МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Омский государственный технический университет»

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное текстовое электронное издание
локального распространения

Омск
Издательство ОмГТУ
2018

Сведения об издании: 1, 2

Составители: *Д. В. Ситников*, *М. В. Силков*

Рецензент *М. С. Пешко*, к.т.н., доцент кафедры «Автоматизация и робототехника»

Теория оптимальных систем автоматического управления : метод. указания к лаб. работам / Минобрнауки России, ОмГТУ ; [сост.: Д. В. Ситников, М. В. Силков]. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2018.

Представлены краткие теоретические сведения, алгоритмы и примеры решения задач с помощью метода множителей Лагранжа и принципа максимума Понтрягина. Даны задания по вариантам, рассчитанные на применение программного пакета для научных и инженерных расчетов Matlab.

Методические указания предназначены для студентов направления 15.03.03 «Прикладная механика».

Рекомендовано редакционно-издательским советом
Омского государственного технического университета

1 электронный оптический диск

Оригинал-макет издания выполнен в Microsoft Office Word 2007/2010 с использованием возможностей Adobe Acrobat Reader.

Минимальные системные требования:

- процессор Intel Pentium 1,3 ГГц и выше;
- оперативная память 256 Мб и более;
- свободное место на жестком диске 260 Мб и более;
- операционная система Microsoft Windows XP/Vista/7/10;
- разрешение экрана 1024×768 и выше;
- акустическая система не требуется;
- дополнительные программные средства Adobe Acrobat Reader 5.0 и выше.

Редактор *Е. В. Осикина*
Компьютерная верстка *О. Н. Савостеевой*

Сводный темплан 2018 г.
Подписано к использованию 16.07.18.
Объем 0,85 Мб.

Издательство ОмГТУ.
644050, г. Омск, пр. Мира, 11; т. 23-02-12
Эл. почта: info@omgtu.ru

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Метод множителей Лагранжа

Метод множителей Лагранжа позволяет решить задачу оптимального управления, постановка которой в общем случае имеет вид:

1) Уравнения движения объекта управления

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\mathbf{x} = (x_1\ x_2 \dots x_n)^T$ – вектор фазовых координат,

$\mathbf{u} = (u_1\ u_2 \dots u_r)^T$ – вектор управляющих переменных.

Уравнения движения объекта управления должны быть приведены к дифференциальным уравнениям первого порядка, разрешенным относительно производных всех фазовых координат x_i. Таким образом, количество дифференциальных уравнений совпадает с количеством фазовых координат n.

2) Ограничения

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, l.$$

Ограничения представляют собой алгебраические уравнения, которым должны удовлетворять фазовые и управляющие переменные. Ограничения могут отсутствовать (то есть $l = 0$), если все процессы, протекающие в объекте управления, описаны с помощью дифференциальных уравнений.

3) Граничные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0; \qquad x_i(t_f) = x_i^f, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

В задаче с фиксированными концами все фазовые координаты заданы в начальный t_0 и конечный t_f моменты времени. Таким образом, будет $2n$ граничных условий. В задаче с подвижным концом отсутствуют одно или несколько граничных условий и их будет меньше чем $2n$.

В более общем случае граничные условия имеют вид

$$g_i\left[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f\right] = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, q.$$

где $q \leq n$ – количество граничных условий.

4) Критерий оптимальности

$$J = g_0\left[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f\right] + \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt.$$

Критерий оптимальности в общем случае включает терминальное слагаемое g_0 и интегральное. Терминальное слагаемое может присутствовать только в задаче с подвижным концом или нефиксированным временем, так как в задаче с закрепленными концами и фиксированным временем исключена вариация величин $\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f$.

Алгоритм решения такой задачи включает следующие действия:

1) Составить гамильтониан

$$H = \sum_{j=0}^{n} \psi_j f_j + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k.$$

При $l = 0$ вторая сумма отсутствует. Множитель Лагранжа $\psi_0 = -1$.

2) Составить уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_s} = 0, \qquad s = 1, 2, \dots, r.$$

Последние уравнения называют условием стационарности.

3) Выразить управляющие переменные u_s $(s = 1, 2, \ldots, r)$ из условия стационарности и подставить в уравнения движения и уравнения Эйлера–Лагранжа. Получится система дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

4) Решить данную систему уравнений с учетом граничных условий. В случае отсутствия некоторых граничных условий (задача с подвижным концом) записываются условия трансверсальности:

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}; \qquad \psi_i(t_f) = \frac{\partial G}{\partial x_i(t_f)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Для задачи с нефиксированным временем составляются условия трансверсальности, обусловленные вариацией начального или конечного момента времени:

$$H|_{t=t_0} = \frac{\partial G}{\partial t_0}; \qquad H|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f}.$$

Количество граничных условий и условий трансверсальности должно совпадать с количеством постоянных интегрирования, то есть с количеством дифференциальных уравнений. Найти постоянные интегрирования.

5) Подставить найденные постоянные интегрирования в выражения для $x_i(t)$ и $\psi_i(t)$, затем выразить $u_j(t)$ и записать в ответе оптимальные функции управления $u_j^*(t)$ и функции переменных состояния $x_i^*(t)$. Построить графики функций $u_j^*(t), x_i^*(t)$.

Принцип максимума Понтрягина

Принцип максимума, в отличие от метода множителей Лагранжа, позволяет решить задачу оптимального управления, в которой на управление наложены ограничения типа неравенства. Постановка задачи с ограничением на управления в общем случае имеет вид:

1) Уравнения движения объекта управления

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\mathbf{x} = (x_1\ x_2 \ldots x_n)^T$ – вектор фазовых координат,

$\mathbf{u} = (u_1\ u_2 \ldots u_r)^T$ – вектор управляющих переменных.

2) Ограничения на управление

$$\mathbf{u} \in U,$$

где U – допустимое множество значений управления.

Часто ограничение на управления имеет вид неравенства:

$$|u_j| \le a_j.$$

3) Граничные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0; \qquad x_i(t_f) = x_i^f, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

или в более общем случае

$$g_i[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f] = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, q.$$

4) Критерий оптимальности

$$J = g_0[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt.$$

Алгоритм решения задачи с помощью принципа максимума отличается от алгоритма решения методом множителей Лагранжа лишь одним шагом: вместо условия стационарности записывается принцип максимума.

Алгоритм решения задачи с помощью принципа максимума Понтрягина включает следующие действия:

1) Составить гамильтониан

$$H = \sum_{j=0}^{n} \psi_j f_j,$$

где $\psi_0 = -1$.

2) Составить уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

3) Записать принцип максимума

$$\max_{\mathbf{u} \in U} H\,(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \psi^*, t) = H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \psi^*, t),$$

из которого выразить управляющие переменные u_s $(s = 1, 2, \dots, r)$ и подставить в уравнения движения. Получится система дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

При анализе условия максимума может получиться, что управляющие переменные u_s должны принимать значения на границе области допустимых значений. При этом возможны скачкообразные изменения величины u_s. Например, если область допустимых значений задана неравенством $|u_s| \leq a$, то u_s может менять значение с a на $-a$. Такие моменты времени будут называться точками переключения.

Точки переключения делят весь процесс от начальной точки t_0 до конечной t_f на интервалы. Например, в случае одной точки переключения t_1

будет два интервала: $[t_0; t_1]$ и $[t_1; t_f]$. Тогда система дифференциальных уравнений составляется и решается отдельно для каждого интервала.

В точках переключения справедливо условие неразрывности, в соответствии с которым переменные x_i не могут иметь разрывов, то есть $x_{i1}(t_1) = x_{i2}(t_1)$ $(i = 1,2,\dots,n)$, где x_{i1} – переменная состояния на первом интервале, x_{i2} – переменная состояния на втором интервале.

4) Решить данную систему уравнений с учетом граничных условий. В случае отсутствия некоторых граничных условий (задача с подвижным концом) составляются условия трансверсальности:

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}; \qquad \psi_i(t_f) = \frac{\partial G}{\partial x_i(t_f)}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для задачи с нефиксированным временем составляются условия трансверсальности, обусловленные вариацией начального или конечного момента времени:

$$H|_{t=t_0} = \frac{\partial G}{\partial t_0}; \qquad H|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f}.$$

Количество граничных условий и условий трансверсальности должно совпадать с количеством постоянных интегрирования, то есть с количеством дифференциальных уравнений. Найти постоянные интегрирования.

5) Подставить найденные постоянные интегрирования в выражения для $x_i(t)$ и записать в ответе оптимальные функции управления $u_j^*(t)$ и функции переменных состояния $x_i^*(t)$. Построить графики функций $u_j^*(t), x_i^*(t)$.

Содержание отчета о лабораторной работе

1. *Титульный лист*: оформляется в соответствии с приложением (текст, выделенный курсивом, заменить в соответствии с данными своей работы).

2. *Задание*: сформулировать задачу и привести исходные данные в соответствии с вариантом.

3. *Решение*: привести все расчетные формулы, преобразования и промежуточные результаты. Все формулы должны быть снабжены комментариями. В случае использования программы Matlab для выполнения некоторого действия, например решения уравнения, допускается приводить только систему уравнения и корни системы уравнений, указав команду или номер строки программы, в которой это действие выполняется.

4. *Текст программы*: вставить текст программы Matlab, которая использовалась при выполнении лабораторной работы. В тексте программы должны быть комментарии, поясняющие, какие действия выполняются на каждом участке кода.

5. *Результаты*: в ответе привести функции $u_j^*(t)$, $x_i^*(t)$ и графики этих функций.

Лабораторная работа № 1. МЕТОД ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА: ЗАДАЧА С ФИКСИРОВАННЫМИ КОНЦАМИ

Задание

Решите задачу оптимального управления: перевести объект управления, уравнения движения которого заданы, в заданное положение при минимальном расходе энергии управляющего воздействия. Начальный момент времени $t_0 = 0$. Уравнения движения, граничные условия и конечное время t_f заданы в табл. 1 по вариантам.

Постройте графики $x_1^*(t), x_2^*(t)$ и график функции управления $u^*(t)$.

Таблица 1

Исходные данные к лабораторной работе № 1

Вариант	Уравнения движения	Граничные условия	t_f
1	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 2\\ \dot{x}_2 = u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t_f) = -1, x_2(t_f) = 0$	1
2	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 2\\ \dot{x}_2 = -x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t_f) = -2, x_2(t_f) = 0$	0,5
3	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 1\\ \dot{x}_2 = -x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 4, x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$	1,5
4	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + u\\ \dot{x}_2 = x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = 6, x_2(t_f) = -2$	2
5	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u\\ \dot{x}_2 = x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -2, x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = 2, x_2(t_f) = -10$	2,5
6	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 4\\ \dot{x}_2 = u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t_f) = -1, x_f(t_2) = 1$	3
7	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 5\\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t_f) = 2, x_2(t_f) = 0$	2,2
8	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 3\\ \dot{x}_2 = x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$	0,8
9	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + u\\ \dot{x}_2 = -x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = 3, x_2(t_f) = -2$	2,8
10	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u\\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 1, x_1(t_f) = 1, x_2(t_f) = -4$	3,2
11	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 5u\\ \dot{x}_2 = -x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 10, x_1(t_f) = 10, x_2(t_f) = 0$	1,2
12	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u\\ \dot{x}_2 = x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 1, x_1(t_f) = 5, x_2(t_f) = 0$	1,6
13	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u\\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = 4, x_2(t_f) = -10$	5

Окончание табл. 1

14	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 6\\ \dot{x}_2 = u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t_f) = -2, x_2(t_f) = 5$	5
15	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 10\\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t_f) = 5, x_2(t_f) = -2$	3
16	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 6\\ \dot{x}_2 = x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 10, x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$	2
17	$\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2 + u\\ \dot{x}_2 = -2x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = 5, x_2(t_f) = -4$	3,5
18	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -3x_2 + u\\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 1, x_1(t_f) = 4, x_2(t_f) = -2$	4,2
19	$\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2 + 5u\\ \dot{x}_2 = -x_1 + 5u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 5, x_1(t_f) = 7, x_2(t_f) = 0$	1,8
20	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -3x_2 + u\\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 1, x_1(t_f) = 2, x_2(t_f) = 0$	2,5

Пример выполнения лабораторной работы № 1

Исходные данные:

1) Уравнения движения:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2;\\ \dot{x}_2 = u\end{cases} (n = 2, r = 1, l = 0).$$

2) Граничные условия:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0,\quad x_1(t_f) = 1,\quad x_2(t_f) = 0,\quad t_f = 1 \text{ с.}$$

3) Критерий оптимальности в случае минимального расхода энергии управляющего воздействия равен:

$$J = \int_0^{t_f} u^2 dt \to min.$$

Решение:

1) Гамильтониан

$$H = \sum_{j=0}^{n} \psi_j f_j = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

2) Уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1},\\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2};\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases}$$

Условие стационарности

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \psi_2 = 0.$$

3) Из условия стационарности выразим

$$u = \psi_2/2.$$

Подставив u в уравнения движения и уравнения Эйлера–Лагранжа, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \psi_2/2\,, \\ \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases}$$

4) Решение данной системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\psi_1(t) = C_1;\;\; \psi_2(t) = -C_1 t + C_2;$$

$$x_2(t) = -C_1 t^2/4 + C_2 t/2 + C_3;$$

$$x_1(t) = -C_1 t^3/12 + C_2 t^2/4 + C_3 t + C_4.$$

Данное решение содержит четыре постоянных интегрирования: C_1, C_2, C_3, C_4, которые можно найти, используя граничные условия:

$$x_2(0) = C_3 = 0,\;\; x_1(0) = C_4 = 0,$$

$$\begin{cases} x_1(1) = 1, \\ x_2(1) = 0, \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} -C_1/12 + C_2/4 = 1, \\ -C_1/4 + C_2/2 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 24,\;\; C_2 = 12$.

5) Подставив найденные постоянные в выражения для $x_i(t)$ и $\psi_i(t)$, получим

$$x_1^*(t) = -2t^3 + 3t^2;$$

$$x_2^*(t) = -6t^2 + 6t;$$

$$\psi_1^*(t) = 24;$$

$$\psi_2^*(t) = -24t + 12;$$

$$u^*(t) = -12t + 6.$$

Графики функции управления $u^*(t)$ и переменных состояния $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ представлены на рис. 1.

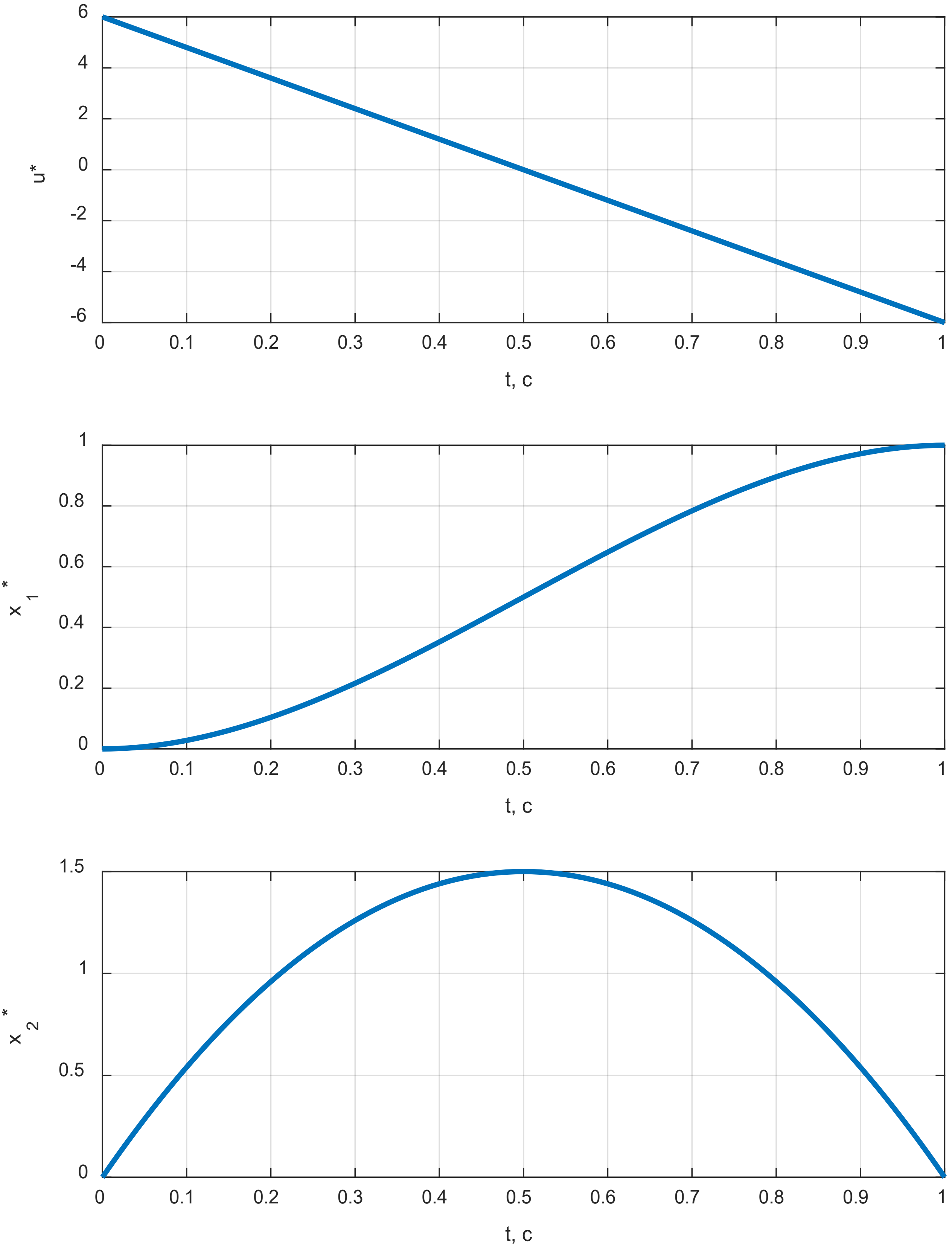

Рис. 1. Зависимости управления $u^*(t)$
и переменных состояния $x_1^*(t), x_2^*(t)$ от времени

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 1

1. Расскажите алгоритм решения задачи оптимального управления с помощью метода множителей Лагранжа.

2. Как называются величины x_1, x_2, u, C_1, C_2?

3. Как определяются функции f_0, f_1, f_2?

4. Чему равен критерий оптимальности в задаче? Как записать критерий оптимальности исходя из условий задачи?

5. Классифицируйте задачу, решаемую в лабораторной работе.

6. Напишите общую формулу гамильтониана. Как называются величины ψ_i, λ_k?

7. Как составляются уравнения Эйлера–Лагранжа? Для чего используются эти уравнения?

8. Как составляется условие стационарности? Для чего оно используется?

9. Что такое фазовые переменные?

10. Что такое управляющие переменные?

11. Как определяются постоянные интегрирования?

Лабораторная работа № 2. МЕТОД ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА: ЗАДАЧА С ПОДВИЖНЫМ КОНЦОМ

Задание

Решите задачу оптимального управления: перевести объект управления, уравнения движения которого заданы, в положение $x_1(t_f)$ при минимальном расходе энергии управляющего воздействия. Величина $x_2(t_f)$ не задана. $t_0 = 0$. Уравнения движения, граничные условия и конечное время t_f заданы в табл. 2 по вариантам.

Постройте графики $x_1^*(t), x_2^*(t)$ и график функции управления $u^*(t)$.

Таблица 2

Исходные данные к лабораторной работе № 2

Вариант	Уравнения движения	Граничные условия	t_f
1	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 2\\ \dot{x}_2 = u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0,\ x_1(t_f) = -1$	1
2	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 2\\ \dot{x}_2 = -x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0,\ x_1(t_f) = -2$	0,5
3	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 1\\ \dot{x}_2 = -x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 4,\ x_1(t_f) = 0$	1,5
4	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + u\\ \dot{x}_2 = x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = 6$	2
5	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u\\ \dot{x}_2 = x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -2, x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = 2$	2,5
6	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 4\\ \dot{x}_2 = u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0,\ x_1(t_f) = -1$	3
7	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 5\\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0,\ x_1(t_f) = 2$	2,2
8	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 3\\ \dot{x}_2 = x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 2,\ x_1(t_f) = 0$	0,8
9	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + u\\ \dot{x}_2 = -x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 2,\ x_1(t_f) = 3$	2,8
10	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u\\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 1,\ x_1(t_f) = 1$	3,2
11	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 5u\\ \dot{x}_2 = -x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 10,\ x_1(t_f) = 10$	1,2
12	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u\\ \dot{x}_2 = x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 1,\ x_1(t_f) = 5$	1,6
13	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u\\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 2,\ x_1(t_f) = 4$	5

14	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 6\\ \dot{x}_2 = u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t_f) = -2$	5
15	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 10\\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t_f) = 5$	3
16	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 6\\ \dot{x}_2 = x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 10, x_1(t_f) = 0$	2
17	$\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2 + u\\ \dot{x}_2 = -2x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = 5$	3,5
18	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -3x_2 + u\\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 1, x_1(t_f) = 4$	4,2
19	$\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2 + 5u\\ \dot{x}_2 = -x_1 + 5u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 5, x_1(t_f) = 7$	1,8
20	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -3x_2 + u\\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 1, x_1(t_f) = 2$	2,5

Пример выполнения лабораторной работы № 2

Исходные данные:

1) Уравнения движения:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2;\\ \dot{x}_2 = u\end{cases} \quad (n = 2, r = 1, l = 0).$$

2) Граничные условия:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_f) = 1, \quad t_f = 1 \text{ с}.$$

3) Критерий оптимальности в случае минимального расхода энергии управляющего воздействия равен:

$$J = \int_0^{t_f} u^2 dt \to min.$$

Решение:

1) Гамильтониан

$$H = \sum_{j=0}^{n} \psi_j f_j = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

2) Уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1},\\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot\psi_1 = 0,\\ \dot\psi_2 = -\psi_1.\end{cases}$$

Условие стационарности

$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \psi_2 = 0.$

3) Из условия стационарности выразим

$u = \psi_2/2.$

Подставив u в уравнения движения и уравнения Эйлера–Лагранжа, получим систему уравнений

$$\begin{cases}\dot x_1 = x_2,\\ \dot x_2 = \psi_2/2\,,\\ \dot\psi_1 = 0,\\ \dot\psi_2 = -\psi_1.\end{cases}$$

4) Решение данной системы дифференциальных уравнений с учетом трех имеющихся граничных условий имеет вид:

$x_1(t) = -C_1 t^3/12 + \left(\frac{C_1}{3} + 4\right) t^2/4,$

$$x_2(t) = -C_1 t^2/4 + \left(\frac{C_1}{3} + 4\right) t/2,$$

$$\psi_1(t) = C_1;\;\; \psi_2(t) = -C_1 t + \frac{C_1}{3} + 4.$$

Для поиска постоянной C_1 запишем условие трансверсальности:

$\psi_2(t_f) = \frac{\partial G}{\partial x_2(t_f)},$

где $G = g_0 = 0$, так как в критерии оптимальности отсутствует терминальное слагаемое. Таким образом,

$\psi_2(1) = 0,$

$-C_1 1 + \frac{C_1}{3} + 4 = 0,$

$C_1 = 6.$

5) Подставив найденные постоянные в выражения для $x_i(t)$ и $\psi_i(t)$, получим

$x_1^*(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2,$

$x_2^*(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 3t,$

$\psi_1^*(t) = 6,$

$\psi_2^*(t) = -6t + 6,$

$u^*(t) = -3t + 3.$

Графики функции управления $u^*(t)$ и переменных состояния $x_1^*(t), x_2^*(t)$ представлены на рис. 2.

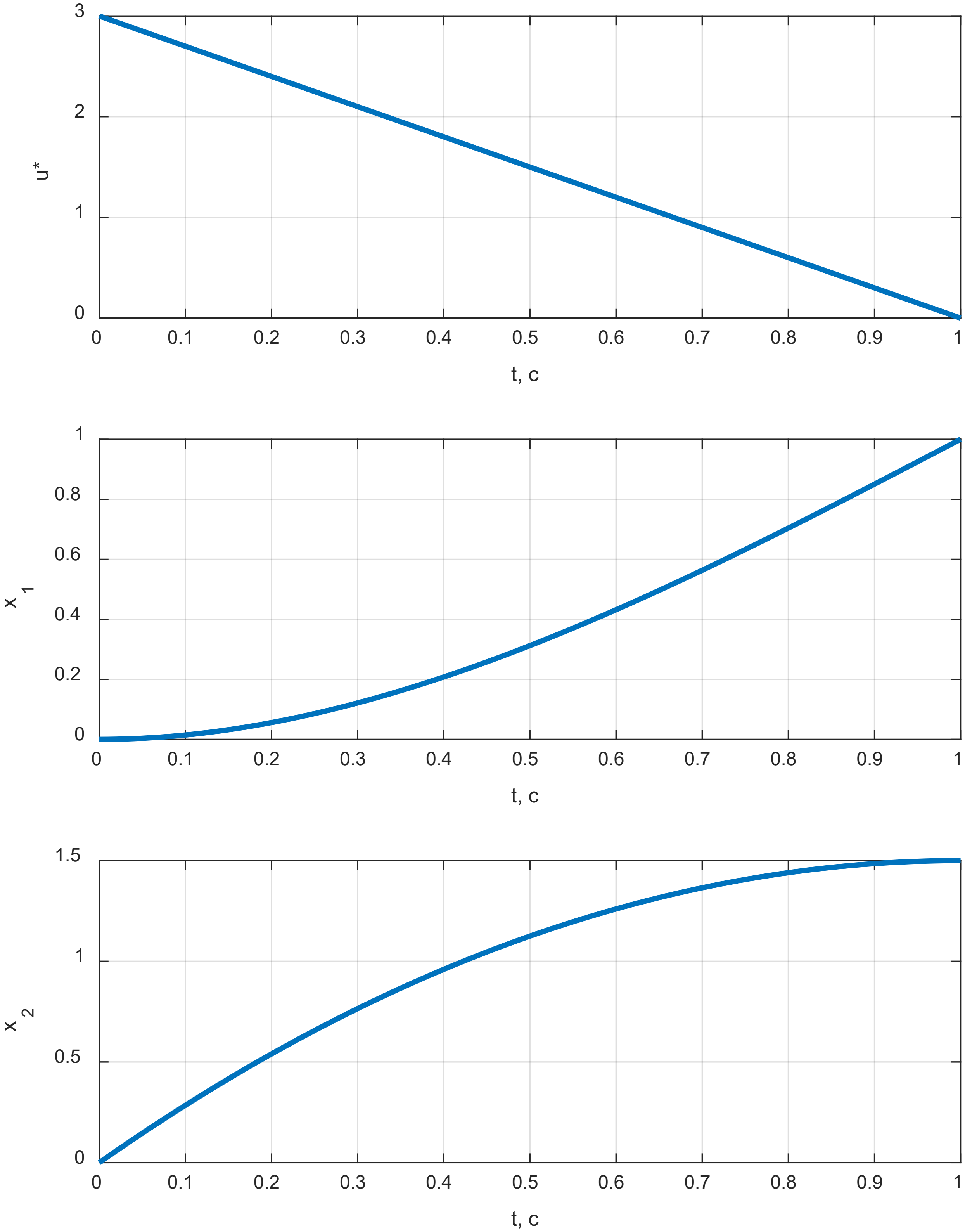

Рис. 2. Зависимости управления $u^*(t)$
и переменных состояния $x_1^*(t), x_2^*(t)$ от времени

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 2

1. Расскажите алгоритм решения задачи оптимального управления с помощью метода множителей Лагранжа.
2. Чему равен критерий оптимальности в задаче? Как записать критерий оптимальности исходя из условий задачи?
3. Классифицируйте задачу, решаемую в лабораторной работе.
4. Чем отличаются решения задач с закрепленными концами и с подвижным концом?
5. Как составляются уравнения Эйлера–Лагранжа? Для чего используются эти уравнения?
6. Как составляется условие стационарности? Для чего оно используется?
7. Как записываются условия трансверсальности? Для чего они используются?
8. Как определяются постоянные интегрирования в задаче с подвижным концом?
9. Расскажите о назначении команд Matlab: syms, clc, clear, for.
10. Расскажите о назначении функций Matlab: solve, dsolve, diff, subs, eval, plot. Какие аргументы принимают и что возвращают эти функции?

Лабораторная работа № 3. МЕТОД ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА: ЗАДАЧА С ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

Решите задачу оптимального управления: перевести объект управления, уравнения движения которого заданы, в заданное положение за минимальное время при изопериметрическом ограничении

$$\int_0^{t_f} u^2\,dt = b, \qquad b = 10.$$

Начальное время $t_0 = 0$. Уравнения движения, граничные условия заданы в табл. 3 по вариантам.

Постройте графики $x_1^*(t), x_2^*(t)$ и график функции управления $u^*(t)$.

Таблица 3

Исходные данные к лабораторной работе № 3

Вариант	Уравнения движения	Граничные условия
1	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 2\\ \dot{x}_2 = u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t_f) = -1, x_2(t_f) = 0$
2	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 2\\ \dot{x}_2 = -x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t_f) = -2, x_2(t_f) = 0$
3	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 1\\ \dot{x}_2 = -x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 4, x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$
4	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + u\\ \dot{x}_2 = x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = 6, x_2(t_f) = -2$
5	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u\\ \dot{x}_2 = x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -2, x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = 2, x_2(t_f) = -10$
6	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 4\\ \dot{x}_2 = u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t_f) = -1, x_f(t_2) = 1$
7	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 5\\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t_f) = 2, x_2(t_f) = 0$
8	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 3\\ \dot{x}_2 = x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$
9	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + u\\ \dot{x}_2 = -x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = 3, x_2(t_f) = -2$
10	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u\\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 1, x_1(t_f) = 1, x_2(t_f) = -4$
11	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 5u\\ \dot{x}_2 = -x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 10, x_1(t_f) = 10, x_2(t_f) = 0$

12	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 1, x_1(t_f) = 5, x_2(t_f) = 0$
13	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = 4, x_2(t_f) = -10$
14	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 6 \\ \dot{x}_2 = u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t_f) = -2, x_2(t_f) = 5$
15	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 10 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_1(t_f) = 5, x_2(t_f) = -2$
16	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 6 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 10, x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$
17	$\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 2, x_1(t_f) = 5, x_2(t_f) = -4$
18	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 1, x_1(t_f) = 4, x_2(t_f) = -2$
19	$\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2 + 5u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 5u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 5, x_1(t_f) = 7, x_2(t_f) = 0$
20	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 1, x_1(t_f) = 2, x_2(t_f) = 0$

Пример выполнения лабораторной работы № 3

Исходные данные:

1) Уравнения движения:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u\end{cases} \quad (r = 1, l = 0).$$

2) Граничные условия:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_f) = 2, \quad x_2(t_f) = 0.$$

3) Критерий оптимальности в случае минимального времени равен:

$$J = t_f \to min.$$

Решение:

Для учета изопериметрического ограничения введем дополнительную переменную состояния:

$$\dot{x}_3 = u^2; \;\; x_3(0) = 0; \;\; x_3(t_f) = b.$$

Таким образом, уравнения движения и граничные условия примут вид:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \\ \dot{x}_3 = u^2\end{cases} \quad (n = 3, r = 1, l = 0);$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0, x_1(t_f) = 2, x_2(t_f) = 0, x_3(t_f) = 10.$$

1) Гамильтониан

$$H = \sum_{j=0}^{n} \psi_j f_j = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 + \psi_3 f_3 = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3 u^2.$$

2) Уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \\ \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \\ \dot{\psi}_3 = 0. \end{cases}$$

Условие стационарности

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_2 + 2\psi_3 u = 0.$$

3) Из условия стационарности выразим

$$u = -\frac{\psi_2}{2\psi_3}.$$

Подставив u в уравнения движения и уравнения Эйлера–Лагранжа, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{\psi_2}{2\psi_3}, \\ \dot{x}_3 = \frac{\psi_2^2}{4\psi_3^2} \\ \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \\ \dot{\psi}_3 = 0. \end{cases}$$

4) Решение данной системы дифференциальных уравнений с учетом начальных граничных условий $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$ имеет вид:

$$x_1(t) = \frac{t^2(3C_9 - 2C_7 t)}{12C_8} - \frac{t^2(2C_9 - C_7 t)}{4C_8},$$

$$x_2(t) = -\frac{t(2C_9 - C_7 t)}{4C_8},$$

$$x_3(t) = -\frac{t(C_7^2 t^2 - 3C_7 C_9 t + 3C_9^2)}{12C_8^2},$$

$\psi_1(t) = C_7,$

$\psi_2(t) = -C_7 t + C_9,$

$\psi_3(t) = C_8.$

Управляющая переменная будет равна:

$u(t) = -\frac{C_9 - C_7 t}{2C_8}.$

Применить три граничных условия в конечный момент времени нельзя, так как неизвестно значение t_f.

Используя граничные условия в конечный момент времени $x_1(t_f) = 2, x_2(t_f) = 0, x_3(t_f) = 10$, запишем три уравнения:

$$\frac{t_f{}^2(3C_9 - 2C_7 t_f)}{12C_8} - \frac{t_f{}^2(2C_9 - C_7 t_f)}{4C_8} = 2,$$

$$-\frac{t_f(2C_9 - C_7 t_f)}{4C_8} = 0,$$

$$-\frac{t(C_7^2 t_f{}^2 - 3C_7 C_9 t_f + 3C_9^2)}{12C_8^2} = 10.$$

Так как конечное время не фиксировано, составим условие трансверсальности, обусловленное вариацией конечного момента времени:

$$H|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f},$$

где $G = t_f$.

Таким образом

$$H|_{t=t_f} = -\frac{\partial t_f}{\partial t_f},$$

$$H|_{t=t_f} = -1,$$

$$\psi_1(t_f)x_2(t_f) + \psi_2(t_f)u(t_f) + \psi_3(t_f)u(t_f)^2 = -1.$$

Подставив выражения $\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ с заменой $t = t_f$, получим

$$C_7\left(-\frac{t_f(2C_9 - C_7 t_f)}{4C_8}\right) + (-C_7 t_f + C_9)\left(-\frac{C_9 - C_7 t_f}{2C_8}\right) + C_8\left(-\frac{C_9 - C_7 t_f}{2C_8}\right)^2 = -1.$$

Запишем полученную систему из четырех уравнений (одно условие трансверсальности и три граничных условия):

$$\begin{cases} C_7\left(-\frac{t_f(2C_9-C_7t_f)}{4C_8}\right)+(-C_7t_f+C_9)\left(-\frac{C_9-C_7t_f}{2C_8}\right)+C_8\left(-\frac{C_9-C_7t_f}{2C_8}\right)^2=-1, \\ \frac{t_f{}^2(3C_9-2C_7t_f)}{12C_8}-\frac{t_f{}^2(2C_9-C_7t_f)}{4C_8}=2, \\ -\frac{t_f(2C_9-C_7t_f)}{4C_8}=0, \\ -\frac{t(C_7^2t_f{}^2-3C_7C_9t_f+3C_9^2)}{12C_8^2}=10. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнения относительно неизвестных C_7, C_8, C_9, t_f имеет вид:

$C_7 = 0{,}5623$,

$C_8 = -0{,}0562$,

$C_9 = 0{,}4743$,

$t_f = 1{,}6869$ с.

Вообще, данная систем уравнения имеет три корня, но в двух из них время t_f равно комплексной величине, поэтому оставляем только корень, в котором время является положительным действительным числом.

5) Подставив найденные постоянные в выражения для $x_i(t)$ и $u(t)$, получим

$x_1^*(t) = 2{,}109t^2 - 0{,}8333t^3$,

$x_2^*(t) = 4{,}217t - 2{,}5t^2$,

$x_3^*(t) = 8{,}333t^3 - 21{,}09t^2 + 17{,}78t$,

$u^*(t) = 4{,}217 - 5{,}0t$.

Графики функции управления $u^*(t)$ и переменных состояния $x_1^*(t), x_2^*(t)$ представлены на рис. 3.

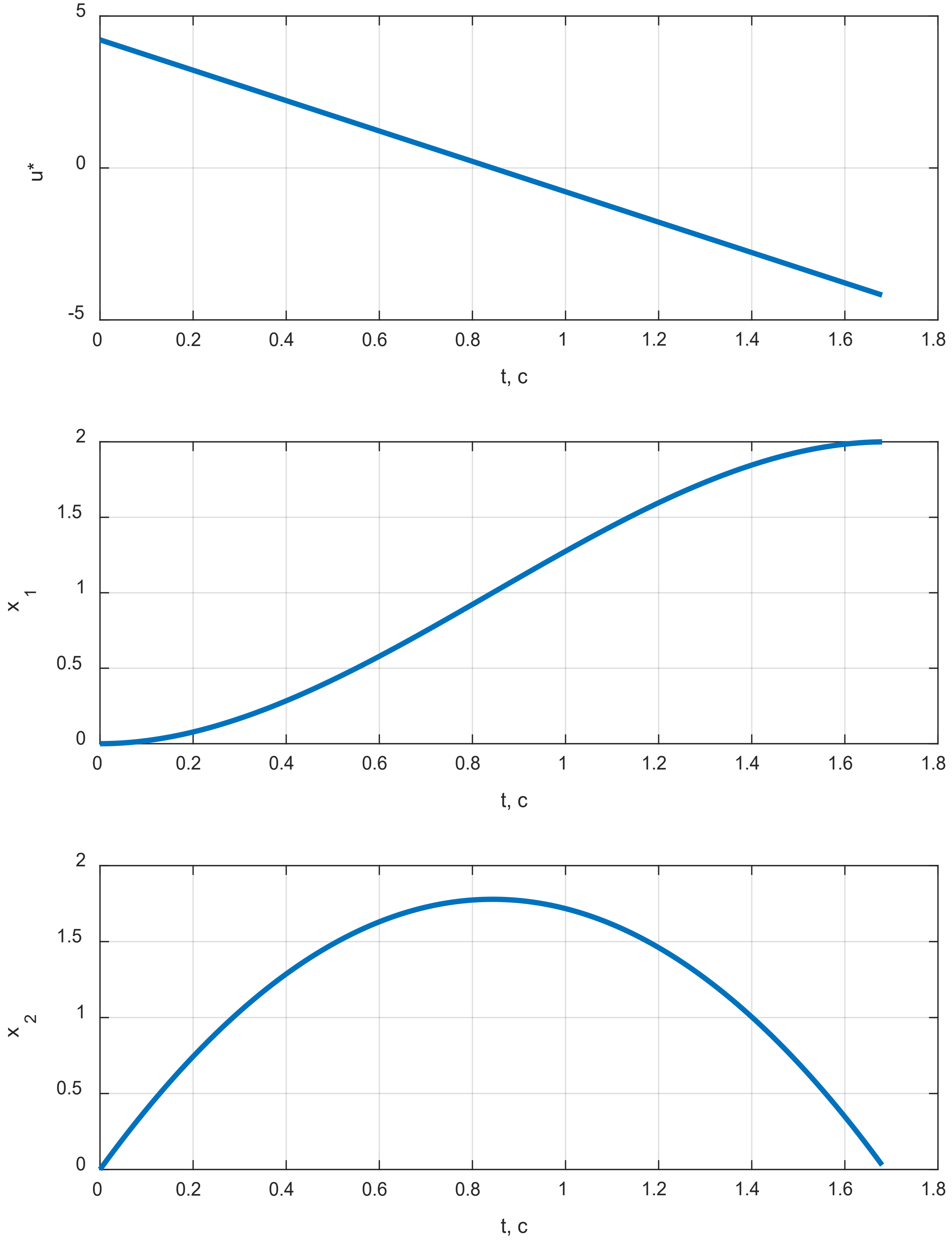

Рис. 3. Зависимости управления $u^*(t)$
и переменных состояния $x_1^*(t), x_2^*(t)$ от времени

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 3

1. Расскажите алгоритм решения задачи оптимального управления с помощью метода множителей Лагранжа.
2. Чему равен критерий оптимальности в задаче? Как записать критерий оптимальности исходя из условий задачи?
3. Классифицируйте задачу, решаемую в лабораторной работе.
4. Как учитывается изопериметрическое ограничение?
5. Чем отличаются решения задач с фиксированным временем и нефиксированным временем?
6. Как составляются уравнения Эйлера–Лагранжа? Для чего используются эти уравнения?
7. Как составляется условие стационарности? Для чего оно используется?
8. Как записывается условие трансверсальности, обусловленное вариацией конечного момента времени? Для чего оно используется?
9. Как определяются постоянные интегрирования в задаче с нефиксированным временем?

Лабораторная работа № 4.
ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Задание

При наличии ограничения на управление $|u| \leq a$ требуется перевести объект на максимальное перемещение x_1 за заданное время t_f.

Начальное время $t_0 = 0$. Уравнения движения, граничные условия и конечное время t_f заданы в табл. 4 по вариантам.

Постройте графики $x_1^*(t), x_2^*(t)$ и график функции управления $u^*(t)$.

Таблица 4

Исходные данные к лабораторной работе № 4

Вариант	Уравнения движения	Граничные условия	t_f	a
1	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_2(t_f) = 0$	1	1
2	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0,\ x_2(t_f) = 0$	0,5	2
3	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 4, x_2(t_f) = 0$	1,5	1
4	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 2,\ x_2(t_f) = -2$	2	2
5	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases}$	$x_1(t_0) = -2, x_2(t_0) = 2,\ x_2(t_f) = -10$	2,5	2
6	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 4 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0, x_f(t_2) = 1$	3	1
7	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 5 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2u \end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0,\ x_2(t_f) = 0$	2,2	2
8	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 2, x_2(t_f) = 0$	0,8	1
9	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 2,\ x_2(t_f) = -2$	2,8	1
10	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u \end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 1,\ x_2(t_f) = -4$	3,2	2
11	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 5u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 10,\ x_2(t_f) = 0$	1,2	1
12	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3u \end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 1,\ x_2(t_f) = 0$	1,6	2

13	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 2,\ x_2(t_f) = -10$	5	5
14	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 6 \\ \dot{x}_2 = u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0,\ x_2(t_f) = 5$	5	5
15	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 10 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0,\ x_2(t_f) = -2$	3	3
16	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 6 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 10, x_2(t_f) = 0$	2	2
17	$\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 2,\ x_2(t_f) = -4$	3,5	3,5
18	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 1, x_2(t_f) = -2$	4,2	4,2
19	$\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2 + 5u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 5u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 5,\ x_2(t_f) = 0$	1,8	1,8
20	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 1, x_2(t_f) = 0$	2,5	2,5

Пример выполнения лабораторной работы № 4

Исходные данные:

1) Уравнения движения:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u\end{cases} \quad (n = 2, r = 1).$$

2) Ограничение: $|u| \leq 5$.

3) Граничные условия:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_2(t_f) = 0, \quad t_f = 10 \text{ с.}$$

4) Критерий оптимальности в случае максимального перемещения x_1 равен:

$$J = -x_1(t_f) \to min.$$

Решение:

1) Гамильтониан:

$$H = \sum_{j=0}^{n} \psi_j f_j = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 = \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

2) Уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1},\\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1 = 0,\\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1.\end{cases}$$

Решение данной системы уравнений с точностью до постоянных интегрирования: $\psi_1 = C_1$, $\psi_2 = -C_1 t + C_2$.

3) Условие принципа максимума:

$$\max_{|u|\le 5} H = \max_{|u|\le 5}(\psi_1 x_2 + \psi_2 u) = \psi_1 x_2 + \max_{|u|\le 5}(\psi_2 u).$$

Из условия принципа максимума следует, что $u = 5\mathrm{sign}(\psi_2)$. То есть принимает значение 5 или –5 в зависимости от знака функции $\psi_2 = -C_1 t + C_2$. Так как функция ψ_2 линейная, то она может изменить знак только один раз и может быть только одна точка переключения. Обозначим момент переключения t_1. Возможно два варианта:

$$u(t) = \begin{cases}5, \text{при } 0 \le t \le t_1,\\ -5, \text{при } t_1 < t \le t_f\end{cases} \quad \text{или} \quad u(t) = \begin{cases}-5, \text{при } 0 \le t \le t_1,\\ 5, \text{при } t_1 < t \le t_f.\end{cases}$$

Далее необходимо полностью выполнить решение для обеих гипотез и выбрать ту из них, для которой ответ получится оптимальным.

Для начала рассмотрим первую гипотезу:

$$u(t) = \begin{cases}5, \text{при } 0 \le t \le t_1,\\ -5, \text{при } t_1 < t \le t_f.\end{cases}$$

4) Найдем решение системы уравнений движения для двух участков

а) Первый участок $0 \le t \le t_1$, $u = 5$.

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2;\\ \dot{x}_2 = 5.\end{cases}$$

С учетом граничных условий в начальный момент времени $x_1(0) = x_2(0) = 0$ решение данной системы дифференциальных уравнений будет следующим:

$$x_{11} = \frac{5}{2}t^2, \quad x_{21} = 5t.$$

б) Второй участок $t_1 < t \leq t_f, \ u = -5$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -5. \end{cases}$$

С учетом граничного условия в конечный момент времени $x_2(10) = 0$ решение данной системы дифференциальных уравнений будет иметь одну произвольную постоянную:

$$x_{12} = C + t(50 - 5t), \quad x_{22} = 50 - 5t.$$

Для определения постоянной C и времени переключения t_1 запишем условия неразрывности:

$$\begin{cases} x_{11}(t_1) = x_{12}(t_1), \\ x_{21}(t_1) = x_{22}(t_1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{2}{t_1}^2 = C + t_1(50 - 5t_1), \\ 5t_1 = 50 - 5t_1. \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, получим: $t_1 = 5$ с, $C = -125$.

5) Таким образом, оптимальные управляющая переменная и переменные состояния будут равны:

$$u^*(t) = \begin{cases} 5, \text{при } 0 \leq t \leq 5 \text{ с}, \\ -5, \text{при } 5 < t \leq 10 \text{ с}; \end{cases}$$

$$x_1{}^*(t) = \begin{cases} \frac{5}{2}t^2, \text{при } 0 \leq t \leq 5 \text{ с}, \\ \frac{5}{2}t^2 + t(50 - 5t), \text{при } 5 < t \leq 10 \text{ с}; \end{cases}$$

$$x_2{}^*(t) = \begin{cases} 5t, \text{при } 0 \leq t \leq 5 \text{ с}, \\ 50 - 5t, \text{при } 5 < t \leq 10 \text{ с}. \end{cases}$$

Графики функции управления $u^*(t)$ и переменных состояния $x_1^*(t), x_2^*(t)$ представлены на рис. 4.

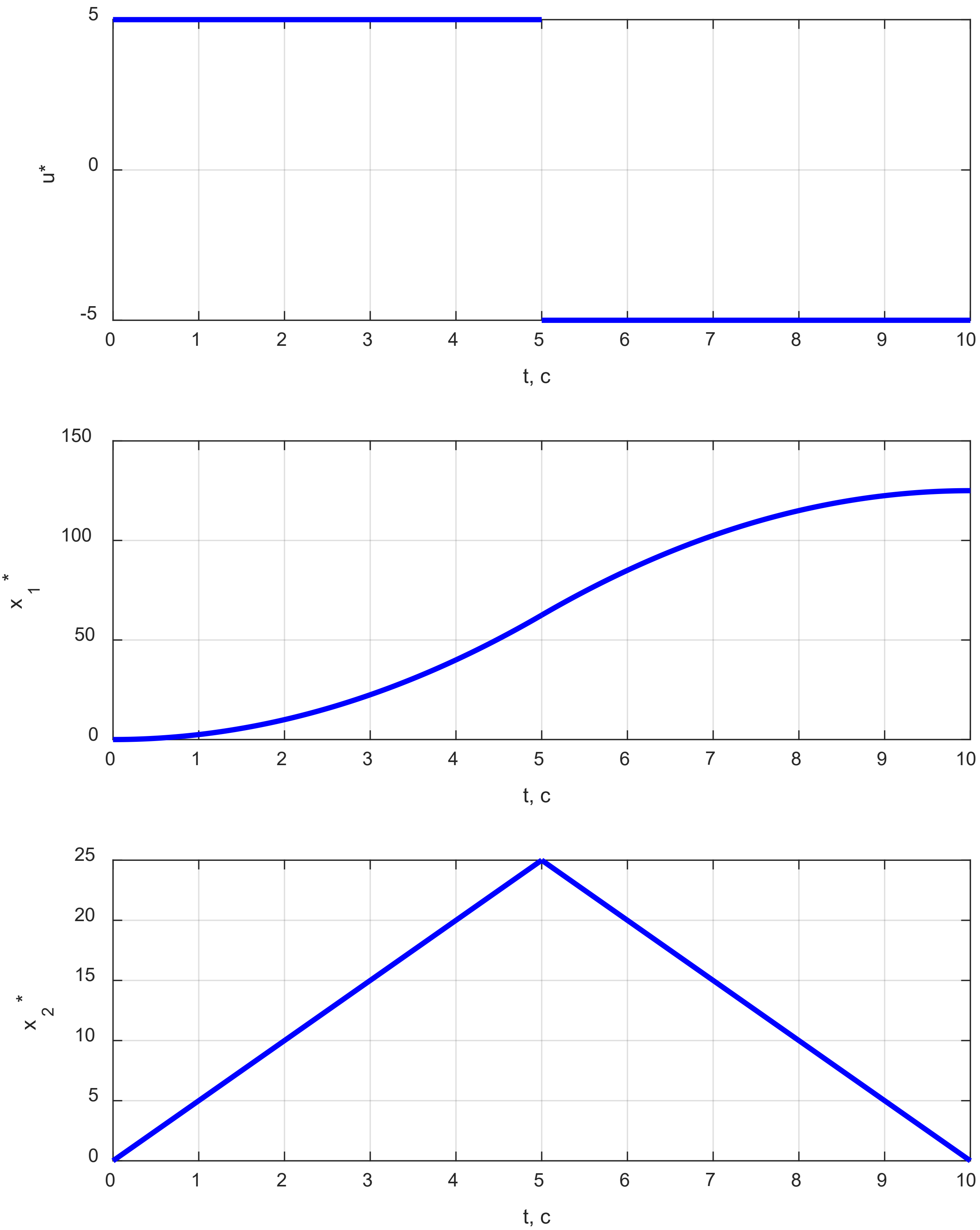

Рис. 4. Зависимости управления $u^*(t)$
и переменных состояния $x_1^*(t), x_2^*(t)$ от времени

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 4

1. В чем суть принципа максимума? Что общего с методом множителей Лагранжа и в чем отличие?
2. В каких случаях следует применять принцип максимума Понтрягина?
3. Расскажите алгоритм решения задачи оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина.
4. Чему равен критерий оптимальности в задаче? Как записать критерий оптимальности исходя из условий задачи?
5. Классифицируйте задачу, решаемую в лабораторной работе.
6. Как составляется условие максимума? Для чего оно используется?
7. Как составляется условие неразрывности? Для чего оно используется?

Лабораторная работа № 5. ЗАДАЧА МАКСИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Задание

При наличии ограничения на управление требуется перевести объект в заданное положение за минимальное время.

Начальное время $t_0 = 0$. Уравнения движения, граничные условия и ограничение на управление заданы в табл. 5 по вариантам.

Постройте графики $x_1^*(t), x_2^*(t)$ и график функции управления $u^*(t)$.

Таблица 5

Исходные данные к лабораторной работе № 5

Вариант	Уравнения движения	Краевые условия	Ограничение на управление
1	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$	$x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$ $x_1(t_2) = -1, x_2(t_2) = 0$	$\|u\| \le 1$
2	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$	$x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$ $x_1(t_2) = -2, x_2(t_2) = 0$	$\|u\| \le 2$
3	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$	$x_1(t_1) = 0, x_2(t_1) = 4$ $x_1(t_2) = x_2(t_2) = 0$	$\|u\| \le 1$
4	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases}$	$x_1(t_1) = x_2(t_1) = 2$ $x_1(t_2) = 6, x_2(t_2) = -2$	$\|u\| \le 2$
5	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases}$	$x_1(t_1) = -2, x_2(t_1) = 2$ $x_1(t_2) = 2, x_2(t_2) = -10$	$\|u\| \le 2$
6	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 4 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$	$x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$ $x_1(t_2) = -1, x_2(t_2) = 1$	$\|u\| \le 1$
7	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 5 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2u \end{cases}$	$x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$ $x_1(t_2) = 2, x_2(t_2) = 0$	$\|u\| \le 2$
8	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases}$	$x_1(t_1) = 0, x_2(t_1) = 2$ $x_1(t_2) = x_2(t_2) = 0$	$\|u\| \le 1$
9	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$	$x_1(t_1) = x_2(t_1) = 2$ $x_1(t_2) = 3, x_2(t_2) = -2$	$\|u\| \le 1$
10	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u \end{cases}$	$x_1(t_1) = -1, x_2(t_1) = 1$ $x_1(t_2) = 1, x_2(t_2) = -4$	$\|u\| \le 2$
11	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 5u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$	$x_1(t_1) = x_2(t_1) = 10$ $x_1(t_2) = 10, x_2(t_2) = 0$	$\|u\| \le 1$
12	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3u \end{cases}$	$x_1(t_1) = -1, x_2(t_1) = 1$ $x_1(t_2) = 5, x_2(t_2) = 0$	$\|u\| \le 2$

13	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u\\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 2$ $x_1(t_f) = 4, x_2(t_f) = -10$	$\lvert u\rvert \le 5$
14	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 6\\ \dot{x}_2 = u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$ $x_1(t_f) = -2, x_2(t_f) = 5$	$\lvert u\rvert \le 5$
15	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 10\\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$ $x_1(t_f) = 5, x_2(t_f) = -2$	$\lvert u\rvert \le 3$
16	$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 6\\ \dot{x}_2 = x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 10$ $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$	$\lvert u\rvert \le 2$
17	$\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2 + u\\ \dot{x}_2 = -2x_1 + u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 2$ $x_1(t_f) = 5, x_2(t_f) = -4$	$\lvert u\rvert \le 3{,}5$
18	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -3x_2 + u\\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2u\end{cases}$	$x_1(t_0) = -1, x_2(t_0) = 1$ $x_1(t_f) = 4, x_2(t_f) = -2$	$\lvert u\rvert \le 4{,}2$
19	$\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2 + 5u\\ \dot{x}_2 = -x_1 + 5u\end{cases}$	$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 5$ $x_1(t_f) = 7, x_2(t_f) = 0$	$\lvert u\rvert \le 1{,}8$
20	$\begin{cases}\dot{x}_1 = -3x_2 + u\\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 3u\end{cases}$	$x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 1$ $x_1(t_f) = 2, x_2(t_f) = 0$	$\lvert u\rvert \le 2{,}5$

Пример выполнения лабораторной работы № 5

Исходные данные:

1) Уравнения движения:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2;\\ \dot{x}_2 = u\end{cases} \quad (n = 2, r = 1).$$

2) Ограничение: $|u| \le 5$.

3) Граничные условия:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_f) = 4,\ x_2(t_f) = 0, \quad t_f = 10 \text{ с.}$$

4) Критерий оптимальности для задачи максимального быстродействия равен:

$$J = t_f \to min.$$

Решение:

1) Гамильтониан:

$$H = \sum_{j=0}^{n} \psi_j f_j = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 = \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

2) Уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1},\\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1 = 0,\\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1.\end{cases}$$

Решение данной системы уравнений с точностью до постоянных интегрирования: $\psi_1 = C_1$, $\psi_2 = -C_1 t + C_2$.

3) Условие принципа максимума:

$$\max_{|u|\le 5} H = \max_{|u|\le 5}(\psi_1 x_2 + \psi_2 u) = \psi_1 x_2 + \max_{|u|\le 5}(\psi_2 u).$$

Из условия принципа максимума следует, что $u = 5\mathrm{sign}(\psi_2)$, то есть принимает значение 5 или –5 в зависимости от знака функции $\psi_2 = -C_1 t + C_2$. Так как функция ψ_2 линейная, то она может изменить знак только один раз и может быть только одна точка переключения. Обозначим момент переключения t_1. Возможно два варианта:

$$u(t) = \begin{cases}5, \text{при } 0 \le t \le t_1,\\ -5, \text{при } t_1 < t \le t_f\end{cases} \text{ или } u(t) = \begin{cases}-5, \text{при } 0 \le t \le t_1,\\ 5, \text{при } t_1 < t \le t_f.\end{cases}$$

Далее необходимо полностью выполнить решение для обеих гипотез и выбрать ту из них, для которой ответ получится оптимальным.

Рассмотрим первую гипотезу:

$$u(t) = \begin{cases}5, \text{при } 0 \le t \le t_1,\\ -5, \text{при } t_1 < t \le t_f.\end{cases}$$

4) Найдем решение системы уравнений движения для двух участков.

а) Первый участок $0 \le t \le t_1$, $u = 5$.

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2;\\ \dot{x}_2 = 5.\end{cases}$$

С учетом граничных условий в начальный момент времени $x_1(0) = x_2(0) = 0$ решение данной системы дифференциальных уравнений будет следующим:

$$x_{11} = \frac{5}{2}t^2, \quad x_{21} = 5t.$$

б) Второй участок $t_1 < t \le t_f,\ u = -5$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -5. \end{cases}$$

Так как конечное время t_f неизвестно, использовать граничные условия на данном этапе невозможно и решение данной системы дифференциальных уравнений будет иметь две произвольные постоянные:

$$x_{12} = C_1 + t(\mathrm{C}_2 - 5t) + \frac{5}{2}t^2, \quad x_{22} = C_2 - 5t.$$

Для определения постоянных C_1, C_2, конечного времени t_f и времени переключения t_1 используем граничные условия и условия неразрывности:

$$\begin{cases} x_{12}(t_f) = 4, \\ x_{22}(t_f) = 0, \\ x_{11}(t_1) = x_{12}(t_1), \\ x_{21}(t_1) = x_{22}(t_1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + t_f(\mathrm{C}_2 - 5t_f) + \frac{5}{2}{t_f}^2 = 4, \\ C_2 - 5t_f = 0, \\ \frac{5}{2}{t_1}^2 = C_1 + t_1(\mathrm{C}_2 - 5t_1\ ) + \frac{5}{2}{t_1}^2, \\ 5t_1 = \mathrm{C}_2 - 5t_1. \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, получим $C_1 = -4,\ C_2 = 8{,}944$, $t_f = 1{,}789$ с, $t_1 = 0{,}8944$ с.

5) Таким образом, оптимальные управляющая переменная и переменные состояния будут равны:

$$u^*(t) = \begin{cases} 5, \text{при } 0 \le t \le 0{,}8944 \text{ с}, \\ -5, \text{при } 0{,}8944 < t \le 1{,}789 \text{ с}; \end{cases}$$

$${x_1}^*(t) = \begin{cases} 2{,}5\ t^2, \text{при } 0 \le t \le 0{,}8944 \text{ с}, \\ 2{,}5\ t^2 + t(8{,}944 - 5t) - 4, \text{при } 0{,}8944 < t \le 1{,}789 \text{ с}; \end{cases}$$

$${x_2}^*(t) = \begin{cases} 5t, \text{при } 0 \le t \le 0{,}8944 \text{ с}, \\ 8{,}944 - 5t, \text{при } 0{,}8944 < t \le 1{,}789 \text{ с}. \end{cases}$$

Графики функции управления $u^*(t)$ и переменных состояния $x_1^*(t), x_2^*(t)$ представлены на рис. 5.

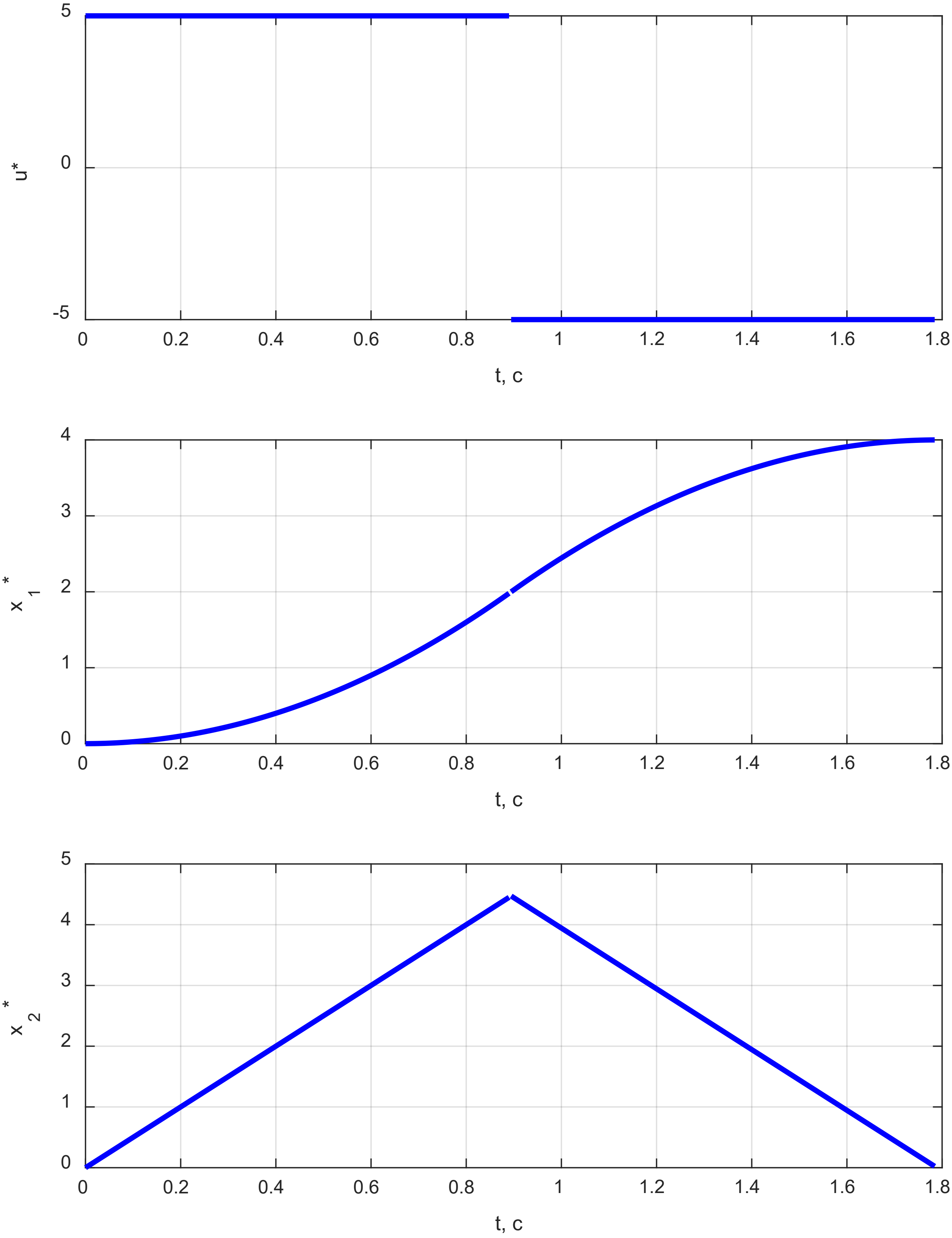

Рис. 5. Зависимости управления $u^*(t)$
и переменных состояния $x_1^*(t), x_2^*\ (t)$ от времени

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 5

1. В чем суть принципа максимума? Что общего и в чем отличие от метода множителей Лагранжа?

2. В каких случаях следует применять принцип максимума Понтрягина?

3. Классифицируйте задачу, решаемую в лабораторной работе.

4. Расскажите алгоритм решения задачи оптимального управления с помощью метода множителей Лагранжа.

5. Чему равен критерий оптимальности в задаче? Как записать критерий оптимальности исходя из условий задачи?

6. Как определяются постоянные интегрирования в задаче оптимального быстродействия?

7. Как составляется условие максимума? Для чего оно используется?

8. Как составляется условие неразрывности? Для чего оно используется?

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОБРАЗЕЦ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА ОТЧЕТА О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Омский государственный технический университет»

Кафедра «*Основы теории механики и автоматического управления*»

Лабораторная работа № __
Название лабораторной работы

Вариант № __

Выполнил: *студент гр. ПМ-151 Иванов И.И.*

____

Проверил: *доцент, к.т.н. Петров П.П.*

____

Омск, *2018*