора. В настоящее время существует большое количество специальных языков создания имитаторов на ЭВМ, которые называют *языками моделирования.* Перед разработчиком возникает проблема выбора языка, наиболее эффективного для целей моделирования конкретной системы.

Языки моделирования заслуживают пристального внимания, так как, во-первых, число существующих языков и систем моделирования превышает несколько сотен, поэтому необходимо научиться ориентироваться в них. Во-вторых, почти каждый новый язык моделирования является не только средством, облегчающим доведение концептуальной модели до готовой машинной моделирующей программы, но и представляет собой новый способ «видения мира», т.е. построения моделей реальных систем. Описание, изучение и применение языков моделирования является предметом отдельного пособия. Поэтому для примеров, рассмотренных ниже, языки моделирования не используются.

В заключение еще раз остановимся на достоинствах и недостатках имитационного подхода. При достаточно глубоком знании поведения реальной системы и правильном представлении феноменологической информации в имитаторе последний характеризуется, вообще говоря, большей близостью к реальной системе, чем аналитические и численные модели. Такая близость в значительной степени обусловлена блочным принципом построения имитатора, который позволяет выполнять верификацию каждого блока до его включения в общую модель, а также благодаря тому, что имитатор может использовать зависимости более сложного характера, которые трудно (а иногда невозможно) учесть с помощью математических соотношений. В то же время создать хороший имитатор поведения сложной системы, как правило, труднее, дольше и дороже, чем аналитическую модель. Это связано с обязательным присутствием в цикле создания имитатора этапа программирования, стоимость, сложность и длительность которого может быть значительной. Кроме того, необходимость использования ЭВМ соответствующего класса в значительной степени осложняет использование модели. И, наконец, срок жизни имитатора, как правило, ограничен сроком использования ЭВМ, для которых была разработана его программная реализация.

Учитывая, что время разработки достаточно сложного имитатора составляет несколько лет, а период существенного обновления вычислительной техники сократился до 10 лет, – все это является серьезным недостатком моделей, основанных на имитационном подходе. Быстрое развитие средств вычислительной техники, совершенствование языков и технологий разработки имитаторов позволяет надеяться, что отмеченные недостатки будут со временем устраняться.

### 6.2. Вопросы для самопроверки

Каким образом соотносятся между собой реальное, системное и модельное время?

Может ли системное время быть не равно реальному времени? Почему?

В каких случаях обосновано применение имитаторов?

В чем принципиальные отличия аналитических моделей и имитаторов?

В чем схожесть реального и вычислительного с использованием имитатора экспериментов?

В чем достоинства и недостатки моделирования системного времени с постоянным и переменным шагами?

Назовите отличия технологии создания имитаторов от аналитических моделей.

Почему имитаторы можно отнести к разновидности математических моделей?

## 7. Математические модели исследования операций

Наука «Исследование операций», элементы которой предлагаются вниманию студента, принадлежит к числу новых, сравнительно недавно сформировавшихся дисциплин, ее границы и содержание нельзя считать четко определенными. Предмет под названием «Исследование операций» входит в программу многих высших учебных заведений, однако далеко не везде в это понятие вкладывается одно и то же содержание. Некоторые даже склонны отрицать существование такой науки, считая ее одной из составных частей кибернетики. Другие, напротив, вкладывают в понятие «исследование операций» чрезмерно широкое содержание, провозглашая эту дисциплину чуть ли не «наукой наук». Время покажет, в каких формах будет продолжать свое существование эта сравнительно молодая наука, какие разделы, обычно излагаемые в ее составе, сохранятся в ней, а какие «отпочкуются» в виде новых самостоятельных научных дисциплин. Во всяком случае, несомненным остается тот факт, что в самых разных областях практики – таких, как организация производства, боевые действия и вооружение, эксплуатация транспорта, бытовое обслуживание, здравоохранение, связь, вычислительная техника и т. д., – сегодня возникают и будут продолжать возникать задачи, сходные между собой по постановке, обладающие рядом общих признаков и решаемые методами исследования операций. Сегодня даже трудно назвать такую область человеческой деятельности, где бы не возникали и не требовали решения задачи исследования операций.

В настоящем конспекте, в краткой и по возможности доступной форме, излагаются задачи и методологические принципы исследования операций, формулируются основные понятия этой науки и дается представление о некоторых математических методах решения ее задач.

### 7.1. Предмет и задачи исследования операций

В наше время, которое по справедливости называют веком научно-технической революции, наука уделяет все возрастающее внимание вопросам организации и управления. Быстрое развитие и усложнение техники, небывалое расширение масштабов проводимых мероприятий, внедрение автоматизированных систем управления во все области практики – все это приводит к необходимости научного анализа сложных целенаправленных процессов под углом зрения их структуры и организации. От науки требуются рекомендации по оптимальному (правильному) управлению такими процессами.

Потребности практики вызвали к жизни специальные научные методы, которые принято объединять под общим названием «Исследование операций». Под исследованием операций понимается применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.

Что же такое «решение»? Это какой-то выбор из ряда возможностей, имеющихся у организатора.

Необходимость принятия решений так же стара, как само человечество. Несомненно, уже в доисторические времена первобытные люди, отправляясь, скажем, охотиться на мамонта, должны были принимать те или другие решения. В каком месте устроить засаду? Как расставить охотников? Чем их вооружить? И т. д. Однако до поры до времени решения принимались без специальных обоснований, просто на основе опыта и здравого смысла. В некоторых случаях такой способ принятия решений нас устраивает и до сих пор. Допустим, человек выходит утром из дому, чтобы ехать на работу. По ходу дела ему приходится принять целый ряд решений: как одеться? Брать ли с собой зонтик? В каком месте перейти улицу? Каким видом транспорта воспользоваться? Все эти решения человек принимает без всяких расчетов, опираясь на имеющийся у него опыт и здравый смысл. Для их обоснования никакая наука не нужна да и вряд ли потребуется в дальнейшем. Оптимизация таких решений происходит как бы сама собой, в процессе жизненной практики. Если порой принятое решение окажется не самым удачным, так что же? На ошибках учатся.

Но бывают решения несравненно более ответственные. Пусть, например, организуется работа общественного транспорта во вновь отстроенном городе. Необходимо принять ряд решений: по каким маршрутам какие транспортные средства и в каком количестве надо направить? В каких пунктах сделать остановки? Как изменять частоту следования машин в зависимости от времени суток? и т. д.

Эти решения являются несравненно более сложными, а главное, от них очень многое зависит. В первом примере неправильный выбор решения затронет интересы одного человека, во втором он может отразиться на деловой жизни целого города. Конечно, и в этом случае при выборе решения можно действовать интуитивно, опираясь на опыт и здравый смысл, но гораздо более разумными окажутся решения, если они будут подкреплены количественными, математическими расчетами. Эти предварительные расчеты помогут избежать длительного и накладного поиска решения «на ощупь».

«Семь раз примерь, один – отрежь»– говорит пословица. Исследование операций как раз и представляет собой своеобразное математическое «примеривание» к будущему, позволяющее экономить силы, время и материальные средства.

Чем более сложным и дорогостоящим является организуемое мероприятие, тем менее допустимы в нем «волевые» решения и тем большее значение приобретают научные методы, позволяющие заранее оценить последствия каждого решения, заранее отбросить недопустимые варианты и рекомендовать наиболее удачные, позволяющие установить, достаточна ли имеющаяся у нас информация для правильного выбора решения, и если нет – какую информацию нужно дополнительно получать и обрабатывать. Нередки, правда, случаи, когда опираться на опыт и здравый смысл при выборе решения просто невозможно, когда речь идет о мероприятии, осуществляемом в первый раз. «Опыт» в этом случае молчит, а «здравый смысл» легко может обмануть, если не будет опираться на расчет. Такими математическими расчетами, облегчающими людям принятие разумных решений, и занимается исследование операций.

Это сравнительно молодая наука. Впервые это название появилось в годы второй мировой войны, когда в вооруженных силах некоторых стран (в частности, США и Англии) были сформированы специальные группы, в задачу которых входила подготовка решений для командующих боевыми действиями; эти решения касались главным образом боевого применения оружия и распределения сил и средств по различным объектам. Подобного рода задачами, правда, под иными названиями, занимались и ранее, в частности, в нашей стране. В дальнейшем исследование операций расширило область применения на самые разные области практики: промышленность, сельское хозяйство, торговлю, бытовое обслуживание, транспорт, здравоохранение, охрану природы и т. д.

Чтобы познакомиться со спецификой исследования операций, рассмотрим ряд типичных для нее задач. При этом намеренно возьмем их из разных областей практики. Типы процессов и классы связанных с ними задач можно кратко охарактеризовать следующим образом.

*Процессы создания и хранения запасов*. Процессами, связанными с проблемой запасов, принято называть такие процессы, которые требуют либо обоих, либо одного из двух следующих решений: (а) сколько заказывать (производить или покупать) и (б) когда заказывать. Эти решения требуют регулирования запасов, что связано с затратами по одной или нескольким из следующих статей: заказ или переоборудование; дефицит или задержка; изменение уровня производства или закупок. В качестве средств, применяемых к решению этих задач, используются уравнения экономичного размера партии, а также аппарат линейного, динамического и квадратичного программирования.

*Процессы распределения*. Эти процессы возникают, когда (а) существует ряд операций, которые необходимо выполнить, и ряд различных путей их выполнения, (б) нет в наличии ресурсов или средств, обеспечивающих выполнение каждой из этих операций наиболее эффективным образом. Задача в таком случае заключается в соединении операций и ресурсов таким образом, чтобы добиться максимального общего эффекта. Как ресурсы, так и операции могут быть конкретно заданы. Если задано что-либо одно из двух, то задача заключается в том, чтобы определить, при каком втором в комбинации с заданным первым можно в конечном итоге добиться наибольшего эффекта.

Средствами, которые в практике работы наиболее часто использовались при решении задач распределения, являются линейное и другие виды математического программирования.

*Процессы обслуживания*. Эти процессы связаны с наличием клиента, требующего обслуживания. За исключением очень редких случаев, либо клиенту, либо обслуживающему, либо как тому, так и другому приходится ждать. Все виды ожидания связаны с расходами. Задача заключается в том, чтобы регулировать появление клиентов или определять объем и организацию обслуживания с тем, чтобы свести к минимуму оба эти вида ожидания и связанные с ними расходы.

К задачам по определению объема обслуживания и времени появления клиентов (составление расписания) применима *теория очередей.* К задачам по определению порядка обслуживания клиентов применима *теория расписаний.* И наконец, к задачам определения распределения и группировки каналов и других элементов процессов обслуживания в систему обслуживания применима *теория балансирования линий.*

*Процессы замены*. Процессы замены распадаются на два основных класса в зависимости от вида износа оборудования: либо оно устаревает и становится несовременным (менее эффективным) в результате длительного срока службы или появления нового оборудования (например, станки), либо не устаревает, но полностью выходит из строя, «гибнет» (например, электролампы).

Для устаревающих видов оборудования задача заключается в установлении времени замены с тем, чтобы сократить расходы на новое оборудование, на ремонт и эксплуатацию старого или расходы, связанные со снижением производительности оборудования. Для видов оборудования, которые полностью выходят из строя, задача заключается в том, чтобы определить, какие элементы следует заменить (например, все, кроме тех, которые были установлены на прошлой неделе) и как часто их менять с тем, чтобы снизить расходы на оборудование, на замену частей и другие затраты, связанные с выходом их из строя.

*Задачи эксплуатации и ремонта* могут рассматриваться как частный случай задач замены, поскольку здесь требуется, как правило, замена отдельной части, а не всего комплекса оборудования. Отсюда как к задачам замены оборудования, так и к задачам ремонта применим один и тот же подход.

*Состязательные процессы*. Состязательные процессы – это процессы, в которых эффективность решения одной стороны может оказаться сниженной в связи с решением другой стороны. Наиболее часто встречающаяся в проектах операционного исследования ситуация носит название *игра.* Игра характеризуется количеством участников, правилами игры, сформулированными с учетом всех возможных допустимых действий, некоторым множеством конечных состояний (выигрыш, проигрыш, ничья и т. п.) и наградами или потерями, вызываемыми этими результатами. Основные методы, связанные с решением этого класса задач, известны как *теория игр.*

Другим видом состязательного процесса являете я такая ситуация, при которой имеет место *аукционный торг.* Она отличается от игры следующими признаками: (а) количество участников обычно неизвестно, (б) количество партий, как правило, не ограничено, (в) награды и проигрыш заранее неизвестны и могут лишь быть примерно оценены, (г) результат состязания (выигрыш или проигрыш) также неизвестен и может быть только оценен. Разработка *теории торгов* еще только началась, но уже имеются некоторые полезные средства для решения этого рода задач.

*Комбинированные процессы*. Реальные системы очень редко характеризуются только одним из вышерассмотренных процессов. Так, например, задачи по управлению производством обычно включают сочетание процессов создания запасов, распределения и обслуживания. Или же, если взять задачу замены отдельных элементов, которые выходят из строя, то она, как правило, связана с проблемой запасов, а задача торгов может оказаться связанной с задачей распределения ресурсов между несколькими возможными контрактами, на которые могут быть сделаны ставки.

Обычная процедура исследования, комбинированных процессов состоит в последовательном решении задач. Мы знаем, что во многих случаях не удается достичь оптимальной решения даже при последовательной, повторяющейся корректировке. Отсюда ясно, что перед исследователем операций со все возрастающей необходимостью встает проблема отыскать сочетание абстрактных процессов и построить модели, основанные на взаимодействии нескольких рассматриваемых здесь процессов. Удовлетворение этой потребности все больше и больше привлекает внимание научной мысли. Следует отметить также, что шесть видов рассмотренных здесь процессов не исчерпывают всех ситуаций, с которыми приходится сталкиваться при решении операционных задач. Но они охватывают большинство ситуаций, с которыми до сих пор приходилось иметь дело в практике исследования операций. Однако можно ожидать, что в будущем обнаружится и будет подвергнуто математическому анализу гораздо большее число часто встречающихся ситуаций.

Названия абстрактных моделей не должны сковывать, воображения студента. Модели запасов применимы к задачам наличных денег, оборотного капитала и рабочей силы. Модели очередей могут быть применены к решению некоторых задач управления запасами. Воображение является столь же эффективным средством успешного научного анализа, как и любая другая способность разума.

Число примеров легко было бы умножить, но и приведенных достаточно, чтобы представить себе отличительные особенности задач исследования операций. Несмотря на то, что рассмотренные примеры относятся к самым разным областям практики, в них легко просматриваются общие черты. В каждом из них идет речь о каком-то *мероприятии,* преследующем определенную *цель.* Заданы некоторые условия, характеризующие обстановку выполнения мероприятия (в частности, средства, которыми мы можем распоряжаться). В рамках этих условий требуется принять такое решение, чтобы задуманное мероприятие было в каком-то смысле наиболее выгодным (или наименее убыточным).

В соответствии с этими общими чертами вырабатываются и общие приемы решения подобных задач, в совокупности составляющие методологическую основу и аппарат исследования операций.

Познакомимся же с терминологией и основными принципами этой науки.

*Операцией* называется всякое мероприятие (или система действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению какой-то цели.

Операция является *управляемым* мероприятием, т. е. от нас зависит выбрать тем или другим способом какие-то параметры, характеризующие ее организацию. «Организация» здесь понимается в широком смысле слова (включая набор технических средств, применяемых в операции).

Всякий определенный выбор зависящих от нас параметров называется *решением.* Решения могут быть удачными и неудачными, разумными и неразумными. *Оптимальными* называются решения, по тем или иным признакам предпочтительные перед другими. Цель исследования операций – предварительное количественное обоснование оптимальных решений.

Иногда (сравнительно редко) в результате исследования удается указать одно-единственное, строго оптимальное решение. Гораздо чаще – выделить область практически равноценных оптимальных (разумных) решений, в пределах которой может быть произведен окончательный выбор.

Заметим, что само принятие решения выходит за рамки исследования операций и относится к компетенции ответственного лица, чаще – группы лиц, которым предоставлено право окончательного выбора. При этом выборе они могут учитывать наряду с рекомендациями, вытекающими из математического расчета, еще ряд соображений (количественного и качественного характера), которые этим расчетом не были учтены.

Непременное присутствие человека (как окончательной инстанции принятия решения) не отменяется даже при наличии полностью автоматизированной системы управления, которая, казалось бы, принимает оптимальное решение в зависимости от обстановки без участия человека. Нельзя забывать о том, что само создание управляющего алгоритма, выбор одного из возможных его вариантов есть тоже решение, и весьма ответственное. По мере развития автоматизированного управления функции человека не отменяются, а просто перемещаются с одного, элементарного уровня на другой, высший.

Те параметры, совокупность которых образует решение, называются *элементами решения.* Например, если планируется система перевозок грузов, элементами решения будут числа, показывающие, какое количество грузов будет послано из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения.

В простейших задачах исследования операций количество элементов решения может быть сравнительно небольшим. Но в большинстве задач, имеющих практическое значение, число элементов решения очень велико, что, разумеется, затрудняет анализ ситуации и выдачу рекомендаций. Как правило, любая задача исследования операций выливается в целое научное исследование, выполняемое коллективно, занимающее много времени и требующее применения вычислительной техники. Поэтому студент не должен надеяться на то, что, ознакомившись с этим конспектом, он сразу же, засучив рукава, может приступить к решению конкретных задач.

Кроме элементов решения, которыми мы, в каких-то пределах, можем распоряжаться, в любой задаче исследования операций имеются еще и заданные, «дисциплинирующие» условия, которые фиксированы с самого начала и нарушены быть не могут. В частности, к таким условиям относятся средства (материальные, технические, людские), которыми мы вправе распоряжаться, и различного вида ограничения, налагаемые на решение.

Более строго, целью исследования операций, дисциплины, возникшей в связи с развитием промышленных организаций, является обеспечение руководства научной основой для решения задач, связанных с вопросами взаимодействия различных подразделений организации в интересах общих целей всей организации. Решение, которое представляется наиболее выгодным для всей организации в целом, считается *оптимальным решением,* решение, которое наиболее выгодно для одной или более частей организации, назовем *субоптимальным.* Задача установления критериев оптимальности решения сама по себе чрезвычайно сложна и очень специфична.

При проведении операционных исследований стараются отыскать наилучшие решения для возможно большей части всей организации. Например, при попытке разрешить задачу ремонта на предприятии операционными методами стремятся учесть влияние различных вариантов политики проведения ремонтов на производство в целом. Можно пойти даже дальше и попытаться определить, как это влияние на данную фирму в свою очередь отражается на всей промышленности и т. д. По возможности также предпринимается попытка учесть, как воздействие на производственный отдел скажется на других отделах и на фирме в целом. В исследовании операций стремятся учитывать взаимодействия или причинно-следственные связи настолько, насколько это представляется существенным. Однако в любом конкретном случае объем операционных исследований практически обычно ограничен, либо в связи с тем, что доступ на более высокие уровни организации закрыт, либо в связи с ограничениями во времени, деньгах и ресурсах. Это необходимо иметь в виду при изучении исследования операций. Всегда существует: расхождение между идеальными устремлениями и реальными возможностями. Тем не менее, основная цель исследования операций сводится к отысканию оптимальных решений задач организационного типа с учетом функционирования всей организации в целом.

Такой общий характер цели операционных исследований является примером системного подхода, поскольку под «системой» подразумевается взаимосвязанный комплекс функционально соотнесенных компонентов. Так, фирма является системой «человек – машина». Но не все системы включают человеческий или социальный компонент. Автомобиль, например, состоит из таких функциональных частей, как мотор, передача, радиатор, генератор. Все эти и другие части собраны в единый механизм, который может удовлетворять ряд потребностей. Эффективность функционирования каждой части зависит от отлаженности механизма в целом, а эффективность работы всего механизма зависит от того, как функционирует каждая его отдельная часть.

Проблемы оптимизации, конструкции механических систем сходны, с проблемами оптимизации систем «человек – машина», но не тождественны им. Оба типа систем связаны с противоречиями интересов. Покупатели автомобилей хотят иметь надежные, экономичные, удобные, просторные, изящные машины, обладающие высокой скоростью. Но нельзя в одинаковой степени удовлетворить все эти требования одновременно. Поэтому задача конструирования требует оптимизации с учетом некоторого множества по крайней мере, частично противоречивых целей. Проблема «разделения труда» в промышленных организациях отлична от вопросов функционирования компонентов в механических системах, так как в системах, куда входят люди, существует серьезная проблема создания заинтересованности для работы различных подразделений по выполнению соответствующих функций.

Применение научных методов к построению механических систем и систем «человек – машина» иногда называют анализом систем и ставят знак равенства между ними исследованием операций. В определенном смысле конструирование и оценка боевых систем и систем связи является операционным исследованием. Но традиционно ориентируются на системы, включающие человека, поскольку именно на это делается упор в практике применения исследования операций в сфере деловой и производственной деятельности.

И до сих пор проводятся операционные исследования, выполняемые группами ученых, отдельные члены которых представляют различные теоретические и прикладные дисциплины. Нередко, например, можно встретить группу из математиков, физиков, психологов и экономистов, которые работают вместе над задачами оптимизации политики капиталовложений. Продуктивность таких групп, состоящих из представителей различных специальностей, при решении класса организационных задач, составляющих предмет исследования операций, не случайна.

Когда ученый сталкивается с задачей нового типа, он, как и любой другой на его месте, старается прежде всего определить сущность задачи и установить, приходилось ли ему ранее иметь дело с задачами подобного вида в иных конкретных условиях, в частности в своей специальной области. Если он устанавливает аналогию с задачами, с которыми встречался в своей области, он может посмотреть, насколько применимы методы решения, которыми он воспользовался бы при решении своих специальных задач, к той новой задаче, с которой он столкнулся. Таким образом, он вводит в круг возможных подходов к задаче те методы и принципы, которые вне связи с его специальностью и опытом могли бы даже и не прийти никому на ум. И когда одну задачу решают специалисты из различных областей, то круг возможных подходов к ее решению, естественно, расширяется.

Так, например, специалист в области электроники, изучая проблему производства и регулирования запасов, может быстро понять, что колебания объема запасов являются функцией времени, которое проходит между колебаниями на рынке и приспособлением к ним уровня производства. Фактически он рассматривает задачу как задачу по конструированию управляемой системы, в которой необходимая информация относительно изменения рыночной конъюнктуры поступает быстро и безошибочно в пункт управления производством, откуда могут быть посланы команды на изменения в производственном процессе, снижающие некоторые расходы. Он фактически перевел задачу на язык теории автоматического регулирования, и он знает, как решать такого рода задачи. Пример этот вовсе не гипотетический.

С другой стороны, инженер-химик может иначе посмотреть на ту же задачу и попытаться сформулировать ее в терминах теории непрерывных процессов, и, если ему это удастся, он сможет применить к решению этой задачи имеющиеся в его распоряжении готовые методы.

Какой из возможных подходов окажется наиболее продуктивным, зависит от обстоятельств. Исследовательская группа рассматривает предложенные варианты и выбирает один из них или выдвигает совершенно новый, в котором сочетаются черты предложенных ранее подходов.

Одна из основных идей создания комплексных операционных групп заключается в том, чтобы применить к решению данной задачи наиболее передовую научную методику или разработать новую, которая была бы более эффективна в отношении решения подобных задач, чем любая из уже имеющихся. По существу, эта идея сводится к тому, что ни в одной голове, взятой в отдельности, не может разместиться столько потенциально полезной научной информации, сколько в нескольких, взятых вместе.

Еще одним существенным достоинством такого подхода является то, что большинство систем «человек – машина» требует подхода с различных точек зрения, например с точки зрения физической, биологической, психологической, социологической, экономической и инженерной. Эти различные аспекты системы могут быть лучше поняты и проанализированы теми, кто специализируется в той или иной области. Те, кто непосредственно управляет данной системой, могут не иметь достаточного представления о какой-то одной или нескольких ее сторонах, а, следовательно, не располагать полной картиной ее функционирования. Другими словами, для того чтобы представлять систему как единое целое, недостаточно знать ее части и их взаимодействие; необходимо также видеть различные аспекты функционирования системы. В комплексной группе количество аспектов, которые могут быть подробно рассмотрены, возрастает.

### 7.2. Принципы, методы и средства исследования операций

Поскольку в исследовании операций определенные классы задач встречаются все чаще и чаще, они, естественно, подвергаются более тщательному изучению. В результате для многих классов часто встречающихся задач разработаны новые принципы подхода или предложена модификация прежних. Постепенно арсенал принципов, методов и средств, разработанных или приспособленных специально для целей операционного исследования, значительно вырос. Он достиг уже такого уровня, когда одному человеку трудно быть осведомленным относительно всех нововведений. Это уже само по себе привело к важным последствиям.

Десять лет назад любой, кто интересовался этой областью, обладал творческим складом ума и хорошей научной или инженерной подготовкой, мог легко стать операционистом. Для этого не нужно было специальной подготовки или образования. Теперь возможность такого свободного перехода в область исследования операций сужается, поскольку в связи с быстрым прогрессом в этой области требуется все больше и больше времени, чтобы быть в курсе тех принципов, методов и средств, которыми она в настоящее время располагает.

Вместе с тем с увеличением необходимого объема знаний появляется возможность преподавать исследование операций как отдельный предмет. Во многих университетах, колледжах и технических институтах вводятся соответствующие курсы, а в некоторых из них окончившим курс предлагается совершенствоваться дальше по программе, которая дает возможность получения ученой степени. Именно в результате интенсивного развития этой области как самостоятельной, со своими собственными принципами, методами и средствами, появилась возможность систематического изучения.

Здесь мы в основном сосредоточим свое внимание на все возрастающем объеме знаний, требуемых в исследовании операций. Мы не будем останавливаться на описании большого числа различных средств, необходимых работникам в этой области для решения своих задач. В частности, мы не, намерены излагать здесь те математические и статистические сведения, которые требуются для успешного проведения операционного исследования. Мы не будем затрагивать такие области, как анализ затрат, экономика, прогнозирование, использование вычислительной техники, которые также важны для практического использования исследования операций. Все это человек, специализирующийся в этой области, безусловно, должен знать, и тот факт, что эти вопросы не включены в учебный курс, не следует рассматривать как принижение их значения. Весь этот материал невозможно поместить в одном учебнике, да для этого и нет необходимости. По всем этим вопросам существует вполне доступная литература. Но вот чего в ней нет, так это общего введения, знакомящего студента с принципами, идеями, методами, которые были разработаны в исследовании операций или появились вначале в других областях, а затем были приспособлены для новых целей.

Термины «средства», «методы» и «принципы», которые часто в различных научных работах используются взаимозаменяемо, в данном случае строго разграничены. В том понимании, как они употребляются здесь, они связаны между собой примерно так же, как средства, используемые при строительстве здания, методы использования этих средств и разработка принципов строительства, которые предусматривают использование данных методов и средств надлежащим образом. Например, таблица случайных чисел является научным средством. То, как средство используется (например, метод Монте-Карло), является научным методом. Исследовательская идея, которая требует использования метода Монте-Карло и таблиц случайных чисел, является научным принципом. Аналогично этому математический анализ есть не что иное, как научное средство; использование математического анализа для нахождения оптимального значения переменной в математической модели системы является научным методом, а замысел применения математической модели для оптимизации системы является научным принципом.

Хотя и справедливо утверждение о том, что все науки пользуются некоторыми общими принципами, методами и средствами, также справедливо и то, что каждая отрасль науки использует и свои собственные, специфические, только ей свойственные принципы, методы и средства, в чем отражается особенность предмета, который с их помощью изучается. И сама наука может считаться настолько развитой, насколько она сумела развить принципы, методы и средства, приспособленные к нуждам изучения ее специфического предмета.

Учебники по таким давно определившимся областям науки, как физика и химия, останавливаются на вопросах принципов лишь вскользь. Их главным образом интересуют методы и средства. Здесь же основное внимание уделяется принципам. Это делается потому, что в новой области исследований вопрос подхода является более важным, чем вопрос использования того или иного метода или средства. До того, как исследование операций начало вырабатывать свои методы и средства, оно все равно было полезным вследствие силы своего принципа решения задач. Как мы уже говорили выше, изучающий исследование операций должен всегда рассматривать тот или иной метод только как некоторый способ решения более общей задачи, а не как нечто ценное само по себе. Таким образом, он сумеет избежать как опасности ограничиться одним или несколькими отдельными методами, так и излишней привязанности к ним. Непредвзятость в отношении конкретных методов, наряду с широтой представления об их полезности, в сочетании с умением оценить задачу в целом являются основой твердого принципа в науке.

### 7.3. Этапы операционного исследования

Еще десять лет назад от человека, занимающегося вопросами исследования операций, трудно было бы добиться описания хода операционного исследования. Сейчас его трудно удержать от этого. Если записать мнение каждого операциониста относительно порядка проведения операционного исследования, то мнения в некоторых отношениях будут отличаться. Но вместе с тем обнаружится и много общего. В частности, большинство согласится, что основными этапами выполнения операционного проекта являются:

Постановка задачи.

Построение математической модели изучаемой системы.

Нахождение решения с помощью модели.

Проверка модели и полученного с ее помощью решения.

Построение процедуры подстройки решения.

Осуществление решения.

Этапы построения математической модели изучаемой системы и нахождение решения с помощью модели далее будет предметом особого рассмотрения, но представляется полезным дать некоторое предварительное представление о всех этапах, приведя их краткую характеристику.

*Постановка задачи*. Задача должна быть сформулирована с точки зрения заказчика и исполнителя операционного проекта. Заказчик – это лицо (или группа лиц), которое руководит исследуемыми операциями, или, как принято говорить, принимает решение. При формулировании задачи с точки зрения заказчика должен быть проведен анализ системы, находящейся под его управлением, а также его целей и возможных вариантов действий. Должно быть установлено, как исследуемые решения могут повлиять на тех людей, цели и действия которых также подлежат учету. Подход, который мы определили как системный, тесно связан с установлением непосредственных целей. Проводя операционные исследования, необходимо учесть как можно более широкий круг выдвигаемых целей. В самых общих словах, задача исследования заключается в том, чтобы определить, какой из возможных вариантов действий наиболее эффективен в отношении множества связанных с проблемой целей. Следовательно, при формулировании задачи исследования должен быть установлен некоторый критерий эффективности и определена его пригодность.

*Построение математической модели*. Модель выражает эффективность исследуемой системы как функцию множества переменных, из которых по крайней мере одно поддается управлению.

Ограничения, наложенные на переменные, могут быть выражены в дополнительной системе равенств или неравенств.

*Нахождение решения с помощью модели*. Существуют два метода получения оптимального решения (или некоторого приближения к нему) с помощью модели: аналитический и численный. Аналитические процедуры сводятся к использованию математической дедукции. Это требует использования различных разделов математики, таких, как математический анализ и матричная алгебра. Аналитические решения получаются в абстрактном виде, т. е. подстановка чисел вместо символов обычно производится уже после того, как будет получено решение.

Численные процедуры состоят в принципе в подборе различных значений для управляемых переменных модели, сопоставлении полученных данных и выборе того набора значений, который дает наиболее выгодное решение. Такие процедуры могут варьироваться в широком диапазоне от простого метода проб и ошибок до сложных итераций. Процедура итераций состоит в том, что в результате последовательных проб производится попытка подойти к оптимальному решению. Кроме того, итерация обычно дает некоторый набор правил, которые позволяют опознать оптимальное решение, когда оно найдено.

Некоторые выражения в модели не могут быть численно определены с достаточной точностью вследствие каких-либо математических или чисто практических причин. Во многих подобных случаях для получения примерной оценки предложений может быть применен особый вид случайных выборок, называемый методом Монте-Карло.

*Проверка модели и решения*. Модель всегда лишь частично отображает действительность. Модель можно считать хорошей, если, несмотря на свою неполноту, она может точно предсказывать влияние изменений в системе на общую эффективность всей системы. Адекватность модели может быть проверена путем определения степени точности предсказания влияния этих изменений. Решение может быть оценено путем сопоставления результатов, полученных без использования данного решения, и результатов, полученных при его применении. Эти оценки могут производиться ретроспективно с использованием ранее полученных данных или путем практических испытаний и предварительных проверок. Проверка требует очень тщательного анализа данных с целью определения, какие из них являются существенными и какие нет.

*Построение процедуры подстройки решения*. Решение, полученное на модели, действительно только до тех пор, пока неуправляемые переменные сохраняют свои значения и соотношения между переменными в модели остаются постоянными. Когда же значение одной или более неуправляемых переменных либо одно или более отношений между переменными существенно изменилось, само решение «выходит из-под контроля» и возможность управления им теряется. Существенность изменения зависит от того, насколько решение отклоняется от истинного оптимума при изменившихся условиях, и от затрат на изменение действующего решения. Значит, для того чтобы установить процедуру подстройки решения, необходимо разработать средства определения того, когда возникают существенные изменения; кроме того, должны быть установлены правила такой модификации решения, которая бы учитывала эти изменения.

*Осуществление решения*. Проверенное решение должно быть представлено в виде ряда рабочих процедур, которые могут быть легко поняты и применены теми, кто будет отвечать за их осуществление. При этом должны быть определены и соблюдены необходимые изменения в существующих процедурах и ресурсах.

Перечисленные этапы почти никогда, за редкими исключениями, не проводятся в указанном порядке. Более того, некоторые из этих этапов могут осуществляться одновременно. Например, во многих операционных проектах формулирование задачи продолжается фактически вплоть до завершения всего исследования. В процессе исследования, как правило, различные направления работы непрерывно взаимодействуют друг с другом.

### 7.4. Математические модели исследования операций

Для применения количественных методов исследования в любой области всегда требуется какая-то *математическая модель.* При построении математической модели реальное явление (в нашем случае – операция) всегда упрощается, схематизируется, и полученная схема описывается с помощью того или другого математического аппарата. Чем удачнее будет подобрана математическая модель, тем лучше она будет отражать характерные черты явления, тем успешнее будет исследование и полезнее – вытекающие из него рекомендации.

Общих способов построения математических моделей не существует. В каждом конкретном случае модель выбирается исходя из целевой направленности операции и задачи исследования, с учетом требуемой точности решения и точности, с которой нам могут быть известны исходные данные. Если исходные данные известны неточно, то, очевидно, нет смысла строить очень подробную, тонкую и точную модель явления и тратить время (свое и машинное) на тонкую и точную оптимизацию решения. К сожалению, этим принципом на практике часто пренебрегают и выбирают для описания явлений чрезмерно подробные модели.

Модель должна отражать важнейшие черты явления, т. е. в ней должны быть учтены все существенные факторы, от которых в наибольшей степени зависит успех операции. Вместе с тем модель должна быть по возможности простой, не «засоренной» массой мелких, второстепенных факторов, так как учет их усложняет математический анализ и делает трудно обозримыми результаты исследования. Одним словом, искусство доставлять математические модели есть именно искусство, и опыт в этом деле приобретается постепенно. Две опасности всегда подстерегают составителя модели: первая – утонуть в подробностях («из-за деревьев не увидеть леса»); вторая–слишком огрубить явление («выплеснуть вместе с водой и ребенка»). Поэтому при решении задач исследования операций всегда полезно сличать между собой результаты, полученные по различным моделям, устраивать как бы «спор моделей». Одну и ту же задачу решают не один раз, а несколько, пользуясь разными системами допущений, разным аппаратом, разными моделями. Если научные выводы от модели к модели меняются мало, это – серьезный аргумент в пользу объективности исследования. Если они существенно расходятся, надо пересмотреть концепции, положенные в основу различных моделей, посмотреть, какая из них наиболее адекватна действительности. Характерным для исследования операций является также повторное обращение к модели (после того, как исследование в первом приближении уже выполнено) для внесения в эту модель необходимых коррективов.

Построение математической модели – наиболее важная и ответственная часть исследования, требующая глубоких знаний не только и не столько математики, сколько существа моделируемых явлений. Как правило, «чистые» математики без помощи специалистов в данной области с этой задачей справляются плохо. В центре внимания у них оказывается математический аппарат с его тонкостями, а не соответствие модели реальному явлению. Опыт показывает, что самые удачные модели создаются специалистами в данной области практики, получившими в дополнение к основной глубокую математическую подготовку, или же группами, объединяющими специалистов и математиков.

Математическая подготовка специалиста, желающего заниматься исследованием операций в своей области практики, должна быть достаточно широка. Наряду с классическими методами анализа она должна включать ряд современных разделов математики, таких, как методы оптимизации, в том числе линейное, нелинейное, динамическое программирование, методы машинного поиска экстремумов и т. д. Особенно следует подчеркнуть обязательное наличие сведений по теории вероятностей, причем не формальных, а действенных. Особые требования к вероятностной подготовке связаны с тем, что большинство операций проводится в условиях неполной определенности, их ход и исход зависят от случайных факторов – таких, как метеорологические условия, колебания спроса и предложения, отказы технических устройств и т. д. Поэтому для творческой работы в области исследования операций требуется хорошее владение теорией вероятностей, включая ее новейшие разделы: теорию случайных процессов, теорию информации, теорию игр и статистических решений, теорию массового обслуживания.

При построении математической модели может быть (в зависимости от вида операции и задач исследования) использован математический аппарат различной сложности. В самых простых случаях модель описывается простыми алгебраическими уравнениями. В более сложных, когда требуется рассмотреть явление в динамике, применяется аппарат дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными. В наиболее сложных случаях, если развитие операции во времени зависит от большого числа сложно переплетающихся между собой случайных факторов, применяется метод статистического моделирования. В первом приближении идею метода можно описать так: процесс развития операции как бы «копируется», воспроизводится на машине (ЭВМ) со всеми сопровождающими его случайностями. Таким образом строится один экземпляр (одна реализация) случайного процесса (операции), со случайным ходом и исходом. Сама по себе одна такая реализация не дает оснований к выбору решения, но, получив множество таких реализаций, мы обрабатываем их как обычный статистический материал (откуда и термин «статистическое моделирование»), выводим средние характеристики по множеству реализаций и получаем представление о том, как в среднем влияют условия задачи и элементы решения на ход и исход операции.

При исследовании операций, на ход которых влияют случайные факторы, так называемых «стохастических задач исследования операций», применяются как аналитические, так и статистические модели. Каждый из этих типов моделей имеет свои преимущества и свои недостатки. Аналитические модели по сравнению со статистическими более грубы, учитывают меньшее число факторов, неизбежно требуют каких-то допущений и упрощений. Эти модели могут описывать явление только приближенно, схематически, но зато результаты такого моделирования более наглядны и отчетливее отражают присущие явлению закономерности. А главное, аналитические модели более приспособлены для поиска оптимальных решений, который тоже может быть осуществлен аналитическими методами, с применением всех средств современной математики.

Статистические модели, по сравнению с аналитическими, более точны и подробны, не требуют столь грубых допущений, позволяют учесть большое (в теории – неограниченно большое) число факторов. Казалось бы, они ближе к действительности и должны быть предпочтительными. Однако и у них есть свои недостатки: сравнительная громоздкость, большой расход машинного времени; плохая обозримость полученных результатов и трудность их осмысления. А главное, крайняя затрудненность нахождения оптимальных решений, которые при статистическом моделировании приходится искать «на ощупь», путем догадок и проб.

Молодые специалисты, чей опыт в исследовании операций ограничен, имея в своем распоряжении современные вычислительные машины, часто без особой нужды начинают исследование с построения его статистической модели, стараясь учесть в этой модели огромное число факторов (чем больше, тем лучше). В результате многие такие модели остаются «мертворожденными», так как для них не разработана методика применения и осмысления результатов, перевода их в ранг рекомендаций.

Наилучшие результаты получаются при совместном применении аналитических и статистических моделей. Простая аналитическая модель позволяет разобраться в основных закономерностях явления, наметить как бы его «контур», в первом приближении указать разумное решение. После этого любое уточнение может быть получено статистическим моделированием. Если результаты статистического моделирования не слишком расходятся с результатами аналитического, это дает нам основание не только в данном случае, но и во многих сходных с уверенностью применять аналитическую модель. Если же статистическая модель дает по сравнению с аналитической существенно другие результаты, может быть разработана система поправок к аналитическому решению типа «эмпирических формул», широко применяемых в технике.

При оптимизации решений также может оказаться весьма полезной предварительная их оптимизация на аналитической модели. Это позволит при пользовании более точной статистической моделью искать оптимальное решение не совсем наугад, а в ограниченной области, содержащей решения, близкие к оптимальным в аналитической модели. Учитывая, что на практике нас редко интересует одно-единственное, в точности оптимальное решение, чаще требуется указать область, в которой оно лежит, аналитические способы оптимизации, проверенные и подкрепленные статистическим моделированием, могут быть ценным орудием выработки рекомендаций.

Построение математической модели операции важно не само по себе, а имеет целью выявление оптимальных решений. Желательно выбрать такое решение, которое обеспечивает операции максимальную эффективность. Под «эффективностью» операции разумеется мера ее успешности, степень ее приспособленности к достижению поставленной перед нею цели.

Для того чтобы сравнивать между собой по эффективности различные решения, необходимо располагать каким-то количественным критерием, *показателем эффективности* (его часто называют *целевой функцией»).* Этот показатель выбирается так, чтобы он наилучшим образом отражал целевую направленность операции. Чтобы выбрать показатель эффективности, нужно прежде всего спросить себя: чего мы хотим, к чему стремимся, предпринимая операцию? Выбирая решение, мы предпочтем такое, которое обращает показатель эффективности в максимум (или же в минимум).

Очень часто в качестве показателя эффективности фигурируют затраты на выполнение операции, которые, естественно, нужно минимизировать. Например, если операция преследует цель изменить технологию производства так, чтобы по возможности снизить себестоимость продукции, то в качестве показателя эффективности естественно будет взять среднюю себестоимость и предпочесть то решение, которое обратит этот показатель в минимум.

В некоторых случаях бывает, что операция преследует вполне определенную цель*,* которая только и может быть достигнута или не достигнута (никакие промежуточные результаты нас не интересуют). Тогда в качестве показателя эффективности выбирается вероятность достижения этой цели*.* Например, если ведется стрельба по какому-то объекту с непременным условием уничтожить его, показателем эффективности будет вероятность уничтожения объекта.

Неправильный выбор показателя эффективности очень опасен, так как он может привести к неверным рекомендациям. Операции, организованные под углом зрения неудачно выбранного показателя, могут привести к большим неоправданным затратам и потерям (вспомним хотя бы пресловутый «вал» в качестве основного критерия хозяйственной деятельности предприятий).

Надо заметить, что в реальных задачах исследования операций выбор показателя эффективности далеко не прост и очевиден.

### 7.5. Вопросы для самопроверки

Как сравниваются между собой по эффективности различные решения при исследовании операций?

Как называется количественный критерий, показатель эффективности?

Каковы основные этапы выполнения операционного проекта?

Как называется всякое мероприятие (или система действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению какой-то цели?

Как называется всякий определенный выбор зависящих от нас параметров?

Как называются решения, по тем или иным признакам предпочтительные перед другими?

Является ли целью исследования операций предварительное или окончательное количественное обоснование оптимальных решений?

Являются ли термины «средства», «методы» и «принципы» взаимозаменяемыми или должны быть строго разграничены?

Типы процессов и классы связанных с ними задач связанные с применением исследования операций?

## Литературные источники.

1. Зарубин В. С. Математическое моделирование в технике: учеб. для втузов - 3-е изд. - М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. - 495 с. : рис., табл. - (Математика в техническом университете ; вып. XXI, заключ.).

2. Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие / Под. Ред. П.В. Трусова. – М.: Логос, 2005. – 440 с.

3. Диксон Дж. Проектирование систем: изобретательство, анализ и принятие решений. – М.: Мир, 1969. – 440 с.

4. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – Киев: Технiка, 1975. – 768 с.

5. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – 2-е изд. стер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 208 с.

6. Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л. Введение в теорию операций / Пер. с англ. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. – 488 с.