

# ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.2:004.421.5:004.7

**В. Н. ЗАДОРЖНЫЙ**Омский государственный  
технический университет

## РАСТУЩИЕ СЕТИ: ДИНАМИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ СВЯЗНОСТИ СМЕЖНЫХ УЗЛОВ

Разрабатывается численный метод для расчета двумерного распределения степеней связности (РСС) смежных узлов в растущих сетях. Задача решается на основе теории случайных графов, выращиваемых по нелинейному правилу предпочтительного связывания со стохастическими приращениями. Выводятся асимптотически точные уравнения, позволяющие быстро рассчитывать динамику формирования совместного РСС смежных вершин. Определяется финальное совместное РСС смежных вершин. Полученные результаты расширяют возможности адекватного описания и исследования конфигурационных характеристик реальных растущих сетей (социальных, телекоммуникационных, транспортных, террористических, финансовых и т.д.).

**Ключевые слова:** растущие сети, случайные графы, распределение степени связности узлов.

**1. Введение.** Теория случайных графов (сл.г.) с нелинейным правилом предпочтительного связывания (НППС) [1–3] представляет собой комплекс оригинальных математических моделей и методов, на основе которых органически систематизируется и обобщается большое число работ в области теории сетей (Network Science) — относительно нового раздела статистической механики. Одними из наиболее известных работ, посвящен-

ных растущим сетям, являются статьи [4–7]. Многие результаты этих и ряда других работ представляют собой частные случаи результатов теории сл.г. с НППС.

В [1–3] на основе математических моделей теории сл.г. с НППС успешно решается задача идентификации реальных исследуемых сетей, поскольку сл.г. с НППС легко и весьма точно калибруются практически по любому известному распределению

степени связности (РСС) узлов исследуемой сети и по ее коэффициенту кластеризации.

В работах [8, 9] теория сл.г. с НППС дополняется асимптотически точными аналитическими и численными методами расчета динамических характеристик сл.г. — т.е. переходных процессов (ПП), включая ПП, описывающие развитие сети в целом, и ПП, описывающие индивидуальное развитие выделенных вершин графа. Это позволяет решать задачи динамической идентификации исследуемых растущих сетей и формирует основу для создания математической теории управляемых растущих сетей.

Таким образом, в ходе развития теории сл.г. с НППС выясняется, что ее математический аппарат обладает высоким потенциалом, позволяющим адекватно решать множество разнообразных задач, возникающих в приложениях Network Science. В данной статье впервые решается задача о совместном РСС смежных вершин, т.е. о совместном распределении концевых степеней связности случайно выбранной дуги (с.в.д.) в графах с НППС, выращиваемых добавлениями стохастических приращений.

**2. Вывод основного рекуррентного соотношения.** Перечислим условия, определяющие процесс выращивания сл.г. с НППС путем неограниченного добавления стохастических приращений.

Граф выращивается начиная с заданной затравки — графа небольшого размера, содержащего  $N_0$  вершин. Будем считать, что начальный момент времени  $t_0 = N_0$ . На шаге времени  $t = t_0 + 1$  к графу добавляется приращение — новая вершина с  $x$  исходящими из нее дугами, свободные концы которых присоединяются к вершинам имеющегося графа. Далее эта операция повторяется на каждом новом шаге времени. Заметим, что сразу после присоединения очередной новой вершины всегда выполняется равенство  $N = t$ .

В общем случае приращения являются стохастическими: число  $x$  дуг каждого приращения является независимой случайной величиной с распределением вероятностей  $P(x_i = k) = r_k, g \leq k \leq h, \sum_{k=g}^h r_k = 1$ .

Связывание приращения с графом выполняется следующим образом. Поочередно каждая из дуг приращения свободным концом связывается с какой-либо вершиной имеющегося графа, выбираемой случайно, причем вероятность  $p_i$  выбора вершины  $i$  определяется как

$$p_i = \frac{f(k_i)}{\sum_j f(k_j)}, \quad (1)$$

где  $f(k)$  — весовая функция (вес) вершины, имеющей степень связности  $k$ ;  $f(k) > 0$ , если  $g \leq k \leq M$ , иначе  $f(k) = 0$  (здесь  $g \geq 1, M \leq \infty$ ). Поскольку аргумент весовой функции целочисленный, мы будем обозначать ее и как  $f_{k'}$ , рассматривая ее при этом как числовую последовательность весов. Этот прием позволит нам без лишних оговорок работать с весовыми функциями, не выражаемыми в элементарных функциях в замкнутом виде.

Совместное распределение концевых степеней связности с.в.д. кратко будем называть РСС с.в.д. Метод вывода формул для РСС с.в.д., как и в предшествующих работах [1–3], состоит в аналитическом асимптотически точном выражении изменений, происходящих в слоях  $A_k$  и туннелях  $B(l, k)$  графа на каждом шаге добавления к нему очередного стохастического приращения. Напомним, что

слой  $A_k$  определяется как множество вершин, степень которых равна  $k$ . Туннель  $B(l, k)$  определяется как множество дуг с начальной степенью (степенью вершины, из которой дуга исходит)  $l$  и терминальной степенью (степенью вершины, в которую дуга заходит)  $k$ . Общее название начальной и терминальной степеней дуги — концевые степени.

Аналитические выражения для усредненных приращений числа вершин в слоях и числа дуг в туннелях позволяют записать рекуррентные соотношения, описывающие в терминах РСС динамику развития графа. Эти соотношения легко реализуются в виде численных методов, ускоренных на порядки по сравнению с имитационным моделированием (ИМ) [9]. Если рекуррентные соотношения удастся свести к относительно несложным дифференциальным уравнениям, то развитие графа описывается аналитическими методами [8]. Финальные (стационарные) РСС могут быть получены как пределы ПП при  $t \rightarrow \infty$  либо непосредственным решением алгебраических уравнений, соответствующих стационарному режиму рассматриваемых процессов [1–3].

Рассуждения, учитывающие изменение числа дуг в туннелях  $B(l, k)$  при стохастическом приращении, мало отличаются от рассуждений, приведенных в [2] для случая фиксированного приращения. Поэтому просто перечислим эти изменения и приведем соответствующие им асимптотически точные аналитические выражения, снабдив их необходимыми краткими пояснениями.

Итак, при добавлении стохастического приращения — новой вершины с  $x$  исходящими из нее дугами — в графе происходит следующее.

1. Как установлено в [1, 9], при добавлении новой дуги ее конец связывается с вершиной слоя  $A_k$  с вероятностью  $\frac{q_k f_k}{\bar{f}(t)}$ , где  $\bar{f}(t)$  — средний вес вершин на шаге  $t$ :

$$\bar{f}(t) = \sum_{i \geq g} q_i f_i, \quad (2)$$

$q_k = q_k(t) = |A_k|/N$  — вероятность того, что случайно (равновероятно) выбранная на шаге  $t$  вершина принадлежит слою  $A_k$ .

Связавшаяся с дугой вершина вследствие повышения степени переходит в слой  $A_{k+1}$  и выводит из туннеля  $B(l, k)$  те дуги, которые в эту вершину заходили, в среднем  $|B(l, k)|/|A_k| = m N q_{l,k} / (N q_k) = m q_{l,k} / q_k$  дуг. С учетом вероятности выбора одной новой дугой вершины в слое  $A_k$  и среднего числа новых дуг  $m$  приращение выводит из туннеля  $B(l, k)$

в среднем  $m \frac{q_{l,k}}{q_k} \frac{q_k f_k}{\bar{f}(t)} = \frac{m^2 q_{l,k} f_k}{\bar{f}(t)}$  дуг.

2. Число дуг в туннеле  $B(l, k)$  уменьшается и тогда, когда конец новой дуги попадает в слой  $A_l$ , так как при этом вершина, в которую вошла дуга, переходит в слой  $A_{l+1}$ . По аналогии с п. 1 находим, что за счет этого в среднем из туннеля  $B(l, k)$  на шаге  $t$  выводится  $\frac{m^2 q_{l,k} f_l}{\bar{f}(t)}$  дуг.

3. Найдем теперь среднее число дуг, добавляемых в туннель  $B(l, k)$  на шаге  $t$ . С вероятностью  $\frac{q_{l-1} f_{l-1}}{\bar{f}(t)}$  конец дуги приращения попадает в какую-либо вершину слоя  $A_{l-1}$ . Эта вершина, переходя в слой  $A_l$ , переводит в состав туннеля  $B(l, k)$  в среднем  $|B(l-1, k)|/|A_{l-1}| = m N q_{l-1,k} / (N q_{l-1}) = m q_{l-1,k} / q_{l-1}$

исходивших из нее дуг туннеля  $B(l-1, k)$ . С учетом вероятности выбора одной новой дугой вершины в слое  $A_{l-1}$  и среднего числа новых дуг  $m$  приращение графа добавляет в состав туннеля  $B(l, k)$  в среднем  $\frac{m^2 q_{l-1, k} f_{l-1}}{\tilde{f}(t)}$  дуг.

4. Число дуг в туннеле  $B(l, k)$  увеличивается и в том случае, если конец дуги приращения попадает в слой  $A_{k-1}$ , так как при этом вершина, в которую вошла дуга, переходит в слой  $A_k$ . Эта вершина, переходя в слой  $A_k$ , переводит в состав туннеля  $B(l, k)$  в среднем  $|B(l, k-1)|/|A_{k-1}| = mNq_{l, k-1}/(Nq_{k-1}) = mq_{l, k-1}/q_{k-1}$  заходивших в нее дуг туннеля  $B(l-1, k)$ . По аналогии с п. 3 находим, что в среднем за счет этого в туннель  $B(l, k)$  добавляется  $\frac{m^2 q_{l, k-1} f_{k-1}}{\tilde{f}(t)}$  дуг.

5. Кроме того, сами новые дуги приращений тоже могут пополнять туннель  $B(l, k)$ . С вероятностью  $r_l$  приращение имеет  $l$  дуг (т.е. новая вершина попадает в слой  $A_l$ ). Каждая ее дуга, выбравшая вершину слоя  $A_{k-1}$ , сама тоже добавляется в туннель  $B(l, k)$ , что выше не учитывалось. Средняя такого рода добавка с учетом вероятности  $r_l$  рассматриваемого случая, числа  $l$  дуг приращения и вероятности  $\frac{q_{k-1} f_{k-1}}{\tilde{f}(t)}$  выбора любой из дуг вершины слоя  $A_{k-1}$  составляет  $lr_l \frac{q_{k-1} f_{k-1}}{\tilde{f}(t)}$ .

Основное асимптотически точное рекуррентное соотношение (записанное с явным указанием номера  $t = N$  шага выращивания графа) получим суммированием всех найденных изменений числа дуг в туннеле  $B(l, k)$ :

$$|B_{t+1}(l, k)| = |B_t(l, k)| + lr_l \frac{q_{k-1} f_{k-1}}{\tilde{f}(t)} + \frac{m^2 q_{l, k-1} f_{k-1}}{\tilde{f}(t)} + \frac{m^2 q_{l-1, k} f_{l-1}}{\tilde{f}(t)} - \frac{m^2 q_{l, k} f_k}{\tilde{f}(t)} - \frac{m^2 q_{l, k} f_l}{\tilde{f}(t)}.$$

Перепишем его, выражая число дуг в туннелях через вероятности принадлежности этим туннелям с.в.д. графа, следующим образом:

$$m \cdot (t+1) \cdot q_{l, k}(t+1) = mt \cdot q_{l, k}(t) + lr_l \frac{q_{k-1}(t) f_{k-1}}{\tilde{f}(t)} + \frac{m^2 q_{l, k-1}(t) f_{k-1}}{\tilde{f}(t)} + \frac{m^2 q_{l-1, k}(t) f_{l-1}}{\tilde{f}(t)} - \frac{m^2 q_{l, k}(t) f_k}{\tilde{f}(t)} - \frac{m^2 q_{l, k}(t) f_l}{\tilde{f}(t)}, \quad (3)$$

где  $t = N$  — номер шага и число вершин в графе на этом шаге,

$q_i(t)$  — вероятность слоя  $A_i$  на шаге  $t$ ,  
 $q_{ij}(t)$  — вероятность туннеля  $B(i, j)$  на шаге  $t$ ,  
 $mt$  — среднее число дуг в графе на шаге  $t$ .

Соотношение (3) является основным асимптотически точным рекуррентным соотношением, описывающим динамику изменения двумерного РСС с.в.д. графа и позволяющим найти точное финальное РСС с.в.д. Динамику входящих в (3) вероятностей слоев  $q_i(t)$  можно рассчитать методом, разработанным в [9].

**3. Точное решение задачи о финальном распределении концевых степеней дуг при стохастическом приращении графа.** Раскрывая в левой части (3) скобку  $(t+1)$ , учитывая, что в стационарном режиме  $q_{l, k}(t+1) = q_{l, k}(t) = Q_{l, k} = \text{const}$ ,

$\tilde{f}(t) = \langle f \rangle$  и приводя в (3) подобные члены, получаем для финальных вероятностей  $Q_{l, k}$  алгебраическое уравнение

$$mQ_{l, k}(\langle f \rangle + mf_k + mf_l) = lr_l Q_{k-1} f_{k-1} + m^2 Q_{l, k-1} f_{k-1} + m^2 Q_{l-1, k} f_{l-1},$$

из которого находим соответствующее рекуррентное решение:

$$Q_{l, k} = \frac{f_{k-1}(lr_l Q_{k-1} + m^2 Q_{l, k-1}) + f_{l-1} m^2 Q_{l-1, k}}{m(\langle f \rangle + mf_k + mf_l)}, \quad l, k = g, g+1, g+2, \dots \quad (4)$$

Финальные вероятности слоев  $Q_i$ , используемые в (4), определяются, как установлено в [1], рекуррентно

$$Q_i = \frac{r_i \langle f \rangle + mf_{i-1} Q_{i-1}}{\langle f \rangle + mf_i}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

а значение  $\langle f \rangle = a$  среднего веса вершины рассчитывается путем численного решения системы уравнений (5) совместно с уравнением

$$a = \langle f \rangle = \sum_{i=g}^{M+1} f_i Q_i. \quad (6)$$

При этом средний вес  $\langle f \rangle = a$  и вероятности  $Q_i$  определяются одновременно, а в качестве проверочного равенства используется формула для определения средней степени  $\langle k \rangle$ , которая по построению графа должна быть равна  $2m$ :

$$\langle k \rangle = \sum_{k=g}^{M+1} k Q_k = 2m.$$

В [1] подробно описана простая процедура решения системы уравнений (5), (6) на Excel. Заметим, что в нотации, принятой в данной статье, частные случаи (например, случай, когда в (4)  $l = g, k = g$  и т.п., или когда в (5)  $i = g$ ) отдельно не выписываются, ибо формулы (4), (5) покрывают эти частные случаи, и потому в их отдельном описании нужды не возникает.

Таким образом, зная  $\langle f \rangle$  и  $\{Q_i\}$ , мы по формуле (4) можем построчно рассчитать все элементы матрицы финального РСС с.в.д.  $\mathbf{Q} = \|Q_{l, k}\|$ , начиная с элемента  $Q_{g, g} = 0$  (при расчете  $Q_{g, g}$  числитель формулы (4) обращается в нуль). При этом в соответствии с (4) столбцы с номерами  $k \leq g$  в матрице  $\mathbf{Q}$  заполняются нулями, строки с номерами  $l < g$  (когда  $g > 1$ ) — тоже.

Формулу (4) можно использовать и для расчета РСС с.в.д. графа, выращиваемого с помощью фиксированных приращений. В этом случае  $x \equiv m, g = m$  и формула (4) превращается в следующую формулу, ранее найденную в [3] для случая фиксированных приращений:

$$Q_{l, k} = \begin{cases} 0, & l \geq m, k = m, \\ \frac{f_m Q_m}{\langle f \rangle + m(f_m + f_{m+1})}, & l = m, k = m+1, \\ \frac{f_{k-1}(Q_{k-1} + mQ_{l, k-1})}{\langle f \rangle + m(f_m + f_k)}, & l = m, k \geq m+2, \\ \frac{f_{l-1} Q_{l-1, k} + f_{k-1} Q_{l, k-1}}{\langle f \rangle + m f_l + f_k}, & l \geq m+1, k \geq m+1. \end{cases} \quad (7)$$

$l$	$k$ :								
		1	2	3	4	5	6	7	8
1		0	0.000185	0.000885	0.001177	0.001498	0.001303	0.001042	0.000818
2		0	0.001672	0.008064	0.010956	0.014002	0.012443	0.010120	0.008046
3		0	0.001838	0.009071	0.013041	0.016887	0.015795	0.013396	0.010986
4		0	0.002984	0.014636	0.020747	0.026858	0.024875	0.021011	0.017228
5		0	0.001196	0.006256	0.010187	0.013622	0.014034	0.012847	0.011151
6		0	0.000509	0.002817	0.005110	0.007126	0.007904	0.007727	0.007067
7		0	0.000230	0.001342	0.002655	0.003866	0.004536	0.004679	0.004479
8		0	0.000111	0.000674	0.001433	0.002176	0.002672	0.002881	0.002869

Рис. 1. Совместное РСС  $\|Q_{l,k}\|$  с.в.д. в тестовом графе

$l$	$k$ :								
		1	2	3	4	5	6	7	8
1		0	0.000152	0.000940	0.001210	0.001446	0.001321	0.001045	0.000836
2		0	0.001644	0.008212	0.010901	0.013748	0.012801	0.010137	0.008027
3		0	0.001835	0.009203	0.012927	0.017109	0.015871	0.013583	0.011185
4		0	0.003076	0.014506	0.020362	0.026489	0.025029	0.021161	0.017324
5		0	0.001279	0.006247	0.010178	0.013544	0.013990	0.012910	0.011261
6		0	0.000521	0.002902	0.005200	0.007163	0.007902	0.007912	0.007015
7		0	0.000237	0.001423	0.002713	0.003901	0.004509	0.004683	0.004431
8		0	0.000098	0.000612	0.001384	0.002129	0.002682	0.002839	0.002941

Рис. 2. Оценки вероятностей  $Q_{l,k}$  полученные имитационным моделированием

В самом деле, как и формула (7), формула (4) в случае  $l \geq m$ ,  $k = m$  дает нуль, так как в этом случае в (4)  $f_{k-1} = f_{m-1} = 0$  (по определению) и  $Q_{l-1,k} = Q_{l-1,m} = 0$  (в граничный слой с номером  $k = m$  дуги не заходят). В случае  $l = m$ ,  $k = m + 1$  формула (4) может быть переписана в виде:

$$Q_{l,k} = \frac{f_m(mr_m Q_m + m^2 Q_{m,m})}{m(\langle f \rangle + mf_{m+1} + mf_m)} = \frac{f_m Q_m}{\langle f \rangle + m(f_{m+1} + f_m)},$$

так как  $Q_{m,m} = 0$  (в граничный слой дуги не заходят) и  $r_m = 1$  (число дуг фиксированного приращения равно  $m$  с вероятностью 1). Т.е. и в этом случае формула (4) совпадает с формулой (7). Аналогично устанавливается и совпадение при фиксированном приращении формулы (4) с формулой (7) в двух оставшихся случаях, когда  $l = m$ ,  $k \geq m + 2$  и когда  $l \geq m + 1$ ,  $k \geq m + 1$ .

Таким образом, нами найдена точная рекуррентная формула (4) финального совместного распределения конечных степеней связности с.в.д. графов с НППС со стохастическим приращением. Найденная ранее в [3] для графов с фиксированным приращением формула (7) является частным случаем формулы (4).

Следовательно, и формула РСС с.в.д. для графов с линейным правилом предпочтительного связывания (ЛППС, см. [2, 7]), являющаяся частным случаем формулы (7), также является частным случаем формулы (4).

**4. Верификация формулы финального РСС дуг с помощью имитационного моделирования графа.** Для верификации формулы (4) целесообразно в качестве тестового примера выбрать какую-нибудь «экзотическую» функцию весов. Возьмем, например, следующую достаточно произвольную дробно-рациональную функцию:

$$f_k = \frac{k^2 + 10}{k + 1}, \quad k = g, g + 1, g + 2, \dots, \quad (8)$$

принимая  $g = 1$ . Зададим для числа  $x$  дуг стохастического приращения графа ( $1 \leq x \leq 4$ ) распределение вероятностей  $(r_1, r_2, r_3, r_4) = (0,1, 0,4, 0,2, 0,3)$ .

Рассчитав описанным в [1] численным методом средний вес  $\langle f \rangle = a$  вершин этого графа и финальное РСС  $\{Q_i\}$  его вершин ( $i = 1, 2, \dots$ ), т.е. решив систему уравнений (5), (6), находим:

$$\langle f \rangle = 6,681323585,$$

$$\{Q_i\} = \{0,03103, 0,162506, 0,17347, 0,204099, 0,127748, 0,082378, 0,054961, 0,037894, \dots\}. \quad (9)$$

Затем по формуле (4) вычислим финальное совместное распределение конечных степеней с.в.д. графа (рис. 1).

Соответствующие результаты ИМ показаны на рис. 2. Сравнивая их с расчетными значениями  $Q_{l,k}$  (рис. 1), убеждаемся в полной согласованности точных расчетных значений и соответствующих приближенных имитационных оценок.

ИМ тестового графа выполнено Е. Б. Юдиным в среде Simbigraph [10].

**5. Уравнения динамики РСС дуг растущего графа.** Одним из преимуществ развиваемой здесь и в статьях [1–3, 8, 9] теории сл.г. с НППС и ее методологии является возможность расчета не только финальных РСС вершин и дуг, но и ПП изменения этих РСС в ходе выращивания графа.

В статье [9] разработаны численные методы расчета ПП для РСС вершин графов. Аналогичный подход можно развить и для численного расчета ПП РСС дуг.

Действительно, из основного соотношения (3) непосредственно находим, что

$$q_{l,k}(t+1) = \frac{1}{(t+1)\bar{f}(t)} \{t \cdot q_{l,k}(t)\bar{f}(t) + lr_l q_{l,k-1}(t)f_{k-1}/m + m[q_{l,k-1}(t)f_{k-1} = q_{l-1,k}(t)f_{l-1} - q_{l,k}(t)f_k - q_{l,k}(t)f_l]\}, \quad l, k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где РСС вершин  $\{q_i(t)\}$  на любом шаге времени рассчитывается по найденному в статье [9] рекуррентному соотношению



$l$	$k$ :	1	2	3	4	5	6	7	8
1		0	0.000124	0.001782	0.003085	0.002506	0.000868	0.000069	0
2		0	0.004124	0.038754	0.070916	0.056038	0.018034	0.000555	0
3		0	0.022455	0.109447	0.130413	0.057661	0.00565	0.000416	0
4		0	0.043394	0.129306	0.100878	0.035954	0.010755	0.000832	0
5		0	0.034271	0.054224	0.025475	0.011267	0.000658	0	0
6		0	0.011038	0.008983	0.007351	0.000219	0	0	0
7		0	0	0.002496	0	0	0	0	0
8		0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 3. Вероятности  $q_{lk}$  на шаге  $t = 10$ 

$l$	$k$ :	1	2	3	4	5	6	7	8
1		0	0.00018	0.000862	0.001149	0.001468	0.001289	0.001048	0.000844
2		0	0.001667	0.008039	0.010922	0.013961	0.012408	0.010095	0.00803
3		0	0.001832	0.009043	0.013002	0.016838	0.015752	0.013364	0.010966
4		0	0.002974	0.01459	0.020684	0.02678	0.024808	0.020961	0.017195
5		0	0.001192	0.006237	0.010157	0.013584	0.013998	0.012819	0.011133
6		0	0.000507	0.002809	0.005096	0.007108	0.007885	0.007712	0.007057
7		0	0.00023	0.001338	0.002648	0.003857	0.004527	0.004671	0.004475
8		0	0.00011	0.000672	0.00143	0.002171	0.002668	0.002878	0.002868

Рис. 4. Вероятности  $q_{lk}$  на шаге  $t = 1000$ 

$$q_k(t+1) = \frac{tq_k(t) + r_k + \frac{m}{f(t)}[q_{k-1}(t)f_{k-1} - q_k(t)f_k]}{t+1}, \quad k \geq g. \quad (11)$$

При  $t=t_0$  матрица  $\mathbf{q}(t) = \|q_{lk}(t)\|$  РСС с.в.д. и распределение степени вершин  $\{q_i(t)\}$  определяются в (11) по затравке графа.

**6. Пример расчета ПП для РСС дуг растущего графа.** В качестве примера рассчитаем ПП для РСС дуг тестового графа, описанного в разделе 4. В качестве затравки возьмем кольцо на пяти вершинах. Поэтому положим  $t_0 = N_0 = 5$ .

При  $t = 5$  (в соответствии с формой затравки) имеем РСС вершин  $\{q_i(t)\}$ , в котором  $q_2(t) = 1$  (все вершины принадлежат слою  $A_2$ ), остальные  $q_i(t)$  равны нулю. При этом, так как все степени  $k_i = 2$ , то  $\bar{f}(t) = f_2 = \frac{2^2 + 10}{2+1} = 4,6666\dots$  (см. (8)). То же самое получим при расчете по формуле (2). В матрице  $\mathbf{q}(t)$  элемент  $q_{2,2}(t) = 1$  (все дуги исходят из слоя  $A_2$  и входят в слой  $A_2$ ), все прочие элементы равны нулю. Таково начальное состояние графа при  $t = 5$ .

Используя формулы (10), (11), нетрудно реализовать в Excel или на каком-либо языке программирования расчет РСС с.в.д. для любого  $t > t_0$ .

Расчет с помощью такой процедуры РСС с.в.д. рассматриваемого графа дал для шага  $t = 10$  матрицу  $\mathbf{q}(t)$ , начальный фрагмент которой показан на рис. 3.

Для шага  $t = 1000$  начальный фрагмент матрицы  $\mathbf{q}(t)$  показан на рис. 4.

Сравнивая рис. 3, 4 с рис. 1 нетрудно видеть, что РСС с.в.д.  $\mathbf{q}(t) = \|q_{lk}(t)\|$  сходится к найденному ранее финальному РСС  $\mathbf{Q} = \|Q_{lk}\|$ .

**7. Заключение.** В статье разработан асимптотически точный метод расчета динамики совместного двумерного РСС  $\mathbf{q}(t) = \|q_{lk}(t)\|$  смежных вершин (т.е. РСС дуг) в графах с НППС и стохастическими приращениями. Метод позволяет также рассчитывать динамику РСС дуг при фиксированных приращениях в графах с НППС и динамику РСС дуг в графах с ЛППС. Это обеспечивает возможность

динамической идентификации реальных растущих сетей (социальных, телекоммуникационных, транспортных, террористических, финансовых и т.д.) не только по РСС вершин, но и по динамике изменения конфигурационных характеристик, таких, например, как коэффициент кластеризации графа [2].

В статье разработан также точный метод расчета финального РСС дуг  $\mathbf{Q} = \|Q_{lk}\|$  в графах с НППС и стохастическими приращениями, который охватывает в качестве частных случаев соответствующие методы, найденные ранее для графов с фиксированными приращениями и для графов с ЛППС.

Оба разработанных метода на несколько порядков превосходят как по скорости, так и, одновременно, по точности, используемые в настоящее время методы имитационного моделирования.

#### Библиографический список

1. Задорожный, В. Н. Случайные графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания / В. Н. Задорожный // Проблемы управления, 2011. – № 6. – С. 2–11.
2. Zadorozhnyi V.N., Yudin E.B. Structural properties of the scale-free Barabasi-Albert graph // Automation and Remote Control. – Vol. 73, № 4, 2012. – P. 252–261. DOI: 10.1134/S0005117908020070.
3. Zadorozhnyi V.N., Yudin E.B. Growing network: models following nonlinear preferential attachment rule, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 428, pp. 111-132, 2015 DOI: 10.1016/j.physa.2015.01.052.
4. Barabasi A.L., Albert R. Emergence of scaling in random networks, Science 286 (1999) 509–512.
5. Amaral L.A.N., Scala A., Barthelemy M., Stanley H.E., Classes of small-world networks, in: Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 97, 2000, p. 11149.
6. Barabasi A.L., Albert R. Statistical mechanics of complex networks, Rev. Mod. Phys 74 (2002) 47–97.
7. Krapivsky P.L., Redner S. Organization of growing random networks, Phys. Rev. E 63 (2001) 066123.
8. Задорожный, В. Н. Исследование динамики роста степени связности вершин случайного графа в моделях виртуальных сетей / В. Н. Задорожный, В. А. Бадрызов // Омский

научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — 2015. — № 1 (137). — С. 215–219.

9. Задорожный, В. Н. Переходные процессы в растущих сетях с нелинейным правилом предпочтительного связывания // В. Н. Задорожный, В. А. Бадрызов // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — 2016. — № 1 (145). — С. 95–99.

10. Задорожный, В. Н. Система агентного моделирования Simbigraph / В. Н. Задорожный, Е. Б. Юдин // Навигатор в мире науки и образования. — 2012. — № 4–7 (20–23). — С. 536.

**ЗАДОРЖНЫЙ Владимир Николаевич**, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Адрес для переписки: zwn2015@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 24.02.2016 г.

© В. Н. Задорожный

УДК 519.2:004.421.5:004.7

**В. Н. ЗАДОРЖНЫЙ**  
**В. А. БАДРЫЗЛОВ**  
**Е. Б. ЮДИН**

Омский государственный  
технический университет

## РАСТУЩИЕ СЕТИ С ПОТЕРЯМИ СВЯЗЕЙ

На основе теории случайных графов с нелинейным правилом предпочтительного связывания формулируется и исследуется модель растущих сетей (социальных, телекоммуникационных, транспортных, террористических, финансовых и т.д.), учитывающая случайные потери связей между участниками сети в ходе ее эволюции.

**Ключевые слова:** растущие сети, случайные графы, стационарные и переходные случайные процессы.

**1. Введение.** Многие свойства реальных больших сетей удается объяснить развитием этих сетей по так называемому линейному правилу предпочтительного связывания (ЛППС) [1]. Согласно этому правилу рост сети является результатом добавления к ней новых узлов, которые имеют  $m$  связей и предпочитают соединиться этими связями с теми узлами сети, у которых степень связности  $k$  выше [2, 3]. Математически ЛППС выражается формулой  $p_i = k_i / \sum_j k_j$ , которая определяет вероятность того, что новая связь (выбирающая узел графа независимо от других  $m - 1$  новых связей) соединится с узлом  $i$ , степень связности которого равна  $k_i$ . Таким образом, в ЛППС вероятность  $p_i$  связывания с узлом  $i$  пропорциональна степени связности этого узла:  $p_i \propto k_i$ .

Моделью таких сетей является граф Барабаши — Альберт (граф БА), предложенный Альбертом Барабаши и Рекой Альберт [2, 3]. Свойства графа БА согласуются со свойствами многих, хотя и далеко не всех реальных сетей [1, 4]. Дальнейшее развитие моделей растущих сетей привело к созданию нового раздела статистической механики, называемого теорией сетей (Network Science). Как показывает аналитический обзор публикаций, одним из наиболее удачных направлений развития Network Science, успешно конкурирующих с другими подходами, является теория случайных графов (сл.г.) с нелинейным правилом предпочтительного связывания (НППС) [5–10]. Многие результаты, полученные при использовании других подходов, являются простыми частными случаями результатов

теории сл.г. с НППС, получаемыми из ее формул немедленно при подстановке в них соответствующих значений параметров [6–8]. Ряд задач Network Science решен методами теории сл.г. с НППС впервые [5–10]. К таким задачам относится и задача расчета характеристик растущих графов с потерями связей, решаемая в данной статье.

Решаемая задача является шагом к повышению адекватности математического моделирования социальных сетей, бурное развитие которых оказывает серьезное влияние на общественные процессы, проявляющееся через рекламу, информационное протivостояние, идеологическую борьбу, вербовку новых членов террористическими организациями и т.д.

Существующие модели социальных сетей нередко подвергаются обоснованной критике [11], поскольку не учитывают такие особенности сетей, как ограниченность возможного числа связей у любого участника сети и случайное изменение существующих связей между участниками. Эти особенности учитываются моделью, разрабатываемой в настоящей статье на основе теории сл.г. с НППС.

**2. Основные положения теории случайных графов с НППС.** Теория сл.г. с НППС отличается от теории сл.г. с ЛППС двумя основными положениями.

Во-первых, в теории сл.г. с НППС приращение графа (добавляемые к графу новые вершины с исходящими из них дугами) стохастические, т.е. число  $x$  дуг каждого приращения является независимой случайной величиной с распределением вероятностей  $P(x_i = k) = r_k, g \leq k \leq h, \sum_k (r_k) = 1$ .

Во-вторых, вероятность  $p_i$  связывания с вершиной  $i$  в общем случае пропорциональна некоторой функции  $f$  от степени связности (весу) этой вершины:  $p_i \propto f(k_i)$ . Т.е. связывание приращения с графом выполняется следующим образом. Поочередно каждая из дуг приращения свободным концом связывается с какой-либо вершиной графа, выбираемой случайно, причем вероятность  $p_i$  выбора вершины  $i$  определяется так:

$$p_i = \frac{f(k_i)}{\sum_j f(k_j)}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где  $f(k)$  — вес вершины, имеющей степень связности  $k$ ;  $f(k) > 0$ , если  $g \leq k \leq M$ , иначе  $f(k) = 0$  (здесь  $M \leq \infty$ );  $N$  — число вершин в графе. Поскольку аргумент весовой функции  $f(k)$  целочисленный, мы будем обозначать ее также через  $f_k$ , рассматривая ее при этом как числовую последовательность весов. Этот прием позволит нам без лишних оговорок работать с весовыми функциями, не выражаемыми в элементарных функциях в замкнутом виде.

В качестве примера на рис. 1 показаны первые шаги выращивания графа с НППС из треугольного графа-затравки. Приращения с одной или двумя дугами появляются с одинаковой вероятностью,  $r_1 = r_2 = 1/2$ . При выборе вершин для присоединения дуг приращений используется правило (1) с весовой функцией  $f(k) = \ln(k)$ . Здесь минимальное число дуг в приращении  $g = 1$ , максимальное число дуг в приращении  $h = 2$ .

Одной из особенностей теории сл.г. с НППС является регулярное использование прямого теоретико-вероятностного анализа процессов, происходящих при выращивании сл.г. с НППС. Это позволяет выводить уравнения динамики для распределения степеней связности (РСС) вершин и/или дуг графа и переходить от уравнений динамики к уравнениям финальных РСС, получаемым предельным переходом при  $N \rightarrow \infty$ .

При этом РСС вершин определяется как дискретное распределение вероятностей  $\{q_k\}$ , которым описывается степень случайно (равновероятно) выбранной вершины графа. Если обозначить через  $A_k$  множество вершин в графе (слой), имеющих степень  $k$ , то  $q_k = |A_k|/N$ . При неограниченном добавлении приращений к графу число его вершин  $N \rightarrow \infty$  и  $\{q_k\} \rightarrow \{Q_k\}$ , где  $\{Q_k\}$  — финальное РСС вершин графа.

Для дуг графа РСС определяется как двумерное дискретное распределение вероятностей  $\{q_{l,k}\}$ , которым описываются концевые степени (начальная  $l$  и терминальная  $k$ ) случайно выбранной дуги (с.в.д.) графа. Начальная степень дуги — это степень вершины, из которой дуга исходит, терминальная степень — это степень вершины, в которую дуга заходит. Если обозначить через  $V(l,k)$  множество дуг в графе (туннель), имеющих начальную степень  $l$  и терминальную степень  $k$ , то  $q_{l,k} = |V_{l,k}|/R$ , где  $R$  — число дуг в графе. Из построения графа с очевидностью вытекает, что  $R \sim mN$  при  $N \rightarrow \infty$ , где  $m = \sum_k (kr_k)$  — среднее число дуг в приращении графа. Поэтому при анализе РСС дуг графа мы используем асимптотически точное приближение  $q_{l,k} \sim |V_{l,k}|/(mN)$ . С ростом графа  $\{q_{l,k}\} \rightarrow \{Q_{l,k}\}$ , где  $\{Q_{l,k}\}$  — финальное РСС дуг.

Туннели  $V(l,k)$  с наименьшим возможным значением  $l = g$  называются входными, все остальные туннели — внутренними. Понятия слоев и туннелей, используемые в теории сл.г. с НППС, иллю-

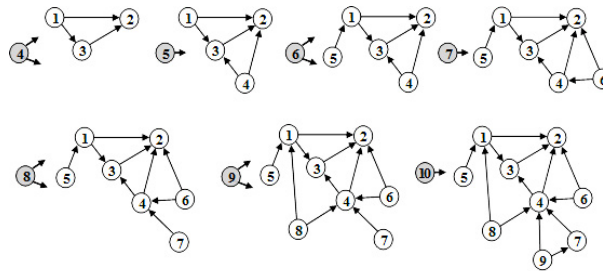


Рис. 1. Пример выращивания сл.г. с НППС из затравки, содержащей три вершины

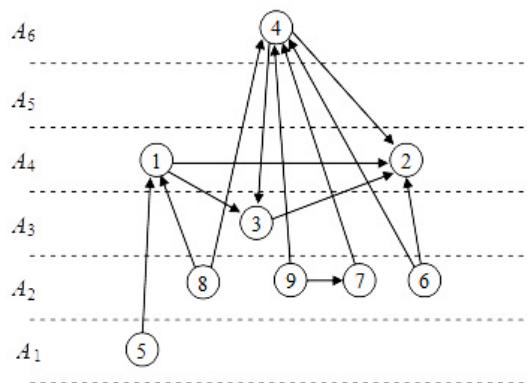


Рис. 2. Распределение по слоям вершин графа, построенного на рис. 1

стрируются на рис. 2 на примере графа, полученного на рис. 1 после присоединения вершины 9.

Граф представлен с явным распределением вершин по слоям  $A_1, \dots, A_6$ . Входной туннель  $V(1, 4)$  содержит только одну дугу, т.е.  $V(1, 4) = \{(5, 1)\}$ . Другие входные туннели пусты. Из внутренних туннелей непустыми являются:

- $V(2, 6) = \{(8, 4), (9, 4), (7, 4), (6, 4)\};$
- $V(2, 4) = \{(8, 1), (6, 2)\};$
- $V(4, 3) = \{(1, 3)\}; \quad V(3, 4) = \{(3, 2)\};$
- $V(4, 4) = \{(1, 2)\}; \quad V(6, 3) = \{(4, 3)\};$
- $V(6, 4) = \{(4, 2)\}, \quad V(2, 2) = \{(9, 7)\}.$

Используя изложенные основные положения теории сл.г. с НППС можно строить адекватные модели разнообразных сложных растущих сетей и решать сложные задачи, соответствующие целям исследования. Сформулируем и решим в терминах теории сл.г. с НППС поставленную во введении задачу анализа характеристик социальных сетей с учетом ограниченной степени связности их узлов и случайного изменения связей между ними.

**3. Динамика РСС вершин в графах с потерями дуг.** Возможные потери связей в моделируемых социальных сетях учтем следующим образом. Будем считать, что на каждом шаге выращивания графа выполняются две операции:

- 1) к графу присоединяется по правилу (1) новое приращение;
- 2) из графа удаляется случайное число с.в.д., в среднем  $\gamma$  дуг ( $0 < \gamma < m$ ).

Обратим внимание на то, что потери с.в.д. могут с положительной вероятностью приводить к тому, что будут появляться вершины со степенью  $k = 0$  (изолированные вершины). Это означает, что наименьшим номером слоя в графах с потерями дуг является номер  $g = 0$ . В соответствии с этим

естественно считать, что последовательность положительных весов может начинаться ненулевым весом  $f_0$ , обеспечивающим возможность «возвращения» в граф вершин, потерявших с ним все связи.

Число дуг, добавляемых в граф за один шаг, в среднем составляет  $M(x) - \gamma = m - \gamma = \bar{m} > 0$ . Будем считать, что случайное число удаляемых на каждом шаге дуг задано на конечном диапазоне возможных значений. Тогда среднее число дуг в графе  $M(R)$  при больших  $N$  сходится с относительной погрешностью нуль к величине  $\bar{m}N$ , т.е.  $M(R) \sim \bar{m}N$ .

Выведем уравнения динамики РСС  $\{q_k\}$  вершин графа путем определения асимптотически точных приближений для изменений вероятностей  $q_k$  в результате выполнения шага  $t$ . Примем за начало отсчета времени момент  $t_0 = N_0$ , где  $N_0$  — число вершин в затравке графа. Тогда в результате выполнения любого шага  $t > t_0$  выполняется равенство  $t = N$ .

Как показано в [10], в соответствии с правилом (1) каждая дуга поступившего на шаге  $t$  приращения выбирает для связывания вершину слоя  $A_k$  с вероятностью  $P_k = q_k f_k / \langle f \rangle$ , в результате чего распределение вершин по слоям изменяется:

$$N_k(t+1) = N_k(t) + r_k + mP_{k-1}(t) - mP_k(t), \quad k \geq 0, \quad (2)$$

где  $N_k$  — среднее число вершин в слое  $A_k$ . В записи (2) цитируемого соотношения учтено, что в нашем случае  $g = 0$ .

В графе с потерями дуг на каждом шаге  $t$ , после присоединения к графу нового приращения, происходит также потеря в среднем  $\gamma$  с.в.д., в результате которой среднее число дуг (2) в каждом слое претерпевает дополнительно следующие изменения. С вероятностью  $\Sigma_l(q_{l,k})$  любая с.в.д. может заходить в вершину слоя  $A_k$ . В таком случае потеря этой с.в.д. уменьшает на единицу степень соответствующей вершины слоя  $A_k$ , и вершина уходит из данного слоя в слой  $A_{k-1}$ . Число вершин в слое  $A_k$  уменьшается на единицу. С учетом вероятности  $\Sigma_l(q_{l,k})$  рассматриваемого случая и среднего числа  $\gamma$  теряемых на шаге  $t$  дуг в среднем за счет возможности захода теряемых дуг в слой  $A_k$  число вершин в нем уменьшается на  $\gamma \Sigma_l(q_{l,k})$ . Рассматривая аналогичным образом возможность захода с.в.д. в слой  $A_{k+1}$ , находим, что за счет этой возможности в среднем на шаге  $t$  число вершин в слое  $A_k$  возрастает на  $\gamma \Sigma_l(q_{l,k+1})$ . Кроме того, число вершин в этом слое убывает [возрастает] в среднем на  $\gamma \Sigma_l(q_{l,k})$  [в среднем на  $\gamma \Sigma_l(q_{l,k+1})$ ] за счет возможности исхода с.в.д. из слоя  $A_k$  [из слоя  $A_{k+1}$ ]. Таким образом, общая поправка к среднему числу дуг в слое  $A_k$ , вносимая потерей с.в.д., составляет величину

$$\begin{aligned} \Delta N_k(t) = & \gamma \Sigma_l(q_{l,k+1}) - \gamma \Sigma_l(q_{l,k}) + \gamma \Sigma_l(q_{l,k+1}) - \\ & - \gamma \Sigma_l(q_{l,k}) = \gamma [\Sigma_l(q_{l,k+1}) + \Sigma_l(q_{l,k+1,l})] - \gamma [\Sigma_l(q_{l,k}) + \\ & + \Sigma_l(q_{l,k,l})] = \gamma \{ [M \Sigma_l |B(l,k+1)| + M \Sigma_l |B(k+1,l)|] - \\ & - [M \Sigma_l |B(l,k)| + M \Sigma_l |B(k,l)|] \} / (\bar{m}N), \end{aligned}$$

где  $M$  — символ математического ожидания. Нетрудно видеть, что выражение в первой паре квадратных скобок есть не что иное, как среднее число дуг, инцидентных вершинам слоя  $A_{k+1}$  и равное, очевидно,  $(k+1)N_{k+1}$ , во второй паре квадратных скобок — среднее число дуг, инцидентных вершинам слоя  $A_k$  (равное  $kN_k$ ). Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta N_k(t) = & \gamma(k+1)N_{k+1} / (\bar{m}N) - \gamma k N_k / (\bar{m}N) = \\ & = \gamma(k+1)q_{k+1} / \bar{m} - \gamma k q_k / \bar{m}. \end{aligned} \quad (3)$$

Добавляя поправку (3), вносимую потерей с.в.д., к (2), получаем:

$$N_k(t+1) = N_k(t) + r_k + mP_{k-1}(t) - mP_k(t) + \gamma(k+1)q_{k+1} / \bar{m} - \gamma k q_k / \bar{m}.$$

Наконец, выражая здесь  $P_i = q_i f_i / \langle f \rangle$  через исходные данные и текущее РСС вершин  $\{q_k\} = \{q_k(t)\}$ , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} N_k(t+1) = & N_k(t) + r_k + \frac{m}{\langle f \rangle} [q_{k-1}(t)f_{k-1} - \\ & - q_k(t)f_k] + \frac{\gamma}{\bar{m}} [(k+1)q_{k+1}(t) - kq_k(t)], \end{aligned}$$

где  $\bar{f}(t) = \sum_{k \geq 0} f_k q_k(t)$  — средний вес вершин на шаге  $t$ ,

или

$$\begin{aligned} (t+1)q_k(t+1) = & tq_k(t) + r_k + \frac{m}{\bar{f}(t)} [q_{k-1}(t)f_{k-1} - \\ & - q_k(t)f_k] + \frac{\gamma}{\bar{m}} [(k+1)q_{k+1}(t) - kq_k(t)], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $t = N$  — число всех вершин на шаге  $t$ , или, окончательно,

$$\begin{aligned} q_k(t+1) = & \frac{tq_k(t) + r_k + \frac{m}{\bar{f}(t)} [q_{k-1}(t)f_{k-1} - q_k(t)f_k] +}{(t+1)} \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{\frac{\gamma}{\bar{m}} [(k+1)q_{k+1}(t) - kq_k(t)]}{}, \end{aligned} \quad (5)$$

для всех  $k \geq 0$ .

Соотношение (5) представляет собой асимптотически точную систему уравнений динамики РСС  $\{q_k(t)\}$  вершин графа с НППС с потерями дуг.

**4. Расчет финального РСС вершин при ограниченной степени связности.** Вершины растущего графа с НППС имеют ограниченную степень связности, если ограничена последовательность ненулевых весов  $f_{g^1}, \dots, f_{M^1}$ , используемая в НППС (1), т.е. если  $M < \infty$ .

Действительно, в этом случае максимальная степень вершин графа равна  $M+1$ , так как к вершинам, переместившимся по мере роста их степени в слой  $A_{M+1}$ , новые дуги присоединяться не будут (вес  $f_{M+1}$  таких вершин равен нулю). Тем самым в теории сл.г. с НППС автоматически учитываются критические замечания (высказываемые в отношении теории сл.г. с ЛППС, [11]), в которых указывается на ограниченность степеней связности в социальных сетях.

Уравнение для финального РСС  $\{Q_k\}$  вершин графа с потерями дуг легко выводится из соотношения (4). Записывая левую часть равенства (4) в виде  $tq_k(t+1) + q_k(t+1)$  и устремляя  $t$  к бесконечности, можно сократить члены  $tq_k(t+1)$  в левой части и  $tq_k(t)$  в правой, поскольку оба они сходятся к одной и той же величине  $tQ_k$ . Оставшиеся в уравнении вероятности слоев и средний вес вершин также следует заменить их финальными (предельными) значениями. В результате получаем:



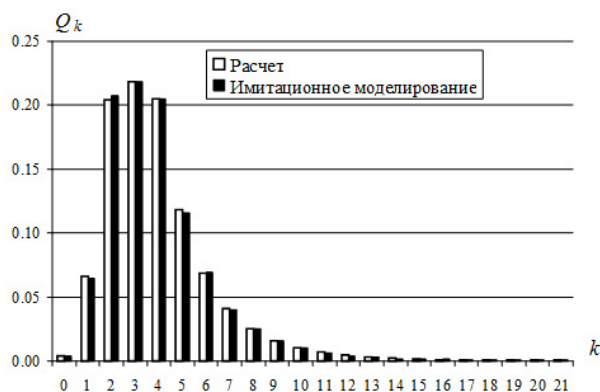


Рис. 3. Сравнение результатов точного расчета РСС вершин с результатами ИМ

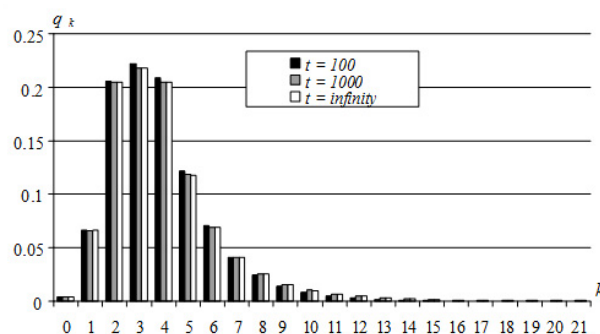


Рис. 4. Демонстрация сходимости переходных РСС  $\{q_k(t)\}$  к финальному РСС  $\{Q_k\}$

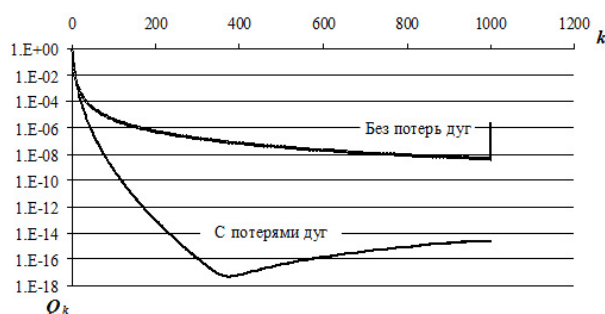


Рис. 5. Сравнение РСС  $\{Q_k\}$  эквивалентных по  $f(k)$  и по  $\langle k \rangle$  графов без потерь и с потерями

$$Q_k = r_k + \frac{m}{\langle f \rangle} [Q_{k-1} f_{k-1} - Q_k f_k] + \frac{\gamma}{m} [(k+1)Q_{k+1} - kQ_k], \quad k \geq 0. \quad (6)$$

Выражая отсюда  $Q_k$  в виде

$$Q_k = \frac{\frac{r_k + mQ_{k-1}f_{k-1}}{\langle f \rangle} + \frac{k+1}{m} \gamma Q_{k+1}}{1 + \frac{mf_k}{\langle f \rangle} + \frac{k\gamma}{m}}, \quad k \geq 0, \quad (7)$$

получаем вместе с уравнением

$$\langle f \rangle = \sum_k (f_k Q_k) \quad (8)$$

систему (7), (8) из  $M+3$  уравнений с  $M+3$  неизвестными, которая при ограничении « $f_i = 0$ , когда  $i < 0$  или  $i > M+1$ » легко решается относительно

но  $\langle f \rangle$  и всех  $Q_k$  методом минимизации невязок или методом простых итераций. В случае применения простых итераций в качестве начального приближения рекомендуем брать равномерное РСС  $Q_0 = Q_1 = \dots = Q_{M+1} = 1/(M+2)$ .

**5. Примеры финального и переходных РСС вершин графа с потерями дуг.** На рис. 3 показан график финального РСС, рассчитанного путем точного решения системы (7), (8) численными методами и оцененного методом имитационного моделирования (ИМ), в котором был выращен граф размером 100 007 вершин (затравка состояла из семи вершин). Весовая функция при  $0 \leq k \leq 20$  определялась в виде

$$f_k = \frac{k^2 + 10}{k + 1}$$

и равнялась нулю при прочих  $k$ . Число  $x$  дуг приращения ( $1 \leq x \leq 4$ ) имело распределение вероятностей  $(r_0, r_1, r_2, r_3, r_4) = (0,001, 0,1, 0,4, 0,2, 0,299)$ , т.е. допускались приращения, не содержащие дуг (изолированные вершины).

Как видно из рис. 3, результаты расчета и моделирования согласуются с точностью до статистических погрешностей имитационных оценок.

На рис. 4 с финальным РСС  $\{Q_k\} = \{q_k(\infty)\}$  этого же графа сравниваются переходные РСС  $\{q_k(100)\}$  и  $\{q_k(1000)\}$ , рассчитанные по формуле (5).

Эксперименты показывают, что в графах с ограниченной степенью вершин переходные РСС достаточно быстро сходятся к стационарным. Это позволяет при относительно небольших размерах исследуемых социальных сетей с хорошей точностью идентифицировать их структурные характеристики, обуславливаемые распределениями степеней связности.

Как показывают дополнительные эксперименты, в графах с потерями с.в.д. всегда имеется определенная доля изолированных вершин. Так, даже если в рассмотренном примере все приращения графа будут содержать 4 дуги, то в финальном распределении  $\{Q_k\}$  вероятность  $Q_0$  составит  $3,27 \cdot 10^{-5}$ .

**6. Заключение.** На рис. 5 представлены РСС двух эквивалентных по средней степени связности графов  $G_0$  и  $G_1$ , имеющих весовую функцию  $f(k) = k$ ,  $1 \leq k \leq M$  ( $M = 1000$ ). Максимальная степень связности у обоих графов  $M+1 = 1001$ . В графе  $G_0$  дуги не теряются и все приращения имеют одну дугу ( $m = 1$ ), поэтому средняя степень связности его вершин  $\langle k \rangle = 2m = 2$ . В графе  $G_1$  с потерями дуг все приращения имеют две дуги и на каждом шаге теряется одна с.в.д. В результате на каждом шаге в граф  $G_1$  добавляется в среднем одна вершина и одна дуга ( $\dot{m} = 1$ ), и его средняя степень связности тоже составляет  $\langle k \rangle = 2\dot{m} = 2$ .

Из рис. 5 видно, что эти два графа с одинаковыми весами  $f$  и одинаковой плотностью дуг имеют существенно различную структуру: в графе  $G_1$  с потерями дуг доля вершин с высокой степенью связности на несколько порядков меньше, чем в графе  $G_0$ . Если графы имеют около 1 млн вершин, то самая высокая степень, достигаемая вершинами графа  $G_1$ , будет находиться в пределах 50, в то время как в графе без потерь будет много вершин с сотнями связей, и вполне может появиться несколько вершин со степенью  $k = 1001$ .

Выполненное сравнение показывает, сколь важно учитывать случайные потери связей при моделировании социальных сетей и ограниченную степень связности их участников. Это эффективно

реализуется посредством разработанных в данной статье уравнений динамики РСС вершин и численных методов расчета финальных РСС вершин растущих графов с потерями дуг.

#### Библиографический список

1. Krapivsky P. L., Redner S. Organization of growing random networks, *Phys. Rev. E* 63 (2001) 066123.
2. Barabasi A. L., Albert R. Emergence of scaling in random networks, *Science* 286 (1999) 509–512.
3. Barabasi A. L., Albert R. Statistical mechanics of complex networks, *Rev. Mod. Phys* 74 (2002) 47–97.
4. Amaral L. A. N., Scala A., Barthelemy M., Stanley H. E., Classes of small-world networks, in: *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 97, 2000, p. 11149.
5. Задорожный, В. Н. Случайные графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания / В. Н. Задорожный // *Проблемы управления*, 2011. — № 6. — С. 2–11.
6. Zadorozhnyi V. N., Yudin E. B. Structural properties of the scale-free Barabasi-Albert graph // *Automation and Remote Control*. — Vol. 73, № 4, 2012. — P. 252–261. DOI: 10.1134/S0005117908020070.
7. Zadorozhnyi V., Yudin E. Growing Network: Nonlinear Extension of the Barabasi-Albert Model // *Communications in Computer and Information Science*, 2014. Т. 487. С. 432–439.
8. Zadorozhnyi V., Yudin E. Structural Identification of Large Statistically Distributed Vertex Degree // *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*, 2014, December, 2014, pp 1–4. DOI: 10.1109 / Dynamics. — 2014.7005703.
9. Zadorozhnyi V. N., Yudin E. B. Growing network: models following nonlinear preferential attachment rule, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 428, pp. 111–132, 2015 DOI: 10.1016/j.physa.2015.01.052.
10. Задорожный, В. Н. Переходные процессы в растущих сетях с нелинейным правилом предпочтительного связывания // В. Н. Задорожный, В. А. Бадрызов // *Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии*. — 2016. — № 1 (145). — С. 95–99.
11. The structure of growing social networks, Emily M. Jin, Michelle Girvan, and M. E. J. Newman, *Phys. Rev. E* 64, 046132 (2001).

**ЗАДОРЖНЫЙ Владимир Николаевич**, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Адрес для переписки: zwn2015@yandex.ru

**БАДРЫЗЛОВ Владимир Александрович**, аспирант кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Адрес для переписки: v\_bad@mail.ru

**ЮДИН Евгений Борисович**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Адрес для переписки: udinev@asoju.com

Статья поступила в редакцию 29.02.2016 г.

© В. Н. Задорожный, В. А. Бадрызов, Е. Б. Юдин

## Книжная полка

004/В52

**Вирт, Н. Алгоритмы и структуры данных. Новая версия для Оберона / Н. Вирт ; пер. с англ. под ред. Ф. В. Ткачева. — М. : ДМК Пресс, 2014. — 272 с. — ISBN 978-5-97060-011-5.**

В классическом учебнике тьюринговского лауреата Н. Вирта аккуратно, на тщательно подобранных примерах прорабатываются основные темы алгоритмики — сортировка и поиск, рекурсия, динамические структуры данных. Перевод на русский язык выполнен заново, все рассуждения и программы проверены и исправлены, часть примеров по согласованию с автором переработана с целью максимального прояснения их логики (в том числе за счет использования цикла Дейкстры). Нотацией примеров теперь служит Оберон/Компонентный Паскаль — наиболее совершенный потомок старого Паскаля по прямой линии. Все программы проверены и работают в популярном варианте Оберона — системе Блэкбокс, и доступны в исходниках на сайте издательства вместе с самой системой и дополнительными материалами. Большая часть материала книги составляет необходимый минимум знаний по алгоритмике не только для программистов-профессионалов, но и для любых других специалистов, активно использующих программирование в работе. Книга может быть использована как учебное пособие при обучении будущих программистов, начиная со старшеклассников в профильном обучении, а также подходит для систематического самообразования.

004/П64

**Потапов, В. И. Противоборство технических систем в конфликтных ситуациях: модели и алгоритмы : моногр. / В. И. Потапов. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 2015. — 166 с.**

В монографии с позиций системного анализа и на основе численных методов рассмотрен круг задач противоборства технических систем в конфликтных ситуациях. Приводятся математические модели и алгоритмы для численного решения оптимизационных задач противоборства технических систем в условиях конфликта, начиная с простейших с восстановлением отказавших в процессе противоборства компонентов системы и с динамическим перераспределением средств защиты в процессе конфликта и кончая задачами оптимального управления подвижными техническими объектами в процессе противоборства с неподвижными и подвижными объектами.

Предназначена для научных работников, аспирантов и магистрантов, занимающихся изучением и использованием на практике математических моделей и алгоритмов оптимального управления противоборствующими техническими системами в конфликтных ситуациях.