# ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

УДК 514. 185

Л. К. КУЛИКОВ

Омский государственный технический университет

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ В $E_N$

**В многомерном евклидовом пространстве $E_n$ рассмотрен векторный подход к получению ортогональных проекций точек, линий и р-плоскостей на плоскость проекций произвольной размерности. Такой подход позволяет сделать более наглядным получение проекции фигуры и достаточно простым изучение свойств ортогонального проецирования, что необходимо для многомерной начертательной геометрии и ее приложений.**

**Ключевые слова: пространство, вектор, р-плоскость, проецирование.**

В многомерном евклидовом пространстве $E_n$ примем некоторую m-плоскость (плоскость размерности m) за плоскость проекций. Введем декартову систему координат $Oe_1...e_n$ так, чтобы координатная плоскость $(O; \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m)$ совпала с m-плоскостью проекций $(\Pi_m)$. Радиус-вектор произвольной точки A в $E_n$ записывается в известном виде

$$\mathbf{OA} = x_1\mathbf{e}_1 + ... + x_m\mathbf{e}_m + ... + x_n\mathbf{e}_n. \qquad (1)$$

Радиус-вектором проекции $A_m$ точки A на координатную плоскость $(O; \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m)$ будет вектор [1]

$$\mathbf{OA}_m = x_1\mathbf{e}_1 + ... + x_m\mathbf{e}_m. \qquad (2)$$

Для получения радиус-вектора $\mathbf{OA}_m$ проекции $A_m$ точки A необходимо вычеркнуть из (1) слагаемые с векторами, не входящими в направляющее пространство координатной m-плоскости $\Pi_m$ (или оставить слагаемые с векторами, принадлежащими направляющему пространству $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m)$ этой плоскости).

Из (1) и (2) сразу следует, что точка ортогонально проецируется на плоскость любой размерности в точку. Если (1) совпадает с (2), т.е. точка принадлежит плоскости проекций, то вычеркивать нечего и точка совпадает со своей проекцией. Точка, принадлежащая плоскости проекций, проецируется сама в себя.

Прямая линия (A; **a**), заданная уравнением

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OA} + t\mathbf{a} \qquad (3)$$

проецируется, в общем случае, в прямую линию. Уравнение (3) останется таким же, но все векторы, входящие в (3), будут иметь разложение по векторам $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$, а не по векторам $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$. Коэффициенты при $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$ будут такими же, как в (3), т.е. составляющие каждого вектора, содержащие $\mathbf{e}_{m+1}, ..., \mathbf{e}_n$ будут вычеркнуты. Прямая, принадлежащая плоскости проекций $\Pi_m$, проецируется сама в себя, так как в ее уравнении уже нет векторов, имеющих составляющие с векторами $\mathbf{e}_{m+1}, ..., \mathbf{e}_n$, т.е. вычеркивать нечего.

Прямая с уравнением (3) рассматривается как множество точек, а проекция — как множество проекций этих точек. Поэтому проекция точки прямой принадлежит проекции прямой. Тогда проекции пересекающихся прямых линий имеют общую точку.

Если в (3) вектор $\mathbf{a}$ является линейной комбинацией только векторов $\mathbf{e}_{m+1}, ..., \mathbf{e}_n$, т.е. $\mathbf{a}$ параллелен плоскости (O; $\mathbf{e}_{m+1}, ..., \mathbf{e}_n$), то после вычеркивания слагаемых он станет нулевым, параметр t из (3) исчезнет. Прямая спроецируется в точку (проекция точки A). Прямая перпендикулярна плоскости проекций.

Если в (3) вектор $\mathbf{a}$ является линейной комбинацией только векторов $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$, т.е. $\mathbf{a}$ параллелен плоскости проекций $\Pi_m$, то вычеркивать нечего, и он при проецировании не изменится. Прямая, параллельная плоскости проекций, проецируется в параллельную прямую, проходящую через проекцию точки A.

Если вектор $\mathbf{OA}$ в уравнении (3) не содержит составляющих по $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$, то проекция прямой проходит через начало координат. Точка A при этом проецируется в точку O.

Если прямая (3) пересекает $\Pi_m$, то проекция прямой проходит через проекцию точки пересечения, так как она проецируется сама в себя. Если при этом вектор $\mathbf{a}$ параллелен плоскости (O; $\mathbf{e}_{m+1}, ..., \mathbf{e}_n$), то прямая проецируется в точку пересечения прямой и плоскости проекций $\Pi_m$.

Если одна прямая линия задана уравнением (3), а вторая прямая – уравнением $\mathbf{ON} = \mathbf{OB} + u\mathbf{b}$, где $\mathbf{b} = \beta\mathbf{a}$, то эти прямые параллельны. После вычеркивания составляющих с векторами $\mathbf{e}_{m+1}, ..., \mathbf{e}_n$ равенство $\mathbf{b} = \beta\mathbf{a}$ останется неизменным, т.е. параллельные прямые линии проецируются, в общем случае, в параллельные прямые линии.

При проецировании точки A плоскость (A; $\mathbf{e}_{m+1}, ..., \mathbf{e}_n$) вполне ортогональна плоскости проекций $\Pi_m$, так как каждый ее направляющий вектор ортогонален направляющим векторам $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$ плоскости проекций $\Pi_m$ (векторы взяты из одной декартовой системы координат). Плоскость (A; $\mathbf{e}_{m+1}, ..., \mathbf{e}_n$) имеет уравнение

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OA} + t_{m+1}\mathbf{e}_{m+1} + ... + t_n\mathbf{e}_n \qquad (4)$$

и проецируется на $\Pi_m$ в точку, так как после вычеркивания составляющих, не входящих в направляющее пространство плоскости проекций, все параметры исчезнут. При этом проекцией плоскости будет точка $A_m$. Если переходить к синтетическому изложению, то именно этой плоскостью осуществляется проецирование точки A на плоскость $\Pi_m$. Эта плоскость является проецирующей, так как содержит все прямые пространства $E_n$, проходящие через точку A и ортогональные плоскости $\Pi_m$. Размерность этой плоскости равна $(n-m)$, по числу линейно независимых векторов, задающих направляющее пространство $V_{n-m}$ этой плоскости в (4).

Две скрещивающиеся прямые расположены в одной 3-плоскости. Если $(n-m) \geq 3$, то эти прямые могут находиться в проецирующей плоскости и проецируются на $\Pi_m$ в одну точку. Точно так же пересекающиеся и параллельные прямые могут проецироваться на плоскость $\Pi_m$ в одну точку. Если взять из начертательной геометрии пространства $E_3$ понятие конкурирующих точек, то все точки любой проецирующей $(n-m)$-плоскости являются конкурирующими.

Кривая линия

$$\mathbf{OM} = f_1(t)\mathbf{e}_1 + ... + f_m(t)\mathbf{e}_m + ... + f_n(t)\mathbf{e}_n, \qquad (5)$$

в общем случае проецируется на $\Pi_m$ в кривую линию. Если размерность пространства, которому принадлежит кривая линия меньше $(n-m)$, то она может спроецироваться в точку, так же как и скрещивающиеся прямые. Например, винтовая линия трехмерного пространства, принадлежащая проецирующей плоскости, размерность которой не менее трех, спроецируется в точку. Пространственная кривая может спроецироваться на $\Pi_m$ в прямую линию, но при этом с уверенностью сказать, что она плоская (как в $E_3$), уже нельзя. Такое произойдет, например, в случае если $f_1(t), ..., f_m(t)$ — линейные функции, а $f_{m+1}(t), ..., f_n(t)$ — нелинейные функции. На комплексном чертеже Радищева такая кривая будет иметь прямые линии в качестве проекций на $(m-1)$ двумерную плоскость проекций. Если среди $f_{m+1}(t), ..., f_n(t)$ есть еще линейные функции, то проекций – прямых линий будет больше.

При проецировании p-плоскости на $\Pi_m$ принцип получения проекции не меняется. Пусть уравнение p-плоскости

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OA} + t^1\mathbf{a}_1 + ... + t^p\mathbf{a}_p, \qquad (6)$$

где $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_p$ — линейно независимые направляющие векторы этой плоскости. Для любой точки p-плоскости справедливо правило получения ее проекции, значит, оно справедливо для всех точек и векторное уравнение (6) останется таким же, только все входящие в него векторы будут иметь разложение не по $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$, а по векторам $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$.

Уравнение p-плоскости (6) описывает множество точек плоскости, проекция p-плоскости — это множество проекций точек p-плоскости. Поэтому проекция точки p-плоскости принадлежит проекции p-плоскости.

Если размерность p-плоскости не более размерности плоскости проекций $\Pi_m$ ($p \leq m$), то она может спроецироваться в p-плоскость или в плоскость меньшей размерности. Уменьшение размерности произойдет если какие-то из ненулевых векторов $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_p$ имеют нулевые координаты по всем векторам $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$. Если эти координаты равны нулю у всех векторов $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_p$, то p-плоскость спроецируется в точку. Если они равны нулю только у $(p-1)$ вектора, p-плоскость спроецируется в прямую линию и т.д.

Уменьшение размерности может произойти и при не равных нулю координатах по $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$ у части векторов из $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_p$. Если, например, проекции векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ станут линейно зависимыми, то это уменьшит размерность проекции p-плоскости. Такое возможно если существует линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ принадлежащая направляющему пространству проецирующей плоскости. Линейная комбинация части направляющих векторов p-плоскости принадлежит направляющему пространству $V_p$ этой p-плоскости, и принадлежит направляющему пространству $V_{n-m}$ проецирующей плоскости, значит, принадлежит пересечению этих пространств. Понижение размерности проекции р-плоскости происходит, когда направляющее пространство этой плоскости пересекается с направляющим пространством проецирующей плоскости ($V_p \cap V_{n-m} = V_r$). Если изменить векторы $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_p$, так, чтобы r направляющих векторов р-плоскости были взяты из пространства пересечения $V_r$, то эти r векторов будут иметь нулевые координаты по $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$, как векторы пространства $V_{n-m}$. Таким образом, придем к случаю равенства нулю координат у части направляющих векторов р-плоскости при $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$, т.е. к первому случаю. Размерность проекции р-плоскости при этом равна $(p - r)$. Степень ортогональности р-плоскости и $\Pi_m$ равна $r/p$.

Если у всех векторов, входящих в (6) коэффициенты разложения по $\mathbf{e}_{m+1}, ..., \mathbf{e}_n$ равны нулю, то р-плоскость принадлежит плоскости проекций $\Pi_m$ и проецируется сама в себя. Если эти координаты равны нулю у $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_p$ и не равны нулю у $\mathbf{OA}$, то р-плоскость параллельна $\Pi_m$ и проецируется в параллельную плоскость, проходящую через проекцию точки А. Плоскость частично параллельная $\Pi_m$, будет проецироваться в частично параллельную р-плоскости плоскость. Степень параллельности р-плоскости и ее проекции будет такой же, как степень параллельности р-плоскости и $\Pi_m$, если размерность проекции равна размерности р-плоскости. Если $V_p \cap V_m = V_d$, и при этом у р-плоскости и $\Pi_m$ нет общих точек, то возможно, что $V_p \cap \cap V_{n-m} = V_r$. Тогда плоскости параллельны со степенью $d/p$ и ортогональны со степенью $r/p$, при этом $d + r \le p$. В этом случае размерность проекции равна $(p - r)$, степень параллельности р-плоскости и ее проекции будет равна $d/(p - r)$. Если при тех же условиях р-плоскость пересекает $\Pi_m$, то можно говорить о степени параллельности по определению Схоуте [2] или же рассматривать только ортогональность.

Если $p > m$, то размерность проекции плоскости будет не более m. При этом p направляющих векторов линейно выражаются через m векторов, а поскольку $p > m$, то направляющие векторы становятся линейно зависимыми [3], и размерность понижается.

Рассмотрение свойств ортогонального проецирования р-плоскости на плоскость проекций $\Pi_m$ возможно на основе свойств проецирования на гиперплоскость $\Pi_{n-1}$ и правила последовательно проецирования [4]. Введем ряд координатных плоскостей $\Pi_m \subset \Pi_{m+1} \subset ... \subset \Pi_{n-2} \subset \Pi_{n-1}$. Проекция точки А на $\Pi_m$ может быть получена последовательным проецированием А на $\Pi_{n-1}$ (получена проекция $A_{n-1}$), точки $A_{n-1}$ на $\Pi_{n-2}$ (получена проекция $A_{n-2}$) и т.д. до $A_m$ (проекция $A_{m+1}$ на $\Pi_m$). Все свойства проецирования на гиперплоскость при каждом проецировании сохраняются. Это позволяет подробно проследить процесс формирования проекции.

Векторный подход к рассмотрению ортогонального проецирования в многомерном евклидовом пространстве позволяет сделать наглядным процесс получения проекции фигуры и достаточно просто получать свойства проецирования, что необходимо для многомерной начертательной геометрии и при изучении многопараметрических систем и многофакторных процессов.

**Библиографический список**


1. Куликов, Л. К. Ортогональное проецирование в $E_n$ / Л. К. Куликов // Прикл. геометрія та інж. графіка. — К.: КНУБА, 2008. — Вип. 79. — С. 109—112.
2. Sommerville, D. M. Y. An introduction to the geometry of n dimensions / D. M. Y. Sommerville. — London, 1929. — 190 c.
3. Постников, М. М. Лекции по геометрии. Семестр 1. Аналитическая геометрия / М. М. Постников. — М.: Наука, 1979. — 336 с.
4. Куликов, Л. К. Координатная ломаная / Л. К. Куликов // Омский научный вестник, 2002. — Вып. 21. — С. 45—46.


**КУЛИКОВ Леонид Константинович,** кандидат технических наук, доцент кафедры начертательной геометрии, инженерной и компьютерной графики.
Адрес для переписки: 644050, пр. Мира, 11.

**Статья поступила в редакцию 23.09.2010 г.**



# Книжная полка

**Леонова, Л. М. Инженерная графика. Резьбовые и сварные соединения [Текст] : учеб. пособие / Л. М. Леонова, К. Л. Панчук, Ф. Н. Притыкин ; ОмГТУ. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2010. – 99 с. : рис., табл. – Библиогр.: с. 68–69. – ISBN 978-8149-0885-8.**

В учебном пособии представлены общие требования, предъявляемые стандартом к разработке и оформлению конструкторских документов; даны описания способов изготовления изделий с резьбой, характеристики геометрических параметров резьбы в зависимости от технических и технологических условий изготовления и эксплуатации изделий резьбового соединения, приведены основные правила изображения резьбы и резьбовых соединений в соответствии с требованиями государственных стандартов, а также требования, предъявляемые к сборочным чертежам разъемных и неразъемных соединений. Выполнен обзор вопросов стандартизации, относящихся к конструкторским документам, стандартизированным терминам, обозначениям основных групп комплекса стандартов «Единая система конструкторской документации» в РФ. Пособие содержит комплект чертежей для самостоятельной проработки студентами.

**Леонова, Л. М. Инженерная графика (изделия, документы) [Текст] : учеб. пособие / Л. М. Леонова, Л. К. Куликов, Н. Н. Чигрик ; ОмГТУ. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2010. – 46 с. : рис., табл. + 25 с. – ISBN 978-5-8149-0827-8.**

В учебном пособии представлены общие требования, предъявляемые стандартом к разработке и оформлению конструкторских документов; виды изделий, виды и комплектность конструкторских документов; текстовых документов; графической части чертежа; текстовой информации на чертежах, а также требования, предъявляемые к чертежам деталей и сборочным чертежам разъемных и неразъемных соединений. Проведен обзор вопросов стандартизации, относящихся к конструкторским документам, стандартизированным терминам, обозначениям основных групп комплекса стандартов «Единая система конструкторской документации» в РФ. Содержит комплект чертежей для самостоятельной проработки студентами.