

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.854:[004.8+004.023]

**А. А. КОЛОКОЛОВ
Т. В. ЛЕВАНОВА
Ю. С. ПОЗДНЯКОВ**

Омский филиал Института математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Омский государственный университет
им. Ф. М. Достоевского

РАЗРАБОТКА И АНАЛИЗ ИММУННОГО АЛГОРИТМА КЛОНАЛЬНОЙ СЕЛЕКЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ О p -МЕДИАНЕ

Разработан иммунный алгоритм клональной селекции для решения задачи о p -медиане с использованием модели целочисленного линейного программирования. Проведено сравнение с алгоритмом муравьиной колонии и представлены результаты экспериментальных исследований.

Ключевые слова: дискретная задача размещения предприятий, задача о p -медиане, иммунный алгоритм клональной селекции, целочисленное линейное программирование.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 13-01-00862 и 14-01-00656).

Введение

Различные проблемы, возникающие в таких областях, как размещение производственных объектов, сфера услуг, сотовая связь и др. [1, 2], сводятся к известной NP-трудной задаче о p -медиане.

Практические задачи во многих случаях характеризуются большой размерностью, поэтому использо-

вание точных методов не всегда представляется возможным. В связи с этим широкое применение получили методы приближенного решения, среди которых выделяются алгоритмы, основанные на аналогиях с процессами, протекающими в природе. Подобные алгоритмы способны находить достаточно хорошие решения благодаря возможности преодолеть

точки локального минимума. К таким методам относятся имитация отжига [3], генетические алгоритмы [4], алгоритмы муравьиной колонии [5], пчелиного роя [6] и др.

Перспективным направлением в поиске приближенных решений сложных задач также является использование иммунных алгоритмов [7, 8]. Данный подход базируется на имитации процессов иммунной системы человека, задача которой состоит в защите организма от различных патогенов путем поиска и постоянного совершенствования методов борьбы с ними. Иммунные алгоритмы могут быть реализованы по нескольким схемам, основанным на аналогии с поведением различных иммунных клеток.

В данной работе предложен гибридный алгоритм для решения задачи о p -медиане с использованием модели целочисленного линейного программирования (ЦЛП), в котором сочетаются схема клональной селекции и процедура локального поиска. Приведены результаты экспериментального сравнения с алгоритмом муравьиной колонии [9] на примерах задачи различной структуры.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 дается постановка задачи о p -медиане. В разд. 2 приводится схема алгоритма клональной селекции и предлагается вариант такого алгоритма, сочетающий в себе процедуру локального поиска. В разд. 3 дается описание алгоритма муравьиной колонии, предложенного ранее для данной задачи. В разд. 4 содержатся результаты вычислительного эксперимента.

1. Задача о p -медиане

Задача о p -медиане [1] может быть сформулирована следующим образом. Определено конечное множество пунктов возможного размещения (открытия) предприятий I и множество клиентов J . Предприятия производят однородный продукт в неограниченном количестве. Известны затраты c_{ij} на обслуживание клиента j предприятием, открытым в пункте i , включающие издержки на производство и транспортировку. Требуется разместить p предприятий и прикрепить к ним клиентов так, чтобы спрос каждого клиента был удовлетворен, а суммарные производственно-транспортные затраты — минимальны.

Опишем модель целочисленного линейного программирования (ЦЛП), для этого введем следующие переменные:

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ открыто предприятие,} \\ 0 & \text{— иначе,} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие, открытое в пункте } i, \\ & \text{обслуживает клиента } j, \\ 0 & \text{— иначе.} \end{cases}$$

Тогда модель ЦЛП имеет вид:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, j \in J, \quad (2)$$

$$z_i \geq x_{ij}, i \in I, j \in J, \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} z_i = p, \quad (4)$$

$$z_i, x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J. \quad (5)$$

Целевая функция (1) состоит в минимизации суммарных производственно-транспортных затрат. Требование удовлетворить потребности каждого клиента выражено условиями (2). Возможность обслуживания только с открытых предприятий описывается ограничением (3). Число открытых предприятий определяется равенством (4).

Далее в качестве решения задачи (1)–(5) будем считать вектор $z = (z_i)$, так как известно, что для любого вектора z существует и легко находится матрица (x_{ij}) , обеспечивающая минимальные затраты при данном выборе открытых предприятий.

2. Иммунный алгоритм клональной селекции

Для решения указанной задачи нами предлагается алгоритм клональной селекции, построенный по схеме, сочетающей механизмы функционирования иммунной системы: отбор, клонирование клеток и их мутацию. Защитная реакция организма заключается в подавлении действия патогенов путем их связывания иммунными клетками. Отбору и дальнейшему клонированию подвергаются клетки, обладающие более высокой силой связывания. Другие клетки мутуют, что способствует улучшению их качества. В разработанном алгоритме аналогом иммунной клетки выступает допустимое решение задачи, а значение целевой функции соответствует величине силы связывания.

Схема алгоритма клональной селекции

Шаг 1. Инициализация: создание начальной популяции клеток.

Итерация $k, k \geq 1$

Шаг 2. Связывание антигена: вычисление качества иммунных клеток.

Шаг 3. Селекция: отбор лучших клеток.

Шаг 4. Репродукция: создание клонов лучших клеток и мутация.

Переход к следующей итерации, $k := k + 1$.

В разработанном алгоритме используются процедуры локального поиска по 1-Swap и k -Swap окрестностям, поскольку они сохраняют количество единиц в булевых векторах и заключаются в следующем. Пусть множество I_z — набор открытых предприятий, соответствующий решению z задачи о p -медиане ($|I_z| = p$). Тогда 1-Swap окрестность этого решения содержит все решения z' , полученные из z закрытием одного предприятия из набора I_z и открытием другого из подмножества Λ_{I_z} . Таким образом, каждое решение z' содержит ровно p открытых предприятий, и расстояние Хэмминга между соответствующими векторами z и z' равно 2:

$$N_{\text{swap}}(z) = \left\{ z' \mid \sum_{i \in I} |z_i - z'_i| = 2, |I_{z'}| = p \right\}.$$

Аналогично определяется окрестность k -Swap, как множество векторов, в которых k единиц замены на 0, а k нулей — на единицы:

$$N_{\text{swap}}(z) = \left\{ z' \mid \sum_{i \in I} |z_i - z'_i| = 2k, |I_{z'}| = p \right\}.$$

Перейдем к описанию разработанного алгоритма клональной селекции. На первом шаге этого алгоритма случайным образом создается начальное множество решений Π_0 , в которых размещено p предприятий.

В начале каждой итерации k формируется некоторое множество решений $\Pi_{k,\text{best}} \subseteq \Pi_{k-1}$ с высоким значением целевой функции.

Затем выполняются процедуры, в результате которых создаются по несколько копий каждого реше-

ния и случайным образом изменяют их. При этом количество копий линейно зависит от силы связывания, но не превышает числа K_{copy} заданного перед началом работы алгоритма.

Процедура модификации включает несколько операций. Сначала решение заменяется на соседнее, лежащее в окрестности k -Swap. Затем выполняется процедура локального поиска с 1-Swap окрестностью, результат работы которого является итогом модификации.

3. Алгоритм муравьиной колонии

Нами проведено сравнение разработанного алгоритма с алгоритмом муравьиной колонии, который широко применяется для решения различных задач дискретной оптимизации и позволяет получать достаточно хорошие результаты. В работе [9] предложен гибридный вариант такого алгоритма для задачи о p -медиане с использованием локального поиска по k -Swap окрестности.

Центральной идеей любого алгоритма муравьиной колонии (МК) является накопление и использование информации о множестве допустимых решений, которую собирают искусственные муравьи. На каждой итерации такого алгоритма выполняется несколько запусков алгоритма искусственного муравья (ИМ) для построения некоторого множества решений. На основе полученных решений собирается статистическая информация, обрабатывается и используется на следующих итерациях.

Схема алгоритма ИМ для задачи о p -медиане

Шаг 1. Открытие всех предприятий.

Итерация r , $r \geq 1$.

Шаг 2. Прекращение работы алгоритма, если осталось ровно p открытых предприятий.

Шаг 3. Отбор предприятий-кандидатов, закрытие которых приведет к большему увеличению целевой функции.

Шаг 4. Закрытие предприятий, случайно выбранных из списка кандидатов.

Переход к следующей итерации, $r = r + 1$.

В начале работы алгоритма ИМ открыты все предприятия. На каждой итерации закрывается одно из них. Выполнение алгоритма заканчивается пока не останется p открытых предприятий. Для улучшения качества получаемого решения применяется процедура локального поиска с окрестностью k -Swap.

В реализации алгоритма МК использовалась модель с элитой, в которой для сбора статистической информации отбираются лучшие решения по целевой функции.

Таблица 1
Результаты вычислительных исследований алгоритмов КС, МК для задачи о p -медиане

Класс задачи	КС		МК	
	ε_{av} , %	φ , %	ε_{av} , %	φ , %
Gap-A	0,80	10,00	1,34	16,11
Gap-B	5,20	26,67	3,08	27,44
Gap-C	6,23	6,67	5,82	20,88
PC	1,60	0,00	1,52	0,00
FPP	0,61	0,00	1,41	0,00
CB	1,38	0,00	2,17	0,00

Схема алгоритма муравьиной колонии для задачи p -медиане

Шаг 1. Определение начального уровня феромона; задание параметров алгоритма.

Итерация k , $k \geq 1$.

Шаг 2. Построение некоторого множества допустимых решений с использованием алгоритма искусственного муравья.

Шаг 3. Отбор лучших по значению целевой функции решений, которые будут составлять элиту.

Шаг 4. Вычисление нового уровня феромона, используя элиту.

Шаг 5. Обновление рекорда.

Шаг 6. Завершение работы алгоритма, если выполнено условие остановки.

Переход к следующей итерации, $k = k + 1$.

4. Результаты вычислительного эксперимента

Алгоритм клональной селекции (КС) был реализован на языке программирования C++ и запускался на компьютере с процессором Intel® Core™ i5 – 2430M 2.4-GHz. Алгоритм муравьиной колонии (МК) реализован на том же языке, тестирование производилось на компьютере с процессором AMD® Athlon™ 1900 XP.

Для исследования алгоритмов использовались тестовые примеры различной структуры и сложности, представленные в библиотеке тестовых задач «Дискретные задачи размещения» [10]. Множество примеров разбито на 6 серий: примеры с большим разры-

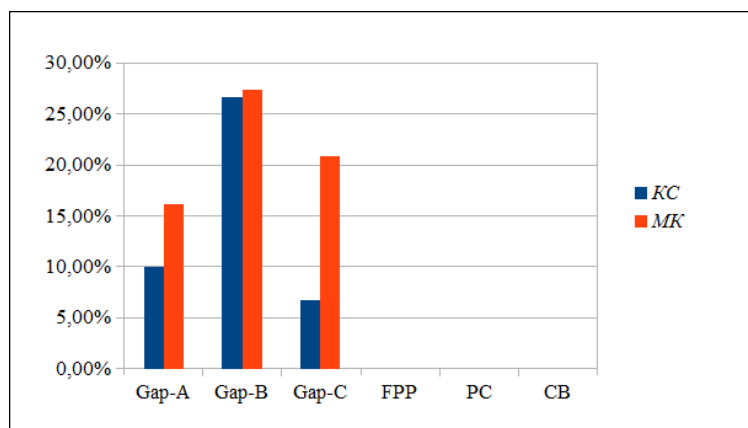


Рис. 1. Результаты вычислительного эксперимента.
Частота запусков, в которых не найдено ни одного допустимого решения

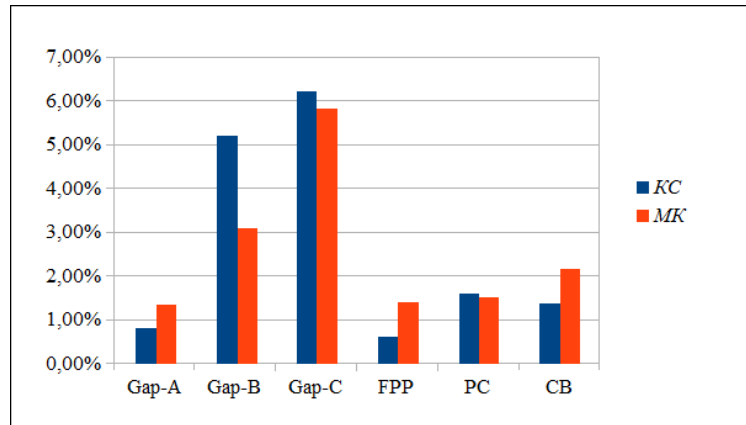


Рис. 2. Результаты вычислительного эксперимента. Средняя погрешность

вом двойственности (Gap-A, Gap-B, Gap-C), примеры, построенные с помощью совершенных бинарных кодов (PC), примеры на шахматной доске (CB) и на проективных плоскостях (FPP).

В табл. 1 приведены результаты вычислительного эксперимента, где ε_{av} — среднее относительное отклонение значения целевой функции от оптимального для лучших найденных решений каждого запуска, φ — процент от общего числа запусков, в которых не найдено ни одного допустимого решения.

Иммунный алгоритм клональной селекции нашел допустимые решения в большем количестве запусков (рис. 1) и имел меньшее среднее относительное отклонение значения целевой функции от оптимального (рис. 2) при решении примеров Gap-A, FPP и CB.

Проведенные исследования показывают, что иммунные алгоритмы позволяют получать решения для задачи о p -медиане с лучшим значением целевой функции по сравнению с алгоритмом муравьиной колонии. В связи с этим представляется перспективным применение данного подхода для разработки алгоритмов решения других задач дискретной оптимизации.

Библиографический список

1. Mirchandani, P., Francis, R. Discrete Location Theory. — New York, NY: Wiley. — 1990.
2. Cornuejols, G., Fisher, M. L., Nemhauser, G. L. Location of Bank Accounts to Optimize Float: An Analytic Study of Exact and Approximate Algorithms // Management Science. — 1977. — Vol. 23, no. 8. — P. 789–810.
3. Kirkpatrick, S., Galatt, C. D., Vecchi, M. P. Optimization by simulated annealing // Science. — 1983. — Vol. 220, no. 4598. — P. 671–680.
4. Holland, J.H. Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control and Artificial Intelligence. — Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1992.
5. Dorigo, M., Maniezzo, V., Coloni, A. The Ant System: An Autocatalytic Optimizing Process. Technical Report 91-016. — Milano, Italy, 1991. — 21 p.

6. Lucic, P., Teodorovic, D. Bee system: modeling combinatorial optimization transportation engineering problems by swarm intelligence // Preprints of the TRISTAN IV triennial symposium on transportation analysis. — 2001. — P. 441–445.

7. De Castro, L.N. Immune, swarm, and evolutionary algorithms part I: Basic Models // Proc. of the ICONIP Conference (International Conference on Neural Information Processing), Workshop on Artificial Immune Systems. — 2002. — Vol. 3. — P. 1464–1468.

8. Колоколов, А. А. Алгоритмы искусственной иммунной системы для вариантной задачи размещения телекоммуникационных центров / А. А. Колоколов, Т. В. Леванова, Ю. С. Поздняков // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. — 2013. — № 1. — С. 35–44.

9. Колоколов, А. А. Алгоритмы муравьиной колонии для задач оптимального размещения предприятий / А. А. Колоколов, Т. В. Леванова, М. А. Лореш // Омский научный вестник. — 2006. — № 4 (38). — С. 62–67.

10. Benchmarks library [Электронный ресурс]. — URL: <http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks/index.html> (дата обращения: 26.08.2013).

КОЛОКОЛОВ Александр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор (Россия), заведующий лабораторией дискретной оптимизации Омского филиала Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Адрес для переписки: kolo@ofim.oscsbras.ru

ЛЕВАНОВА Татьяна Валентиновна, кандидат физико-математических наук, доцент (Россия), старший научный сотрудник Омского филиала Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Адрес для переписки: levanova@ofim.oscsbras.ru

ПОЗДНЯКОВ Юрий Сергеевич, соискатель по кафедре прикладной и вычислительной математики Омского государственного университета им. Ф. М. Достоевского.

Адрес для переписки: yura.pozdnyakov@gmail.com

Статья поступила в редакцию 02.04.2014 г.

© А. А. Колоколов, Т. В. Леванова, Ю. С. Поздняков

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ЗЕМНОГО ШАРА

Разработана методика определения момента инерции земного шара методами теоретической механики.

Ключевые слова: сферический слой, момент инерции, радиус.

Изучение строения Земли, геометрических и физических параметров с целью прогнозирования запасов полезных ископаемых и водных ресурсов является актуальной задачей современной науки. Форма Земли является геоидом, который с хорошей степенью приближения соответствует равновесному эллипсоиду вращения жидкого тела (вращающейся жидкости) [1]. Аксиома затвердевания теоретической механики позволяет к газообразным, жидким и твердым телам применять законы динамического равновесия. Отклонение геоида от равновесной фигуры — эллипсоида вращения не превышает ± 100 м. Сжатие полюсов эллипсоида равно 21,38 км, что составляет 0,3 % от радиуса Земли. Полярный радиус современной Земли $r_n = 6356,863$ км, экваториальный радиус $r_s = 6378,16$ км, средний радиус эквивалентного шара $r = 6371,04$ км, масса Земли $m = 5,98 \cdot 10^{24}$ кг, средняя плотность вещества Земли $\rho_{cp} = 5,52 \cdot 10^3$ кг/м³. Центробежные ускорения силы тяжести на экваторе $g_s = \omega^2 r_s = 0,03373088$ м/с², что составляет 0,34 % от ускорения свободного падения тел на поверхности Земли [2, 3].

Согласно современным научным представлениям в результате дифференциации земного вещества сформировалось ядро и слоистая структура вещества в сферических слоях Земли [2].

Процессы дифференциации вещества Земли были особенно активными в начальный период возникновения Земли и Луны, когда вещество Земли было более однородным по сравнению с современным состоянием.

Момент инерции однородного земного шара можно определить по формуле теоретической механики [4]

$$J_z = \frac{2}{5} mr^2 = \frac{8}{15} \rho_{cp} \pi r^5 = 9,709 \cdot 10^{37} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (1)$$

Безразмерный момент инерции однородного земного шара $J_{пп}$ обычно вычисляют по формуле работы [1]

$$J_{пп} = \frac{J}{mr^2}. \quad (2)$$

Для однородной Земли в период ее возникновения безразмерный момент инерции равен $J_{пп} = 0,04$. В период разогрева и дифференциации вещества Земли образовалось тяжелое ядро и современная слоистая структура Земли. Можно предположить, что в момент возникновения Земли и Луны вещество Земли было достаточно однородным и вычисленное значение момента инерции по формуле (1) может соответствовать этому условию. В период дифференциации вещества Земли в течение 1,4 млрд лет под влиянием высокотемпературного разогрева произошло расслоение вещества и образовалось тяжелое ядро [2, 3].

Радиальное распределение масс внутри современной Земли в данной статье принято по результатам опубликованных работ [1–3].

На рис. 1 показаны десять сферических слоев с равномерным изменением радиусов слоев, образующих объем Земли. Распределение масс внутри земного шара является достаточно неравномерным, однако в данном случае возможно вычисление момента инерции Земли методами теоретической механики.

Согласно рис. 1 масса Земли равна сумме масс сферических слоев. Рассматривая массу каждого сферического слоя как произведение объема слоя на его среднюю плотность $m_i = V_i \rho_i$, можно получить выражение средней плотности материала Земли:

$$\rho_{cp} = \frac{V_1}{V_o} \rho_1 + \frac{V_2}{V_o} \rho_2 + \dots + \frac{V_{10}}{V_o} \rho_{10}, \quad (3)$$

где V_o — объем земного шара; V_i — объем i -го сферического слоя; ρ_i — средняя плотность материала в i -ом слое Земли.

Согласно уравнению (3) средняя плотность Земли равна сумме долевых плотностей сферических слоев.

Определено распределение масс в сферических слоях, радиусы которых отсчитываются от поверхности Земли, график этой зависимости показан на рис. 2.

Момент инерции Земли по рис. 1 можно определить как сумму моментов инерции девяти сферических слоев, обладающих соответствующими плотностями, плюс момент инерции десятого тела, являющегося шаром, по формуле

$$J_z = \sum_{i=1}^{n=9} J_{zi} + J_{z10}, \quad (4)$$

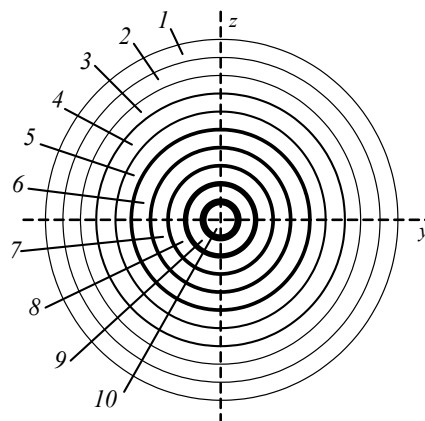


Рис. 1. Сферические слои земного шара

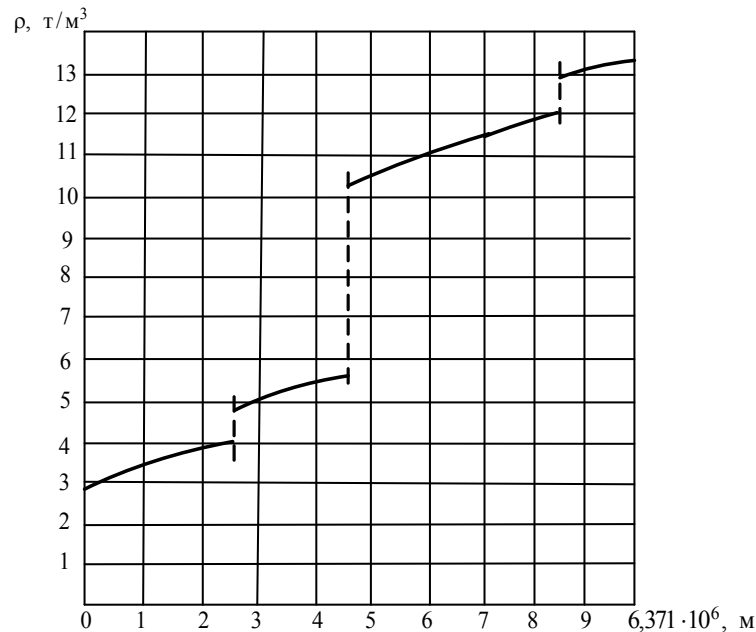


Рис. 2. Распределение плотности вещества в слоях Земли по работам [1–3]

где J_{zi} — момент инерции сферического слоя; J_{z10} — момент инерции десятого слоя, являющегося шаром.

Для определения моментов инерции сферических слоев используем известный в теоретической механике метод отрицательных объемов. Для принятых условий выражение момента инерции Земли имеет вид:

$$J_z = \sum_{i=1}^{n-9} J_{zi} + J_{z10} = \sum_{i=1}^{n-9} \frac{8}{15} \rho_i \pi (r_i^5 - r_{i+1}^5) + \frac{8}{15} \rho_{10} \pi r_{10}^5, \quad (5)$$

где r_i — радиус сферического слоя; r_{10} — радиус последнего тела, имеющего форму шара.

Момент инерции земного шара, вычисленный по формуле (5), равен

$$J_z = 8,04172 \cdot 10^{37} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Значение момента инерции, вычисленное по формуле (5) отличается от современного значения $J_{z0} = 8,043 \cdot 10^{37} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ на 0,015 % [1].

Безразмерная величина момента инерции современной Земли по формуле (2) имеет величину $J_{пр} = 0,0331$. Если принять современную теорию происхождения Земли и Луны [2], то, благодаря дифференциации вещества Земли с момента ее возникновения, момент инерции Земли уменьшился примерно на 20 %. Согласно указанной теории дифференциации вещества Земли, масса Земли и геометрические размеры за этот период изменились незначительно.

Для Земли, как медленно вращающегося тела, кинетическая энергия вращательного движения $T_B = 212,677 \cdot 10^{27} \text{ Дж}$. Кинетическая энергия вращения Земли составляет весьма малую долю от кинетической энергии $T_{пр}$ поступательного движения Земли по орбите вокруг Солнца: $T_{пр} / T_B = 1,247 \cdot 10^6$. Кинети-

ческая энергия T_B вращательного движения составляет примерно миллионную долю от кинетической энергии $T_{пр}$ поступательного движения.

Наряду с энергией механического движения Земля обладает большим запасом тепловой энергии. В настоящее время на глубине 500 км вещество мантии Земли имеет температуру более 2000К, а в центре ядро имеет температуру 6140К [1, 3].

Библиографический список

1. Каула, У. Введение в физику планет земной группы / У. Каула ; пер. с англ. К. А. Любарского и П. П. Медведева ; под ред. Н. П. Грушинского и В. Н. Жаркова. — М. : Мир, 1971. — 536 с.
2. Сорохтин, О. Г. Жизнь Земли / О. Г. Сорохтин. — М. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. — 452 с.
3. Магницкий, В. А. Внутреннее строение и физика Земли / В. А. Магницкий. — 2-е изд., стер. — М. : Физический факультет МГУ, 2006. — 306 с.
4. Теоретическая механика / В. Н. Тарасов [и др.]. — 2-е изд. — М. : Транслит, 2012. — 560 с.

ТАРАСОВ Владимир Никитич, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Механика».

БОЯРКИНА Ирина Владимировна, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Механика».

Адрес для переписки: 644080, г. Омск, пр. Мира, 5.

Статья поступила в редакцию 26.03.2014. г.

© В. Н. Тарасов, И. В. Бояркина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСА ЕДИНИЦЫ МАССЫ И ДАВЛЕНИЙ В СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЯХ И ЦЕНТРЕ ЗЕМЛИ

Разработана методика определения веса единицы массы и давлений в сферических слоях методами теоретической механики.

Ключевые слова: шаровый сегмент, усеченный шар, сферический слой, радиус, плотность.

Актуальной является проблема исследования механического взаимодействия масс вещества внутри земного шара. При рассмотрении проблем этого направления целесообразно вместо ускорения свободного падения g (м/с^2) пользоваться термином — вес единицы массы g (Н/кг) [1], т.к. тела внутри Земли никуда не падают и не влекут за собой появление дополнительных сил инерции. В работе [1] рассмотрены способы определения давления и веса единицы массы вещества Земли внутри ее объема, а также предложен метод шаровых сегментов для определения веса единицы массы (Н/кг) и силы давления вещества в сферических слоях и центре Земли (Па). Согласно научным положениям работы [2], за период 1,4 млрд лет с момента возникновения Земли и Луны произошла дифференциация земного вещества, в результате которой сформировалось тяжелое ядро и слоистая современная структура вещества в сферических слоях Земли.

Процессы дифференциации вещества внутри Земли были особенно бурными в начальный период возникновения Земли и Луны [2]. Для определения силы тяжести (веса единицы массы) вещества в сферических слоях и центре Земли используем метод шаровых сегментов и закон давлений в сферических слоях и центре Земли [1].

На рис. 1 выполнено сечение земного шара плоскостью, в результате которого получено два тела: шаровой сегмент 1 высотой $h_{\text{сг}}$ и усеченный земной шар 2. В шаровом сегменте 1, выделен элементарный объем ΔV , создающий давление p в сферическом слое радиуса r_i .

Сила F взаимодействия двух выделенных масс рассматривается в работе [1] по закону

$$F = G_{\Gamma} \frac{A h_{\text{сг}} \rho_{\text{сг}} \cdot m_{\text{у.ш}}}{l^2}, \quad (1)$$

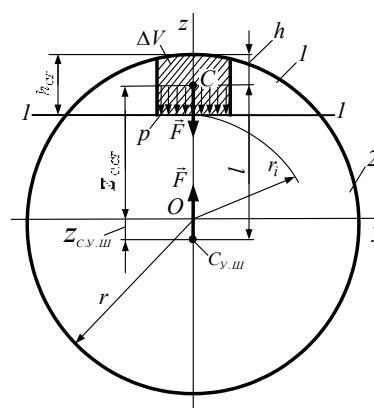


Рис. 1. Сечение земного шара

где G_{Γ} — гравитационная постоянная, $G_{\Gamma} = 6,673 \cdot 10^{-11}$; A — единица площади основания (1 м^2) выделенного объема ΔV ; $h_{\text{сг}}$ — высота сегмента; $\rho_{\text{сг}}$ — средняя плотность вещества сегмента; $m_{\text{у.ш}}$ — масса усеченного шара; l — расстояние между центрами масс усеченного шара и сегмента.

Давление p в центре основания шарового сегмента определяется по уравнению работы [1]

$$p = \frac{F}{A} = G_{\Gamma} \frac{h_{\text{сг}} \rho_{\text{сг}} \cdot m_{\text{у.ш}}}{l^2}. \quad (2)$$

Среднюю плотность $\rho_{\text{сг}}$ вещества сегмента можно определить следующим образом.

Плотность ρ сферических слоев в радиальном направлении к центру Земли, согласно табл. 1, изменяется примерно в пять раз.

Однако средняя плотность вещества в сферических сегментах земного шара изменяется в 1,93 раза:

Таблица 1

Параметры сферических слоев земного шара

№ слоя	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Радиус слоя $r_{\text{с}}$, м	$6,371 \cdot 10^6$	$5,734 \cdot 10^6$	$5,097 \cdot 10^6$	$4,460 \cdot 10^6$	$3,822 \cdot 10^6$	$3,186 \cdot 10^6$	$2,548 \cdot 10^6$	$1,911 \cdot 10^6$	$1,274 \cdot 10^6$	$6,371 \cdot 10^5$
Плотность слоя ρ , кг/м^3	3500	3800	5100	5400	10430	11100	11690	11900	13200	13290

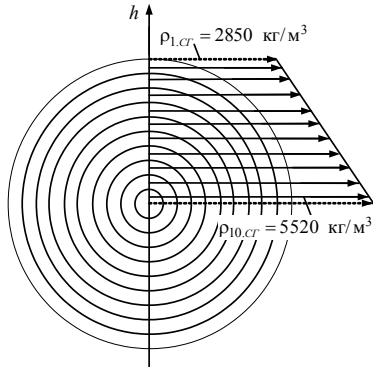


Рис. 2. Распределение средней плотности по слоям Земли

на поверхности Земли средняя плотность вещества $\rho = 2850 \text{ кг/м}^3$, а средняя плотность земного шара и сегмента полушара равна $\rho_{cr} = m/V_{ш} = 5520 \text{ кг/м}^3$.

Изменение средней плотности вещества шаровых сегментов можно определить по рис. 2, используя линейный закон распределения средней плотности по глубине.

Масса усеченного шара $m_{y,ш}$ определяется как разность массы Земли и массы сегмента

$$m_{y,ш} = m - m_{cr} = m - V_{cr}\rho_{cr} = m - \pi h^2_{cr} \left(r - \frac{h_{cr}}{3} \right) \rho_{cr}, \quad (3)$$

где m — масса Земли, $m = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$.

Расстояние между центрами масс $C, C_{y,ш}$ на рис. 1 определяется по формуле

$$l = |z_{C,y,ш}| + z_C, \quad (4)$$

где z_C — центр масс выделенного столба, который совпадает с центром масс шарового сегмента ($z_C = z_{C,cr}$) и определяется по формуле

$$z_{C,cr} = r_o - \frac{5}{8} h. \quad (5)$$

Центр масс $z_{C,y,ш}$ усеченного шара определяется с использованием метода отрицательных объемов (масс) [1]

$$z_{C,y,ш} = - \frac{m_{cr} z_{C,cr}}{m_{y,ш}}. \quad (6)$$

Из закона давлений (2) можно получить формулу давления в центре Земли, приняв следующие значения параметров для полушара Земли: $h_{cr} = r = 6,371 \cdot 10^6 \text{ м}$; $\rho_{cr} = 5520 \text{ кг/м}^3$; масса полушара $m_{п.ш} = \frac{2}{3} \pi r^3 \rho_{cr}$; $l = \frac{3}{4} r$.

Формула давления в центре Земли для указанных параметров имеет вид [1]

$$p = G_{\Gamma} \frac{32}{27} \pi r^2 \rho_{cr}^2. \quad (7)$$

Формула (7) для указанных параметров позволяет определить давление в центре Земли $p = 307291 \text{ МПа}$.

На рис. 3 построена зависимость давления от глубины $p = f(h)$ в сферических слоях и центре Земли. Для установления закона изменения веса единицы массы вещества внутри объема Земли используем формулу (1), в которой величина $Ah_{cr}\rho_{cr}$ принимается за единичную массу $Ah_{cr}\rho_{cr} = 1 \text{ кг}$ выделенного объема (рис. 1).

При этом впервые установлено важное условие, согласно которому при определении веса вещества внутри Земли единичная масса помещается в точке C центре тяжести сегмента. Это условие позволяет исключить притяжение единичной массы к точкам сегмента. В результате чего единичная масса взаимодействует только с центром масс $C_{y,ш}$ усеченного шара, что позволило получить закон изменения силы тяжести вещества внутри Земли.

$$g = G_{\Gamma} \frac{m_{y,ш}}{l^2}. \quad (8)$$

На рис. 3 построен график зависимости веса g единицы массы вещества Земли от глубины h . Величина h определяется по формуле

$$h = r - z_{C,cr}. \quad (9)$$

Во всех известных работах, посвященных данной проблеме, зависимость веса единицы массы от глубины представляется в виде двух разных зависимостей. Впервые получена зависимость $g = f(h)$, которая аппроксимируется одной гладкой кривой 5-го порядка с коэффициентом корреляции $R^2 = 0,993$.

$$g = -1,74 \cdot 10^{-17} \cdot h^5 + 3,129 \cdot 10^{-13} \cdot h^4 - 1,8944 \cdot 10^{-9} \cdot h^3 + 3,604 \cdot 10^{-6} \cdot h^2 + 5,26 \cdot 10^{-5} \cdot h + 9,9787. \quad (10)$$

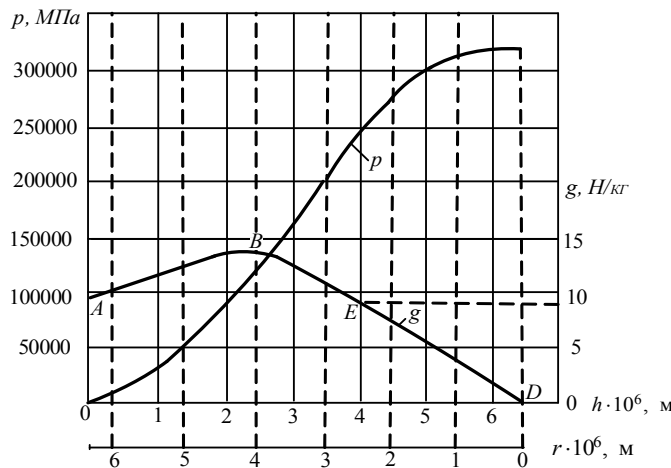


Рис. 3. Зависимости давления от глубины слоя и веса единицы массы от радиуса сферического слоя

Впервые установлено, что максимальное значение веса единицы массы находится на глубине $h \cong 2400$ км и равно $g = 13,9$ Н/кг (м/с^2).

Рассмотрим более подробно некоторые точки кривой $ABED$ на рис. 3. Точка A кривой соответствует $g = 9,81$ Н/кг, т.е. силе тяжести одного кг массы на поверхности Земли. Участок ABE зависимости рассчитывается по аналитическому выражению (8). При этом точка E является последней расчетной точкой этой зависимости. Участок ED искомой зависимости внутри отрезка ED не имеет расчетных точек. Однако точка D соответствует положению единичной массы в центре земного шара, в котором вес $g = 0$, т.е. единичная масса в центре Земли не имеет веса.

Особенность точки E состоит в том, что она соответствует сечению, при котором возникает равенство объемов сегмента и усеченного шара, которые превращаются в полушария Земли.

В этом случае из уравнения (8) имеем

$$g = G_{\Gamma} \frac{0,5m}{(2r_{\text{с.п.ш}})^2} = G_{\Gamma} \frac{0,5m}{\left(2\frac{3}{8}r\right)^2}, \quad (11)$$

где $r_{\text{с.п.ш}}$ — центр тяжести полушара Земли.

Масса величиной 1 кг, помещенная в центре масс одного полушария, притягивается только к центру масс второго полушария. Поэтому значение g , вычисляемое по формуле (11), можно рассматривать как точное значение $g = 8,739$ Н/кг (м/с^2), которому соответствует $h = 3,982 \cdot 10^6$ м.

В известных работах [2–4] приводятся зависимости давления $p = f(h)$ и веса единицы массы $g = f(h)$ (м/с^2), которые отличаются от предложенных, при этом не рассматривается их связь.

Давление в слоях Земли на интервале глубины Δh можно определить также методом численного интегрирования по формуле из работы [1]

$$\Delta p = \rho_{\text{сг}} g \Delta h. \quad (12)$$

Давление на глубине h и в центре Земли равно сумме давлений в сферических слоях

$$p = \sum \Delta p. \quad (13)$$

Результаты вычисления давлений p по формуле (2) и по формулам (12), (13) совпадают.

Библиографический список

1. Теоретическая механика / В. Н. Тарасов, И. В. Бояркина [и др.]. — 2-е изд. — М. : Транслит, 2012. — 560 с. — ISBN 978-94976-455-8.
2. Сорохтин, О. Г. Жизнь Земли / О. Г. Сорохтин. — М. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. — 452 с. — ISBN 978-5-93972-518-7.
3. Каула, У. Введение в физику планет земной группы / У. Каула ; пер. с англ. К. А. Любарского и П. П. Медведева ; под ред. Н. П. Грушинского и В. Н. Жаркова. — М. : Мир, 1971. — 536 с.
4. Магницкий, В. А. Внутреннее строение и физика Земли / В. А. Магницкий. — 2-е изд., стер. — М. : Физический факультет МГУ, 2006. — 306 с. — ISBN 5-8279-0061-3.

ТАРАСОВ Владимир Никитич, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Механика».

БОЯРКИНА Ирина Владимировна, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Механика».

Адрес для переписки: 644080, пр. Мира, 5.

Статья поступила в редакцию 26.03.2014 г.

© В. Н. Тарасов, И. В. Бояркина

Книжная полка

519.2/С87

Стругов, Ю. Ф. Основы теории вероятностей : учеб. электрон. изд. локального распространения: учеб. пособие / Ю. Ф. Стругов, Т. М. Стругова ; ОмГТУ. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 2013. — 1 о=эл. опт. диск (CD-ROM).

Излагаются основы теории вероятностей, которая является важным разделом курса высшей математики в технических вузах. Пособие содержит большое количество примеров, раскрывающих суть основных понятий. Предназначено для студентов очного и заочного отделений технического университета. Подготовлено на кафедре высшей математики ОмГТУ.

514.18/В67

Волков, В. Я. Сборник задач по начертательной геометрии : учеб. электрон. изд. локального распространения / В. Я. Волков, А. А. Ляшков, К. Л. Панчук ; ОмГТУ. — Омск: Изд-во ОмГТУ, 2013. — 1 о=эл. опт. диск (CD-ROM).

Сборник задач предназначен для студентов, изучающих начертательную геометрию по программам механических специальностей технического университета. Он включает в себя задачи разных уровней сложности и может быть использован для самостоятельного изучения университетского курса начертательной геометрии.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ РЕШЕНИИ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Статья посвящена вопросам решения логических задач. Рассматриваются методы решения различных задач с применением методов теории множеств, математической логики, теории графов. Статья может быть полезна студентам, изучающим дискретную математику и начинающим преподавателям.

Ключевые слова: логические задачи, дискретная математика, математическая логика, теория множеств, теория графов.

Решение задач математической логики зачастую сопряжено для студентов и школьников с большими трудностями. Это обусловлено, на наш взгляд, падением уровня не только абстрактного, логического мышления учащихся, но и уровня математического образования вообще.

Собственный опыт преподавательской работы в вузе, ознакомление с мнениями других преподавателей в прессе и в сети Интернет, позволяют сделать вывод о крайне слабой математической подготовке большинства абитуриентов, поступающих в технические вузы и их нежелании ликвидировать пробелы в своем образовании.

К сожалению, приходится констатировать, что в силу целого ряда причин у студентов не формируется системного представления о фундаментальных основах математики, методах математического анализа, алгебры, геометрии. Год за годом отмечается снижение уровня логического, абстрактного мышления, что, в свою очередь, не позволяет большинству студентов в достаточном объеме овладеть такими важными для будущих инженеров дисциплинами, как математика, начертательная геометрия, физики и другие точные науки.

Для повышения интереса к изучению математики вообще, и математической логики в частности, мы постарались в курсе дискретной математики, преподаваемом в НИ ИрГТУ, подобрать нестандартные практические задачи, иллюстрирующие применение основных методов дискретной математики в реальной жизни [1]. Решение подобных задач, на наш взгляд, вызывает у студентов интерес к изучению различных разделов дискретной математики, позволяет лучше усвоить ее основные законы и методы.

Приведем примеры подобных задач и методы их решения.

Применение диаграмм Эйлера–Венна. Метод Эйлера (круги Эйлера) широко применяется в решении задач, связанных с теорией множеств. Понятие множества является фундаментальным неопределяемым понятием. Интуитивно под множеством понимают совокупность дискретных (т.е. отдельных) объектов, обладающих общим признаком и составляющим вместе единое целое [2]. При этом природа объектов может быть самая разная.

Множества удобно изображать в виде областей на плоскости, ограниченных замкнутыми кривыми (обычно — кругов), включающих все элементы множества [3]. Отношения между множествами изображают в виде диаграмм, называемых диаграммами Эйлера–Венна. Универсальное множество (включающее в себя множество всех множеств, о которых идет речь в задаче) изображают в виде прямоугольника, внутри которого помещают круги, изображающие множества.

Например, изображение универсального множества, включающего различные подмножества множества десятичных цифр: $O = \{0\}$, четных чисел $P = \{2, 4, 6, 8\}$, нечетных чисел $Q = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ и простых чисел $R = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ представлено на рис. 1. Здесь U — множество всех подмножеств, образованных из элементов множества десятичных цифр. Как видим, некоторые элементы множества десятичных цифр U входят сразу в несколько подмножеств.

Применение диаграмм Эйлера–Венна облегчает решение задач на нахождение числа элементов некоторого множества или его подмножества.

Задача 1. Среди 100 работников одной из фирм Иркутска 80 % владеют акциями «Иркутскэнерго», а 55 % — акциями общества «Электросвязь». Сколько работников фирмы владеют акциями обоих названных обществ, если каждый работник владеет акциями хотя бы одной компании?

Решение:

По условию, акциями только общества «Электросвязь» владеет $100\% - 80\% = 20\%$ работников, а акциями только общества «Иркутскэнерго» — $100\% - 55\% = 45\%$ работников. Таким образом, акциями только одной из компаний владеет $20\% + 45\% = 65\%$

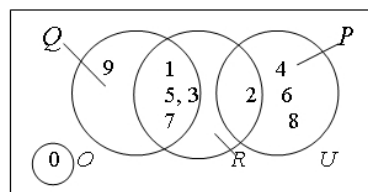


Рис. 1

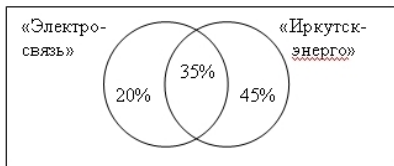


Рис. 2

работников. Значит, акциями обеих компаний владеет $100\% - 65\% = 35\%$ работников. А поскольку работников всего 100 человек, то акциями обеих компаний владеют 35 работников. Диаграмма Эйлера – Венна для данных условий приведена на рис. 2.

Рассмотрим более сложную задачу.

Задача 2. В классе 42 ученика. Из них 16 занимаются легкой атлетикой, 24 — футболом, 15 — шахматами; 11 человек одновременно занимаются легкой атлетикой и футболом, 8 — легкой атлетикой и шахматами, 12 — футболом и шахматами, а 6 участвуют во всех трех спортивных секциях. Остальные не занимаются спортом. Сколько человек не занимается спортом?

Решение:

Решение этой задачи удобно изобразить на диаграмме Эйлера – Венна (рис. 3). Заполнение диаграммы начинают «с середины»: поскольку известно, что всеми тремя видами спорта занимаются 6 человек, сразу заполняем область пересечения всех трех множеств. Так как шахматами и футболом занимаются 12 человек, из которых 6 уже учтены, то на область пересечения множеств «Шахматы» и «Футбол» без «Легкой атлетики» приходится $12 - 6 = 6$ человек. Аналогично рассуждая, заполняем области пересечения множеств «Шахматы» и «Легкая атлетика», и «Футбол» и «Легкая атлетика». Затем определяем количество человек, занимающихся только шахматами: из 15 исключаем тех, кого уже посчитали (то есть тех, кто кроме шахмат занимается еще каким-либо другим видом спорта): $15 - (6 + 6 + 2) = 1$. Аналогично заполняем оставшиеся области. После этого складываем все числа внутри диаграммы и вычитаем полученное число из общего количества учеников в классе. Таким образом, не занимаются спортом 12 человек. Очевидно, путем простых вычислений или логических умозаключений решить такую задачу гораздо сложнее.

Применение методов алгебры логики. Рассмотрим несколько примеров практического применения законов алгебры логики. Математическая логика (логика высказываний) — разновидность формальной логики, т.е. науки, которая изучает умозаключения

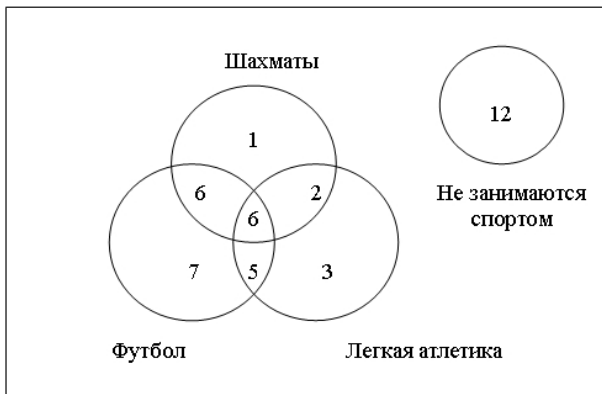


Рис. 3

с точки зрения их формального строения. В математической логике не рассматривается сам смысл высказываний, определяется только его истинность или ложность, что принято обозначать соответственно И или Л [4].

С помощью логических связок из простых высказываний можно составлять более сложные, соединяя их союзами «и» (конъюнкция), «или» (дизъюнкция), «не» (инверсия или отрицание), «следует» (импликация), «тогда и только тогда» (эквиваленция). Аксиомы логических операций (или логических связок) представляются обычно в виде таблиц истинности. Они известны каждому школьнику, поэтому мы не будем подробно останавливаться на них, напомним лишь, что при нахождении значений формул на каждом наборе переменных операции алгебры логики выполняются в следующем порядке: инверсия, конъюнкция; дизъюнкция; импликация; эквиваленция. Если требуется нарушить данный порядок — ставят скобки, и тогда в первую очередь выполняется действие в скобках.

Рассмотрим задачу о проверке истинности сложных высказываний с применением законов алгебры логики.

Задача 3. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал дискретную математику?» получен верный ответ: «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал дискретную математику?

Решение:

Обозначим логическими переменными следующие высказывания:

A — «Первый студент изучал дискретную математику»;

B — «Второй студент изучал дискретную математику»;

C — «Третий студент изучал дискретную математику».

Составим формулы для высказываний:

«Если изучал первый, то изучал и третий»: $A \Rightarrow C$

«Если изучал второй, то изучал и третий»: $B \Rightarrow C$

«Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий»: $(A \Rightarrow C) \& \neg (B \Rightarrow C)$

Составим таблицу истинности для полученных логических формул (табл. 1).

Очевидно, что истинные значения данное высказывание принимает в том случае, когда первый студент изучал дискретную математику, а второй и третий — нет, или второй изучал, а первый и третий — нет.

Часто возникает необходимость в составлении расписания занятий, экзаменов, и т.п., согласованных с различными условиями: пожеланиями преподавателей, требованиями деканата и т.д. Решить эту задачу также помогает алгебра логики.

Задача 4. Составить расписание пяти уроков в одном и том же классе, если все предметы должны быть различны, а преподаватели высказали следующие пожелания: преподаватель истории (И) — 1, или 4, или 5 урок; литературы (Л) — 1 или 2 урок; физики (Ф) — 2 или 3 урок; математики (М) — 2 или 5 урок; химии (Х) — любой урок, кроме 1 и 5.

Решение:

Составим логические формулы, соответствующие заявкам учителей. Для этого обозначим приписывание каждого предмета к конкретному уроку соответствующей буквой с индексом. Например, I_1 означает, что урок истории стоит в расписании первым. Тогда заявке преподавателя истории будет соответствовать формула: $\varphi_{и} = I_1 \vee I_4 \vee I_5$. Заявке

Таблица 1

Таблица истинности к задаче 3

A	B	C	$A \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$\neg (B \Rightarrow C)$	$(A \Rightarrow B) \& \neg (B \Rightarrow C)$
Л	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	Л	И	И	И	Л	Л
Л	И	Л	И	Л	И	И
Л	И	И	И	И	Л	Л
И	Л	Л	Л	И	Л	И
И	Л	И	И	И	Л	Л
И	И	Л	Л	Л	И	Л
И	И	И	И	И	Л	Л

преподавателя литературы соответствует формула $\Phi_A = A_1 \vee A_2$, заявке физика: $\Phi_F = \Phi_2 \vee \Phi_3$, математика: $\Phi_M = M_2 \vee M_5$, преподавателя химии: $\Phi_X = X_2 \vee X_3 \vee X_4$. Поскольку все заявки должны быть учтены, составим конъюнкцию этих формул:

$(I_1 \vee I_4 \vee I_5) \& (A_1 \vee A_2) \& (\Phi_2 \vee \Phi_3) \& (M_2 \vee M_5) \& (X_2 \vee X_3 \vee X_4)$ и проведем последовательные преобразования, учитывая, что на один урок не могут претендовать два предмета, то есть конъюнкция I_4 & X_2 ложна. В результате получим следующую дизъюнкцию: $A_1 \& \Phi_2 \& X_3 \& I_4 \& M_5 \vee A_1 \& X_2 \& \Phi_3 \& I_4 \& M_5 \vee I_1 \& A_2 \& \Phi_3 \& X_4 \& M_5 \vee A_1 \& M_2 \& \Phi_3 \& X_4 \& I_5$.

Таким образом, получилось четыре варианта расписаний.

Еще один пример практического применения алгебры логики — задача о подборе экипажа космического корабля, или подводной лодки, или других объектов, на которых предусматривается длительное совместное пребывание людей в замкнутом пространстве. Например, для космического полета составляют экипаж из трех человек: командир, инженер и врач. На должность командира претендуют четыре человека: A_1, A_2, A_3, A_4 ; на должность инженера — три человека: B_1, B_2, B_3 ; на должность врача — тоже трое: C_1, C_2, C_3 . Сколько существует способов составления экипажа? Кажалось бы, что может быть проще: $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$. Но люди — не роботы, их нельзя переставлять как угодно. Необходимо учитывать еще вопрос психологической совместимости.

Задача 5. Составить возможные экипажи для полета на космическом корабле, если известно, что инженер B_1 несовместим с врачом C_3 , инженер B_2 — с врачом C_1 , а инженер B_3 — с врачом C_2 . Кроме того, командир

A_1 совместим с инженерами B_1, B_3 и врачами C_2, C_3 ;

A_2 совместим с инженерами B_1, B_2 и всеми врачами;

A_3 совместим с инженерами B_1, B_2 и врачами C_1, C_3 ;

A_4 совместим со всеми инженерами и одним врачом C_3 .

Составим формулы, соответствующие последним четырем высказываниям:

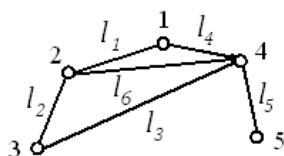


Рис. 4

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= A_1 \& (B_1 \vee B_3) \& (C_2 \vee C_3); \\ \Phi_2 &= A_2 \& (B_1 \vee B_2) \& (C_1 \vee C_2 \vee C_3); \\ \Phi_3 &= A_3 \& (B_1 \vee B_2) \& (C_1 \vee C_3); \\ \Phi_4 &= A_4 \& (B_1 \vee B_2 \vee B_3) \& C_3\end{aligned}$$

Составим теперь дизъюнкцию этих формул:

$A_1 \& (B_1 \vee B_3) \& (C_2 \vee C_3) \vee A_2 \& (B_1 \vee B_2) \& (C_1 \vee C_2 \vee C_3) \vee A_3 \& (B_1 \vee B_2) \& (C_1 \vee C_3) \vee A_4 \& (B_1 \vee B_2 \vee B_3) \& C_3$ и проведем преобразования (раскроем скобки). Получим: $A_1 \& B_1 \& C_1 \vee A_1 \& B_1 \& C_3 \vee A_1 \& B_3 \& C_2 \vee A_1 \& B_3 \& C_3 \vee A_2 \& B_1 \& C_1 \vee A_2 \& B_1 \& C_2 \vee A_2 \& B_1 \& C_3 \vee A_2 \& B_2 \& C_1 \vee A_2 \& B_2 \& C_2 \vee A_2 \& B_2 \& C_3 \vee A_3 \& B_1 \& C_1 \vee A_3 \& B_1 \& C_3 \vee A_3 \& B_2 \& C_1 \vee A_3 \& B_2 \& C_3 \vee A_4 \& B_1 \& C_3 \vee A_4 \& B_2 \& C_3 \vee A_4 \& B_3 \& C_3$. Однако не все из полученных конъюнкций возможны. Например, комбинация $A_1 \& B_1 \& C_3$ не может быть реализована, поскольку инженер B_1 не совместим с врачом C_3 . Тогда, с учетом условий несовместимости, остаются следующие конъюнкции: $A_1 \& B_1 \& C_1 \vee A_1 \& B_3 \& C_2 \vee A_2 \& B_1 \& C_1 \vee A_2 \& B_1 \& C_2 \vee A_2 \& B_1 \& C_3 \vee A_2 \& B_2 \& C_1 \vee A_2 \& B_2 \& C_2 \vee A_2 \& B_2 \& C_3 \vee A_3 \& B_1 \& C_1 \vee A_3 \& B_1 \& C_3 \vee A_3 \& B_2 \& C_1 \vee A_3 \& B_2 \& C_3 \vee A_4 \& B_1 \& C_3 \vee A_4 \& B_2 \& C_3 \vee A_4 \& B_3 \& C_3$.

Получили 10 возможных составов экипажа.

Применение теории графов. Часто при решении особого класса задач, связанных с наливанием определенного количества жидкости с помощью двух (иногда трех) пустых сосудов, применяются методы теории графов [5].

В общем случае граф $G(X, E)$ — это множество элементов — точек X , определенным образом соединенных между собой линиями, необязательно прямыми. Точки множества X называются вершинами графа G . Соединяющие их линии — ребра представляют множество E . Вершины графа обычно нумеруют.

На рис. 4 изображен граф, построенный на пяти вершинах и имеющий шесть ребер. Рассмотрим следующую задачу (задача Тартальви):

Задача 6. Имеется 8-литровый сосуд, до краев наполненный водой, и два пустых объемом 3 и 5 литров. Требуется разлить воду поровну в два больших сосуда.

Решение:

Выберем на плоскости систему координат (необязательно прямоугольную). На одной оси отложим

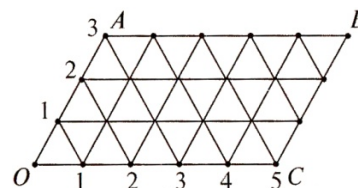


Рис. 5

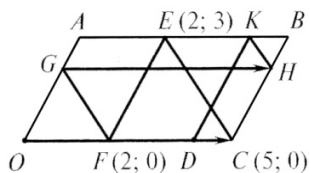


Рис. 6

отрезок OC , равный 5 единицам масштаба, на другой — отрезок OA , равный 3 единицам. Построим параллелограмм $OABC$ (рис. 5). Отметим на его сторонах точки с целочисленными координатами — это вершины графа. Соединим точки $(0; 1)$ и $(1; 0)$ отрезком и проведем параллельно ему отрезки, соединяющие отмеченные точки. Кроме того, соединим вершины графа, лежащие на противоположных сторонах параллелограмма, отрезками, параллельными координатным осям. Все эти отрезки являются ребрами построенного графа.

Сопоставим рассмотренный граф с задачей о переливании. Точка O соответствует тому состоянию, когда 5-литровый и 3-литровый сосуды пусты. Перемещение по ребру OC отвечает наполнению 5-литрового сосуда, а по ребру OA — наполнению 3-литрового. На сосудах нет никаких меток, поэтому процесс наливания заканчивается тогда, когда сосуд наполнен. Этому процессу соответствует движение по ребрам графа, параллельным координатным осям до границы параллелограмма $OABC$. Но можно часть воды перелить из одного сосуда в другой, либо вылить остаток из одного сосуда, либо долить другой сосуд до краев — этим операциям соответствует перемещение из одной вершины графа в другую по диагональным ребрам.

Приведем решение задачи Тартальи с помощью графа. Нужно выделить в данном графе маршрут, ведущий из вершины O в вершину D (рис. 6). Искомый маршрут отмечен сплошной линией. Прокомментируем его.

Ребро OC изображает наполнение 5-литрового сосуда (точка C имеет координаты $(5; 0)$);

CE : из 5-литрового вода переливается в 3-литровый (точка E имеет координаты $(2; 3)$, то есть в 5-литровом осталось 2 л воды, а 3-литровый налит до краев);

EF : из 3-литрового вода переливается в 8-литровый (F имеет координаты $(2; 0)$);

FG : 2 л, находящиеся в 5-литровом, переливаются в 3-литровый;

GH : наполняется вновь 5-литровый;

HK : из 5-литрового доливается недостающая часть в 3-литровый, в 5-литровом остается 4 л воды;

KD : из 3-литрового вода выливается в 8-литровый.

Для облегчения построения маршрута можно воспользоваться методом бильярдного шара. Для этого возьмем угол AOC нашего параллелограмма рав-

ным 60° и будем считать, что бильярдный стол выполнен в форме такого параллелограмма. Если учесть, что при ударе шара по бортику стола он продолжает движение по принципу: угол падения равен углу отражения, то шар, выпущенный из точки O вдоль одной из сторон стола, воспроизведет требуемый маршрут. Он будет двигаться по пути, изображенному на рис. 6, если будет выпущен вдоль стороны OC .

Можно выбрать другой маршрут: начать движение по ребру OA (то есть сначала наполнить 3-литровый сосуд). Этот маршрут менее экономичен, он требует на одно переливание больше, чем в приведенном решении.

Приведенные нами рассуждения верны лишь при условии, что третий сосуд, изначально наполненный, имеет вместимость, большую или равную, чем суммарная вместимость пустых сосудов. Метод бильярдного шара позволяет решать аналогичную задачу и для четырех сосудов. Но в этом случае уже потребуются аналогичный пространственный граф.

Как показывает практика преподавания дискретной математики в НИ ИрГТУ, подобные логические задачи, связанные с практическими ситуациями, но решаемые с помощью методов дискретной математики, вызывают неподдельный интерес у студентов и способствуют лучшему усвоению основных разделов дискретной математики.

Библиографический список

1. Зепнова, Н. Н. Особенности преподавания курса дискретной математики во втузе / Н. Н. Зепнова, О. В. Кузьмин // Омский научный вестник. — 2011. — № 1 (95). — С. 160–164.
2. Судоплатов, С. В. Элементы дискретной математики: учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — М.: ИНФРА-М, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. — 280 с.
3. Мельников, О. И. Обучение дискретной математике / О. И. Мельников. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008. — 224 с.
4. Горбатов, В. А. Дискретная математика: учеб. для студентов втузов / В. А. Горбатов, А. В. Горбатов, А. В. Горбатова. — М.: АСТ: Астрель, 2003. — 447 с.
5. Кузьмин, О. В. Комбинаторные методы решения логических задач: учеб. пособие / О. В. Кузьмин. — М.: Дрофа, 2006. — 187 с.

ЗЕПНОВА Наталья Николаевна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики Национального исследовательского Иркутского государственного технического университета.

КУЗЬМИН Олег Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и дискретной математики Иркутского государственного университета. Адрес для переписки: zepnova.nat@mail.ru

Статья поступила в редакцию 26.03.2014 г.

© Н. Н. Зепнова, О. В. Кузьмин

Книжная полка

51/M22

Мамыкина, Л. А. Дифференциальное исчисление функций одной переменной и его приложения: учеб. электрон. изд. локального распространения: учеб. пособие / Л. А. Мамыкина; ОмГТУ. — Омск: Изд-во ОмГТУ, 2013. — 1 о=эл. опт. диск (CD-ROM).

Рассматривается теоретический материал с задачами практического содержания по дифференциальному исчислению функций одной переменной, а также даны типовые расчеты для самостоятельной работы. Предназначено для студентов-заочников всех факультетов технического вуза.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРА МАСШТАБА ВЗВЕШЕННОГО МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

В статье рассматриваются оценки параметра масштаба взвешенного метода максимального правдоподобия. Проводится исследование эффективности полученных оценок и их сравнение с классическими оценками для ряда типовых распределений в условиях модели Тьюки с симметричными и асимметричными выбросами. Результаты исследования показывают высокую эффективность предложенных оценок по сравнению с классическими робастными оценками.

Ключевые слова: параметр масштаба, робастные оценки, взвешенный метод максимального правдоподобия.

Введение. Математическая статистика предлагает большой арсенал методов оценивания параметра масштаба [1–4]. Хорошо известное среднее квадратическое отклонение является оптимальным для нормального распределения, но быстро теряет свою эффективность при наличии выбросов. Оценка абсолютного отклонения от медианы обладает робастными свойствами и эффективна для распределения Коши, но крайне не эффективна для распределений с более легкими хвостами. Взвешенный метод максимального правдоподобия (ВММП) [5] предлагает способ получения эффективных оценок, устойчивых к наличию выбросов. В данной работе предлагаются оценки параметра масштаба ВММП и проводятся исследование их эффективности для ряда типовых распределений при наличии выбросов. Полученные оценки включают в себя оценки максимального правдоподобия, радикальные оценки и оценки максимальной устойчивости [3] как частные случаи. Синтезированные оценки были использованы в задачах точечного оценивания параметра сдвига [6], задаче регрессии [7] и прогноза, где параметр масштаба выступает в роли мешающего параметра.

1. Взвешенный метод максимального правдоподобия. Оценки взвешенного метода максимального правдоподобия относятся к классу М-оценок, определяемых уравнением вида:

$$\sum_i \varphi(x_i, \theta_N) = 0, \quad (1)$$

$$\varphi(x, \theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x, \theta) + \beta_\theta \right) f'(x, \theta). \quad (2)$$

где $\varphi(x, \theta)$ — оценочная функция, $f(x)$ — плотность распределения, s — параметр масштаба, l — параметр радикальности, определяющий робастность оценки, β_θ — параметр, рассчитываемый из условия несмещенности оценки:

$$E\varphi(x, \theta) = 0.$$

При $l=0$ и $\beta_\theta = 0$ получаем оценки максимального правдоподобия, при $l=0,5$ и $l=1$ — радикальные оценки и оценки максимальной устойчивости соответственно.

В [5] показано, что $N^{1/2}(\theta_N - E\theta)$ имеет асимптотическое нормальное распределение с дисперсией

$$V = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x, \theta) dF(x)}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi(x, \theta) dF(x) \right)^2}.$$

2. Оценки параметра масштаба для типовых распределений. Выпишем оценки параметра масштаба и их дисперсии для класса типовых симметричных распределений с разной степенью затянутости хвостов. Будем рассматривать следующий класс распределений:

- обобщенно-нормальное распределений 4-й степени (ОНР4);
- нормальное распределение (НР);
- распределение Лапласа (РЛ);
- распределение Коши (РК).

Без потери общности положим, что параметр сдвига для рассматриваемого класса распределений равен 0.

2.1. Обобщенно-нормальное распределение 4-й степени. Плотность ОНР4 имеет вид:

$$g_1(x) = \frac{2}{s\Gamma(0,25)} e^{-\left(\frac{x-\mu}{s}\right)^4}.$$

Оценка параметра s , согласно (1) и (2), примет вид:

$$\sum_i \left[4 \left(\frac{x_i}{s_N} \right)^4 - \beta_1 \right] g_1'(x_i, s_N) = 0. \quad (3)$$

Масштабный коэффициент β_1 для распределения $F(x,s)$ будет рассчитываться из условия несмещенности оценки

$$\beta_1 = \frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} x^4 g_1'(x,s) dF(x,s)}{\int_{-\infty}^{\infty} g_1'(x,s) dF(x,s)}$$

Дисперсия оценки параметра масштаба будет определяться следующим образом:

$$V_1 = s^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(4 \left(\frac{x}{s}\right)^4 - \beta_1\right)^2 g_1^{2l}(x) dF(x)}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} l \left(4 \left(\frac{x}{s}\right)^4 - \beta_1\right) \left(4 \left(\frac{x}{s}\right)^4 - 1\right) - 16 \left(\frac{x}{s}\right)^4 \right] g_1^l(x) dF(x)} \rightarrow \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(4 \left(\frac{x}{s}\right)^4 - \beta_1\right)^2 g_1^{2l}(x) dF(x)}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} l \left(4 \left(\frac{x}{s}\right)^4 - \beta_1\right) \left(4 \left(\frac{x}{s}\right)^4 - 1\right) - 16 \left(\frac{x}{s}\right)^4 \right] g_1^l(x) dF(x)}$$

2.2. Нормальное распределение. Плотность НР имеет вид:

$$g_2(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{s}\right)^2}$$

Оценка параметра s , согласно (1) и (2), примет вид:

$$\sum_i \left[\left(\frac{x_i}{s_N}\right)^2 - \beta_2 \right] g_2^l(x_i, s_N) = 0 \quad (4)$$

Масштабный коэффициент β_2 для распределения $F(x,s)$ будет рассчитываться следующим образом:

$$\beta_2 = \frac{1}{s^2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g_2'(x,s) dF(x,s)}{\int_{-\infty}^{\infty} g_2'(x,s) dF(x,s)}$$

Дисперсия оценки параметра масштаба определяется следующим выражением:

$$V_2 = s^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{x}{s}\right)^2 - \beta_2\right)^2 g_2^{2l}(x) dF(x)}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} l \left(\left(\frac{x}{s}\right)^2 - \beta_2\right) \left(\left(\frac{x}{s}\right)^2 - 1\right) - 2 \left(\frac{x}{s}\right)^2 \right] g_2^l(x) dF(x)}$$

2.3. Распределение Лапласа. Плотность РЛ имеет вид:

$$g_3(x) = \frac{1}{2s} e^{-\frac{|x-\mu|}{s}}$$

Оценка параметра s , согласно (1) и (2), примет вид:

$$\sum_i \left[\frac{|x_i|}{s_N} - \beta_3 \right] g_3^l(x_i, s_N) = 0 \quad (5)$$

Масштабный коэффициент β_3 для распределения $F(x,s)$ будет иметь следующий вид:

$$\beta_3 = \frac{1}{s} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |x| g_3'(x,s) dF(x,s)}{\int_{-\infty}^{\infty} g_3'(x,s) dF(x,s)}$$

Дисперсия оценки параметра масштаба определяется следующим выражением:

$$V_3 = s^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|x|}{s} - \beta_3\right)^2 g_3^{2l}(x) dF(x)}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} l \left(\frac{|x|}{s} - \beta_3\right) \left(\frac{|x|}{s} - 1\right) - \frac{|x|}{s} \right] g_3^l(x) dF(x)}$$

2.4. Распределение Коши. Плотность РК имеет вид:

$$g_4(x) = \frac{1}{\pi s \left[1 + \left(\frac{x-\mu}{s}\right)^2 \right]}$$

Оценка параметра s , согласно (1) и (2), примет вид:

$$\sum_i \left[2\pi s_N \left(\frac{x_i}{s_N}\right)^2 g_4(x_i, s_N) - \beta_4 \right] g_4^l(x_i, s_N) = 0 \quad (6)$$

Масштабный коэффициент β_4 для распределения $F(x,s)$ будет иметь следующий вид:

$$\beta_4 = \frac{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g_4^{l+1}(x,s) dF(x,s)}{\int_{-\infty}^{\infty} g_4^l(x,s) dF(x,s)}$$

Дисперсия оценки параметра масштаба определяется следующим выражением:

$$V_4 = s^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(2\pi s \left(\frac{x}{s}\right)^2 g_4(x) - \beta_4\right)^2 g_4^{2l}(x) dF(x)}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \left[2\pi s \left(\frac{x}{s}\right)^2 g_4(x) \left(2\pi s \left(\frac{x}{s}\right)^2 g_4(x) - 2\right) + g_4^{2l}(x) dF(x) \right] \right.} \rightarrow \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(2\pi s \left(\frac{x}{s}\right)^2 g_4(x) - \beta_4\right)^2 g_4^{2l}(x) dF(x)}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \left[2\pi s \left(\frac{x}{s}\right)^2 g_4(x) \left(2\pi s \left(\frac{x}{s}\right)^2 g_4(x) - 2\right) + g_4^{2l}(x) dF(x) \right] \right.}$$

3. Исследование эффективности оценок параметра масштаба. Проводилось исследование эффективности оценок параметра масштаба (3) – (6) на обобщенно-нормальном распределении 4-й степени, нормальном распределении, распределении Лапласа и распределении Коши в условиях модели выбросов Тьюки:

— симметричные выбросы (СВ):

$$f(x) = (1 - \varepsilon)g(x) + \varepsilon g(x - \alpha);$$

— асимметричные выбросы (АВ):

Таблица 1

Значения параметров масштаба для типовых распределений

Распределение	ОНР4	НР	РЛ	РК
Значение параметра масштаба	1,767	1	0,7144	0,2605

Таблица 2

Эффективность оценок параметра масштаба на распределениях (7)–(10)

Оценка	ОМП	РО	ОМУ	СКО	АО	САО	ОВСКО	ОВАО	ООНР4	ООК
Распределение (7)										
V	0,781	1,046	1,584	0,928	3,335	1,291	0,928	1,291	0,781	1,282
ε	1,000	0,747	0,493	0,841	0,234	0,605	0,842	0,605	1,000	0,609
Распределение (8)										
V	9,546	1,397	1,903	4,483	3,851	2,603	1,635	2,097	1,367	1,925
ε	0,143	0,979	0,718	0,049	0,355	0,525	0,836	0,652	1,000	0,710
Распределение (9)										
V	25,020	1,162	1,760	14,733	4,178	8,992	1,393	2,866	0,881	2,171
ε	0,035	0,758	0,501	0,060	0,211	0,098	0,632	0,307	1,000	0,406
Распределение (10)										
V	3,642	1,578	1,998	2,389	3,969	2,033	1,639	1,952	1,576	1,900
ε	0,433	0,999	0,789	0,660	0,397	0,775	0,962	0,807	1,000	0,829

Таблица 3

Эффективность оценок параметра масштаба на распределениях (11)–(14)

Оценка	ОМП	РО	ОМУ	СКО	АО	САО	ОВСКО	ОВАО	ООНР4	ООК
Распределение (11)										
V	0,500	0,708	1,154	0,500	1,361	0,571	0,500	0,570	0,545	0,723
ε	1,000	0,706	0,433	1,000	0,367	0,876	1,000	0,877	0,917	0,691
Распределение (12)										
V	1,999	0,883	1,328	1,999	1,544	1,031	0,807	0,857	0,900	0,907
ε	0,404	0,914	0,608	0,404	0,523	0,783	1,000	0,942	0,897	0,890
Распределение (13)										
V	4,955	0,789	1,283	4,955	1,700	3,250	0,685	1,239	0,608	1,153
ε	0,123	0,771	0,474	0,123	0,358	0,187	0,888	0,491	1,000	0,527
Распределение (14)										
V	0,871	1,060	1,554	0,871	1,650	0,809	0,841	0,807	1,222	0,958
ε	0,927	0,761	0,519	0,927	0,489	0,998	0,960	1,000	0,660	0,842

Таблица 4

Эффективность оценок параметра масштаба на распределениях (15)–(18)

Оценка	ОМП	РО	ОМУ	СКО	АО	САО	ОВСКО	ОВАО	ООНР4	ООК
Распределение (15)										
V	0,510	0,807	1,512	0,637	1,055	0,510	0,543	0,510	0,635	0,635
ε	1,000	0,632	0,337	0,801	0,483	1,000	0,939	1,000	0,803	0,803
Распределение (16)										
V	0,797	0,884	1,601	2,007	1,160	0,800	0,729	0,648	0,943	0,731
ε	0,813	0,733	0,405	0,323	0,559	0,810	0,889	1,000	0,687	0,886
Распределение (17)										
V	1,970	1,018	1,681	2,490	1,322	1,970	0,702	1,003	0,820	0,965
ε	0,356	0,690	0,418	0,282	0,531	0,356	1,000	0,700	0,856	0,727
Распределение (18)										
V	0,592	1,103	1,933	0,586	1,298	0,592	0,578	0,591	1,113	0,840
ε	0,976	0,524	0,299	0,986	0,445	0,976	1,00	0,978	0,519	0,688

Эффективность оценок параметра масштаба на распределениях (19)–(22)

Оценка	ОМП	РО	ОМУ	АО	ОВСКО	ОВАО	ООНР4	ООК
Распределение (19)								
V	0,136	0,184	0,271	0,168	0,193	0,148	0,312	0,136
ε	1,000	0,739	0,502	0,810	0,704	0,919	0,435	1,000
Распределение (20)								
V	0,146	0,196	0,287	0,183	0,220	0,161	0,255	0,146
ε	1,000	0,745	0,509	0,780	0,664	0,907	0,573	1,000
Распределение (21)								
V	0,191	0,208	0,302	0,209	0,216	0,174	0,348	0,174
ε	0,91	0,84	0,58	0,833	0,81	1	0,5	1
Распределение (22)								
V	0,185	0,218	0,309	0,208	0,231	0,242	0,357	0,182
ε	0,984	0,835	0,589	0,875	0,788	0,752	0,510	1,000

$$f(x) = (1 - \varepsilon)g(x) + \varepsilon g\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Параметр масштаба для основного распределения подбирался таким образом, чтобы квантиль уровня 0,95 совпадал с квантилем уровня 0,95 стандартного нормального распределения (табл. 1).

Относительная эффективность оценки определяется как

$$\varepsilon = \frac{V}{V_{opt}},$$

где V — вариация оценки, V_{opt} — вариация оценки, имеющей минимальную вариацию среди рассматриваемых оценок.

Эффективность полученных оценок сравнивались с оценками максимального правдоподобия (ОМП), радикальными оценками (РО), оценками максимальной устойчивости (ОМУ), средним квадратичным отклонением (СКО), абсолютным отклонением (АО) и средним абсолютным отклонением (САО).

Оценки (3)–(6) с оптимальными значениями параметра радикальности будем называть оптимальной оценкой обобщенно-нормального распределения 4-й степени (ООНР4), оптимальным взвешенным средним квадратичным отклонением (ОВСКО), оптимальным взвешенным абсолютным отклонением (ОВАО), оптимальным оценкой Коши (ООК) соответственно.

3.1. Оценивание параметра масштаба обобщенно-нормального распределения 4-й степени. Проводилось сравнение оценок параметра масштаба обобщенно-нормального распределения 4-й степени на следующих распределениях (табл. 2):

$$f(x) = \frac{2}{1.767\Gamma(0.25)} e^{-\left(\frac{x}{1.767}\right)^4}, \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1.8}{1.767\Gamma(0.25)} e^{-\left(\frac{x}{1.767}\right)^4} + \frac{0.2}{5.301\Gamma(0.25)} e^{-\left(\frac{x}{5.301}\right)^4}, \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{1.8}{1.767\Gamma(0.25)} e^{-\left(\frac{x}{1.767}\right)^4} + \frac{0.2}{1.767\Gamma(0.25)} e^{-\left(\frac{x-8}{1.767}\right)^4}, \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1.8}{1.767\Gamma(0.25)} e^{-\left(\frac{x}{1.767}\right)^4} + \frac{0.2}{1.767\Gamma(0.25)} e^{-\left(\frac{x-2.5}{1.767}\right)^4}. \quad (10)$$

3.2. Оценивание параметра масштаба нормального распределения. Проводилось сравнение оценок параметра масштаба нормального распределения на следующих распределениях (табл. 3):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{0.9}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{0.1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{18}} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{0.9}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{0.1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-8)^2}{2}} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{0.9}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{0.1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2.5)^2}{2}} \quad (14)$$

3.3. Оценивание параметра масштаба распределения Лапласа. Проводилось сравнение оценок параметра масштаба распределения Лапласа на следующих распределениях (табл. 4):

$$f(x) = \frac{1}{1.1488} e^{-\frac{|x|}{0.7144}} \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{0.9}{1.1488} e^{-\frac{|x|}{0.7144}} + \frac{0.1}{4.2864} e^{-\frac{|x|}{2.1432}} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{0.9}{1.1488} e^{-\frac{|x|}{0.7144}} + \frac{0.1}{1.1488} e^{-\frac{|x-8|}{0.7144}} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{0.9}{1.1488} e^{-\frac{|x|}{0.7144}} + \frac{0.1}{1.1488} e^{-\frac{|x-2.5|}{0.7144}} \quad (18)$$

3.4. Оценивание параметра масштаба распределения Коши. Проводилось сравнение оценок пара-

метра масштаба распределения Коши на следующих распределениях (табл. 5):

$$f(x) = \frac{1}{0.2605\pi \left[1 + \left(\frac{x}{0.2605} \right)^2 \right]}; \quad (19)$$

$$f(x) = \frac{0.9}{0.2605\pi \left[1 + \left(\frac{x}{0.2605} \right)^2 \right]} + \frac{0.1}{0.7815\pi \left[1 + \left(\frac{x}{0.7815} \right)^2 \right]}; \quad (20)$$

$$f(x) = \frac{0.9}{0.2605\pi \left[1 + \left(\frac{x}{0.2605} \right)^2 \right]} + \frac{0.1}{0.2605\pi \left[1 + \left(\frac{x-8}{0.2605} \right)^2 \right]}; \quad (21)$$

$$f(x) = \frac{0.9}{0.2605\pi \left[1 + \left(\frac{x}{0.2605} \right)^2 \right]} + \frac{0.1}{0.2605\pi \left[1 + \left(\frac{x-2.5}{0.2605} \right)^2 \right]}. \quad (22)$$

Заключение. В работе были предложены оценки параметров масштаба на основе взвешенного метода максимального правдоподобия. Было проведено сравнение эффективности полученных оценок с наиболее известными оценками параметра масштаба. По результатам исследования можно сделать следующие выводы:

1. Оценки взвешенного метода максимального правдоподобия при условии совпадения априорного и исходного распределения при наличии симметричных выбросов являются наиболее эффективными в рамках рассматриваемых оценок.

2. При наличии асимметричных выбросов эффективность оценки взвешенного метода максимального правдоподобия может зависеть от параметра сдвига

засоряющего распределения. В случае, когда выбросы находятся достаточно близко к основному распределению или внутри него, оценки с более мягким усечением (весовые функции $g^l(x)$ с более затянутыми хвостами) начинают проигрывать оценкам с более жестким усечением.

3. При удалении выбросов от основного распределения эффективность оценок при условии совпадения априорного и исходного распределения начинает возрастать.

4. Оценки максимальной устойчивости проигрывают оценкам с оптимальным значением параметра радикальности, что говорит о слишком сильном усечении ОМУ.

5. Ввиду сложного выбора наиболее эффективных оценок параметра масштаба требуется синтез алгоритмов адаптивных как к наличию и степени выбросов, так и по виду исходного распределения.

Библиографический список

1. Робастность в статистике / Ф. Хампель [и др]. — М. : Мир, 1989 — 512с.
2. Хьюбер, П. Робастность в статистике / П. Хьюбер. — М. : Мир, 1984 — 303 с.
3. Шурыгин, А. М. Прикладная статистика. Робастность. Оценивание. Прогноз / А. М. Шурыгин. — М. : Финансы и статистика, 2000 — 223 с.
4. Шуленин, В. П. Математическая статистика. Ч. 3. Робастная статистика / В. П. Шуленин — Томск : Изд-во НТЛ, 2012. — 518 с.
5. Симахин, В. А. Непараметрическая статистика. Ч. II. Теория оценок / В. А. Симахин. — Курган : Изд-во КГУ, 2004 — 163 с.
6. Симахин, В. А. Робастные непараметрические оценки / В. А. Симахин. — Saarbrücken : LAMBERT Academic Publishing, 2011. — 292 с.
7. Симахин, В. А. Адаптивные оценки параметра сдвига / В. А. Симахин, О. С. Черепанов // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2013. — № 1. — С. 131–137.

БАТРАКОВ Петр Андреевич, ассистент кафедры теплоэнергетики Омского государственного технического университета.

ЧЕРЕПАНОВ Олег Сергеевич, аспирант, ассистент кафедры программного обеспечения автоматизированных систем Курганского государственного университета.

Адрес для переписки: ocherepanov@inbox.ru

Статья поступила в редакцию 04.03.2014 г.

© П. А. Батраков, О. С. Черепанов

Книжная полка

537/К17

Калистратова, Л. Ф. Основы колебательного и волнового движений : учеб. электрон. изд. локального распространения : учеб. пособие для студентов по направлению 5511 и специальности 2008 и 2205 / Л. Ф. Калистратова, А. А. Гладенко, Э. М. Ярош ; ОмГТУ. — Омск: Изд-во ОмГТУ, 2013. — 1 о=эл. опт. диск (CD-ROM).

В учебном электронном издании представлено описание физических основ гармонических механических и электромагнитных колебаний. Приводятся примеры решения задач, сводки формул. Предложены вопросы и задачи для проведения коллоквиума или экзамена. Предназначено для студентов радиотехнического факультета, обучающихся по специальностям 2008.00 «Проектирование и технология электронных средств», 2007.00 «Радиотехника», 2205.00 «Конструирование и технология ЭВС» и другим родственным специальностям.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Для указанного в названии класса линейных систем доказан прямым методом Ляпунова критерий экспоненциальной устойчивости в H^1 -топологии. Приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: Пространство Соболева, H^1 -устойчивость, функционал Ляпунова.

1. Работа является продолжением выполненных в последние годы исследований по прямому методу Ляпунова для функционально-дифференциальных уравнений [1–6]. Рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \int_0^1 [d_s R(s, t)] \dot{x}(t-s) + \int_0^1 [d_s T(s, t)] x(t-s) & (t \geq 1), \\ x|_{[0,1]} = \varphi \in E = H^1([0,1] \rightarrow \mathbb{C}^N) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $R, T : [0,1] \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$,

$$\begin{cases} R \text{ абсолютно непрерывна по } s, \quad |R'_s| \leq \text{const}, \\ \int_{s=0}^{s=1} V(T) < \infty, \quad |T| \leq \text{const}, \quad T(0, t) = 0, \\ R'_s, T \text{ непрерывны по } t. \end{cases} \quad (2)$$

Имеет место однозначная разрешимость задачи Коши (1) в классе функций $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^N$, принадлежащих H^1 на каждом отрезке полуоси $[0, \infty)$; класс таких функций далее обозначается \mathcal{H}^1 . В автономном случае это следует из результатов в [7], в случае (1) является следствием выполняемых далее построений.

В работе [6] рассматривается задача Коши вида (1) для подкласса систем (1) Устойчивость решений линейных систем нейтрального типа. Доказан, в рамках прямого метода Ляпунова, критерий экспоненциальной устойчивости в H^1 -топологии в терминах операторных неравенств сведением к такой же задаче для разностного уравнения в фазовом пространстве $H^1[0,1]$. Данная работа посвящена переносу результатов работы [6] на более общий случай функционально-дифференциальной системы (1) нейтрального типа.

2. Приведем для удобства ссылок два используемых далее факта из теории интеграла Стильбеса.

ЛЕММА 1. [8, с. 323]. Если $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ имеют ограниченное изменение на $[a, b]$ и $f \in C[a, b]$, то

существует $\int_a^b g df$ и при этом

$$\int_a^b f dg = fg|_a^b - \int_a^b g df.$$

ЛЕММА 2. [9, с. 359] Если f абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и существует $\int_a^b g df$, то

$$\int_a^b g df = \int_a^b g f' dt.$$

Оба утверждения без труда переносятся на векторно-матричный случай.

Далее $|\cdot|$ — эрмитова норма в \mathbb{C}^N , так же обозначается согласованная с ней матричная норма; $End E$ — множество линейных непрерывных операторов $E \rightarrow E$.

3. Функции $\varphi \in E$ абсолютно непрерывны [10, с. 253], в частности, однозначно определяются данными $\dot{\varphi}(t), \varphi(0)$. Далее $\varphi \in E$ отождествляется с этой парой:

$$\varphi \sim \begin{bmatrix} \hat{\varphi} \\ \varphi_0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi} = \dot{\varphi} \in H^0 = L_2([0,1] \rightarrow \mathbb{C}^N), \quad \varphi_0 = \varphi(0). \quad (3)$$

Операторы из $End E$ представляются в «базисе» (3) операторными матрицами второго порядка.

Определим скалярное произведение в E формулой

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int \dot{\varphi}^* \dot{\psi} dt + \varphi_0^* \psi_0.$$

Нетрудно убедиться, что соответствующая норма

$$\|\varphi\|^2 = \int_0^1 |\dot{\varphi}|^2 dt + |\varphi_0|^2$$

топологически эквивалентна стандартной норме в E .

4. Пусть $x(t)$ — решение класса \mathcal{H}^1 системы (1). Применение к первому интегралу в (1) — с учетом абсолютной непрерывности R по s — леммы 2 и ко второму интегралу — с учетом абсолютной непрерывности функции $y_i(s)$ — последовательно лемм 1 и 2 дает:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [d_s R(s, t)] \dot{x}(t-s) &= \int_0^1 R'_s(s, t) \dot{x}(t-s) ds, \\ \int_0^1 [d_s T(s, t)] x(t-s) &= \int_0^1 T(s, t) \dot{x}(t-s) ds + T(1, t) x(t-1) \end{aligned} \quad (4)$$

(учтено $T(0, t) = 0$). Построим по решению $x \in \mathcal{H}^1$ последовательность функций

$$x_n(t) = x(t+n), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (1), записывая, при фиксированном $t \in [0,1]$, полученное равенство в точке $t+n, n \geq 1$ и,

представляя интегралы в виде сумм интегралов по $[0, t]$, $[t, 1]$, после вычислений получим уравнение на функции (5):

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) - \int_0^t K(s, t+n)\dot{x}_n(t-s)ds = \\ = \int_t^1 K(s, t+n)\dot{x}_{n-1}(1+t-s)ds + T(1, t+n)x_{n-1}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

$$K(s, t) \equiv R'_s(s, t) + T(s, t)$$

Функция $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^N$ является решением класса \mathcal{H}^{-1} системы (1) точно тогда, когда все функции (5) принадлежат E , удовлетворяют уравнению (6) и условию согласования

$$x_n(0) = x_{n-1}(1). \quad (7)$$

Запишем систему (6) – (7) с $x_n \in E$ в «базисе» (3). Введем вектор

$$z_n = \begin{bmatrix} \dot{x}_n(t) \\ x_n(0) \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (8)$$

Замены в интегралах (6) соответственно $s \sim t-s$, $s-1+t-s$ и учет соотношений

$$\varphi(t) = -\int_t^1 \dot{\varphi}(s)ds + \varphi(1), \quad \varphi(1) = \int_0^1 \dot{\varphi}(s)ds + \varphi(0) \quad (\varphi \in E)$$

приводят после вычислений систему (6) – (7) к виду

$$\begin{bmatrix} I_0 - A_n & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} z_n = \begin{bmatrix} \Gamma_n S - B_n & \Gamma_n S \\ S & I \end{bmatrix} z_{n-1}, \quad (9)$$

где I_0, I – единицы в \mathbb{H}^0 и \mathbb{C}^N , операторы $A_n, B_n, S: \mathbb{H}^0 \rightarrow \mathbb{H}^0$ и матрица Γ_n даются формулами

$$\begin{aligned} A_n \hat{\varphi} &= \int_0^t K(t-s, t+n)\hat{\varphi}(s)ds, \\ B_n \hat{\varphi} &= \int_t^1 [T(1, t+n) - K(1+t-s, t+n)]\hat{\varphi}(s)ds, \\ S \hat{\varphi} &= \int_0^1 \hat{\varphi}(s)ds, \quad \Gamma_n(t) = T(1, t+n). \end{aligned} \quad (10)$$

ЛЕММА 3. Оператор $I_0 - A_n$ имеет равномерно по n ограниченный обратный $\mathbb{H}^0 \rightarrow \mathbb{H}^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится повторением доказательства, аналогичного утверждению в [6] с учетом вытекающей из (2) оценки $|K| \leq const$.

Из леммы 3 и доказанной выше эквивалентности системы (1) в классе $x \in \mathcal{H}^1$ и системы (9) для вектора $z_n \in E$ вытекает

ЛЕММА 4. Задача Коши (1) в классе функций $x \in \mathcal{H}^{-1}$ эквивалентна разностной задаче Коши

$$z_n = \Lambda_n z_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad z_0 = \varphi \in E, \quad (11)$$

где φ, z_n – векторы (3), (8), Λ_n – матрица

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} (I_0 - A_n)^{-1}(\Gamma_n S - B_n) & (I - A_n)^{-1}\Gamma_n S \\ S & I \end{bmatrix}, \quad (12)$$

с операторами (10).

СЛЕДСТВИЕ. Задача Коши (1) однозначно разрешима в классе \mathcal{H}^{-1} .

5. Операторная матрица

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 & \mathcal{F}_2 S \\ S \mathcal{F}_2^* & \mathcal{F}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \text{End } \mathbb{H}^0, \quad \mathcal{F}_0 \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad (13)$$

с эрмитовыми $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ задает с учетом $S^* = S$ в \mathbb{H}^0 эрмитов оператор в E .

ЛЕММА 5. Пусть при некотором $c > 0$ имеют место оценки

$$\mathcal{F}_0 \geq cI, \quad \Delta = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_0^{-1} \mathcal{F}_2^* \geq cI_0. \quad (14)$$

Тогда при некотором $\hat{c} > 0$ имеет место оценка $\mathcal{F} \geq \hat{c}I_E$, где I_E – единица в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ столь малым, что

$$\tilde{\Delta} = \Delta - \varepsilon \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_0^{-1} \mathcal{F}_2^* \geq \tilde{c}I_0, \quad \tilde{c} > 0.$$

Имеет место равенство $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} + \Theta$, где

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta} & 0 \\ 0 & \varepsilon \tilde{\mathcal{F}}_0 \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_0^{-1} \mathcal{F}_2 & \mathcal{F}_2 \\ S \mathcal{F}_2^* & \tilde{\mathcal{F}}_0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{F}}_0 = \frac{\mathcal{F}_0}{1 + \varepsilon}.$$

Очевидно $\tilde{\mathcal{F}} \geq \hat{c}I_E$ где $\hat{c} = \min\{\tilde{c}, \varepsilon(1 + \varepsilon)^{-1}c\}$. Легко получить:

$$\theta = Z \begin{bmatrix} I_0 & \tilde{\mathcal{F}}_0^{1/2} \\ S \tilde{\mathcal{F}}_0^{1/2} & \tilde{\mathcal{F}}_0 \end{bmatrix} Z^*, \quad Z = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_2 \tilde{\mathcal{F}}_0^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Пусть $\varphi \in E$, $\psi = Z^* \varphi = [\hat{\psi}, \psi_0]^T$. Вычисления дают

$$\begin{aligned} \langle \theta \varphi, \varphi \rangle &= \int_0^1 \left\{ |\hat{\psi}|^2 + 2 \text{Re} \hat{\psi}^* \tilde{\mathcal{F}}_0^{1/2} \psi_0 + \left| \tilde{\mathcal{F}}_0^{1/2} \psi_0 \right|^2 \right\} ds \geq \\ &\geq \int_0^1 \left\{ |\hat{\psi}| - \left| \tilde{\mathcal{F}}_0^{1/2} \psi_0 \right| \right\}^2 ds \geq 0, \end{aligned}$$

тем самым $\theta \geq 0$. Лемма доказана.

6. Будем говорить, что решение $x = 0$ задачи Коши (1) экспоненциально устойчиво в \mathbb{H}^1 -топологии, если это свойство имеет место для решения $z_n = 0$ разностного уравнения (11); для решений задачи Коши (11) с любой $\varphi \in E$ верна при некоторых $\mu, \nu > 0$ оценка

$$\|z_n\| \leq \mu e^{-\nu(n-m)} \|z_m\| \quad (n \geq m \geq 0).$$

Обозначим J класс операторных матриц $F_n: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \text{End } E$ со значениями вида (13), удовлетворяющих требованиям

$$F_n^* = F_n, \quad \alpha_k I_E \leq F_n \leq \alpha_2 I_E \quad (\alpha > 0) \quad (15)$$

Поставим в соответствие матрице $F_n \in J$ эрмитову форму

$$\upsilon(\varphi, n) = \langle F_n \varphi, \varphi \rangle, \quad \varphi \in E. \quad (16)$$

Разностная производная $\upsilon(z_n, n) - \upsilon(z_{n-1}, n-1)$ формы (16) вдоль траекторий системы (11) после подстановки $z_n = \Lambda_n z_{n-1}$ и замены $z_{n-1} \sim \varphi$ принимает вид

$$\dot{\upsilon}(\varphi, n) = \langle G_n \varphi, \varphi \rangle, \quad G_n = \Lambda_n^* F_n \Lambda_n - F_{n-1}. \quad (17)$$

ТЕОРЕМА. Для того чтобы решение $x=0$ уравнения (1) было экспоненциально устойчиво в \mathbb{H}^1 -топологии, необходимо и достаточно существование

матрицы $F_n \in J$ такой, что эрмитова форма (11) равномерно отрицательна:

$$G_n \leq -\alpha I_E \quad (\alpha = \text{const} > 0). \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится, с небольшими отличиями, по схеме, примененной в [6] при доказательстве критерия устойчивости для подкласса систем (1); в [6] матрица Λ_n в разностном уравнении (11) имеет такой же вид (12) с операторами A_n, B_n частного вида.

ПРИМЕР. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \int_0^1 s \dot{x}(t-s) ds + ax(t) + bx(t-1), & (t \geq 1), \\ x|_{[0,1]} = \varphi \in E = H^1([0,1] \rightarrow \mathbb{R}), & a, b \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (19)$$

Уравнение (19) имеет вид (1) при $R = s^2/2$,

$$T = 0 \quad \text{при } s = 0; T = a \quad \text{при } 0 < s < 1;$$

$$T = a + b \quad \text{при } s = 1.$$

Требование (2) выполняется очевидным образом. Покажем: при условиях

$$a + b < 0, \quad \frac{1}{2} \leq b < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{11}{12}} \quad (20)$$

решение $x=0$ уравнения (1) экспоненциально устойчиво в H^1 -топологии. Здесь $K(s)=s+T(s)$, уравнение (11) имеет вид

$$z_n = \Lambda z_{n-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} (I_0 - A^*)^{-1}(\Gamma S - B) & (I_0 - A^*)^{-1} \Gamma S \\ S & I \end{bmatrix},$$

$$A = \int_0^t (t-s+a) \bullet ds, \quad B = \int_t^1 [b - (1+t-s)] \bullet ds,$$

$$\Gamma = a + b.$$

Требование (18) означает существование матрицы $F \in J$ такой, что матрица

$$-G = F - \Lambda^* F \Lambda \quad (21)$$

равномерно положительна.

1°. Покажем, что при $b \geq \frac{1}{2}$ выполняется неравенство

$$\Gamma S - (A + A^*) \geq 0. \quad (22)$$

Имеем: при $\psi \in H^0$

$$\begin{aligned} [\Gamma S - (A + A^*)] \psi &= (a+b) \int_0^t \psi ds - \\ &- \left[\int_0^t (t-s+a) \psi ds + \int_t^1 (s-t+a) \psi ds \right] = \\ &= \int_0^1 (b - |t-s|) \psi ds, \end{aligned}$$

тем самым форма

$$\begin{aligned} \omega(\psi) &= ([\Gamma S - (A + A^*)] \psi, \psi)_{H_0} = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (b - |t-s|) \psi(s) \psi(t) ds dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Представим функцию $b - |s|$ рядом Фурье на $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned} b - |s| &= b - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi s, \\ c_n &= \frac{2[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^2} \geq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя в (23), с учетом равномерной сходимости ряда (24) получим

$$\begin{aligned} \omega(\psi) &= \int_0^1 \int_0^1 \left[b - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\cos n\pi s \cdot \cos \pi t + \right. \\ &\quad \left. + \sin n\pi s \cdot \sin n\pi t) \right] \psi(s) \psi(t) ds dt = \\ &= \left(b - \frac{1}{2} \right) \left[\int_0^1 \psi(s) ds \right]^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\left[\int_0^1 \cos n\pi s \cdot \psi(s) ds \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_0^1 \sin n\pi s \cdot \psi(s) ds \right]^2 \right) \geq 0, \end{aligned}$$

что означает выполнение (22).

2°. Положим в (21)

$$F = \begin{bmatrix} (I_0 - A^*)(I_0 - A) & -(I_0 - A^*)\Gamma S \\ -S\Gamma(I_0 - A) & \Gamma^2 - \Gamma \end{bmatrix}.$$

Проверим выполнение условий леммы 5. В проверке нуждается второе неравенство (14). Из (22), в частности, следует $A + A^* \leq 0$ (учтено $\Gamma < 0$). С учетом этого имеем

$$\begin{aligned} \Delta &= (I_0 - A^*)(I_0 - A) - (I_0 - A^*)\Gamma(\Gamma^2 - \Gamma)^{-1}\Gamma(I_0 - A) = \\ &= \delta [I_0 + A^*A - (A + A^*)] \geq \delta I_0, \end{aligned}$$

где $\delta = (1 + |\Gamma|)^{-1}$. В силу леммы 5 для матрицы F верна нижняя оценка (15). Верхняя оценка (15) следует из ограниченности F . Тем самым $F \in J$.

3°. Подстановка в (21) дает

$$-G = \begin{bmatrix} (I_0 - A^*)(I_0 - A) + \Gamma S - B^*B & A^*\Gamma S \\ S\Gamma A & \Gamma^2 \end{bmatrix}.$$

Проверка условий леммы 5 здесь также сводится к оценке оператора (14). Вычисления с учетом (22) дают

$$\begin{aligned} \Delta &= I_0 - B^*B + \Gamma S - (A + A^*) \geq \\ &\geq I_0 - B^*B \geq (1 - |B|^2) I_0 \geq \\ &\geq \left\{ 1 - \int_t^1 [b - (1+t-s)]^2 ds \right\} I_0 = \\ &= \left\{ 1 - \int_t^1 (b-s)^2 ds \right\} I_0 \geq \tilde{\delta} I_0, \end{aligned}$$

где $\tilde{\delta} = 1 - \int_0^1 (b-s)^2 ds$. Нетрудно показать: при

условиях (20) на параметр b будет $\tilde{\delta} > 0$. В силу леммы 5 матрица (21) равномерно положительна, тем самым выполнено условие (18) теоремы, что и требовалось.

Библиографический список

1. Алексенко, Н. В. Устойчивость решений нелинейных почти периодических систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа / Н. В. Алексенко // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2000. — № 2. — С. 3–6.
2. Алексенко, Н. В. Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами / Н. В. Алексенко, Р. К. Романовский // Дифференциальные уравнения. — 2001. — Т. 37; № 2. — С. 147–153.
3. Романовский, Р. К. Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с почти периодическими коэффициентами / Р. К. Романовский, Г. А. Троценко // Сибирский математический журнал. — 2003. — Т. 44; № 2. — С. 444–453.
4. Троценко, Г. А. Об устойчивости решений почти периодической системы функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа / Г. А. Троценко // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2003. — № 1. — С. 43–50.
5. Павликов, С. В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа / С. В. Павликов // Математические заметки. — 2008. — Т. 83; № 3. — С. 417–427.
6. Романовский, Р. К. Прямой метод Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем запаздывающего типа

в пространстве Соболева / Р. К. Романовский, Е. М. Назарук // Доклады Академии наук высшей школы РФ. — 2013. — № 2 (21). — С. 6–15.

7. Власов, В. В. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории / В. В. Власов, Д. А. Медведев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Т. 30. — С. 3–173.

8. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 542 с.

9. Эванс, Л. К. Уравнения с частными производными / Л. К. Эванс. — Новосибирск : Изд-во «Тамара Рожковская», 2003. — 560 с.

10. Мышкис, А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А. Д. Мышкис. — М. : Наука, 1972. — 352 с.

НАЗРУК Елена Маратовна, аспирантка кафедры прикладной математики и фундаментальной информатики, старший преподаватель кафедры высшей математики.

Адрес для переписки: elmarnaz@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 11.02.2014 г.

© Е. М. Назарук

Книжная полка

51/П39

Плохотников, К. Э. Вычислительные методы. Теория и практика в среде MATLAB: курс лекций: учеб. пособие для вузов по специальности 010701.65 «Физика» / К. Э. Плохотников. — 2-е изд., испр. — М. : Горячая линия -Телеком, 2013. — 496 с.

Изложены основные теоретические положения вычислительных методов, особое внимание уделено развитию у студентов практических навыков программирования классических вычислительных алгоритмов. В качестве среды программирования выбран пакет MATLAB, отличающийся простым в употреблении языком программирования и огромной библиотекой уже имеющихся программ для разного рода расчетов. В курсе из 15 лекций приводятся и разбираются 124 учебные программы MATLAB, на базе которых разработаны две контрольные работы, содержащие 180 задач. Для удобства читателей учебные программы, рассмотренные в книге, доступны на сайте издательства. Книга подготовлена на основе курса лекций «Вычислительные методы», прочитанного автором на физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Для студентов вузов; будет полезна инженерам и преподавателям.

51/Ф33

Федосеев, В. В. Экономико-математические методы и прикладные модели : учеб. для вузов по направлениям подгот. «Экономика» и «Менеджмент» для бакалавров / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, И. В. Орлова ; под ред. В. В. Федосеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2013. — 328 с.

Изложена система экономико-математических и математико-статистических методов и моделей для решения широкого класса теоретических и прикладных задач анализа и прогнозирования социально-экономических процессов. Теоретическое рассмотрение указанных моделей сопровождается конкретными числовыми примерами. Приведены вопросы, задания и упражнения для контроля усвоения изучаемых тем. Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения. Для студентов и аспирантов экономических направлений и специальностей, преподавателей дисциплин экономико-математического цикла, а также для практических работников в области финансово-экономической деятельности.