Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждаю:
Проректор по НИД
________ В.Ф.Фефелов
«29» ___04________ 2020 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

по специальной дисциплине

на обучение по программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

Направление 01.06.01 Математика и механика

Направленность: «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Омск 2020 г.

Программа вступительных испытаний разработана в соответствии с требованиями ФГОС ВО (уровень специалиста, магистра)

Программу составил:

д.ф.-м.н., профессор ________ А.В. Зыкина

«30» ___08___ 2019 г.

Программа обсуждена и одобрена на заседании кафедры «Прикладная математика и фундаментальная информатика»

Протокол № _1_ от «05» ___09___ 2019 г.

Зав. кафедрой «Прикладная математика и фундаментальная информатика»,

д.ф.-м.н., профессор ________ А.В. Зыкина

«05» ___09___ 2019 г.

Согласовано:

Руководитель направления 01.06.01 «Математика и механика»,

д.т.н., профессор ________ Ю.А. Бурьян

«05» ___09___ 2019 г.

Руководитель направленности «Математическая логика, алгебра и теория чисел»,

д.ф.-м.н., профессор ________ А.В. Зыкина

«05» ___09___ 2019 г.

Раздел 1. Вещественный и комплексный анализ

1.1 Теория пределов. Теория рядов. Основные теоремы о непрерывных функциях.

1.2 Основные теоремы дифференциального исчисления (теорема о средних значениях, теорема о неявных функциях, формула Тейлора).

1.3 Основные теоремы интегрального исчисления (теоремы о замене переменных, теоремы о повторных интегралах, формулы Грина, Остроградского, Стокса).

1.4 Конечномерные вещественные пространства (характеризация открытых, замкнутых и компактных множеств).

1.5 Основные теоремы о сходимости последовательностей измеримых функций (теорема Егорова).

1.6 Определения и основные свойства интеграла Лебега. Теоремы Лебега, Леви, Фату о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема Фубини.

1.7 Функции ограниченной вариации и интеграл Стилтьеса.

1.8 Основные нормированные пространства. Полнота, сепарабельность, критерий компактности, сильная и слабая сходимости.

1.9 Гильбертовы пространства. Теоремы Рисса-Фишера. Ряды и интегралы Фурье.

1.10 Условия Коши-Римана. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Точки ветвления и римановы поверхности.

1.11 Комплексное интегрирование. Теорема Коши. Интеграл типа Коши. Теорема Морера.

1.12 Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции. Принцип модуля и аргумента для аналитической функции. Элементы теории вычетов.

1.13 Бесконечные произведения. Представление целой функции в виде бесконечного произведения.

Раздел 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения

2.1 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения и нормальной системы. Зависимости решения от начальных условий и от параметров.

2.2 Общая теория линейных систем.

2.3 Теория устойчивости.

Раздел 3. Алгебра

3.1 Основные понятия алгебры. Алгебраическая система. Изоморфизм. Группа. Кольцо. Поле. Поле комплексных чисел. Кольцо многочленов. Кольцо матриц. Группа подстановок.

3.2 Теория определителей.

3.3 Векторные пространства. База и ранг системы векторов. Изоморфизм любого пространства некоторому пространству строк. Преобразование координат вектора при смене базиса пространства. Фактор-пространство. Размерность суммы, пересечения, фактор-пространства.

3.4 Системы линейных уравнений. Теорема о ранге матриц. Теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных уравнений (определение и отношение). Однородные системы (пространство решений, фундаментальные системы решений).

3.5 Многочлены. Делимость многочленов (алгоритмы деления с остатком, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида). Разложение на неприводимые множители. Корни и значения (теорема Безу, формула Тейлора, интерполяционный многочлен). Основная теорема о комплексных числах.

3.6 Линейные преобразования векторных пространств. Изоморфизмы с алгеброй матриц. Образ, ядра, ранг и дефект линейного преобразования. Невырожденные преобразования. Инвариантность пространства.

3.7 Жорданова форма матрицы.

3.8 Евклидовы и унитарные пространства. Процесс ортогонализации, изоморфизм евклидовых (унитарных) пространств, ортогональные и симметрические преобразования.

3.9 Квадратичные формы. Поведение матриц квадратичной формы при линейной замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции действительной квадратичной формы. Положительно определенные формы.

Раздел 4. Геометрия

4.1 Аффинные и ортонормальные системы координат. Формулы замены координат. Вычисление скалярных произведений длин отрезков, углов.

4.2 Геометрические основы теории определений. Одинаково и противоположно ориентированные реперы, ориентация пространства. Вычисление объема параллелепипеда, построенного по реперу, через координаты составляющих вектора. Геометрический смысл детерминанта матрицы Грамма. Векторное и смешанное произведение в 3-х мерном ориентированном евклидовом пространстве.

4.3 Аффинные подпространства. Задание аффинного подпространства параметрическим уравнением и системой уравнений 1-й степени. Определение взаимного расположения, расстояний и углов по коэффициентам уравнений.

4.4 Аффинные и ортогональные отображения. Связь аффинных отображений с системами линейных уравнений. Существование и единственность аффинного отображения, имеющего заданные значения в заданных точках. Аффинные свойства фигур (прямолинейность, выпуклость, связность и т.п.). Инвариантные подпространства аффинных и ортогональных преобразований. Разложение аффинного отображения в произведение растяжения и ортогонального отображения.

4.5 Линии и поверхности 2-го порядка. Алгебраические поверхности. Пересечение алгебраической поверхности с прямой, условие касания. Линия второго порядка (фокусы, асимптоты, оптические свойства). Строение поверхностей 2-го порядка. Алгоритмы отыскания канонического уравнения и главных осей поверхности, заданной общим уравнением 2-й степени. Метод Лагранжа (метод выделения полных квадратов) для определения аффинного типа поверхности 2-го порядка.

4.6 Теория кривых. Кривизна кривой. Соприкасающаяся плоскость, главная нормаль и бинормаль. Кручение кривой. Теорема о задании кривой натуральными уравнениями.

4.7 Теория поверхности. Первая и вторая квадратичные формы. Универсальная связь между первой и второй квадратичными формами поверхности. Понятие о внутренней геометрии поверхностей и ее многомерном обобщении (римановой геометрии).

Раздел 5. Уравнения с частными производными

5.1 Введение. Характеристика уравнений в частных производных. Постановка задач для уравнений математической физики. Понятие о корректности постановок. Пример Адамара.

5.2 Гиперболические уравнения. Приведение к каноническому виду гиперболической системы 1-го порядка с двумя независимыми переменными. Задача Коши и смешанная задача в квадрате для этой системы. Теорема о существовании и единственности.

5.3 Одномерное волновое уравнение (Струна). Постановка задач и формулы Даламбера для их решения.

5.4 Параболические уравнения. Принцип максимума. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности Формула Пуассона решения уравнения теплопроводности по начальным значениям температуры (задача Коши).

5.5 Эллиптические уравнения. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Формула Грина.

5.6 Краевые задачи для уравнений Лапласа в шаре и в полупространстве. Функция Грина.

5.7 Метод Фурье. Преобразование Фурье. Формула Фурье. Простейшие оценки типа вложения. Решение с помощью преобразования Фурье задачи Коши для уравнения с постоянными коэффициентами. Гиперболичность как условие корректности задачи Коши.

5.8 Применение метода Фурье к решению первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

5.9 Задача о колебаниях в ограниченном объеме. Схема метода разделения переменных. Решение уравнения Лапласа в пространстве методом Фурье.

Раздел 6. Теория вероятностей

6.1 Пространство элементарных событий (ЭС). Построение вероятностей для дискретного пространства ЭС. Классическое определение вероятности.

6.2 Определение вероятности для произвольного пространства ЭС. Вероятностное пространство. Теорема о непрерывности вероятности. Геометрическая вероятность.

6.3 Определение случайной величины (СВ). Ступенчатые СВ. Сходимость по вероятности и почти наверное. Теорема о связи между функциональной зависимостью СВ и измеримостью относительно соответствующей алгебры.

6.4 Определение условной вероятности одного события относительно другого. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

6.5 Определение условной вероятности события относительно СВ.

6.6 Математическое ожидание (МО). Моменты. Условное МО одной СВ относительно другой.

6.7 Независимость СВ. МО произведения СВ.

6.8 Дисперсия и ее свойства. Ковариация. Неравенство Чебышева и его обобщения.

Раздел 7. Дискретная математика и математическая логика

7.1 Элементы теории множеств и теории моделей. Множества, операции над множествами, отображения и репредикаты. Аксиома выбора, лемма Цорна, теорема Цермело. Фильтры и ультрафильтры.

7.2 Язык узкого исчисления предикатов. Модели, истинность формул на модели. Прямое произведение моделей, фильтрованное произведение. Теорема Лося, локальная теорема Мальцева.

7.3 Узкое исчисление предикатов. Понятие исчисления, основные проблемы. Правила вывода, понятия доказательства. Эквивалентность формул, основные эквивалентности. Теорема о существовании модели для непротиворечивой формулы.

7.4 Теорема полноты Геделя, теорема Левенгейма-Сколема.

7.5 Графы. Паросочетания. Хроматическое число и хроматический индекс графа. Критерии планарности. Эйлеровы графы. Достаточные условия гамильтоновости графа.

7.6 Комбинаторные алгоритмы. Модели вычислений и сложность алгоритма. Алгоритмы сортировки. Поиск в графе. Кратчайшие пути. Минимальные остовные деревья. Наибольшие паросочетания. Алгоритм расстановки пометок для построения максимального потока.

7.7 Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Сильная NP-полнота.

Список литературы

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман, 2010. – 1 о=эл. опт. диск (DVD-ROM). – 479 с. (Гриф).
2. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов / В. И. Игошин. – 3-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2007. — 304 с.
3. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В. И. Игошин. – 2-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 448 с.
4. Лихтарников, Л.М. Математическая логика [Текст]: курс лекций : задачник-практикум и решения: учеб. пособие / Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. – СПб. : Лань, 2008. – 276 с.
5. Математическая логика и теория алгоритмов [Текст]: метод. указания к выполнению практ. работ / ОмГТУ; сост. Л.А. Денисова. - Омск: Изд-во ОмГТУ, 2009. - 38 с., 2009. - 38 с.
6. Руководство к решению задач по высшей математике: учеб. пособие для вузов/ В. И. Касьянов. -М.: Юрайт, 2011.-1 о=эл. опт. диск (CD-ROM). (гриф)ЭБС.
7. Сечкина, И. В. Математическая логика [Текст]: курс лекций по специальности 090104 / Составитель И. В. Сечкина, – Омск, Изд-во ОмГТУ, 2007. - 45 с.
8. Соболь, Б. В. Практикум по высшей математике [Текст] / Б. В. Соболь, Н. Т. Мишняков, В. М. Поркшеян. – Ростов -на-Дону: Феникс, 2008. - 630 с.